NACHRICHTEN

DER

ÖSTERREICHISCHEN
MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

BEILAGE ZU
„INTERNATIONALE MATHEMATISCHE NACHRICHTEN"

*

SONDERHEFT

BERICHT ÜBER DEN
VII. ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATIKERKONGRESS
LINZ, 16. — 20. IX. 1968

NR. 91 JÄNNER 1970

WIEN

INHALTSVERZEICHNIS

Ehrenschutz, Vortragssektionen 1
Kongreßprogramm, Eindrücke 2
Vortragsberichte
Sektion I: Algebra und Zahlentheorie 5
Sektion II: Analysis 28
Sektion III: Geometrie und Topologie 57
Sektion IV: Angewandte Mathematik 80
Sektion V: Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik 86
Sektion VI: Numerische Mathematik und Informationsverarbeitung 92
Sektion VII: Geschichte und Philosophie 99
Teilnehmerverzeichnis 103

NACHRICHTEN

DER

ÖSTERREICHISCHEN
MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

SEKRETARIAT: KARLSPLATZ 13 1040 WIEN (TECHNISCHE HOCHSCHULE)
TELEPHON 65 76 41 / POSTSPARKASSENKONTO 82395

23. Jahrgang | Jänner 1970 | Nr. 91

VII. ÖSTERREICHISCHER MATHEMATIKERKONGRESS

INTERNATIONALES MATHEMATIKERTREFFEN

Linz, 16. — 20. September 1968

EHRENSCHUTZ

Dr. Theodor Piffl-Perčević,
Bundesminister für Unterricht

Dr. Dr. h. c. Heinrich Gleißner,
Landeshauptmann von Oberösterreich

Theodor Grill,
Bürgermeister der Landeshauptstadt Linz

FÖRDERER UND SPENDER

Bundesministerium für Unterricht
Land Oberösterreich
Stadt Linz
Kammer der gewerblichen Wirtschaft für Oberösterreich
Industriellen-Vereinigung für Oberösterreich
Kuratorium zur Förderung der Wissenschaft nationalökonomischer und naturwissenschaftlicher Richtung
IBM-Österreich

VORTRAGSSEKTIONEN

1. Algebra und Zahlentheorie
2. Analysis
3. Geometrie und Topologie
4. Angewandte Mathematik
5. Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
6. Numerische Mathematik und Informationsverarbeitung
7. Geschichte und Philosophie

KONGRESSPROGRAMM

Sonntag, 15. September 1968: Anreisetag
Zwangloses Treffen im Casino-Restaurant.

Montag, 16. September 1968: Eröffnung und 1. Arbeitstag
10.30 Uhr: Feierliche Kongreßeröffnung im Hörsaal 1 der Hochschule für Sozial- und Wirtschaftswissenschaften mit anschließendem Buffet.
14—17 Uhr: Vorträge in den Sektionen.

Dienstag, 17. September 1968. 2. Arbeitstag und Kepler-Feier
9—12 Uhr: Vorträge in den Sektionen.
14—16 Uhr: Vorträge in den Sektionen.
17 Uhr: Kepler-Feier der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft im Steinernen Saal des Linzer Landhauses mit anschließendem Empfang durch Stadt und Land.

Mittwoch, 18. September 1968: Ausflugstag
8.30—19.30 Uhr: Ganztägiger Schiffsausflug an Bord der „Johann Strauß" nach Engelhartszell mit Besichtigung des dortigen Trappistenklosters.

Donnerstag, 19. September 1968: 3. Arbeitstag
9—12 Uhr: Vorträge in den Sektionen.
14—16.30 Uhr: Vorträge in den Sektionen.
16.30 Uhr: Mitgliederversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Freitag, 20. September 1968: 4. Arbeitstag und Abschluß
9—12 Uhr: Vorträge in den Sektionen.
14—17 Uhr: Vorträge in den Sektionen.
19 Uhr: Abschlußabend im Kaufmännischen Vereinshaus in Linz mit gemeinsamem Abendessen und Tanz.

EINDRÜCKE VOM LINZER KONGRESS

Nach dem letzten Österreichischen Mathematikerkongreß, der 1964 in Graz stattfand, und der — nach hervorragender Vorbereitung durch die Professoren F. Hohenberg (Graz) und E. Kreyszig (damals Graz, jetzt Düsseldorf) — einen in jeder Hinsicht glanzvollen Verlauf nahm, war es gewiß nicht leicht, den 1968 folgenden Kongreß auszurichten. Die neue Linzer „Hochschule für Sozial- und Wirtschaftswissenschaften", im Vorort Dornach bei Linz jenseits der Donau gelegen, war mit ihren schön, zweckmäßig und modern eingerichteten Hörsälen, der Mensa Academica und der Cafeteria den über 400 Mathematikern, die, zum Großteil in Begleitung, von weit und breit herbeigeströmt waren, eine sehr geräumige Kongreßherberge. Bei dem im wesentlichen schönen Wetter, das die Kongreßtage begünstigte, kam die architektonisch hervorragend gestaltete Anlage der neuen Hochschule bestens zur Geltung. Die Bauten sind großzügig entworfen und in die herrliche Parklandschaft eines ehemaligen Schlosses gestellt, deren Mittelpunkt eine ausgedehnte Teichanlage ist, an deren Rand ein ebensogroßer Autoparkplatz liegt. Nicht weit von der Hochschule entfernt steht ein modernes achtstöckiges Studentenwohnheim, in dem viele Kongreßgäste

eine sehr angenehme und komfortable Unterkunft fanden, deren Ruhe sehr wohltuend von dem Lärm der geschäftigen Großstadt Linz abstach, deren Hotels, Gaststätten und geschätzte Weinkeller des Abends von den Mathematikern und ihren Angehörigen viel besucht wurden und Möglichkeiten zu vielen Gesprächen und Diskussionen gaben.

Die Teilnehmer des Kongresses stammten aus zwei Dutzend Ländern des Kontinents und aus Übersee. Erfreulicherweise konnten trotz der militärischen Maßnahmen gegen die Tschechoslowakei auch verschiedene Teilnehmer aus den daran beteiligten Oststaaten erscheinen. Etwa die Hälfte der Kongreßteilnehmer kam aus Deutschland, ein Viertel aus Österreich, und das letzte Viertel wurde von den vielen übrigen Nationen gestellt, wobei die Vereinigten Staaten, Holland und Jugoslawien am stärksten vertreten waren.

Die 220 wissenschaftlichen Kongreßvorträge hatten in sieben Sektionen jeweils 20 Minuten Redezeit zur Verfügung.

Leider waren keine ausgedehnteren Übersichtsvorträge in das Programm eingeplant. Einige der Vorträge bemühten sich aber mit Erfolg in dieser Richtung. Vor allem bot auch der Senior der österreichischen Mathematiker, Paul Funk, einen solchen Übersichtsvortrag, in dem er von seinen schönen Untersuchungen über zweidimensionale Geometrien mit geradlinigen Extremalen und konstantem Krümmungsmaß berichtete. So war der wissenschaftliche Erfolg des Kongresses insgesamt der traditionell erfreuliche. Einen besonderen Beitrag hierzu leisteten die österreichischen Mathematiker, die zahlreiche interessante und wohlgelungene Vorträge über die Ergebnisse ihrer Forschungen hielten.

Die feierliche Eröffnung des Kongresses geschah durch den österreichischen Bundesminister für Unterricht Dr. Theodor Piffl-Perčević. Ihr war die Ansprache des Rektors der Linzer Hochschule Prof. Ing. Dr. Adolf Adam, eines Statistikers, der zu den Behörden gewandt ausführlich die Aufbau- und Ausbauwünsche seiner Hochschule darlegte und den Kongreß in seinen Räumen willkommen hieß, sowie eine sehr gehaltvolle Ansprache des aus Linz gebürtigen Vorsitzenden der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Prof. Dr. Wilfried Nöbauer, der den Stand der heutigen Schulmathematik mit dem der Wissenschaft des Jahres 1700 verglich und einige wesentliche Gründe für den gegenwärtigen Umbruch der Schulmathematik aufzeigte, vorangegangen, auf die der Minister in fundierter Rede ausführlich und schlagfertig einging und zugleich die Hilfe des Kongresses bei den neuen pädagogischen Wandlungen des mathematischen Gymnasialunterrichts erbat. Nach der Ansprache des Linzer Bürgermeisters Theodor Grill behielt der Landeshauptmann von Oberösterreich Dr. Heinrich Gleißner sein „intelligentes Manuskript" in der Tasche und sprach frei, sympathisch, gewandt und gehaltvoll über die Bedeutung akademischer, insbesondere mathematischer Bildung für sein Land und dessen zukünftige Existenz.

Der in allen diesen Ansprachen am häufigsten zitierte Mathematiker war Johannes Kepler, der in Linz den Schlußstein zu seinen Planetengesetzen legte und auch als „Prärektor" in die neue Hochschule reintegriert wurde, angeblich auch das moderne Computerwesen ideell bevorschußt hat. (Ein mittlerer Computer wurde gleichzeitig durch den Minister eingeweiht). Dem Genius Kepler (1570—1631) huldigte — kurz vor seinem 400. Geburtstag — eine eigene Feier der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft im „Steinernen Saal" des Linzer Landhauses mit Ansprachen des Rektors Prof. Dr. A. Adam (Linz) und des Mathematik-Historikers Prof. Dr. J.

Fleckenstein (München), dessen ausgezeichnet formulierte und sachkundige Darlegungen viel Beifall fanden. Leider erwies sich der schöne Saal als wenig akustisch, und nur für gut artikulierende Redner geeignet. Sicher war das gleichzeitig anberaumte Orgelkonzert an der Bruckner-Orgel in St. Florian ein akustisch viel erfreulicherer Genuß.

Der Mittwoch war bei bedecktem Himmel einer romantischen Fahrt auf der Donau stromaufwärts nach Engelhartszell vorbehalten, dessen Trappistenkloster (berühmte Likörerzeugung!) besucht wurde. Der alte Raddampfer „Johann Strauß" fuhr durch die einsame, eng von grünen Bergen gesäumte Strecke in eine Art friedliche, der Welt entrückte Märchenlandschaft. Auf dieser schönen Fahrt gab es wohl die besten Gelegenheiten der Aussprache und des näheren Kennenlernens, bis der Platzregen in Linz alles trennte.

Gewisse Pannen (Buffet bei der Eröffnung, Mittagessen auf dem Schiff) vergißt der vorzüglich auf das Wesentliche gerichtete Mathematiker schnell. Beim Schlußabend sprach nur noch der Kongreß-Vorsitzende Prof. Dr. W. Nöbauer davon. Seinen Dankesworten schloß sich für die auswärtigen Kongreßteilnehmer, besonders auch für die Deutsche Mathematiker Vereinigung, die ihre Jahrestagung 1968 mit dem Kongreß vereinigt hatte, in launiger Weise Prof. Dr. Horst Schubert (Kiel) als Vorstandsmitglied der DMV an. Danach wurde noch fleißig getanzt.

Übrigens wurde auch für die Damen ein abwechslungsreiches Programm geboten. Die Stadtrundfahrt in Linz, die Besichtigung des Eisen- und Stahlwerkes der VOEST, des Heimatmuseums Linz, des Klosters Wilhering und die große Autobusfahrt in das landschaftlich und kulturell berühmte Mühlviertel (mit dem wunderbaren gotischen Kefermarkter Altar) fanden allseits größten Beifall.

So bleibt zum Schluß noch ein Wort des Dankes für alles Gebotene und der Wunsch an die Österreichische Mathematische Gesellschaft, in vier Jahren wieder einen schönen und erlebnisreichen Kongreß zu veranstalten. Sicher wird er wieder von vielen alten und neuen Freunden Österreichs sehr gerne besucht werden. *K. Strubecker (Karlsruhe).*

VORTRAGSBERICHTE

Im Verlauf des VII. Österreichischen Mathematikerkongresses wurden im Rahmen der sieben vorgesehenen Sektionen insgesamt 220 Vorträge von je 20 Minuten Normaldauer gehalten.

Die der Kongreßleitung zur Verfügung gestellten Vortragsauszüge werden sektionsweise wiedergegeben. Innerhalb der Sektionen wurde hier die alphabetische Reihenfolge der Vortragenden eingehalten.

Die Vorträge verteilen sich auf die einzelnen Sektionen wie folgt:

I. Algebra und Zahlentheorie	52	(S. 5)
II. Analysis	67	(S. 28)
III. Geometrie und Topologie	55	(S. 57)
IV. Angewandte Mathematik	10	(S. 80)
V. Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik	14	(S. 86)
VI. Numerische Mathematik und Informationsverarbeitung	15	(S. 92)
VII. Geschichte und Philosophie	7	(S. 99)

SEKTION I:

Algebra und Zahlentheorie

E. Altmann (Bonn): *Über maximale Untergruppen von Gruppen mit Hallschen Normalteilerketten.*

Für endliche Gruppen mit Hallschen Normalteilerketten gelten ähnliche Sätze wie für endlich auflösbare Gruppen: Ist $G = G_n \supset \ldots \supset G_1 \supset \{e\}$ eine Hallsche Normalteilerkette der nichtauflösbaren Gruppe G und G_k/G_{k-1} der einzige Faktor von gerader Ordnung, dann gibt es nach *Wielandt* ein System $P_1, \ldots, P_r, H$ paarweise vertauschbarer Gruppen teilerfremder Ordnung („vollständiges Hallsystem") mit:

a) Die Gruppen P_i sind Sylowgruppen von G.

b) Für jedes $i \neq k$ gibt es ein Tupel $(i_1, \ldots, i_{r(i)})$ mit
$$G_i/G_{i-1} \cong P_{i_1} \cdot \ldots \cdot P_{i_{r(i)}}$$

c) Es ist $G_k/G_{k-1} \cong H$.

Je zwei solche Systeme sind konjugiert.

Sei nun M eine maximale Untergruppe von G. Es gibt dann eine zu M konjugierte Untergruppe M^*, so daß
$$M^* \cap P_1, \ldots, M^* \cap P_r, M^* \cap H$$
vollständiges Hallsystem von M^* ist. $[G:M]$ teilt stets ein $|P_i|$ oder $|H|$, so daß
$$M^* = P_1 \cdot \ldots \cdot P_{i-1} \cdot (M^* \cap P_i) \cdot P_{i+1} \cdot \ldots \cdot P_r \cdot H \qquad \text{oder}$$
$$M^* = P_1 \cdot \ldots \cdot P_r \cdot (M^* \cap H).$$

Für den ersten Fall kommt man zur weiteren Aussage:

a) Ist $M \lhd G$, dann ist $[P_i : M^* \cap P_i] = p_i$ (Primzahl).

b) Ist $M \ntriangleleft G$, dann gilt
$$M^* \cap P_i \supseteq N_G(P_1 \cdot \ldots \cdot P_{i-1} \cdot P_{i+1} \cdot \ldots \cdot P_r \cdot H) \cap P_i .$$

Hierbei verstehen wir unter $N_G(U)$ den Normalisator einer Untergruppe U in G.

P. C. Baayen (Amsterdam): *A combinatorial problem in finite abelian groups.*

For a finite (additive) abelian group G let $\lambda(G)$ be the maximal natural number n such that G contains $g_1, g_2, \ldots, g_n$ with the following property:
$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g_i = 0 \text{ with } \varepsilon_i \in \{0,1\} \text{ for all } i \text{ implies } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 0 .$$

We conjecture that if $G \cong C_{n_1} \times C_{n_2} \times \ldots \times C_{n_k}$ with $n_i | n_{i+1}$ for $1 \leqslant i \leqslant k-1$ (where C_n denotes a cyclic group of order n), then $\lambda(G) = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)$. For the special case $G = C_p \times C_p$ (p prime) this was conjectured by *R. Erdös.*

The conjecture was proved recently for all p-groups, independently by *D. Kruiswijk* and by *J. E. Olson.* It has also been verified for all $C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_k}$ with $k \leqslant 2$, for all $C_{p^{m_1}} \times C_{p^{m_2}} \times \ldots \times C_{p^{m_k}} \cdot n$ with p prime and $p^{m_k} \geqslant p^{m_1} + \ldots + p^{m_{k-1}}$, and for certain groups of the form $C_{2n_1} \times C_{2n_2} \times C_{2n_3}$. Some related results have been obtained. For p-groups in particular more detailed information is available.

S. Beer (Wien): *Zur Theorie der Gleichverteilung im p-adischen.*

Es wird die Theorie der Gleichverteilung in der Gruppe der ganzen p-adischen Zahlen hauptsächlich quantitativ verfolgt, indem der Begriff der Diskrepanz D_N eingeführt und untersucht wird. Dabei werden sowohl aus dem Reellen bekannte Sätze hergeleitet, aber auch die Unterschiede, vor allem in Bezug auf die Größenordnung der Diskrepanz aufgezeigt. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß ND_N beschränkt ist. Als Folgerung aus dieser Bedingung erhält man: ist ND_N beschränkt, so ist die Folge gleichmäßig gleichverteilt. An einem Beispiel wird gezeigt, daß die Umkehrung nicht gilt. Die Aussagen über die Umordnung von Folgen, die *Hlawka* für Folgen reeller Zahlen gemacht hat, werden ins p-adische übertragen. Auf Verallgemeinerungen wird eingegangen.

A. H. Boers (Rijswijk): *N-prod-assoziative und -alternative Ringe.*

Neben den schon früher eingeführten n-assoziativen Ringen — alle n-Assoziatoren $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, rekursiv definiert durch

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-1} \{a_1, \ldots, a_k a_{k+1}, \ldots, a_n\},$$

verschwinden —, betrachten wir die n-prod-assoziativen und n-prod-alternativen Ringe. Ein nicht notwendig assoziativer Ring wird n-prod-assoziativ bzw. n-prod-alternativ genannt, wenn jedes Produkt von n Faktoren, bzw. jedes Produkt von n Faktoren, worin mindestens zwei gleiche vorkommen, klammerlos geschrieben werden kann. — Man kann beweisen, daß ein n-prod-assoziativer Ring auch n-assoziativ ist. Etwas ähnliches gilt für n-prod-alternative Ringe.

S. Böge (Heidelberg): *Klassenzahlen indefiniter schiefhermitescher Formen.*

k sei ein algebraischer Zahlkörper, D ein Quaternionenschiefkörper mit Zentrum k und Standardinvolution $\bar{\ }$, V ein n-dimensionaler D-Linksvektorraum mit bezüglich $\bar{\ }$ schiefhermiteschem, nicht ausgeartetem Skalarprodukt. U sei die unitäre Gruppe von V. U wird von Abbildungen S der Gestalt $Sx = x - (x,s)\,\sigma^{-1} s$ mit $0 \neq \sigma \in D$ und $s \in V$ erzeugt, und durch $\psi(S) = \sigma\bar{\sigma}k^{*2}$ wird die Spinornorm von U nach k^*/k^{*2} definiert. Diese Definition stimmt mit der kohomologischen überein. $\mathfrak{O}$ sei eine Maximalordnung von D und M ein $\mathfrak{O}$-Gitter in V. Für $\mathfrak{p} \nmid 2$ besitzt $M_\mathfrak{p}$ eine Orthogonalbasis über $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$, und es werden Erzeugendensysteme der unitären Gruppe von $M_\mathfrak{p}$ angegeben. Damit läßt sich der Wertevorrat der Spinornorm auf $M_\mathfrak{p}$ bestimmen und hieraus die Anzahl der Spinorgeschlechter, welche im indefiniten Falle nach dem starken Approximationssatz von *M. Kneser* bekanntlich gleich der Klassenzahl ist. Es wird $\dim_D V \geqslant 4$ vorausgesetzt, u. a. weil das Hasse-Prinzip (*Weil*, Acta Math. 114) benutzt wird.

V. Bohun-Chudyniv (Baltimore): *On generalized triple-systems of even orders.*

The author of this paper has constructed:

I. (a) Generalized double triple-systems, and (b) Generalized non-double triple-systems of odd orders where $n = 3^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ (*A*) in which $p_i = \overline{1,k}$ is a prime number satisfying the relations $p_i = 6q+1$, and $q \geqslant 1$. In (*A*) $\alpha_0 = 0$ for the generalized double triple-systems and $\alpha_0 > 0$ for the generalized non-double triple systems (AMS Notices, abs 832—39, April 1961).

II. Generalized n-tuple systems (GNTS) of odd order where $n = p_1 p_2 \ldots p_k$, in which p_i is a prime order for which generalized triple-systems exist (AMS Notices, abs 636—35, August 1966).

III. Direct product n-tuple systems of odd order constructed by direct product of any Kirkman triple-systems of by any two of the author's systems given in I and II, or by combinations of types.

IV. Direct product of n-tuple systems of even order, including Heffter's triple-system of 4th order (Math. Ann. v. 38, 1891, p. 490). The general expression for direct-product of n-tuple systems, including the even orders, is represented by the expression $3^{\alpha_0} 4^{\beta} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, where $\alpha, \beta, \gamma_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,k}$, and p_i are prime numbers for which systems of type I, II, and III above exist (AMS Notices, abs 644—73, April 1967).

In the present paper the author establishes the following: 1) The existence of generalized triple-systems of even order which are not direct-product triple systems ($n \geqslant 4$); 2) The first example of a generalized triple system of even order, constructed by the author, of order 10; 3) Complete classification of generalized triple-systems of order 10; 4) Proof that the orders of even-order generalized triple-systems are defined by the expression $n = 2[3(2^k - 1) + 2]$, $k \geqslant 0$; 5) Each generalized triple-system of even order with some additional relations represents binary combination of loops and idemponted quasi-loop of the same order.

V. Bohun-Chudyniv (Baltimore) and B. Bohun-Chudyniv (Washington): *On idemponted quasi-loops of every order $n \geqslant 5$, and idemponted quasi-groups of even order $2m \geqslant 4$.*

In mathematical literature the term quasi-group is used for both quasi-systems (quasi-groups and quasi-loops). The first author has found a set of fundamental differences between quasi-groups and quasi-loops, and therefore uses two terms instead of one (*V. Bohun-Chudyniv*, ICM, Moscow, 1966, et al.). In this paper the following is established:

I. The algorithms for constructing idemponted quasi-groups and groups of every odd order $2m+1 \geqslant 3$,

II. The algorithms for constructing idemponted quasi-loops and loops for every order $n \geqslant 5$,

III. Methods of complete enumeration of idemponted quasi-groups isotopic to cyclic groups of order $2n+1 \geqslant 3$,

IV. Methods of determining orders of the even-ordered groups which are isotopic to idemponted quasi-groups, and the algorithms for constructing them,

V. Proof of the theorem that the set of isotope operators for constructing all idemponted quasi-groups of $2n+1$ order isotopic to a cyclic group is a group of $n - \varphi(n)$ order, where $\varphi(n)$ is the Euler function.

VI. Propositions that not each loop of a given order for any $n \geqslant 5$ is isotopic to an idemponted quasi-loop, and not every group of even order $n \geqslant 4$ is isotopic to a quasi-group,

VII. The necessary and sufficient conditions for a loop of order n to be isotopic to an idemponted quasi-loop, and for a group of even order to be isotopic to an idemponted quasi-group.

It was proved (*V. Bohun-Chudyniv,* DMV, Freiburg, 1965) that each Kirkman triple system with some additional relations represents binary composition of a loop of the same order, and (Author, 1954, 58, 60, 62) that the same triple system with relation $\alpha = \alpha^2$ represents an idemponted quasi-group or an idemponted quasi-loop. The present paper shows the necessary and sufficient conditions for partitioning Kirkman triple systems into those which represent idemponted quasi-groups, and those representing idemponted quasi-loops. Many illustrative examples are given.

W. Brauer (Bonn): *Zu den Sylowsätzen von Hall und Čunichin.*

Es wird ein elementarer und kurzer Beweis des Sylowsatzes von *P. Hall* für auflösbare endliche Gruppen angegeben, aus dem man durch leichte Abänderungen auch noch für eine Reihe von Verallgemeinerungen dieses Satzes einfache Beweise erhält, so daß mehrere Sylowsätze nach einer einheitlichen Methode bewiesen werden können; dabei ergeben sich auch einige anscheinend nicht bekannte Aussagen. Wir gewinnen den Satz von *Hall* gleich aus einer Verschärfung des Sylowsatzes von *Čunichin* für π - auflösbare Gruppen, die wir ohne Benutzung des Satzes von *Schur* und *Zassenhaus* über zerfallende Erweiterungen beweisen, und erhalten gleichzeitig noch eine Verschärfung des Sylowsatzes von *Čunichin* und *Hall* für π - separable Gruppen. Die Verschärfungen beruhen darin, daß Anzahlaussagen gemacht werden, die denen im Hallschen Sylowsatz für auflösbare Gruppen entsprechen.

Schließlich können mit der gleichen Beweismethode mehrere von *Hall* und *Čunichin* stammende, die oben erwähnten Sylowsätze verallgemeinernde Folgerungen aus dem Satz von *Schur* und *Zassenhaus* hergeleitet und einige damit zusammenhängende neue Resultate gewonnen werden. Aus den Beweisen läßt sich sofort erkennen, was ohne Benutzung des sehr tiefliegenden Satzes von *Feit* und *Thompson* über die Auflösbarkeit der Gruppen ungerader Ordnung bewiesen werden kann — das könnte für lehrbuchmäßige Darstellungen von Interesse sein. — Man vergleiche hierzu das „Lehrbuch der Gruppentheorie" von *R. Kochendörffer,* Leipzig 1966, und die Arbeit „Theorems like Sylow's" von *P. Hall,* Proc. London Math. Soc. (3) *6,* 286—304 (1956).

P. Bundschuh (Freiburg i. Br.): *Einige Ergebnisse aus der Theorie der transzendenten Zahlen.*

(1) Approximation transzendenter Zahlen durch algebraische:

Die ganze Funktion $f(z)$ endlicher Wachstumsordnung $\mu > 0$ genüge einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung und besitze ein algebraisches Multiplikationstheorem, jeweils mit konstanten algebraischen Koeffizienten. Die komplexe Zahl α sei $\neq 0$ und so, daß $f(\alpha)$ algebraisch ist und $f'(\alpha) \neq 0$ (zwei weitere Bedingungen an α sind nötig); die $f(p\alpha)$, $f'(p\alpha)$ $(p=1,2,\ldots)$ mögen alle in einem algebraischen Zahlkörper endlichen Grades gelegen sein; weiter seien geeignete obere Abschätzungen für Nenner

und Maximum der Konjugierten der algebraischen Größen

$$(d/dz)^t f^s(z+\alpha)/_{z=\alpha x}; (t,s,x=0,1,\ldots)$$

bekannt. Dann ist nach einem Satz von *Th. Schneider* α transzendent. Sei n eine natürliche Zahl und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben; dann gibt es eine natürliche Zahl $H_0(f,\alpha,\varepsilon,n)$ derart, daß für alle algebraischen Zahlen ξ eines Grades $\leqslant n$ und einer Höhe $H > H_0(f,\alpha,\varepsilon,n)$ gilt:

$$|\alpha - \xi| > \begin{cases} \exp(-\log H\,(\log\log H)^{3/\mu+\varepsilon}), & \text{wenn } 0<\mu<1; \\ \exp(-(\log H)^{1+2\varepsilon}), & \text{wenn } 1 \leqslant \mu < \infty. \end{cases}$$

Mit geringen Änderungen ergibt sich für meromorphes $f(z)$ dasselbe Resultat.

(2) Ein Irrationalitätsbeweis und ein Maß für die Irrationalität:

Gegeben ein imaginär-quadratischer Zahlkörper K; q sei eine feste ganze Zahl aus K mit $\mathrm{Norm}(q) > 1$. Die ganze Funktion $f(z)$ genüge der Funktionalgleichung $f(z) = (1-z/q)f(z/q)$ mit $f(0)=1$. Die komplexe Zahl a sei $\neq 0$ und $\neq q^n$ $(n=1,2,\ldots)$. Dann kann nicht $a \in K$ *und* $f(a) \in K$ sein. — Ferner wird qualitativ gezeigt, daß sich $f(a)$ $(a \in K)$ nicht „zu gut" durch Zahlen aus K approximieren läßt.

(3) Über imaginär-quadratische Zahlkörper der Klassenzahl 1;

A. Baker hat in einer Arbeit in Mathematika 13 (1966), 204—216, Linearformen in Logarithmen algebraischer Zahlen nach unten abgeschätzt und dort behauptet, sein Satz reiche „at least in principle" hin, die berühmte Gaußsche Vermutung zu beweisen, daß es nur neun imaginär-quadratische Zahlkörper der Klassenzahl 1 gäbe. *A. Hock* (Freiburg i. Br.) und der Vortragende haben gezeigt, daß das „at least in principle" tatsächlich gestrichen werden kann.

K. Burde (Braunschweig): *Verteilungseigenschaften von Potenzresten.*

Ist p eine ungerade rationale Primzahl, so ordnen wir jedem vom Hauptcharakter ε verschiedenen Restklassencharakter χ modulo p die p-reihige quadratische Matrix

$$A(\chi) = \left(a_{ik} = \chi(k-i)/\gamma(\chi) + 1/p\right)_{i,k=0,1,\ldots,p-1}, \quad \gamma(\chi) = \sum_{\nu \bmod p} \chi(\nu) e^{2\pi i \nu/p}; \quad \chi \neq \varepsilon$$

und dem Hauptcharakter ε die p-reihige Einheitsmatrix $A(\varepsilon) = E$ zu.
Dann ist durch $\chi \to A(\chi)$ eine p-dimensionale unitäre Darstellung der Charaktergruppe modulo p, also auch der primen Restklassengruppe modulo p gegeben.

Für den einfachsten Fall des quadratischen Charakters $\chi(\nu) = (\nu/p)$ ist diese allgemeine „Verteilungseigenschaft von Potenzresten" äquivalent mit den *Perron*schen Sätzen über die Verteilung der Legendresymbole (Math.Z. *56*/1952, 122—130).

Die Betrachtung der Komponentenzerlegung gewisser Vektoren bezüglich der durch $A(\chi)$ gegebenen unitären Basis liefert weitere Aussagen über die Verteilung der Charakterwerte $\chi(\nu); \nu=1,2\ldots,p-1$. — Im Fall des quadratischen Charakters ergeben sich eine ganze Reihe — teils bekannter, teils unbekannter — Verteilungseigenschaften der Legendresymbole. Die Methode liefert aber auch für Charaktere höherer Ordnung Ergebnisse, z. B. im Fall $p = 1 \bmod 4$ die bisher wohl nicht bekannten Sequenzanzahlen für die Sequenzen der Länge 2 der biquadratischen Reste.

R. Burkard (Graz): *Zur gleichmäßigen Gleichverteilung modulo* Δ

Es sei Δ eine beliebige Unterteilung der reellen Zahlengerade. Eine Familie von Folgen nennen wir gleichmäßig gleichverteilt modulo Δ (= glm. glv. mod Δ), wenn die mod Δ reduzierten Folgen glm. glv. im Einheitsintervall sind.

Wie schon einfache Beispiele zeigen, gilt für die Gleichverteilung mod Δ nicht mehr der Satz, daß mit der mod Δ glv. Folge $\omega = (x_n)$ auch die Familie von Folgen $\omega_\sigma = (x_n+\sigma)$, $\sigma \in R$ glm. glv. mod. Δ sind. Dieser Satz bleibt richtig für äquivalente Unterteilungen sowie für äquidistante Folgen und periodische Unterteilungen. Man kann nun zeigen, daß zwar jede äquidistante Folge $(n\xi)$ glv. ist modulo einer Unterteilung, die durch ein Polynom erzeugt wird, aber für kein ξ die Familie von Folgen $\omega_\sigma = (x_n+\sigma)$, $\sigma \in R$ glm. glv. ist. Durchläuft jedoch σ eine beschränkte Teilmenge S von reellen Zahlen, ist weiters Δ eine Unterteilung mit monoton wachsenden Intervallängen und ω eine monotone Folge die mod Δ glv. ist, dann ist die Familie von Folgen $(\omega_\sigma)_{\sigma \in S}$ mit $\omega_\sigma = (x_n+\sigma), n=1,2\ldots$ glm. glv. mod Δ.

R. Dačić (Beograd): *Selections in hypergroups.*

Vortragsauszug nicht eingelangt.

R. Z. Domiaty (Graz): *Spezielle Matrizen.*

Mit M_n wollen wir den Ring der komplexen quadratischen Matrizen der Ordnung n und mit E_n bzw. mit U_n die Klasse aller Matrizen aus M_n bezeichnen, deren sämtliche Eigenwerte dem Betrage nach kleiner eins bzw. gleich eins sind. Nach Aufstellung verschiedener bekannter Sätze, die die Matrizen aus E_n charakterisieren, zeigen wir:

Hilfssatz 1. Ist N eine multiplikative Norm in M_n und $A \in M_n$, so gilt: Genau dann ist $A \in E_n$, wenn es eine natürliche Zahl s gibt, so daß $N(A^s) < 1$ ist.

Satz 1. Es sei $A \in M_n$. A gehört dann nur der Klasse E_n an, wenn für eine reelle Zahl $\alpha \in [0,1)$ die Ungleichungen

$$|\mathrm{Sp}\, A^m| \leqslant n\alpha^m \qquad (m = 1,2,\ldots)$$

erfüllt sind.

Satz 2. Es sei $A \in M_n$. Notwendig und hinreichend dafür, daß $A \in U_n$ ist, ist das Bestehen der Ungleichungen

$$|\mathrm{Sp}\, A^m| \leqslant n$$

für sämtliche ganze Zahlen m.

E. Ellers (Fredericton): *Die Existenz von Koprodukten in der Kategorie der Bewegungsgruppen.*

Die Beobachtung, daß die Bewegungsgruppen der ebenen absoluten Geometrien von den Geradenspiegelungen erzeugt werden und daß das Produkt dreier Geradenspiegelungen wieder eine Geradenspiegelung ist, hat mehrfach Veranlassung dazu gegeben, bei der Begründung der absoluten Geometrie eine abstrakte Gruppe zugrundezulegen, die aus involutorischen Elementen erzeugt wird und für die der Dreispiegelungssatz gilt (z. B. *F. Bachmann, H. Karzel, R. Lingenberg, A. Schmidt, E. Sperner).*

Dementsprechend verstehen wir hier unter einer Bewegungsgruppe ein Paar (G,D), wobei G eine Gruppe und D eine invariante Teilmenge von G ist, die aus involutorischen Elementen besteht und für die der Dreispiegelungssatz gilt. Auf Grund der Gültigkeit des Dreispiegelungssatzes kann man (G,D) eine reguläre Inzidenzstruktur zuordnen, in der die Elemente von D die Geraden sind.

Sind (G,D) *und* (G',D') zwei Bewegungsgruppen, so verstehen wir unter einem Bewegungsmorphismus von (G,D) in (G',D') einen Homomorphismus h der Gruppe G in die Gruppe G', für den ferner $h(D) \subset D'$ gilt. Dann bilden die Bewegungsgruppen zusammen mit den Bewegungsmorphismen eine Kategorie, die Kategorie der Bewegungsgruppen. Ferner gilt, daß jeder Bewegungsmorphismus ein Homomorphismus der zugehörigen Inzidenzstrukturen ist.

Wir zeigen, daß in dieser Kategorie Koprodukte existieren und daß es zu jeder Menge M eine universelle Bewegungsgruppe M gibt. Dabei benutzen wir, daß es in der Kategorie der Gruppen Koprodukte (freie Produkte) gibt, und unsere Aufgabe besteht nun darin, in diesem Koprodukt eine geeignete Geradenmenge zu finden und nachzuweisen, daß für sie der Dreispiegelungssatz gilt.

P. Flor (Wien): *Gruppen nichtnegativer Matrizen.*

Ausgangspunkt dieser Untersuchung ist der Satz von *D. R. Brown* (1964): Jede kompakte Gruppe nichtnegativer Matrizen ist endlich. Elementare Eigenschaften konvexer Pyramiden führen zu einer Beschreibung aller Gruppen nichtnegativer Matrizen. Ist k der gemeinsame Rang aller Matrizen der Gruppe, so ist die Gruppe isomorph zu einer Untergruppe der vollen monomialen Gruppe k-ten Grades (*O. Ore,* Transactions AMS *51,* 15—64) über der multiplikativen Gruppe der positiven Zahlen und somit zu einer Gruppe *regulärer* nichtnegativer Matrizen der Gestalt PD, wo P Permutations- und D Diagonalmatrix ist. Falls die Gruppe beschränkt ist, erhält man nicht nur ihre Endlichkeit *(Brown),* sondern schärfer: sie ist zu einer Untergruppe der S_k isomorph. Überdies ergibt sich eine Beschreibung der nichtnegativen idempotenten Matrizen.

W. Grölz (Braunschweig): *Ultraprodukte.*

Ist eine Menge M von Ringen gegeben, so definiert man als ihr Ultraprodukt einen geeigneten Quotientenring des Produktes dieser Ringe in Abhängigkeit von einem gegebenen Ultrafilter auf M. Diese Begriffsbildung gestattet verschiedenartige Anwendungen. Aus Eigenschaften des Ultraproduktes aller endlichen Primkörper kann man z. B. folgern, daß endlich viele nicht konstante ganzzahlige Polynome unendlich viele gemeinsame Primteiler besitzen.

S. K. Großer (Minneapolis): *Theorie der zentralen topologischen Gruppen.*

Eine zentrale topologische Gruppe (Z-Gruppe) ist eine lokalkompakte Gruppe G mit der Eigenschaft, daß G/Z kompakt ist (Z=Zentrum). Verf. hat vor kurzem zusammen mti *M. Moskowitz* (Trans. AMS und Bull. AMS) die Struktur- und Darstellungstheorie der Z-Gruppen entwickelt; maßgeblicher Gesichtspunkt war die angestrebte einheitliche Verallgemeinerung der

Theorie der lokalkompakten abelschen und der kompakten Gruppen durch Auffinden eines natürlichen gemeinsamen Nenners. Z-Gruppen gehorchen dem Pontryagin'schen Struktursatz für lokalkompakte abelsche Gruppen. Ihre Darstellungstheorie, endlich-dimensional, erweist sie als maximal-fast-periodisch und ist ausgezeichnet durch die Möglichkeit der Erweiterung von zentralen Charakteren zu Darstellungen der Gruppe. Vor kurzem hat *C. C. Moore* im Anschluß an diese Resultate eine vollständige Charakterisierung der Klasse aller lokalkompakten Gruppen mit nur endlich-dimensionalen Darstellungen, bzw. nur solchen beschränkten Grades, gegeben.

Obige Untersuchungen sind nun einerseits ergänzt worden durch die Erstellung der harmonischen Analyse der Z-Gruppen, andererseits durch eine genaue Untersuchung des Verhältnisses der Z-Gruppen zu anderen Klassen, die sich ebenfalls aus Kompaktheitsbedingungen ergeben. Die für Z-Gruppen hergeleitete Plancherel-Formel, mit explizitem Plancherel-Maß, und die detaillierte Analyse des Strukturraumes der Gruppenalgebra und ihres Zentrums bestätigen die „zentrale" Rolle der Z-Gruppen im Rahmen realistischer Verallgemeinerungen der abelschen und der kompakten Theorie. Der Vergleich mit anderen Klassen zeigt natürlich, daß sich in besonderen Umständen schärfere oder allgemeinere Resultate herleiten lassen. Im Rahmen dieses Vergleichs knüpften die Verf. besonders an die Monographie von *K. H. Hofmann* und *P. S. Mostert* („Splitting in topological groups") an.

F. Halter-Koch (Graz): *Kriterien zum 8. Potenzcharakter von 3 und 5.*

-3 ist genau dann 8. Potenzrest nach einer Primzahl $p \equiv 1 \bmod 8$, wenn sich p in der Form $p = x^2 + 144y^2 = u^2 + 72v^2$ mit $x + u \equiv 0 \bmod 12$ darstellen läßt.

$+5$ ist genau dann 8. Potenzrest nach einer Primzahl $p \equiv 1 \bmod 8$, wenn sich p in der Form $p = x^2 + 400y^2 = u^2 + 8v^2$ mit $x + u \equiv 0 \bmod 20$ oder $3x + u \equiv 0 \bmod 20$ darstellen läßt.

H. Harborth (Braunschweig): *Anzahlen von Diagonalschnittpunkten und Teilflächen im regulären n-Eck.*

Betrachtet man alle möglichen Diagonalen in einem regulären n-Eck, so ist die Anzahl der Schnittpunkte innerhalb des n-Ecks für ungerades n bekanntlich $\binom{n}{4}$. Daraus ergibt sich die Anzahl der Teilflächen zu $\binom{n}{4}+\binom{n-1}{2}$. Für gerades n werden beide Anzahlen kleiner; sie werden für $n \equiv \pm 2 \pmod 6$ bestimmt und für $n \equiv 0 \pmod 6$ abgeschätzt.

K. Hellmich (Graz): *Über ein Lösungsverfahren des Zuordnungsproblems.*

Gegeben sei eine Menge I von Dingen (Aufgaben) und eine zweite Menge J von Dingen (Personen, Maschinen) mindestens gleicher Mächtigkeit, ferner eine Matrix, welche jedem Paar aus $P-S$, $P=I\times J$, $S\subset P$, eine reelle Bewertungsgröße zuordnet. Gesucht ist die Menge Z von Paaren aus $P-S$, die jedes Element aus I genau einmal und jedes Element aus J höchstens einmal enthalten und für welche die Summe der entsprechenden Bewertungsgrößen ein Minimum ist. — Um eine Lösung zu finden, baut man einen Graphen G auf folgende Weise auf: Man wählt ein Element i_1 aus I und dann ein Paar (i_1,j) aus $\{i_1\}\times J$ aus, dessen Bewertungsgröße ein Minimum ist. Dieses Paar (i_1,j) gilt als Zuordnungsknoten des Graphen G_1 zur Matrix

mit der einzigen Zeile i_1. Beim zweiten Schritt wählt man aus $I-\{i_1\}$ ein Element i_2 und dann aus $\{i_2\}\times J$ ein minimales Paar (i_2,j') aus. Ist $j=j'$, so weicht man auf das nächstgünstige Paar im Bereich $\{i_1,i_2\}\times J$ aus Der Graph G_2 enthält nun zwei Zuordnungsknoten (i_1,j_1) und (i_2,j_2) mit $i_1 \neq i_2$, $i_1 \neq j_2$, und im Falle $j=j'=j_1$, bzw. $j=j'=j_2$ noch einen Ausweichknoten (i_2,j_1), bzw. (i_1,j_2). Zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn entweder das erste oder das zweite Element der entsprechenden Paare identisch sind. Indem man so fortsetzt, erhält man einen Graphen von Zuordnungs- und Ausweichknoten, der Bäume als Komponenten enthält. Mit Hilfe von Kreisen und Wegen eines erweiterten Graphen ergeben sich alle Optimierungslösungen.

K.-H. Helwig (München): *On derivations of Jordan algebras.*

Let A denote a Lie or Jordan algebra or an associative algebra of finite dimension over a field of characteristic zero. In case of associative and Lie algebras, *G. Hochschild* has shown: If the Lie algebra $\mathrm{Der}(A)$ of all derivations of A is semi-simple, then A is semi-simple. That the analogous statement holds for Jordan algebras too, has been shown by *R. D. Schafer*. But in the Jordan case the converse is known not to be true. The following theorem clarifies the situation.

Theorem 1. The conditions (1), (2), (3) are equivalent:

(1) $\mathrm{Der}(A)$ is completely reducible and $\mathrm{tr}(D) = 0$ for all $D \in \mathrm{Der}(A)$.
(2) A is semi-simple.
(3) The bilinear form $(D,D_1) \to \mathrm{tr}(DD_1)$ on the space $\mathrm{Der}(A)$ is non-degenerate and $\mathrm{Der}(A)$ consists of inner derivations.

In case of algebras A over the reals one gets: If the Lie group $\mathrm{Aut}(A)$ of A is compact, then A is semi-simple.

Theorem 2. For a Jordan algebra A over the real numbers the following three conditions are equivalent:

(1) $\mathrm{Aut}(A)$ is compact.
(2) A is the direct sum of simple ideals, which are Jordan fields or formally real algebras.
(3) A does not contain any non zero nilpotent elements.

O. Herrmann (Heidelberg): *Über die Anzahl der Zerlegungen einer Menge in Teilmengen.*

Es sei $\mathfrak{p}(n)$ die Anzahl der Zerlegungen einer Menge von n Elementen in beliebig viele paarweise fremde Teilmengen. Diese zahlentheoretische Funktion ist mit Hilfe einer einfachen Rekursionsformel leicht zu berechnen. Im Vortrag wird das asymptotische Verhalten von $\mathfrak{p}(n)$ für große n bestimmt: Sei t durch $n = t\,\Psi(t) = t\log t + O(t)$ definiert. Dann ist

$$\mathfrak{p}(n) = \exp\left(t\log^2 t - t\log t + t - 1\right) \cdot \sqrt{t/(1+\log t)} \cdot \left[1 + O\left(t^{-1}\log^2 t\right)\right].$$

Trägt man hier $t = n/\log n \cdot [1 + O(1/\log n)]$ ein, so erhält man ein wesentlich schwächeres Resultat, nämlich: Zu jedem positiven ε gibt es ein $n_0(\varepsilon)$, sodaß für $n > n_0(\varepsilon)$ die Ungleichung

$$\exp\left[-n(1-\varepsilon)\log\log n\right] \leqq \mathfrak{p}(n)/n! \leqq \exp\left[n(1+\varepsilon)\log\log n\right]$$

gilt.

Das asymptotische Verhalten der Funktion $\mathfrak{p}(n)$ ist wichtig für die Beurteilung einer Modifikation des Entscheidungsverfahrens der elementaren Theorie der Abelschen Gruppen nach *Wanda Szmielev*.

Dort tritt bei jeder Elimination eines Quantors eine $2^{\binom{n}{2}}$-fache Disjunktion auf, wobei n durch die gegebene Formel bestimmt ist. Diese kann durch eine $\mathfrak{p}(n)$-fache Disjunktion ersetzt werden. Die übrigen bei *Szmielev* auftretenden Disjunktionsglieder sind widerspruchsvoll. Diese fallen nach längeren Rechnungen, in welchen oft neue Disjunktionen auftreten, in der Schlußreduktion weg. Die hier gegebene Abschätzung von $\mathfrak{p}(n)$ gestattet die durch die Modifikation des Verfahrens erreichte Ersparnis abzuschätzen.

H. J. Kanold (Braunschweig): *Über eine besondere Klasse von diophantischen Gleichungen.*

Wir bezeichnen mit $p(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und betrachten die diophantische Gleichung

$$(1) \qquad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = y^2 .$$

Wie üblich definieren wir die Höhe von $p(x)$ durch $H = \max|a_i|$. Wir betrachten ferner die Hilfsfunktion

$$(2) \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(n/2)-i} \qquad \text{mit} \quad m = [n/2]$$

Die Koeffizienten b_i werden eindeutig aus dem Gleichungssystem

$$(3) \qquad \sum_{j=0}^{i} b_j b_{i-j} = a_{n-i} \quad (i = 0,1,\ldots,m)$$

bestimmt. Wenn n gerade ist, ist z. B. $q(x)$ ein Polynom vom Grade $n/2$. — Zuerst betrachten wir einige einfache Sonderfälle:

(I) $a_n x^n < 0$. Unter dieser Voraussetzung besitzt (1) ganzzahlige Lösungen nur für $|x| \leqq H$, $|y| \leqq \max(\sqrt{nH-1};\ H^n-2)$. Wir setzen ferner zur Abkürzung

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{m} b_j b_{m-j+i} = c_i \quad (i = 1,\ldots,m).$$

(II) Ein zweiter Sonderfall ergibt sich, wenn

$$(5) \qquad c_i = a_{n-m-i} \quad \text{für } i = 1,\ldots,m$$

erfüllt ist. Bei geradem n läßt sich dann $p(x)$ schreiben als das Produkt einer quadratfreien natürlichen Zahl f und dem Quadrat eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten. Für $f=1$ ergeben sich unendlich viele Lösungen, für $f>1$ ist (1) nicht lösbar. Im allgemeinen Fall werden Schranken angegeben für $|x|$, außerhalb derer $\operatorname{sgn}[p(x)-q^2(x)]$ konstant ist. Als Sonderergebnis folgt, daß (1) keine Lösungen besitzt, die außerhalb angebbarer Schranken liegen, wenn der Grad n gerade ist und der höchste Koeffizient eine Quadratzahl.

H. Kautschitsch (Wien): *Vertauschbare Elemente in Polynomringen und Ringen formaler Potenzreihen.*

In einem Polynomring $K[x]$ über einem kommutativen Ring K mit Einselement kann man je zwei Polynome außer durch Addition und Multiplikation auch noch dadurch verknüpfen, daß man ein Polynom in das andere einsetzt. Diese Operation ist jedoch im allgemeinen nicht kommutativ und man kann daher die Frage nach vertauschbaren Elementen stellen. Falls K der Körper der komplexen Zahlen ist, wurde dieses Problem

schon von *Jacobsthal* untersucht. Hier wird der Fall, daß K ein beliebiger Körper der Charakteristik $p>0$ ist, behandelt. Es werden alle jene Polynome, die mit allen Polynomen aus $K[x]$ vertauschbar sind, angegeben. Das Ergebnis hängt dabei davon ab, ob K endlich ist oder nicht. Es werden auch sämtliche Mengen von vertauschbaren Polynomen (genannt V-Ketten) bestimmt, welche Polynome aller positiven Grade enthalten.

Ähnlich wie in einem Polynomring kann man auch im Ring der formalen Potenzreihen $K[[x]]$ über einem kommutativen Ring K mit Einselement die Operation des Einsetzens definieren. Auch in diesem Fall kann man analoge Untersuchungen wie im Polynomring durchführen, insbesondere kann man wieder sämtliche V-Ketten bestimmen.

K. Kiyek (Saarbrücken): *Zur Konstantenreduktion projektiver Schemata.*

Es sei K ein Körper mit einer Bewertung v, A der Bewertungsring von v, $R = K[T_0,\ldots,T_r]$ der graduierte Polynomring, $R' = A[T]$, $\overline{R} = \overline{K}[T]$ ($\overline{K}$ ist der Restklassenkörper von K). Sei weiter $\mathfrak{A}$ ein graduiertes Ideal in R, $\overline{\mathfrak{A}}$ das durch Restklassenbildung entstehende Ideal in $\overline{R}$, $S = R/\mathfrak{A}$, $S' = R'/(\mathfrak{A} \cap R')$, $\overline{S} = \overline{R}/\overline{\mathfrak{A}}$. Mit X, X' und $\overline{X}$ werden die zu den graduierten Ringen S, S', und $\overline{S}$ gehörigen projektiven Schemata bezeichnet.

Auf S läßt sich nach *Roquette* eine Pseudobewertung — sie werde wieder mit v bezeichnet — so einführen, daß $S' = \{x \in S \mid v(x) \geqq 0\}$ und

$$\begin{array}{ccc} R' & \to & \overline{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \to & \overline{S} \end{array}$$

kommutiert; hier werden die horizontalen Abbildungen durch die Bewertung definiert. Die Pseudobewertung v ist träge in dem Sinne, daß jeder K-Modul endlicher Dimension in S in einen $\overline{K}$-Modul gleicher Dimension abgebildet wird.

Es wird nun die Kategorie $\mathbf{M}$ der graduierten S-Moduln betrachtet, die sich mit einer trägen Pseudobewertung versehen lassen (alle Untermoduln von S gehören dazu). Jeder Modul $M \in \mathbf{M}$ bestimmt einen graduierten S'-Modul M' und einen graduierten $\overline{S}$-Modul $\overline{M}$. Unter anderem wird gezeigt: Ist $\overline{M}$ endlich erzeugt, so auch M' und M, die Kohomologiegruppen $H^q(X', \widehat{M}')$ sind endliche A-Moduln und es ist

$$\dim_{\overline{K}} H^q(\overline{X}, \widehat{\overline{M}}) = \dim_K H^q(X, \widehat{M}) + n_q + n_{q+1}, \qquad q = 0,\ldots,r,$$

mit nicht negativen ganzen Zahlen n_q; hierbei ist $n_0 = n_{r+1} = 0$ (Die Tilde bedeutet Garbenbildung).

K. Kuntze (Gauting): *Über die Lösung eines linearen Gleichungssystems, dessen Koeffizienten Polynome sind.*

Die Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems für n Unbekannte seien Polynome in t, maximal vom Grad m. Die Lösungen des Systems sind rationale Funktionen $R(t) = Z(t)/N(t)$ mit Zähler- und Nennerpolynom. Für

die Koeffizienten dieser Zähler und Nennerpolynome läßt sich mit Hilfe eines allgemeinen Polynomansatzes mit anschließendem Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem gewinnen. Die Anzahl seiner Unbekannten beträgt maximal $mn(n+1)+n$. — Spezielle Eigenschaften der Matrix M dieses Gleichungssystems ermöglichen eine Reduktion desselben auf mehrere lineare Gleichungssysteme, deren Matrizen einen wesentlich geringeren Rang besitzen als die Matrix M.

L. C. van Leeuwen (Delft): *Über torsionsfreie Kotorsionsgruppen.*

Wir betrachten Abelsche Gruppen. Bezeichnungen: Z = additive Gruppe der ganzen Zahlen, Q = additive Gruppe der rationalen Zahlen, $C(p^\infty)$ = quasizyklische Gruppe vom Typ p^∞, $Z(p)$ = additive Gruppe der ganzen p-adischen Zahlen. Eine reduzierte Gruppe G wird Kotorsionsgruppe genannt, wenn jede Erweiterung von G durch eine torsionsfreie Gruppe zerfällt, d. h. wenn G eine Untergruppe von M und M/G torsionsfrei ist; dann ist G ein direkter Summand von M oder Ext $(H,G)=0$ für alle torsionsfreien Gruppen H. Eine Kotorsionsgruppe heißt adjungiert, wenn sie keine torsionsfreien direkten Summanden hat. Nun gilt:

(i) Jede Kotorsionsgruppe ist in eindeutiger Weise die direkte Summe einer torsionsfreien Kotorsionsgruppe und einer adjungierten Kotorsionsgruppe.

(ii) Es existiert eine eindeutige Zuordnung zwischen allen teilbaren Torsionsgruppen und allen torsionsfreien Kotorsionsgruppen. Wenn D eine teilbare Torsionsgruppe ist, dann ist die Zuordnung: $D \to \mathrm{Hom}(Q/Z, D)$.

Satz: Sei D eine teilbare Torsionsgruppe und setzen wir $D = \sum_{p_i} \sum_{\alpha_{p_i}} C(p_i^\infty)$.

Dann ist $\mathrm{Hom}\,(Q/Z,D) \cong \sum^*_{p_j} \sum'_{\alpha_{p_j}} Z(p_j)$. Σ^* bedeutet die komplette direkte Summe und $\sum'_{\alpha_{p_j}} Z(p_j)$ eine interdirekte Summe (zwischen diskret und komplett). Man kennt also die Struktur von torsionsfreien Kotorsionsgruppen und damit auch von torsionsfreien reduzierten algebraisch kompakten Gruppen. Als Anwendung kann man die Struktur der kompletten direkten Summe von Gruppen $G_i (i=1,2\ldots)$ untersuchen (G_i ist eine zyklische Gruppe der Ordnung p^i). Es zeigt sich hieraus, daß $\sum_{i=1}^{\infty} G_i$ einen maximalen torsionsfreien direkten Summanden hat, der eine torsionsfreie Kotorsionsgruppe ist.

F. Loonstra (Den Haag): *Über eine Klasse von Gruppenerweiterungen.*

Man nennt zwei Gruppenerweiterungen $G_1(A)$ und $G_2(A)$ einer Gruppe A äquivalent, $G_1(A) \sim G_2(A)$, wenn es zwei Homomorphismen η_1, η_2 gibt

$$\eta_1 : G_1(A) \to G_2(A)\,,\quad \eta_2 : G_2(A) \to G_1(A)\,,$$

derart daß $a\eta_1 = a$, $a\eta_2 = a$ für alle $a \in A$. Eine Klasse $\{G(A)\}$ ist das System aller Erweiterungen $G_1(A)$ derart daß $G_1(A) \sim G(A)$. Setzt man voraus, daß A eine endliche Gruppe ist, so kann man folgendes beweisen: Jede Klasse $\{G(A)\}$, welche eine endliche Erweiterung von A enthält, enthält eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte minimale Erweiterung $M(A)$ in dem Sinne, daß jeder Endomorphismus von $M(A)$, der A elementweise festläßt, ein Automorphismus ist.

K. Meyberg (München): *Zur Klassifizierung der Lie-Tripel-Systeme.*

In der Klassifizierung der einfachen Lie-Tripel-Systeme (= LT-Systeme) nach *Lister* treten zwei große Klassen auf: In der einen operiert die Derivationsalgebra irreduzibel, in der anderen zerfallen die LT-Systeme in zwei isomorphe derivationsinvariante Untersysteme. Eine Klassifizierung dieser zweiten Klasse, die in anderen Zusammenhängen eine wichtige Rolle spielt, soll dargestellt werden.

Es sei also $V = U + \overline{U}$ mit derivationsinvarianten U, $\overline{U}$ eine Zerlegung des LT-Systems V. Dann hat man in der Standard-Einbettung

$$L = L_0 + U + \overline{U} \text{ vermöge } l_0 + u + \overline{v} \to u - \overline{v}$$

eine innere Derivation $\mathrm{ad}\,X$ der Lie-Algebra L gegeben, für die $(\mathrm{ad}\,X)^3 = \mathrm{ad}\,X$ gilt. Andererseits liefert jede solche Derivation einer einfachen Lie-Algebra auch eine Zerlegung der betrachteten Art. Die einfachen zerfallenden LT-Systeme werden nun dadurch klassifiziert, daß man die einfachen Lie-Algebren bestimmt, in denen es Elemente x mit $(\mathrm{ad}\,x)^3 = \mathrm{ad}\,x$ gibt. Es ergibt sich eine interessante Analogie zu den Lie-Algebren der beschränkten symmetrischen Gebiete.

G. Michler (Tübingen): *Nicht-kommutative Dedekind-Ringe.*

Nach *Jacobson* (Theory of Rings, 1943) ist der beschränkte, (rechts- und links-) noethersche Primring R ein Dedekind-Ring, wenn die gebrochenen Ideale von R eine Gruppe bilden. Für kommutative Ringe R fällt diese Definition mit der klassischen zusammen. In diesem Vortrag wird gezeigt, daß ein Dedekind-Ring auch die sämtlichen idealtheoretischen Eigenschaften eines kommutativen Dedekind-Ringes hat.

Satz 1: Ist R ein Dedekind-Ring, dann gilt:

a) Jedes echte epimorphe Bild von R ist ein selbst-injektiver, artinscher Hauptrechts- und Hauptlinksidealring.
b) Jedes Rechtsideal von R wird von zwei Elementen erzeugt.
c) R ist erblich.
d) Hat R nur endlich viele maximale Ideale, so ist R ein Hauptrechts- und Hauptlinksidealring.

Der Beweis stützt sich wesentlich auf den

Satz 2: Der noethersche Ring R ist dann und nur dann ein Dedekind-Ring, wenn R die folgenden drei Eigenschaften hat:

(1) R erfüllt für jedes maximale Ideal P die Ore-Bedingungen bezüglich $\mathfrak{C}(P) = \{c \in R \mid cx \in P \to x \in P\}$, und der zugehörige Quotientenring R_P ist erblich, fastlokal und noethersch.
(2) $R = \cap R_P$, wobei P die maximalen Ideale von R durchläuft.
(3) Jedes große, einseitige, tertiäre Ideal von R ist primär und sein Primideal von Null verschieden.

Satz 3: Jeder Dedekind-Ring R ist ein voller Endomorphismenring eines endlich erzeugten, projektiven D-Moduls über einem nullteilerfreien Dedekind-Ring D.

Die Sätze 1, 2 und 3 enthalten die Sätze von *Auslander* und *Goldman* (Transact. Amer. Math. Soc. 97/1960) über die Struktur der Maximalordnungen über einem kommutativen Dedekind-Ring D in einer zentralen, einfachen Algebra über dem Quotientenkörper von D als Spezialfälle.

H. Mitsch (Wien): *Trioperationale Algebren über Verbänden.*

Ähnlich dem Begriff Dreierstruktur über einem Ring sei eine trioperationale Algebra über einem Verband (kurz: TOV-Algebra) definiert: $T(\cap, \cup, \circ)$, wobei T ein Verband bzgl. $\cap$ und $\cup$ ist, bzgl. der Operation $\circ$ eine Halbgruppe bildet und rechtsdistributive Gesetze gelten. Als Beispiel ist die Funktionenalgebra über einem Verband zu nennen. Manche Sätze über Dreierstrukturen lassen sich auf TOV-Algebren durch Spezialisierung des zugrundegelegten Verbandes übertragen. Für die Polynomfunktionen über distributiven Verbänden mit Null- oder Einselement kann eine Normalform angegeben werden, woraus sich als einziges Permutationspolynom das identische ergibt. Durch Definition einer Differentiation als Operator läßt sich zeigen, daß in einer beschränkten Funktionenalgebra nur die triviale Differentiation existiert. Für Boolesche TOV-Algebren kann eine Formel für das Komplement der Komposition angegeben und ein Zusammenhang mit den Dreierstrukturen über Booleschen Ringen mit Einselement hergestellt werden. Die Definition von TOV-Idealen liefert keine Faktorstruktur, doch läßt sich in speziellen verallgemeinerten Booleschen TOV-Algebren die umkehrbar eindeutige Zuordnung von TOV-Idealen und Kongruenzrelationen nachweisen. Für die Idealfreiheit von TOV-Algebren über Verbänden mit Nullelement ist die Idealfreiheit des zugrundegelegten Verbandes notwendig und hinreichend.

H. Möller (Bonn): *Eine Verallgemeinerung der Artinschen Vermutung für primitive Wurzeln.*

N, Z, Q, P seien die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen bzw. Primzahlen. Die „reziproke Ordnung von a modulo p" werde folgendermaßen definiert: $\mathrm{rez}_p(a) := (p-1)/\min\{n \in \mathbf{N} \mid a^n \equiv 1 \bmod p\}$ für $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $p \in \mathbf{P}$, und es sei $M_s(a) := \{p \in \mathbf{P} \mid p \equiv 1 \bmod s \wedge a^{(p-1)/s} \equiv 1 \bmod p\}$ sowie $\omega_r(a) := \lim_{x \to \infty} (\mathrm{card}\,\{p \in \mathbf{P} \mid p \leq x \wedge \mathrm{rez}_p(a) = r\})/\pi(x)$.

Analog zur Artinschen Vermutung für primitive Wurzeln wird die Dichte der Primzahlen bestimmt, für die eine ganze Zahl a $(\neq 0, \pm 1)$ eine vorgegebene reziproke Ordnung r annimmt. Die Menge dieser Primzahlen ist entweder leer, oder sie besitzt eine positive Dichte, die ein rationales Vielfaches der Konstanten $\alpha_\varrho := \prod_{p \in \mathbf{P}} \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right)$ („Artinsche Konstante") ist.

Damit a die reziproke Ordnung r für eine Primzahl p hat, die a nicht teilt, ist es notwendig und hinreichend, daß

$$p \in M_r(a) \setminus \bigcup_{q \in \mathbf{P}} M_{qr}(a).$$

Aus bekannten Ergebnissen der algebraischen Zahlentheorie folgt, daß M_s die Dichte k_s^{-1} besitzt, wenn k_s der absolute Grad des Zerfällungskörper von $x^s - a$ über $\mathbf{Q}$ ist. Für $r = 1$ hat. *C. Hooley* (Journ. r. a. Math. 225/1967, 209—220) die Artinsche Vermutung auf das Analogon der Riemannschen Vermutung für die Dedekindschen Zetafunktionen gewisser Kummerscher Körper zurückgeführt und folgende Dichte erhalten: $\omega_1(a) = \prod_{q \in \mathbf{P}} (1 - k_q^{-1})$ für $a_0 \not\equiv 1 \bmod 4$, wobei a_0 der quadratfreie Teil von a ist, und $\omega_1(a) = (1 - \mu(|a_0|) \prod_{p \mid a_0} (k_p - 1)^{-1}) \prod_{q \in \mathbf{P}} (1 - k_q^{-1})$ für $a_0 \equiv 1\ (4)$.

Entsprechende Überlegungen ergeben für die reziproke Ordnung r: $\omega_r(a) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{k_{rd}}$. Durch Bestimmung der endlich vielen Klassen $N(f) := \{s \in \mathbf{N} \mid s.\varphi(s).k_s^{-1} = f\}$ mit $N(f) \neq \emptyset$ erhalten wir daraus $\omega_r(a) = A_r \alpha_\varrho$, wobei die $A_r = A_r(a)$ positive rationale Zahlen oder Null sind. Für quadratfreies a mit $a \not\equiv 1 \bmod 4$ und alle ungeraden r ergibt sich z. B.: $A_r = r^{-2} \prod_{p \mid r} (p^2 - 1)(p^2 - p - 1)^{-1}$.

W. Müller (Wien): *Eindeutige Abbildungen mit Summen-, Produkt- und Kettenregel im Polynomring.*

Es sei A kommutativer Ring mit Einselement. Mit E bezeichnen wir kurz den Polynomring $A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ in n Unbestimmten über A. In E erklären wir außer den beiden binären Operationen Addition und Multiplikation durch das Einsetzen von Polynomen noch eine weitere $(n+1)$-stellige Operation, für die wir das Operationszeichen $\circ$ verwenden.

Wir untersuchen Systeme von n eindeutigen Abbildungen $D_1, D_2, \ldots, D_n$ von E in sich, welche für beliebige Elemente $f, g_1, g_2 \ldots, g_n \in E$ noch mindestens zwei der Beziehungen

(1) $\quad D_i(f+g_1) = D_i(f) + D_i(g_1) \quad$ für $i = 1, 2, \ldots, n$,

(2) $\quad D_i(f.g_1) = D_i(f).g_1 + f.D_i(g_1) \quad$ für $i = 1, 2, \ldots, n$,

(3) $\quad D_i(f \circ (g_1, g_2, \ldots, g_n)) = \sum_{v=1}^{n} (D_v(f) \circ (g_1, g_2, \ldots, g_n)) . D_i(g_v)$
für $i = 1, 2, \ldots, n$

erfüllen. Weiters wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen so ein System von n eindeutigen Abbildungen von E in sich, das zwei der obigen Beziehungen erfüllt, auch der fehlenden dritten Beziehung genügt.

H. Niederreiter (Wien): *Über den Begriff der Diskrepanz in kompakten abelschen Gruppen.*

Der Begriff der Diskrepanz einer modulo Eins reduzierten Folge reeller Zahlen wird auf topologische Gruppen verallgemeinert. Sei G eine kompakte abelsche Gruppe mit abzählbarer Basis; dann läßt sich die Diskrepanz einer Folge mit Hilfe eines gewissen ausgezeichneten Erzeugendensystems der dualen Gruppe X von G definieren. Die Größenordnung der Diskrepanz wächst dabei nicht bei Ausübung von Homomorphismen oder Übergang zu Untergruppen. Ist D_N die Diskrepanz der ersten N Glieder einer festen Folge in G und bildet D_N bezüglich N eine Nullfolge, so ist die Folge gleichverteilt in G; die Umkehrung gilt nicht uneingeschränkt. Die Dimension von G spielt bei dieser Frage eine wesentliche Rolle. Der Satz von *Aardenne-Ehrenfest* ist auf nicht total unzusammenhängende Gruppen G übertragbar. In zwei Richtungen verallgemeinern läßt sich die Ungleichung von *Koksma* und somit ist die Abschätzung der Güte, mit der Haarsche Integrale durch Mittelwerte approximierbar sind, möglich. Eine geeignete Definition der totalen Variation einer Borel-meßbaren Funktion auf G ist dabei zugrunde gelegt. Ein gegenüber der Theorie der Gleichverteilung modulo Eins neu auftretendes Phänomen ist die Existenz von „gut gleichverteilten" Folgen, also von Folgen, für die ND_N gleichmäßig beschränkt bleibt. — Ein analoges Konzept eines Diskrepanzbegriffes kann man auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten einführen.

W. Nöbauer (Wien): *Über eine mit den Tschebyscheffpolynomen erster Art zusammenhängende Klasse von Permutationspolynomen.*

Durch $g_k(a,x) = \sum_{t=0}^{m} \frac{k}{k-t}\binom{k-t}{t}(-a)^t x^{k-2t}$ mit $m = [k/2]$ ist ein ganzzahliges Polynom in a und x definiert (für ungerades k wird dieses Polynom durch eine lineare Substitution aus dem Tschebyscheffpolynom erster Art $T_k(x)$ erhalten). Setzt man hier für a ein Element ungleich 0 aus dem Galoisfeld $Q = GF(q)$, so wird $g_k(a,x)$ ein Polynom über Q. Dieses ist, wie im wesentlichen schon *Dickson* gezeigt hat, Permutationspolynom genau dann, wenn $(k, q^2-1) = 1$. Für $a = 1$ und für $a = -1$ ist die Menge $P(a)$ der Permutationspolynome $g_k(a,x)$ von Q abgeschlossen gegenüber der Komposition von Polynomen. Die Menge $G(a)$ der durch die Polynome von $P(a)$ dargestellten Permutationen von Q bildet daher in diesen Fällen eine abelsche Gruppe. Diese Gruppe ist isomorph zu einer Faktorgruppe der primen Restklassengruppe modulo (q^2-1) nach einer elementar abelschen 2-Gruppe, deren Ordnung von a und q abhängig ist und sich stets angeben läßt.

Analoge Überlegungen wie für Q lassen sich durchführen für den Restklassenring R der ganzen Zahlen modulo einer Primzahlpotenz p^e. Es scheint in diesem Fall jedoch nicht leicht zu sein, die Struktur der abelschen Gruppe $G(a)$ zu ermitteln.

H. Pahlings (Gießen): *Projektive Darstellungen über algebraischen Zahlkörpern.*

Alperin und *Kuo* zeigten 1967, daß der Exponent jeder Darstellungsgruppe einer endlichen Gruppe G durch die Ordnung $|G|$ von G teilbar ist. Daraus ergibt sich mit Hilfe des Satzes von *Brauer* über die Zerfällungskörper von Gruppenringen, daß jede projektive Darstellung von G (über dem Körper der komplexen Zahlen) projektiv äquivalent ist zu einer projektiven Darstellung über dem Körper der $|G|$-ten Einheitswurzeln. Dies hatte *Reynolds* schon 1965 auf anderem Wege bewiesen. Die Frage, ob man wie in der gewöhnlichen Darstellungstheorie den Körper der $|G|$-ten sogar durch den der e-ten Einheitswurzeln ersetzen kann, wobei e der Exponent von G ist, bleibt offen. Wir beweisen den

Satz: Ist G eine endliche abelsche Gruppe mit dem Exponenten e, so läßt sich jede irreduzible projektive Darstellung von G im Körper der e-ten Einheitswurzeln realisieren.

Für abelsche Gruppen ungerader Ordnung folgt der Satz ganz einfach daraus, daß jede solche Gruppe mindestens eine Darstellungsgruppe besitzt, deren Exponent ebenfalls e ist. Dies trifft jedoch für abelsche Gruppen gerader Ordnung nicht zu. — Beim Beweis des Satzes kann man sich auf treue irreduzible Darstellungen beschränken. Jede solche projektive Darstellung von G erhält man aus einer gewöhnlichen treuen irreduziblen Darstellung D einer geeigneten Gruppe H, wobei das Zentrum $Z(H)$ zyklisch von der Ordnung e und $H/Z(H) \cong G$ ist. Ist χ der Charakter von D, so erkennt man leicht, daß χ auf $H - Z(H)$ verschwindet, so daß der Charakterenkörper $Q(\chi)$ gerade der Körper der e-ten Einheitswurzeln ist. Aus den Sätzen über den Schur-Index der Charaktere nilpotenter Gruppen ergibt sich, daß nur der Fall, daß G eine elementar abelsche 2-Gruppe ist, weiter zu untersuchen bleibt. H ist dann eine extraspezielle 2-Gruppe und eine Untersuchung ihrer gewöhnlichen treuen irreduziblen Darstellung mit Hilfe von Induktionssätzen vervollständigt den Beweis.

A. Pfister (Göttingen): *Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten.*

E. Artin hat gezeigt, daß jede positiv definite rationale Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ mit reellen Koeffizienten Summe von Quadraten ist (17. Hilbertsches Problem). In Verschärfung dieses Resultats läßt sich beweisen, daß $f(x_1, \ldots, x_n)$ bereits als Summe von 2^n Quadraten dargestellt werden kann.

Zum Beweis wird außer einigen neuen, aber elementaren Ergebnissen über quadratischen Formen folgender Satz von *Tsen* benützt: „In einem Funktionenkörper vom Transzendenzgrad n über einem algebraisch abgeschlossenen Körper besitzt jede Form vom Grad d in mehr als d^n Veränderlichen eine nichttriviale Nullstelle."

S. Piccard (Neuchâtel): *Sur les groupes multiplicatifs définis par un ensemble irréductible de générateurs liés par un ensemble donné de relations fondamentales.*

Un ensemble A de générateurs d'un groupe multiplicatif G est dit irréductible au sens large si aucun élément a de A ne peut être obtenu par composition fine d'éléments de $A-\{a\}$. Tout groupe multiplicatif ne possède pas nécessairement de tels ensembles de générateurs. L'ensemble A de générateurs du groupe multiplicatif G est dit irréductible au sens strict si quelle que soit la partie B de A, de puissance >1, et quelle que soit la partie C de G, de puissance inférieure à celle de B, l'ensemble $(A-B) \cup C$ n'est pas générateur de G. Tout ensemble A irréductible au sens strict de générateurs d'un groupe multiplicatif G est aussi irréductible au sens large, mais la réciproque est en défaut. Un groupe G est dit fondamental s'il possède au moins un ensemble A de générateurs, irréductible au sens strict. Il est dit quasi fondamental s'il possède au moins un ensemble de générateurs irréductible au sens large. Tout ensemble irréductible au sens strict A de générateurs d'un groupe fondamental G est appelé une base de ce groupe et la puissance de A est appelée le rang de G. Le rang est un invariant d'un groupe fondamental. Tout groupe fondamental est quasi fondamental, mais la réciproque n'est past vraie. Soit G un groupe quasi fondamental et soit A un ensemble irréductible au sens large de générateurs de G. Une relation entre éléments de A est une égalité de la forme $f = h$, où f et h sont deux compositions finies d'éléments de A qui représentent un même élément de G. Une relation est dite triviale si elle découle des axiomes de groupe. Elle n'est pas triviale dans le cas contraire. Soit F un ensemble donné de relations reliant entre eux les éléments de A. On dit que F est un ensemble exhaustif de relations fondamentales entre les éléments de A si aucune d'elles n'est triviale, si aucune d'elles ne découle des autres relations de F et de relations triviales et si toute relation entre éléments de A découle de celles de F et de relations triviales. Etant donné un ensemble A d'éléments qui se composent suivant une loi de groupe multiplicatif, irréductible au sens large, lié par un ensemble donné F de relations dont aucune ne découle des autres et de relations triviales, le problème se pose de savoir s'il existe un groupe multiplicatif G engendré par A et dont F est un ensemble (exhaustif ou non) de relations fondamentales. L'étude est simplifiée dans le cas où A et F sont finis. La question posée a été résolue, en particulier, dans le cas où A se compose de trois éléments $a_i (i=1,2,3)$ liés par

l'ensemble non exhaustif F de six relations fondamentales $a_i^2 = 1$, $i = 1,2,3$, $(a_i a_j)^3 = 1$, $i \neq j$, $j = 1,2,3$. Mais nombre de problèmes de cette nature attendent encore leur solution.

I. Pieper (Hamburg): *Das Dicksonsche Verfahren auf inseparablen lokalen Algebren.*

Unter einer lokalen Algebra (F,E,K) versteht man eine assoziative Algebra F über einem kommutativen Körper K, die ein Einselement und genau ein maximales Ideal $F \setminus E$ enthält.

Das Dicksonsche Verfahren, auf (F,E,K) angewandt, besteht darin, mit Hilfe einer Abbildung $\varphi : E \to A(F) : a \to a_\varphi$ der Einheitengruppe von F in die Automorphismengruppe von F die partielle Operation:

$$E \times F \to F : (a,f) \to a\, a_\varphi(f)$$

in F zu erklären. Wenn diese Operation, soweit definiert, assoziativ ist, dann genügt φ für $a,b \in E$ der Gleichung $a_\varphi b_\varphi = (a\, a_\varphi(b))_\varphi$, d. h. φ ist eine gekoppelte Abbildung von E *in* $A(F)$.

Zur Konstruktion einer solchen Abbildung φ für eine inseparable Algebra (F,E,K) wird zunächst unter der Voraussetzung $F \setminus E = 0$ oder $|F \setminus E : K| = p$(prim) die Struktur von F bestimmt. Dann wird untersucht, welche Automorphismen von K sich zu Automorphismen von F fortsetzen lassen und wann diese Fortsetzung eindeutig bestimmt ist.

Es können dann Bedingungen angegeben werden, unter denen man aus einer gekoppelten Abbildung φ von $K - \{0\}$ *in* $A(K)$ eine solche von E in $A(F)$ konstruieren kann.

G. Pilz (Wien): *Über geordnete Kompositionsringe.*

Ein Kompositionsring R ist ein Ring mit einer dritten zweistelligen Operation, die assoziativ und bezüglich der Addition und Multiplikation rechtsdistributiv sein soll. Sie heiße „Komposition" und werde mit „$\circ$" bezeichnet. Jeder Kompositionsring ist isomorph zu einem Ring von Funktionen eines Konstantenringes K in sich, mit der Substitution als Komposition. Ist K geordnet, so erhebt sich die Frage, ob sich diese Ordnung zu einer Anordnung in ganz R erweitern läßt, sodaß für alle $f,g \in R$ aus $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ stets folgt: (1) $f+g \geqslant 0$, (2) $f \cdot g \geqslant 0$ und (3) $f \circ g \geqslant 0$. Es zeigt sich, daß eine solche Erweiterung unter sehr schwachen Voraussetzungen nicht existiert und nur in Ringen „fast konstanter" Funktionen gelingen kann, wie z. B. in den Kompositionsringen R_A aller $k_1 + k_2 \cdot \chi_A$, wo k_1 und $k_2 \in K$ sind und χ_A die charakteristische Funktion einer festen Menge A negativer Konstanten bezeichne.

Es empfiehlt sich daher, einen etwas allgemeineren Ordnungsbegriff einzuführen, bei dem (3) nur für $g \notin K$ gefordert wird. Ist I ein geordneter Integritätsbereich, so läßt sich $I[x]$ im erweiterten, nicht aber im engeren Sinne ordnen, nämlich lexikographisch. Wenn I insbesondere die Mengen der ganzen, rationalen oder reellen Zahlen bezeichnet, so gibt es außer der lexikographischen Ordnung keine weitere. Man kann beweisen, daß sich ein Kompositionsring rationaler Funktionen auch im neuen Sinn niemals ordnen läßt.

K. Schmidt (Wien): *Über einen Zusammenhang zwischen gleichverteilten Punkt- und Maßfolgen.*

X sei ein kompakter, separabler Hausdorffraum. A sei eine Matrix (a_{nk}) $n,k = 1,2,\ldots$, mit $a_{nk} \geqslant 0$, $\sup_n \sum_k a_{nk} = \|A\| < \infty$, und $\lim_n \sum_k a_{nk} = 1$. Ferner erfülle A die Hillsche Bedingung: für jedes

$$\delta > 0 \text{ sei } \sum_n e^{-\delta^2/\alpha_n} < \infty \; (\alpha_n = \sum_n a_{nk}^2)$$

$M = (\mu_k)$ sei eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf X. Eine Folge von Punkten $\omega = (x_k)$ heißt A-M-gleichverteilt, wenn

$$\lim_n (\sum_k a_{nk} f(x_k) - \mu_n(f)) = 0$$

für alle stetigen, reellwertigen Funktionen f auf X ist. Die Menge aller gleichverteilten Folgen werden mit Q bezeichnet und sie ist eine Teilmenge von $P = \bigotimes_{i=1}^{\infty} X_i$, $X_i = X$.

Die Menge aller Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen über X werde mit R bezeichnet. Eine Folge $\tau = (\varphi_k) \in R$ heißt A-M-gleichverteilt, wenn

$$\lim_n (\sum_k a_{nk} \varphi_k(f) - \mu_n(f)) = 0$$

für alle stetigen, reellwertigen Funktionen f über X ist. Nun wird durch jedes $\tau = (\varphi_k)$ ein Maß $\tau^* = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \varphi_k$ auf P definiert.

Satz: τ ist genau dann A-M-gleichverteilt, wenn $\tau^*(U) = 1$ ist. Dieser Satz läßt sich übertragen auf den Fall von A-unabhängigen Folgen. Dabei heißt eine Folge von Punkten eines endlichen Produktes von kompakten, separablen Hausdorffräumen A-unabhängig, wenn jedes A-Verteilungsmaß der Folge ein Produktmaß ist.

F. Schweiger (Wien): *Metrische Probleme zahlentheoretischer Transformationen.*

Es werden spezielle Abbildungen des Einheitswürfels in sich betrachtet, welche sich als ergodisch erweisen. Es wird die Existenz eines invarianten Maßes nachgewiesen. Für die Dichte wird eine Funktionalgleichung aufgestellt und dieselbe iterativ gelöst, wobei die Konvergenzgeschwindigkeit angegeben wird. Dies gestattet Anwendungen auf Kettenbrüche und g-adische Entwicklungen. Die Methode ist auf Jacobialgorithmen übertragbar. Auf Fragen der Hausdorffdimension, Existenz singulärer Maße und einige verwandte Probleme wird hingewiesen.

O. Tamaschke (Tübingen): *Zur Theorie der Permutationsgruppen.*

Ein Tripel $(\Omega,G,.)$ aus einer Menge Ω, einer Gruppe G, und einer äußeren Verknüpfung von Ω mit G als Operatorenbereich, für die $\alpha(gh) = (\alpha g)h$ und $\alpha 1 = \alpha$ gilt für alle $\alpha \in \Omega$ und $g,h \in G$, heiße eine Permutationsstruktur. Ein Paar (φ,ψ) aus einer Abbildung $\varphi : \Omega \to \Omega'$ und einem Homomorphismus $\psi : G \to G'$ heiße ein Homomorphismus der Permutationsstruktur $(\Omega,G,.)$ in die Permutationsstruktur $(\Omega',G',.)$, wenn $(\alpha g)\varphi = (\alpha\varphi)(g\psi)$ gilt für alle $\alpha \in \Omega$, $g \in G$. Eine Klassifizierung dieser Homomorphismen führt zum Begriff des n-fachen Homomorphismus. — Es sei $(\Omega,G,.)$ ein homogener Raum (d. h. G wirke transitiv auf Ω) und (φ,ψ) sei ein

n-facher Homomorphismus. Der Kern $K = \mathrm{Ker}_\alpha(\varphi,\psi) = \{g \in G \mid (\alpha\varphi)(g\psi) = \alpha\varphi\}$ von (φ,ψ) bezüglich $\alpha \in \Omega$ ist eine Untergruppe von G mit der folgenden Eigenschaft:

$$H \leqslant K \text{ und } Kg(H^{x_1} \cap \ldots \cap H^{x_n}) = Kg(K^{x_1} \cap \ldots \cap K^{x_n})$$

für alle $g, x_1, \ldots, x_n \in G$. Eine solche Untergruppe K heiße n-fach G/H-normal. Diese Aussage über $\mathrm{Ker}_\alpha(\varphi,\psi)$ ist Teil eines Homomorphiesatzes für homogene Räume. Daneben existieren auch ein erster und ein zweiter Isomorphiesatz für homogene Räume. — Ist K eine n-fach G/H-normale Untergruppe von G, so ist das Paar (φ_K, i_G) aus der Abbildung $\varphi_K : Hg \to Kg$ und dem identischen Automorphismus i_G von G ein n-facher Epimorphismus des homogenen Raumes $(H{:}G,G,.)$, der definiert ist durch die Nebenklassen Hg, $g \in G$, auf den homogenen Raum $(K{:}G,G,.)$ mit $K = \mathrm{Ker}_H(\varphi_K, i_G)$. — Der homogene Raum $(H{:}G,G,.)$ kann als eine Faktorstruktur von G modulo H aufgefaßt werden. Es werden n-fach G/H-subnormale Untergruppen und n-fache G/H-Subnormalketten definiert mit den durch die Glieder dieser Ketten definierten homogenen Räumen als deren Faktoren. Für $n = 1$ gelten der Zassenhaussche Vier-Untergruppen-Satz von Jordan und Hölder für die 1-fachen G/H-Kompositionsketten. — Jedem homogenen Raum $(H{:}G,G,.)$ wird die Halbgruppe G/H (bezüglich der Komplexmultiplikation) zugeordnet, die von allen $HgH, g \in G$, erzeugt wird. Sie spielt die Rolle einer Art von „Endomorphismenring" des homogenen Raumes $(H{:}G,G,.)$. Für diese Halbgruppen existiert eine eigene Theorie (Math. Z. *104*/1968, 74—90). Die Isomorphieklasse $[G/H]$ heiße der Typ des homogenen Raumes $(H{:}G,G,.)$.

A. Thedy (Aarhus): *Über Algebren, die der polarisierten Fundamentalformel genügen.*

Man kann die Jordan-Algebren als die Klasse der kommutativen Algebren ansehen, die der Fundamentalformel, einer gewissen von *N. Jacobson* entdeckten Relation siebten Grades, genügen. Betrachtet man allgemeiner die Klasse aller endlich-dimensionalen Algebren, die der Fundamentalformel genügen, so erhält man eine Klasse nicht kommutativer Jordan-Algebren, zu denen neben den Jordan-Algebren die assoziativen, quasi-assoziativen und nodalen Algebren gehören.

Der Vortrag befaßt sich mit den Eigenschaften dieser Algebren, der Klassifikation der einfachen und mit dem Wedderburnschen Zerlegungssatz.

U. Tiemeier (Saarbrücken): *Verzweigte Erweiterungen algebraischer Funktionenkörper.*

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper in einer Unbestimmten über dem Konstantenkörper k; es sei $\overline{D(K)}$ die Divisorenklassengruppe von K.

Zunächst wird das Verhalten der Divisorenklassengruppe bei verzweigten Erweiterungen untersucht. Es sei L eine endliche separable Erweiterung von K; $v_1, \ldots, v_l$ seien diejenigen k-Bewertungen von K, die in L verzweigt sind; es bezeichne $\overline{e_i}$ das k.g.V. der Verzweigungsindizes von v_i in L. Es sei Con: $\overline{D(K)} \to \overline{D(L)}$ die Conorm; C sei deren Kern. Dann gilt:

Satz 1: $\overline{D(L)}/\mathrm{Con}(\overline{D(K)})$ enthält eine endliche Untergruppe, deren Ordnung von $\Pi\overline{e_i} \,.\, |C|/[L:K]$ geteilt wird.

Im Anschluß an diesen Satz stellt sich die Frage nach seiner Anwendbarkeit. Es gibt zu jedem Paar natürlicher Zahlen (m,n) natürlich unendlich viele separable Erweiterungen vom Grade m von K, die für mindestens n Bewertungen von K verzweigt sind; im Falle der Primzahlcharakteristik gilt darüber hinaus:

Satz 2: K besitze Primzahlcharakteristik; p sei eine beliebige Primzahl. Zu jeder natürlichen Zahl n existieren dann unendlich viele galoissche Erweiterungen vom Grade p von K, die für mindestens n Bewertungen von K verzweigt sind.

Diese Sätze lassen sich auf endlich-algebraische Zahlkörper übertragen: Es gilt die Behauptung von Satz 2 ([2]); statt Satz 1 gilt: $|\overline{D(L)}|$ wird von $|\overline{D(K)}| \; \Pi\, \overline{e_i}/[L:K]^r$ geteilt (r — Einheitenrang von L).

[1] *Broumer-Rosen,* Nagoya M. J. *23*

[2] *Lamprecht,* Archiv M. *18*

J. Timm (Hamburg): *Lokale Klassen universeller Algebren.*

Unter einer universellen Algebra versteht man eine Menge mit einem System mehrstelliger Operationen. K und Γ seien zwei Klassen universeller Algebren und $K \subset \Gamma$. Man definiere $L\Gamma K$ als die Klasse aller Algebren aus Γ, deren sämtliche Elemente Teilalgebren erzeugen, die zu Algebren aus K isomorph sind. Z. B. sei Γ die Klasse aller Gruppen und K die der zyklischen Gruppen von der Ordnung 1 oder p (Primzahl); dann ist $L\Gamma K$ die Klasse aller Gruppen vom Exponenten p. K heiße Γ-lokal, falls $K = L\Gamma K$.

Es werden eine Reihe von Aussagen über lokale Klassen universeller Algebren und über den Operator $L\Gamma$ formuliert. Insbesondere ergeben sich Zusammenhänge mit dem von *Grätzer* eingeführten Operator C (vergl. *G. Grätzer,* Archiv Math. 18/1967, 113—117). Einige Sätze von *Grätzer* ergeben sich dabei als Spezialfälle von Aussagen über den Operator $L\Gamma$.

E. Visotschnig (Graz): *Minimale Wege in einem endlichen, bewerteten Graphen.*

In einer ganzen Reihe von Fällen der Praxis tritt das Problem auf, in einem endlichen, gerichteten, bewerteten Graphen Wege mit minimaler Bewertung zu finden. Für den Spezialfall, minimale Wege von einem gegebenen Anfangsknoten K_0 zu einer Menge Y von Endknoten zu finden, existieren mehrere Algorithmen. Der Algorithmus von *Minty* (unabhängig davon in beinahe identischer Form vorgeschlagen von *E. W. Dijkstra*), modifiziert von *R. Albrecht,* zeichnet eine Menge R von Knoten, die eine Bewertung („Entfernung" vom Anfangsknoten) und eine Menge $M \subset R$ von Knoten, deren Bewertung im Laufe des Algorithmus nicht mehr verbessert werden kann, unter der Menge K aller Knoten des Graphen, aus. Bei jedem Algorithmusschritt wird M vergrößert und R wenn möglich bis entweder $Y \subset M$ gilt oder $M = R$ nicht mehr vergrößert werden kann (alle von K_0 erreichbaren Knoten erreicht sind). Bei einem Graphen von N Knoten werden zur Lösung der gestellten Aufgabe maximal $N(N-1)/2$ Additionen und $(N-1)(N-2)$ Vergleiche benötigt. Der Algorithmus von *Moore*, ebenfalls modifiziert von *R. Albrecht,* zeichnet unter der Menge K aller Knoten

des Graphen eine Menge R von Knoten aus, welche vom Algorithmus erfaßt sind. Auf R wird eine Ordnung angenommen, welche durch die Reihenfolge, in welcher die Knoten vom Algorithmus erfaßt werden, gegeben ist. Ein Algorithmusschritt besteht darin, daß die unmittelbaren Nachfolger eines gegebenen CR-Knoten mit der kleinsten ermittelbaren Bewertung versehen und zu R hinzugenommen werden. CR-Knoten wird jener Knoten aus R, dessen Bewertung kleiner ist als das Maximum der Bewertungen der Knoten aus Y und welcher der kleinste im Sinne obiger Ordnung ist, der mit seiner momentanen Bewertung noch nicht CR-Knoten war. Der Algorithmus wird terminiert, falls kein weiterer CR-Knoten zu finden ist. Bei einem Graphen von N Knoten werden maximal 2^{N-1} Algorithmusschritte benötigt. Trotzdem ist das Verfahren in Spezialfällen sämtlichen anderen Verfahren überlegen.

G. L. Watson (London): *Cubic Diophantine equations.*

The general cubic Diophantine equation was first studied by *Davenport* and *Lewis* in J. London Math. Soc. *39*/1964, 657—672. I investigated it further in Proc. London Math. Soc. (3) *17*/1967, 271—295. Writing the equation as $\Theta(x_1, \ldots, x_n) = 0$, let C be the cubic part of the polynomial Θ; then the equation is more difficult if C is reducible over the rational field. Assuming therefore that this is the case, we may by transforming the variables suitably suppose that $C = x_n Q(x_1, \ldots, x_n)$, and define $f = f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = Q(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Now the equation is still more difficult if f is definite; so suppose further that f is positive-definite. This case is excluded in both the papers quoted above; but I have now obtained some results for it, valid for $n \geqslant 15$. The equation can, in many ways, be put into the shape.

$$(ax_n + b)\, S(x_1, \ldots, x_n) = R(x_1, \ldots, x_{n-1}), \qquad (1)$$

$a \neq 0$, $\deg R \leqq 2$. It is necessary to consider, for large primes p, the congruence

$$R(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv 0 \pmod{p}. \qquad (2)$$

Sufficient conditions for the solubility, in integers x_i, of an equation (with $n \geqslant 15$) of the type considered are: (i) the congruence $\Theta \equiv 0$ is soluble to every modulus, (ii) the quadratic form Q is indefinite, (iii) however the equation is put into the shape (1), $\deg R = 2$ and (2) is soluble for all large p.

H. Wefelscheid (Hamburg): *Zur algebraischen Kennzeichnung angeordneter Fastkörper.*

Ist M die Menge all der Elemente eines Fastkörpers, die endliche Summe von Quadratprodukten $a_1^2 . a_2^2 \ldots a_m^2$ sind, so kann man die angeordneten Fastkörper F durch die Eigenschaften

(1) $-1 \notin M$

(2) Aus $b \in M$ folgt $x^{-1} . b . x \in M$ für jedes $x \neq 0$, $x \in M$

charakterisieren. Es gibt zwei Typen von angeordneten Fastkörpern, je nachdem ob die Aussage

(*) Aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $a . c < b . c$

gilt oder nicht. Die Fastkörper, die (*) erfüllen, lassen sich durch Eigenschaften einer Bewertung kennzeichnen, während das bei den anderen nicht möglich ist.

H. J. Weinert (Mannheim): *Zur Fortsetzung partieller Ordnungen einer Halbgruppe S auf Rechtsquotientenhalbgruppen von S.*

Es sei S eine Halbgruppe und Σ eine Unterhalbgruppe zweiseitig regulärer Elemente von S. Eine Rechtsquotientenhalbgruppe $T = Q_r(S,\Sigma)$ ist definiert als S umfassende Halbgruppe mit Einselement, in der jedes Element $\alpha \in \Sigma$ ein Inverses besitzt und deren Elemente sich als Rechtsquotienten $a\alpha^{-1}$ mit $a \in S$, $\alpha \in \Sigma$ schreiben lassen (vgl. *H. J. Weinert*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *14*/1963, 209—227). Eine partielle Ordnung O_S von S läßt sich genau dann zu einer solchen partiellen Ordnung O_T von T fortsetzen, die O_S in S induziert, wenn für O_S aus $\xi a \eta \leqslant \xi b \eta$ mit $a,b \in S$, $\xi,\eta \in \Sigma$ stets $a \leqslant b$ folgt (*). O_T ist dann durch O_S eindeutig bestimmt, und der Satz enthält die Fortsetzbarkeit von linearen Ordnungen von S auf T. Weiterhin existiert zu einer partiellen Ordnung O_S von S mit (*) stets genau eine maximale Rechtsquotientenhalbgruppe $T_m = Q_r(S,\Sigma_m)$, auf welche O_S fortsetzbar ist. Das allgemeine Problem der Fortsetzbarkeit einer beliebigen partiellen Ordnung O_S von S zu einer partiellen Ordnung von T ist damit auf die Frage zurückgeführt, ob sich O_S bereits in S zu einer partiellen Ordnung erweitern läßt, die (*) erfüllt. Dies ist stets möglich, wenn die Rechtsquotientenhalbgruppe $T = Q_r(S,\Sigma)$ zugleich Linksquotientenhalbgruppe $Q_l(S,\Sigma)$ ist, insbesondere also wenn Σ im Zentrum von S liegt oder für den kommutativen Fall, aber nicht allgemein, wie Gegenbeispiele zeigen.

J. M. Wills (Berlin): *Ein Satz über konvexe Körper und Gitterpunkte.*

Ein konvexer Körper, dessen Volumen mehr als die Hälfte seiner Oberfläche beträgt, enthält einen Gitterpunkt. Dieser Satz wird für den R^3 bewiesen, nachdem er 1962 von *Bender* für den R^2 bewiesen wurde. Das Problem lautet genauer so: Sei K ein konvexer Körper, V sein Volumen, F seine Oberfläche, $\mathfrak{G}_n$ die Menge der konvexen gitterpunktfreien Körper des R^n und

$$s(n) = \sup \left\{ \frac{V(K)}{F(K)} \,/\, K \in \mathfrak{G}_n \right\} .$$

Man zeigt leicht $s(n) \geqslant 1/2$ für $n \geqslant 2$. *Bender* zeigte $s(2) = 1/2$. Mit Hilfe von Isoperimetrie, Steinerscher und Schwarzscher Symmetrisierung erhält man $s(3) = 1/2$.

Abschließend wird eine allgemeine Symmetrisierung angegeben, die die Isoperimetrieeigenschaft, die Steinersche und die Schwarzsche Symmetrisierung als Spezialfälle enthält und die wahrscheinlich das geeignete Hilfsmittel ist, den obigen Satz für $n > 3$ zu beweisen.

P. Zinterhof (Wien): *Über einige zahlentheoretische Methoden in der numerischen Mathematik.*

Sei A eine Klasse komplexwertiger Funktionen f, die über dem s-dimensionalen Einheitswürfel G_s erklärt sind. Man versteht unter einer Integrationsmethode auf A einen Ausdruck der Gestalt

$$\int_{G_s} f(x)\,dx = \Sigma\, a_{k,N} f(x_{k,N}) + R_N .$$

Es werden für gewisse Klassen von stetigen Funktionen, die sich in eine schnell konvergente Fourierreihe entwickeln lassen, Integrationsmethoden angegeben, für die $O(R_N)$ bestmöglich ist. Wesentliches Hilfsmittel ist die Theorie der trigonometrischen Summen.

SEKTION II:

Analysis

T. Akaza (Kanazawa): *(3/2)-dimensional measure of singular sets of some Kleinian groups.*

Let us denote by B_0 the domain bounded by N mutually disjoint circles $\{K_i\}_{i=1}^{N}$. Take $2p(N \geqslant 2p)$ boundary circles $\{H_i, H'_i\}_{i=1}^{p}$ from $\{K_i\}_{i=1}^{N}$. Let S_i be a hyperbolic or loxodromic generator which transforms the outside of H_i onto the inside of H'_i. Then $\{S_i\}_{i=1}^{p}$ generate a Schottky group G_1. Let $\{T_j\}_{j=1}^{q}$ be the elliptic transformations with period 2 corresponding to the remaining boundary circles $\{K_j\}_{j=1}^{q}$, where $N-2p=q$. Then $\{T_j\}_{j=1}^{q}$ generate a properly discontinuous group G_2. By combining the two groups G_1 and G_2, a new group $G=G_1 G_2$, which is generated by $\{S_i\}_{i=1}^{p}$ and $\{T_j\}_{j=1}^{q}$, is obtained and is called a Kleinian group. It is easily seen that the fundamental domain of G coincides with B_0 and G is properly discontinuous. We introduced the following function

$$(1)\quad f_{T_k}^{(\mu)\nu}(z) = \sum_{S(\nu)} \Big[\prod_{i=1}^{\nu} \Big\{ \frac{R_{T_i}}{|T_i(\infty) - T_{i+1}^{-1} \dots T_{\nu}^{-1}(z)|} \Big\}^{\mu} \Big], \quad (T_i \neq T_{i+1}^{-1} \;;\; 0<\mu<4),$$

where T_k and T_i $(1 \leqq i \leqq \nu)$ are generators of G or their inverses and R_{T_i} is the radius of isometric circle of T_i. We call $f_{T_k}^{(\mu)\nu}(z)$ the μ-dimensional computing function of order ν on T_k, where z varies on the closed disc bounded by H_k, the boundary circle of B_0 mapped onto the boundary circle H'_k of B_0 by T_k. We have the following theorem: If there exists some positive integer ν so that it holds

$$(2)\quad f_{T_k}^{(\mu)\nu}(z) > \lambda_k > 1, \quad (k=1,\dots,N)$$

on the singular subset E_k of E contained in the boundary circle H_k $(k=1,\dots,N)$ of B_0 respectively, then the $(\mu/2)$-dimensional measure of the singular set E of G $m_{\mu/2}(E)$ is positive.

By using the condition (for $\mu=2$) of this theorem, we showed the existence of Kleinian groups with fundamental domains bounded by circles whose singular sets have positive 1-dimensional measure. We note that $m_1(E)$ is always zero in the case of three circles. In the case of $\mu=3$, it is almost impossible to use the condition (2), since the number N of the boundary circles of the fundamental domain become considerably large and each value of computing functions of N boundary circles must be calculated. Therefore we gave the simple and useful sufficient condition with respect to computing function, and by using this condition we showed the existence of Kleinian group G for which $m_{3/2}(E)$ is positive.

E. J. Akutowicz (Montpellier): *Moyenne-periodicité.*

Nous donnerons une solution très-simple du problème de l'analyse et de la synthèse spectrale des distributions moyenne-périodiques. Nous opérons dans un espace M' de distributions qui est le dual fort d'un espace vectoriel topologique M de fonctions holomorphes dans une bande horizontale contenant l'axe réel et assez rapidement décroissantes aux extrémités de cette bande.

A. Ammann (Genf): *Über die Koeffizienten von Clausen einer Laplace'schen Quadraturformel.*

Die von *H. Bückner* (1) erwähnten Zahlen $v_1^{(m)}$, $v_2^{(m)}$ ... $v_m^{(m)}$ können auf folgende Weise definiert werden:

Es existiert eine einzige reelle Zahl $a = v_1^{(m)}$, sodaß es eine reelle Funktion $f(x)$ gibt, die auf dem Intervall $0 < x \leqslant m$ definiert ist, und welche folgende Eigenschaften besitzt:

1. Sie ist kontinuierlich, ebenso wie ihre ersten $m-2$ Ableitungen,
2. Wenn $k-1 < x \leqslant k$ $(k=1,2\dots m)$ ist, dann ist $f(x)$ ein Polynom $f_k(x)$ des Grades $\leqslant m-1$
3. Man hat $f_1(x) = ax^{m-1}$

$$f_m(x) = [(x+1/2)^m - (-1)^m B_m(-x)]/m,$$

wobei $B_m(x)$ die Bernoullischen Polynome bezeichnet.

Insbesondere ist für

$m=1$: $f_1 = 0$;

$m=2$: $f_1 = x/24$, $f_2 = 1/24$;

$m=3$: $f_1 = x^2/12$, $f_2 = (-x^2+6x-3)/24$, $f_3 = (2x+1)/24$.

Im allgemeinen ist

$$v_1^{(m)} x^{m-1} + v_2^{(m)} (x-1)^{m-1} + \dots v_m^{(m)} (x-m+1)^{m-1} = f_m(x).$$

(1) Die praktische Behandlung von Integralgleichungen, Erg. angew Math. (Berlin 1952), Bd. I, S. 111.

C. Banica-A. Duma-O. Stanasila (Bukarest): *Some properties of analytic coherent sheaves on Stein spaces.*

The aim of this paper is to prove some properties of analytic coherent sheaves on complex spaces. First we show that on a Stein space such a sheave may be written as a suitable double inductive limit of an inductive system of coherent sheaves which possess a globally finite presentation. Thus, for proving of some properties of an analytic coherent sheave $\mathfrak{F}$ on an Stein space (X, O_X) we are reduced to the case when we may suppose the existence of an exact sequence by the form: $O_X^n \to O_X^m \to \mathfrak{F} \to 0$. For instance, we prove the following: If X is a Stein space and $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \mathrm{Coh}\, X$, then the canonical map $\mathrm{Hom}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \to \mathrm{Hom}(\Gamma(X,\mathfrak{F}), \Gamma(X,\mathfrak{G}))$ is bijective. Also, if X is a Stein space and M a $\Gamma(X, O_X)$ — module, we note the sheave associated to the presheave $U \rightsquigarrow M \otimes \Gamma(U, O_X)$ (U - arbitrary open set in X) and we study the functor „$\sim$". Finally we characterize the morphisms from an arbitrary analytic space in a Stein space.

C. Banica - A. Duma - O. Stanasila (Bukarest): *Some remarks on cohomology of ringed spaces.*

For a ringed space (X,O_X) we note by $(X,O_X)_{red}$ its reduced, whose structural sheaf is $O_X/\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ — the ideal of O_X of all nilpotent sections). If $H^q(X,\mathfrak{F}) = 0$ for any $q \geqslant 1$ and any O_X-module $\mathfrak{F}$, the space X is named cohomologically trivial. We show the following result:

Theorem. Let (X,O_X) be a ringed space and X a denombrable reunion of relative compact open sets. (X,O_X) is cohomologically trivial if and only if $(X,O_X)_{red}$ is so.

As a consequence, we deduce that a preschema is affine if and only if its reduced preschema is affine and the same assertion for the analytic spaces: An analytic space verifies theorem B of *Cartan* if and only if its reduced space has the same property.

C. Banica - A. Duma - O. Stanasila (Bukarest): *The spectrum of a lattice.*

The purpose of the work is to characterize those spaces whose topology is similar to that of preschemas. One defines the notion of the spectrum of a lattice and proves the following: A topological space is *Kolmogorov* in which any irreducible closed set has a generic point if and only if it is the spectrum of a complete lattice. One gives some transit propositions between the properties of a lattice and its spectrum. The announced result is completed by the characterization of the quasi-compact spaces having a basis of quasi-compact open sets; indeed, such spaces are exactly the prime spectrums of some quasi-rings (additive-multiplicative commutative semigroups having the multiplication distributive). Finally we consider some examples: the prime and maximal spectrum of a ring, the open-prime spectrum of a topological ring, the closed-maximal spectrum of a Stein algebra; also we study a little the lattice of the quasi-coherent ideals of a preschema, etc.

K. W. Bauer (Bonn): *Automorphe Lösungen partieller Differentialgleichungen.*

Der Begriff der automorphen Lösungen von partiellen Differentialgleichungen wird als Verallgemeinerung der automorphen Funktionen der klassischen Funktionentheorie eingeführt. Damit gewinnt die Frage der allgemeinen Darstellung solcher automorphen Lösungen, ihre Konstruktion durch geeignete Differentialinvarianten und das Studium ihrer funktionentheoretischen Eigenschaften ein besonderes Interesse. In diesem Zusammenhang werden die Differentialgleichungen

$$(1+\varepsilon z\bar{z})^2 w z\bar{z} + \varepsilon n(n+1) w = 0, \quad n \in \mathbf{N},$$

und

$$D^{n+1} w = 0 \quad \text{mit} \quad D = (1+\varepsilon z\bar{z})^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

betrachtet, die für $\varepsilon = +1$ invariant gegenüber den Kugeldrehungen und für $\varepsilon = -1$ gegenüber den Automorphismen des Einheitskreises sind. Abschließend wird auf eine Möglichkeit der Verallgemeinerung im Falle von partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen komplexen Variablen hingewiesen.

H. Becker (Madison): *Zur Existenz von optimalen stochastischen Steuerungen.*

Im Anschluß an *Fleming-Nisio* (J. Math. Mech. *15*/1966, 777) wird folgende Aufgabe behandelt. Man minimiere die mathematische Erwartung des unterhalb stetigen Funktionals $F[X(t),U(t);t \geqslant 0]$, wobei der stochastische Prozeß $X(t)$ (mit Werten in einem Hilbert-Raum) Lösung der Gleichung:

$$dX(t) = A[t,X(s),U(s);s \leqslant t]dt + B[t,X(s),W(s);s \leqslant t]dW \quad (t \geqslant 0)$$

unter der Anfangbedingung $X = X_-$ $(t \leqslant 0)$ ist. X_- ist ein gegebener Prozeß, W der Wiener-Prozeß. Hier wird das Problem in den Rahmen der Theorie der generalisierten Steuerung gestellt („relaxed control", *L. C. Young-Warga-McShane*), d. h. $U(t)$ ist ein maßwertiger Prozeß. Die Behandlung gliedert sich in

1. Kompaktheit des Raumes der generalisierten stochastischen Steuerung;
2. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung, stetige Abhängigkeit der Lösung von der Steuerung;
3. Existenz einer optimalen Steuerung.

P. B. T. Braumann (Lissabon): *Multiplikation von Mengenklassen.*

Bei gegebenen, aus den Räumen Z_n $(n = 1,2\ldots)$ entnommenen Mengenklassen $\mathbf{A}_n(A_n)$ definiere man $\Pi\mathbf{A}_n$ als den durch die Mengen ΠA_n erzeugten σ-Körper. Dann erstreckt sich die Assoziativität der Mengenmultiplikation auf die Klassenmultiplikation, falls für jedes n die Klasse $\mathbf{A}_n$ höchstens abzählbar viele Mengen enthält, deren Vereinigung gleich Z_n ist. Diese (verallgemeinerte) Assoziativität erlaubt insbesondere jeden σ-Körper $\mathbf{A}_n$ durch irgend eine erzeugende Klasse zu ersetzen und kann auf Grund von Gegenbeispielen ohne die erwähnte Eigenschaft nicht garantiert werden.

P. B. T. Braumann (Lissabon): *Assoziativität und Berandung des Maximalproduktes von endlich vielen Maßräumen.*

Gegeben seien die Maßräume $(Z_n,\mathbf{A}_n,u_n)$ $(n = 1,\ldots,N$ endlich). Es soll die folgende Definition des Maximalproduktes u der u_n gelten: Für jede zu $\Pi\mathbf{A}_n$ gehörige Menge A setze man u gleich der unteren Schranke aller Summen von numerischen Produkten der u_n längs Überdeckungen von A durch höchstens abzählbar viele Produktmengen. Die erforderlichen Herleitungen erfolgen vorteilhaft durch ein von uns schon früher erwähntes und den Integralbegriff vermeidendes Verfahren, das sich hauptsächlich auf einen von uns bewiesenen Satz über σ-Additivität von Inhalten und auf eine leichte Verallgemeinerung der Rechnungen von *Andersen* und *Jessen* stützt. Wir fügen ein Beispiel von Maßräumen mit mehreren Produkten und den Beweis der Assoziativität und der Berandungseigenschaft der Maximalmultiplikation hinzu.

H.-W. Burmann (Göttingen): *Über den Quotienten fastautomorpher Funktionen.*

Die fastautomorphen Funktionen sind, grob gesagt, meromorphe Funktionen in der oberen Halbebene, die sich gegenüber Substitutionen aus der Modulgruppe Γ nahezu invariant verhalten. Sie stehen in einem ähnlichen

Verhältnis zu den automorphen Funktionen (oder Modulfunktionen) wie die analytischen fastperiodischen Funktionen von *H. Bohr* zu den periodischen Funktionen. Die einfachsten fastautomorphen Funktionen nach den automorphen sind die multiplikativen Funktionen. Die ändern sich bei Modulsubstitutionen nur um einen Faktor vom Betrage eins.

Der Quotient zweier fastautomorpher Funktionen ist i. a. nicht fastautomorph, und zwar gilt: er ist genau dann fastautomorph, wenn sich seine Polspuren, das sind sämtliche zu seinen Polen äquivalente Punkte, nicht in der oberen Halbebene häufen und eine kleine zusätzliche Bedingung über das Verhalten des Quotienten in i_∞ und den rationalen Spitzen erfüllt ist. Mit Hilfe der Tatsache, daß eine singularitätenfreie fastautomorphe Funktion konstant ist, läßt sich daraus folgern, daß die Inverse einer fastautomorphen Funktion genau dann wieder fastautomorph ist, wenn sie sich gegenüber einer Untergruppe von endlichem Index in Γ multiplikativ verhält. Schließlich erhält man noch eine Aussage über das Wertverhalten fastautomorpher Funktionen. Die Ergebnisse bleiben gültig für beliebige Funktionsgruppen mit kompaktem Fundamentalbereich anstelle der Modulgruppe.

H. O. Cordes (Berkeley): *Gelfond'sche Theorie und Pseudodifferentialoperatoren.*

Es werden eine Reihe von Operatoralgebren in L^2-Räumen untersucht denen jeweils ein „Symbolhomomorphismus" zugeordnet werden kann, welcher eine vollständige Kontrolle der Fredholm-Eigenschaft erlaubt. Einige dieser Algebren stehen in engem Zusammenhang mit den in letzter Zeit intensiv studierten Algebren von Pseudodifferentialoperatoren verschiedener Autoren (*Kolm-Nirenberg, Hörmander, Calderon, Seeley, Vishik* u. a.). Eine Vielfalt von Anwendungen sowohl in Richtung der allgemeinen Entwicklung als auch in anderer Weise läßt sich anschließen.

R. Delanghe (Leuven): *On some properties of monogene functions with values in a Clifford-algebra.*

In this abstract we wish to communicate the main results we have obtained concerning monogene functions with values in a Clifford-algebra A. The Clifford-algebra A is associated with an n-dimensional vectorspace over R in which a suitable orthogonal basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ is chosen; a function $f: R^n \to A$ is called monogene in a certain open neighborhood $D \subset R^n$,

$$\text{iff } \mathfrak{M}\,[f] = 0 \text{ in } D, \text{ whereby } \mathfrak{M} = \sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} .$$

First of all we wanted to know whether a function that is monogene in an open set D can be developed or not in a series of one or more hypercomplex variables in an open neighborhood of each point belonging to D. We therefore introduced the concept of hypercomplex totally monogene variables, i. e. variables which are monogene and for which every power is monogene. — We then found that a function which is monogene and analytic in an open set, can be written as a function of $(n-1)$ hypercomplex totally monogene variables. Furthermore we proved that a monogene function of the class C^1 in an open set D, is monogene and analytic in D, and this in the case that $\forall\, \varepsilon_a > 0$. We were able to find that result by using a generalised Cauchy-formula which is derived from Stokes' formula on a compact differentiable oriented manifold with boundary.

This theory of functions contains as a special case the theory of analytic functions of a complex variable $z = x + iy$ which is indeed totally monogene ($n=2$). Moreover our theory yields results which are analogous with the theory of regular functions of a quaternion variable as it has been developed by *R. Fueter* in his papers (Comm. Math. Helv. 7, 8). Finally we wish to call attention to the fact that in defining monogene and analytic functions, we only supposed that at least one of the elements ε_α is different from zero, so that, when considering the special cases locally cited, we obtained results which are sometimes quite different from the usual ones in the theories of functions of a complex or quaternion variable respectively.

C. Djaja (Beograd): *Über rekurrente Familien der Bewegungen dynamischer Systeme.*

Es sei R ein metrischer Raum mit dem Abstand ϱ, I die Menge der reellen Zahlen und $F = \bigcup_{\alpha \in J} \{f_\alpha(p,t)\}$ die Familie dynamischer Systeme, wo $p \in R$, $t \in I$ und J die Menge der Indizes ist, so daß jedes $f_i \in F$ übliche Eigenschaften besitzt.

Für einen bestimmten Punkt $p \in R$ bezeichnen wir die Vereinigung $\bigcup_\alpha \{f_\alpha(p,t)\}$ mit F_p und nennen sie Familie der Bewegungen $f_\alpha(p,t)$ dynamischer Systeme. Dann bezeichnen wir mit T_p ($p = \text{const.}$) die Menge $\bigcup_\alpha \{f_\alpha(p,l)\}$ der Trajektorien $f_\alpha(p,l)$ und nennen diese Menge „dynamischer Trichter" der Familie F_p. Wenn nebst p auch t konstant, so heißt die Menge $\bigcup_\alpha \{f_\alpha(p,t)\} = S_t^p$ Durchschnitt des dynamischen Trichters T_p. Sodann bezeichnen wir mit $\tau(A,B)$ die Entfernung, im Sinne von *Hausdorff*, zwischen den Mengen A und B.

Man sagt, eine Familie der Bewegungen F_p sei rekurrent, wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $L(\varepsilon) > 0$ finden läßt derart, daß für je zwei Zahlen $t_1, t_2 \in I$ die Ungleichung $\tau(S_{t_1}^p, S_{t_2+t_0}^p) < \varepsilon$ gilt, wo $0 \leqslant t_0 \leqslant L$.

In der Abhandlung wird zuerst die Äquivalenz zwischen dieser und einer weiteren Definition rekurrenter Familien in kompaktem Raume gezeigt. Dann werden einige Sätze bewiesen, die sich auf kommutative Familien beziehen. Eine Familie F_p von Bewegungen heißt kommutativ, wenn für je zwei Zahlen $t_1, t_2 \in I$, die Identität $f_i(f_k(p,t_2)t_1) = f_k(f_i(p,t_1),t_2)$ gilt, wo f_i und f_k beliebige Bewegungen aus F_p sind. Schließlich werden noch einige Sätze in bezug auf die definierten Begriffe bewiesen.

O. Emersleben (Greifswald): *Über Funktionalgleichungen zwischen Epsteinschen Zetafunktionen gleichen Arguments.*

Bei den Epsteinschen Zetafunktionen p-ter Ordnung mit der Kugelform als quadratischer Form gelangt man von der Funktion, deren sämtliche Parameter verschwinden, durch Multiplikation mit einer Funktion ${}^{(p)}f(s)$ auf die Funktion, bei der nur die oberen Parameter 0 und die unteren 1/2 sind. Für $p = 1, 2, 4$ und 8 sind diese Funktionen explizit bekannt (z. B. für $p = 2$: Math. Annalen *121*/1949, 104, Gl. (8).

Auf die Funktionen, bei denen umgekehrt alle oberen Parameter 1/2, alle unteren 0 sind, gelangt man durch Multiplikation mit der Funktion ${}^{(p)}f(p-s)$. Für $s = 2$ ist dieser Faktor ${}^{(2)}f(2-s) = 2^{s/2}-1$.

Der Beweis kann mittels der Spiegelungsfunktionalgleichung dieser Zetafunktionen geführt werden, bei der Werte der betreffenden Zetafunktion für das Argument s einerseits und $p-s$ andererseits auftreten, und bei der die oberen und unteren Parameter, eventuell unter Zeichenwechsel, vertauscht werden. Man kommt ohne diese Spiegelungsfunktionalgleichungen aus mittels Betrachtungen über Gitterpunktanzahlen. Das Resultat ist u. a. eine Funktionalgleichung zwischen 2 Zetafunktionen mit vertauschten unteren und oberen Parametern, jedoch bei gleichem Argument.

Eine sich dabei ergebende Funktionalgleichung wird insbesondere im Fall $p = 2$ auf die Berechnung des Potentials quadratischer Stücke quadratischer Gitter im Quadratmittelpunkt als Aufpunkt bei einer Kraftfunktion r^{-s} angewandt, wenn r den Abstand des Aufpunkts von dem jeweiligen Bezugspunkt (Gitterpunkt) bedeutet und als Exponent der Kraftfunktion ein $s \neq 1$ angenommen wird. Für $s = 1$ ergibt sich ein einfacher Sonderfall gemäß Math. Nachr. *34*/1967, 40, Gl. (31). Die Ausdehnung der dortigen Untersuchung auf Werte $s \neq 1$ führt auch zum tieferen Verständnis des Falles $s = 1$, des inneren Potentials eines quadratischen Gitters bei Newtonschem Potential.

Eine ausführliche Darstellung erscheint demnächst in den Mathematischen Nachrichten (Berlin).

F. Erwe (Aachen): *Limitierung beschränkter Folgen reeller Zahlen.*

Über der mit der üblichen linearen Struktur (über $\mathbf{R}$) versehenen Menge $\mathfrak{B}$ aller beschränkten Folgen reeller Zahlen werden positiv-homogene subadditive (reellwertige) Funktionale p betrachtet:

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)\ , \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{für alle } x,y \in \mathfrak{B},\ \lambda \in \mathbf{R}^+ .$$

Jedes derartige Funktional p gibt Anlaß zu einem linearen Limitierungsverfahren in $\mathfrak{B}$: Wirkfeld ist die Menge $\mathfrak{B}_p$ derjenigen $x \in \mathfrak{B}$, für die $p(-x) = -p(x)$ ist, ein lineares Teilsystem von $\mathfrak{B}$, über dem p linear ist. Wir sprechen von p-Verfahren und nennen $p(x)$ den p-Limes von $x (\in \mathfrak{B}_p)$. Jedes lineare Limitierungsverfahren in $\mathfrak{B}$ ist ein solches p-Verfahren. Jeder Endomorphismus A von $\mathfrak{B}$ gibt vermittels $p(x) = \overline{\lim}\,(Ax)$ Anlaß zu einem p-Verfahren; die von Toeplitzmatrizen herrührenden Verfahren gehören hierher.

Sei A ein Endomorphismus von $\mathfrak{B}$. Es gibt positiv-homogene subadditive Funktionale p, die für alle $x \in \mathfrak{B}$ neben $p(x) \leqslant \overline{\lim}\, x$

(1) $\quad p(Ax - x) = 0$

erfüllen. Maximal in dieser Art ist

(2) $\quad p(x) = \inf \overline{\lim}\,(\lambda_0 x + \lambda_1 Ax + \ldots + \lambda_k A^k x)$,

wobei das Infimum über alle rationalen λ_i mit $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$ zu erstrecken ist. Andere Darstellungen dieses gleichen Funktionals sind (I = Identität):

$$(3) \qquad p(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{\lim}\left(\frac{A + A^2 + \ldots + A^n}{n} x\right) = \lim_{n\to\infty} \overline{\lim}\left(\left(\frac{I + A}{2}\right)^n x\right) . \qquad (4)$$

Im Spezialfall, daß A der Translationsendomorphismus ist, geht (2) auf *St. Banach* (Banachlimes), (3) auf *G. G. Lorentz* zurück. Die Ergebnisse können verallgemeinert werden, insbesondere dahingehend, aß (1) für alle Elemente A einer Halbgruppe von vertauschbaren Endomorphismen gefordert wird. In diesem Zusammenhang sind Arbeiten von *W. F. Eberlein* und *R. G. Cooke* zu nennen, an die angeknüpft wird.

G. Freud (Budapest): *Untersuchungen über gleichmäßige rationale Approximationen stetiger Funktionen.*

Wir bezeichnen mit $r_n(x)$ eine rationale Funktion n-ten Graes, d. h. einen Bruch, dessen Zähler und Nenner Polynome höchstens n-ten Grades sind. Es sei ferner $f(x)$ eine in $[0,1]$ stetige reelle Funktion und $R_n(f) = \min\limits_{r_n} \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - r_n(x)|$

1. Es sei $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$ und $f'(t)$ habe eine beschränkte Variation $V(f')$. Dann gilt

$$R_n(f) \leqslant \lambda_n V(f') \quad \text{mit} \quad c_1 n^{-2} \leqslant \lambda_n \leqslant c_2 n^{-2} \log^2 n$$

(Verschärfung der Ergebnisse von *P. Szüsz-P.Turán* und *D. Newman*).

Könnte man die obige Abschätzung zu $\lambda_n \leqslant c_3 n^{-2}$ verbessern, dann würde folgen, daß für jedes $f \in \mathrm{Lip}\ 1$ $R_n(f) = o(n^{-1})$ gültig ist (Vermutung von *D. Newman*).

2. Es sei $[0,1] = \bigcup_{j=1}^{k} [\xi_{j-1}, \xi_j]$, die in $[0,1]$ stetige Funktion $f(x)$ sei in jedem einzelnen Teilintervall $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ die r-te Integralfunktion einer Funktion mit beschränkter Variation. Dann gilt $R_n(f) = O(n^{-r-1} \log^2 n)$. (Ein Teil dieses Satzes rührt von *J. Szabados* her).

3. Ist $f(x)$ von beschränkter Variation und $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, dann gilt $R_n(f) = O(n^{-1} \log^2 n)$.

4. Es sei $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, und es gebe endlich viele Ausnahmepunkte $x_1, x_2, \ldots, x_r$, sodaß in jedem abgeschlossenen Intervall, welches keine dieser Ausnahmepunkte enthält, gleichmäßig bezüglich x

$$\lim_{h\to 0} |h|^{-\alpha}[f(x+h) - f(x)] = 0$$

erfüllt ist. Es folgt dann $R_n(f) = o(n^{-\alpha})$.

Es werden auch einige Sätze über rationale Approximationen auf der ganzen reellen Achse angedeutet.

W. Gröbner (Innsbruck): *Durch Umordnung von Lie-Reihen gewonnene Integralformeln zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.*

Die Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen können durch Lie-Reihen dargestellt werden. Diese Reihen konvergieren in einem gewissen Gebiet der Variablen absolut und gleichmäßig und können daher beliebig umgeordnet werden. Dadurch kann man neue Reihendarstellungen gewinnen, welche besonderen Bedingungen angepaßt sind. Die Glieder der umgeordneten Reihen können durch Integrale ausgedrückt werden, was sich für numerische Berechnungen als günstig erwiesen hat (siehe den Vortrag von *G. Wanner*). Schließlich kann man zeigen, daß der Lösungsvektor einer Volterraschen Integrodifferentialgleichung genügt, aus dieser kann man Integralformeln ableiten, die zur Berechnung der Koeffizienten einer Entwicklung nach einem Parameter dienen können.

W. Hazod (Wien): *Wurzeln und Logarithmen in Banachalgebren.*

Ein Hauptproblem der Theorie der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Gruppen ist die Lösung der Frage, unter welchen Bedingungen ein unendlich teilbares Maß Poissonmaß ist, i. e., wann aus der Existenz der Wurzeln $\mu_{1/n}$, $(\mu_{1/n})^n = \mu_1$ die Existenz eines Logarithmus b, i. e. eines Maßes b mit

$\mu_{1/n} = \exp(b/n)$. $n = 1,2\ldots$, folgt. Viele Ergebnisse scheinen nicht wesentlich von der Natur der Maße abzuhängen und sind direkt auf Banachalgebren übertragbar. Der folgende Satz ist für kompakte Gruppen bereits bekannt, wurde von *L. Schmetterer* auf Wahrscheinlichkeitsmaße über beliebigen lokalkompakten Gruppen übertragen und gilt in etwas schwächerer Form in Banachalgebren mit Involution:

Satz. B sei eine Banachalgebra mit Einheit e, $*$ bezeichne die Involution. a_1 sei ein unendlich teilbares Element, i. e. es existieren zu jedem natürlichen n Elemente $a_{1/n} \in B$ mit $(a_{1/n})^n = a_1$, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) $(a_{1/rn})^r = a_{1/n}$ für alle natürlichen n und r, $\|a_{1/n}\| \leqslant 1$

(2) Es gebe ein n_0, sodaß $\|a_{1/n_0} a_{1/n_0}{}^* - e\| < 1$ ist und

(3) Es sei $\lim\sup \|a_{1/n} - e\| < 2$.

Dann gibt es ein $b \in B$ mit $a_{1/n} = \exp(b/n)$ für alle n.

Durch Beispiele läßt sich zeigen, daß dieser Satz insbesondere für Wahrscheinlichkeitsmaße nicht mehr wesentlich verbessert werden kann.

H. Hejtmanek (Wien): *Asymptotic properties of linear transport processes.*

Linear transport processes are defined as a semigroup of bounded linear transformations in a Banach lattice of functions $f(y) \in H : T(t).$, $t \in R^+$ or $t \in I^+$ possessing the following properties:

1) If $f \geqslant 0$, then $T(t)f \geqslant 0$.

2) If $f \geqslant 0$ and $m(E^+) > 0$, $E^+ = (y : f(y) > 0)$, then there exists a t_c not depending of f, such that $T(t)f > 0$ for all $t \geqslant t_c$.

A) The linear Boltzmann operator

$$A. = \mathfrak{v}\,\mathrm{grad}. - \sigma(\mathfrak{v}). + \int k(\mathfrak{v}', \mathfrak{v}).\,d\mathfrak{v}'$$

with $H = L^p(U \times V)$, $\mathfrak{x} \in U$, U a convex and open set in R_3, and $\mathfrak{v} \in V$, $V = R_3$ or S_2, with the usual Lebesgue measure in $U \times V$, is an infinitesimal generator of a semigroup, that is called continuous linear transport process $T(t). = \exp(At)$.

B) Discrete linear transport processes $(t \in I^+)$ are a cyclic semigroup of all powers of one $n \times n$ matrix $T = (T_{ik})$ for $H = R_n$. Every Markov process is such one with the additional property $\sum_{k=1}^{n} T_{ik} = 1$.

The asymptotic behavior of the orbit $T(t)g$, $g \in H$ is studied by use of splitting theorems *(Eberlein, Rieß, Jacobs)* from ergodic theory. Of special interest for applications are critical linear transport processes where a fixed point $f \in H$ exists: $T(t)f = f$.

H. S. Holdgrün (Göttingen): *Ein topologischer Vektorraum aus meromorphen Funktionen.*

Auf dem Diskontinuitätsbereich zu einer Funktionsgruppe wird ein Vektorraum E aus gewissen meromorphen Funktionen betrachtet und mit einer Topologie versehen, durch die er ein lokal konvexer topologischer Vektorraum wird. Man erhält diese Topologie als induktive Limestopologie spezieller Fréchetäume in E, die sogar Banachräume sind, wenn nur die

zur Funktionsgruppe gehörende Riemannsche Fläche kompakt ist. Insbesondere läßt sich durch Zerlegung von E in eine direkte Summe in diesem letzten Fall nachweisen, daß E vollständig ist. Die Zerlegung gelingt mit Hilfe von Poincaré-Reihen. E ist in natürlicher Weise ein Modul für die Funktionsgruppe, und die fastperiodischen Vektoren in E sind gerade die von *Maak* eingeführten fastautomorphen Funktionen. Der Hauptsatz aus der Theorie der fastperiodischen Vektoren liefert einen Hauptsatz über fastautomorphe Funktionen. Als einfachstes Beispiel für E läßt sich der Raum der rationalen Funktionen auf der Zahlenkugel wählen.

H. Hornich (Wien): *Ein Banachraum analytischer Funktionen.*

Für ein konvexes Gebiet G der komplexen Zahlenebene wird die Klasse B der in G regulären Funktionen gebildet, deren Ableitung in G nirgends verschwindet und beschränkte Argumente in G hat. Mit geeignet definierten Operationen und mit einer Norm, die vom Argument der Ableitung abhängt, ist B ein Banachraum. In B ist die Menge S der auf G schlichten Funktionen abgeschlossen. Der Anteil der schlichten Funktionen in B nimmt bei gegebener Norm gegen Null ab, wenn die Norm gegen unendlich strebt.

F. Huckemann (Gießen): *Extremale Zerlegungen dreifach zusammenhängender Gebiete.*

Es sei D ein dreifach zusammenhängendes Gebiet der Ebene mit Randkomponenten C_i, $i = 1,2,3$; k sei die Klasse der Kontinua $K \subset D$ mit der Eigenschaft: $D - K$ enthält drei zweifach zusammenhängende Komponenten $D_i(K)$ derart, daß C_i Randkomponente von $D_i(K)$ ist. $M_i(K)$ sei der Modul von $D_i(K)$. Es werden verschiedene Eigenschaften der Menge

$$m = \{ (M_1(K), M_2(K), M_3(K)); \; K \in k \}$$

untersucht.

H. van Iperen (Delft): *Über die Ermittlung gewisser bester Konstanten in der Approximationstheorie.*

Unter $C[0,1]$ verstehen wir — wie üblich — den linearen Raum der auf dem reellen Intervall $[0,1]$ definierten und stetigen, reellwertigen Funktionen, auf dem die Tschebyscheff-Norm

$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad , \quad f \in C[0,1]$$

gegeben ist.

Sei $\{\lambda_k\}_0^m$ eine Reihe von Funktionen in $C[0,1]$ deren Summe gleich 1 ist, und die außerdem so beschaffen sind, daß jede Linearkombination höchstens endlich viele Zeichenwechsel hat. Ist nun $\{\xi_k\}_0^m$ eine der Größe nach geordnete Reihe verschiedener Punkte in $[0,1]$, dann bildet der durch

$$Lf = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f(\xi_k) \qquad \text{für jedes } f \in C[0,1]$$

definierte Operator L den Raum $C[0,1]$ in sich ab.

Der Stetigkeitsmodul $\omega(f;\delta)$ einer Funktion $f \in C[0,1]$ wird für $\delta > 0$ definiert durch

$$\omega(f;\delta) = \max_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ x,y \in [0,1]}} |f(x) - f(y)|.$$

Für jedes fest gewählte $\delta > 0$ gibt es gewiß eine von f unabhängige Zahl K, derart daß

$$\|f - Lf\| \leq K\omega(f;\delta) \quad \text{für jedes } f \in C[0,1].$$

Zur Ermittlung des Infimums aller solchen Zahlen K wird ein Verfahren hergeleitet, in dem man lineare Programmierung benützt. Auch wird folgendes Lemma verwendet: Jede auf einer endlichen Teilmenge des Intervalls $[0,1]$ definierte Funktion f mit

$$\max_{\substack{1 \leq n \leq 1+1/\delta \\ n \text{ ganz}}} \frac{\omega(f;n\delta)}{n} = 1,$$

kann erweitert werden zu einer Funktion $f^* \in C[0,1]$ mit $\omega(f^*;\delta) = 1$.

S. Jaenisch (Gießen): *Stückweise-lineare Approximation quasikonformer Abbildungen im R^n.*

Für Abbildungen eines Gebietes $G \subset R^n$ auf ein Gebiet $G' \subset R^n$ gilt: (I) Zu jeder stetig-differenzierbaren k-quasikonformen Abbildung f gibt es eine derartige Folge abzählbarer lokal-finiter seiteninzidenter Zerlegungen von G in offene Simplexe, daß durch lineare Interpolation in den Simplexen aus f stückweise-lineare k_m-quasikonforme Abbildungen mit $k_m \to k$ entstehen, die f approximieren im Sinne der kompakt-offenen Topologie. (II) Also ist für $k < k^*$ jede stetig-differenzierbare k-quasikonforme Abbildung approximierbar durch stückweise-lineare k^*-quasikonforme Abbildungen. (III) Wegen (I) ist jede konforme Abbildung approximierbar durch stückweise-lineare k_m-quasikonforme Abbildungen mit $k_m \to 1$.

Für einfach-zusammenhängende Gebiete $G, G' \subset R^2$ gilt sogar:

(1) Nach *Ahlfors* (mit *Beurling*) [1964] ist für $k < \sqrt{3}$ jede k-quasikonforme Abbildung von R^2 auf R^2 approximierbar durch stückweise-lineare quasikonforme Abbildungen. (2) Nach *Agard* [1966] ist für $k^{3,243\ldots} < k^*$ jede k-quasikonforme Abbildung voen R^2 auf R^2 durch stückweise-lineare k^*-quasikonforme Abbildungen approximierbar. (3) Wegen des verallgemeinerten Abbildungssatzes ist für $k > 1$ jede k-quasikonforme Abbildung approximierbar durch stetig-differenzierbare k_m-quasikonforme Abbildungen mit $k_m < k$. (4) Wegen (II) und (3) ist für $k > 1$ jede k-quasikonforme Abbildung approximierbar durch stückweise-lineare k_m-quasikonforme Abbildungen mit $k_m < k$. (5) Also ist für $k > 1$ jede k-quasikonforme Abbildung approximierbar durch stückweise-lineare k-quasikonforme Abbildungen.

Ferner gilt für offene Intervalle $G, G' \subset R^1$:

(i) Nach *Kelingos* [1966] ist jede k-quasikonforme Abbildung approximierbar durch stetig-differenzierbare k-quasisymmetrische Abbildungen. (ii) Wegen (I) und (i) ist jede k-quasisymmetrische Abbildung approximierbar durch stückweise-lineare k_m-quasisymmetrische Abbildungen mit $k_m \to k$.

K.-H. Jansen (Aachen): *Kriterien für das Fehlen quadratisch integrierbarer Lösungen der Differentialgleichung $-\Delta v + q(x)v = \lambda v$ in Außengebieten.*

Durch Verallgemeinerung einer Methode von *E. Wienholtz* gelingt es, elementare Kriterien dafür zu gewinnen, daß eine Lösung $v(x)$ der Differentialgleichung $-\Delta v = f(x,v)$ in G nicht zur Klasse $L^2(G)$ gehört. Für G werden dabei die folgenden drei Fälle betrachtet:

1. G ist der gesamte R_n $(n \geqslant 2)$;
2. G ist der gesamte R_n mit Ausnahme des Punktes $x = 0$;
3. G ist ein Außengebiet, dessen Komplement sternförmig bezüglich des Nullpunkts ist.

$f(x,v)$ braucht nicht linear in v zu sein. — Wir wollen uns auf die Diskussion des Falles beschränken, daß $f(x,v)$ linear in v ist. Dann kann das Problem auch folgendermaßen formuliert werden: Es seien

$$\mathfrak{H} = \{v \mid \int_G |v|^2 dx < \infty\} \quad \text{bzw.} \quad (u,v) = \int_G u\bar{v}\,dx$$

ein komplexer Hilbertraum bzw. das in ihm erklärte skalare Produkt. Der Operator A in $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{H}$ und

$Av = \Delta v + q(x)v$ $\quad$ ($q(x)$ reell, hölderstetig differenzierbar in G) sei symmetrisch. — Es werden nun hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine reelle Zahl λ kein Punkteigenwert von A in $\mathfrak{A}$ ist. Speziell erhält man hinreichende Kriterien für die Leerheit des Punktspektrums von A in $\mathfrak{A}$. Das bekannte Kriterium von *E. Wienholtz* ist als Spezialfall in unseren Ergebnissen enthalten.

H. Kerner (München): *Ein Kriterium für die Inäquivalenz exzeptioneller Singularitäten.*

Es sei W eine projektiv-algebraische komplexe Mannigfaltigkeit und V ein schwach negatives Vektorraumbündel über W mit Faser C^n. *H. Grauert* hat gezeigt: Identifiziert man alle Punkte der Nullschnittfläche von V zu einem Punkt p, so entsteht ein komplexer Raum X, der, wenn $n \geqslant 2$ ist, in p eine Singularität besitzt. Wir bezeichnen dies kurz als exzeptionelle Singularität. Ist X' ein weiterer komplexer Raum, der durch Niederblasen der Nullschnittfläche eines Vektorraumbündels V' über einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit W' entsteht, so kann man aus einem Satz von *K. Stein* über die Fortsetzbarkeit holomorpher Abbildungen folgende Aussage herleiten:

Ist $n \geqslant \dim W' + 2$ und gibt es keine biholomorphe Abbildung von W auf W', so sind die Singularitäten von X und X' biholomorph inäquivalent.

K. Klingelhöfer (Gießen): *Nichtlineare harmonische Randwertprobleme.*

Ist u eine im Einheitskreisgebiet $(|z| < 1)$ harmonische und in $|z| \leqslant 1$ stetige Funktion, deren Radialableitung auf $r = |z| = 1$ der Bedingung

$$\partial u(s)/\partial r = f(s, u(s)) \quad (s = e^{i\varphi})$$

mit vorgegebener stetiger Funktion f genügt, so gilt mit

$$u_0 = u + m_0 = u - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s)\,d\varphi \qquad \left(\int_0^{2\pi} u_0(s)\,d\varphi = 0\right)$$

$$\partial u_0(s)/\partial r = f(s, u_0(s) - m_0) \quad (s = e^{i\varphi}).$$

Es bezeichne H den Hilbertraum der in $|z|<1$ harmonischen Funktionen v mit $\int v(s)d\varphi=0$ und mit endlichem Dirichletintegral, welches Quadrat der Norm in H ist. Für geeignetes f läßt sich jedem $v \in H$ ein Parameter m_v gemäß $\int f(s,v(s)-m_v)d\varphi = 0$ zuordnen und damit ein Operator $\mathfrak{f}_m$ definieren durch $\mathfrak{f}_m v(s) = f(s,v(s)-m_v) \quad (s=e^{i\varphi})$. Durch Multiplikation mit der Neumannschen Funktion und Integration über $|z|=1$ geht die mit $\mathfrak{f}_m$ geschriebene Randwertaufgabe in eine Operatorgleichung

$$\mathbf{P}v \equiv v - \mathbf{N}\mathfrak{f}_m v = 0 \qquad (\mathbf{N} : \partial v/\partial r \to v)$$

in H (bzw. eine modifizierte Hammersteinsche Integralgleichung) über.

Für geeignete Funktionen f ist der Operator $\mathbf{P}$ eine im Sinne von *G. J. Minty* und *F. E. Browder* monotone Abbildung von H in H, so daß die Gleichung $\mathbf{P}v = 0$ (und die Randwertaufgabe) genau eine Lösung besitzt. Gewisse ebene Probleme können durch eine Gleichung mit kontrahierendem Operator ersetzt werden. Man erhält so Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für die Lösung nichtlinearer Randwertaufgaben unter konkreten Voraussetzungen über die Funktion f. Eine Beweisskizze wird durch einige Ergebnisse ergänzt.

W. Köhnen (Aachen): *Störungssätze für die Approximation von Halbgruppenoperatoren.*

Es sei $\{T(t;A); t>0\}$ eine einparametrige Halbgruppe von linearen beschränkten Operatoren der Klasse C_0 von einem komplexen Banachraum X in sich mit A als erzeugendem Operator. In einer Reihe von Arbeiten (vgl. *P. L. Butzer — H. Berens,* Semi-groups of Operators and Approximation, Grundlehren *145*, 1967) sind die Elemente $x \in X$ charakterisiert, die

$$\|T(t;A)x-x\| = O(t^\alpha) \qquad (t\downarrow 0) \qquad (0<\alpha\leqslant 1) \text{ bzw.}$$
$$\|T(t;A)x-x\| = o(t) \qquad (t\downarrow 0)$$

und im Falle gleichmäßig beschränkter Halbgruppen

$$\|(t^{-\alpha}\|T(t;A)x-x\|)\|_{L_*^q} < \infty \quad (0<\alpha<1;\ \leqslant q\leqslant\infty) \text{ oder}$$

$(\alpha=1;\ q=\infty)$ erfüllen. Unter der L_*^q-Norm wird hier die L^q-Norm bezüglich des Maßes dt/t verstanden. Ausgehend von bekannten Störungssätzen für Halbgruppenoperatoren wird nun das Approximationsverhalten von $T(t;A+B)$ in $t=0$ mit dem von $T(t;A)$ in $t=0$ verglichen, wobei B der Störungsoperator ist. Als Resultat ergibt sich mit Hilfe der Theorie der intermediären Räume im Falle gleichmäßig beschränkter Halbgruppen, daß stets $\|(t^{-\alpha}\|T(t;A)x-x\|)\|_{L_*^q}<\infty$ genau dann gilt, wenn $\|(t^{-\alpha}\|T(t;A+B)x-x\|)\|_{L_*^q} < \infty$ ist. Dazu beweist man mit Hilfe der klassischen Funktionalanalysis für die bekannten Störungssätze, daß $\|T(t;A)x-x\| = O(t^\alpha)$ genau dann gilt, wenn $\|T(t;A+B)x-x\| = O(t^\alpha)$ erfüllt ist, jedoch im allgemeinen aus $\|T(t;A)x-x\| = o(t)$ nicht $\|T(t;A+B)x-x\| = o(t)$ folgt. Diese Resultate gestatten zahlreiche Anwendungen auf das Approximationsverhalten der Lösungen von Cauchyschen Anfangswertproblemen. Die erhaltenen Resultate lassen sich teilweise ausdehnen auf die Lösungen Cauchyscher Anfangswertprobleme der Form

$$dx(t)/dt = [A(t)+B(t)]x(t) + f(t);\ 0\leqslant t\leqslant t_0;\ x(0) = x_0 \in X,$$

wobei $A(t)$ für jedes $t\in[0,t_0]$ eine analytische Halbgruppe erzeugt, $B(t)$ eine gewissen Stetigkeitsbedingungen unterworfene Schar von Operatoren und $f(t)$ eine Funktion mit Werten in X ist.

H. König (Saarbrücken): *Über das Minimax-Theorem von John von Neumann.*

Das Minimax-Theorem wird durch sukzessives Spezialisieren aus viel umfassenderen Sätzen erhalten, welche sich andererseits auf äußerst einfache Weise aus den Grundtatsachen der Funktionalanalysis herleiten lassen.

Satz (Korollar zum Satz von *Hahn-Banach):* Es sei E ein reeller Vektorraum und $\theta: E\to R$ ein sublineares Funktional. Es sei $M\subset E$ nichtleer. Dann existiert ein lineares Funktional $\varphi: E\to R$ mit $\varphi\leqslant\theta$ und mit

$$\operatorname{Inf}\{\theta(f): f\in \text{Konvexe Hülle von } M\} = \operatorname{Inf}\{\varphi(f): f\in M\}.$$

Bemerkung: Es sei $M\subset E$ nichtleer und θ-konvex: Zu $u,v\in M$ existiere ein $f\in M$ mit $\theta(f-{}^1/_2(u+v))\leqq 0$. Dann ist

$$\operatorname{Inf}\{\theta(f): f\in \text{Konvexe Hülle von } M\} = \operatorname{Inf}\{\theta(f): f\in M\}.$$

Es sei nun X ein kompakter Hausdorffraum. Wir wenden das Vorstehende auf $E=C(X,R)$ und $\theta(f)=\operatorname{Max} f$ für $f\in C(X,R)$ an und erhalten nach dem Satz von *F. Riesz* das nachstehende Resultat.

Satz: Es sei $M\subset C(X,R)$ nichtleer. Zu $u,v\in M$ existiere ein $f\in M$ mit $f\leqq {}^1/_2(u+v)$. Dann existiert ein Baire-Wahrscheinlichkeitsmaß m auf X mit $\operatorname{Inf}\{\operatorname{Max} f: f\in M\} = \operatorname{Inf}\{\int f dm: f\in M\}$.

Hieraus und aus einem einfachen Lemma, welches den Satz von der Existenz des Schwerpunktes bei Baire-Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem konvexen kompakten Teil eines lokal konvexen Hausdorffraumes erweitert, erhält man sofort ein Korollar, welches das Minimax-Theorem als Spezialfall enthält.

W. Kuich (Michigan): *Über den Konvergenzparameter unendlicher nicht-negativer Matrizen.*

Der Konvergenzparameter R einer unendlichen, nicht-negativen, unzerlegbaren Matrix $T=(t_{ij})$, für die alle Potenzen $T^m = (t_{ij}^{(m)})$ existieren, ist der gemeinsame Konvergenzradius der Potenzreihen $T_{ij}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} t_{ij}^{(m)} z^m$ $(i,j = 1,2,3,\ldots)$.

Die Konvergenznorm λ mit $\lambda = 1/R$ kann dann als Analogon zum dominanten Eigenwert endlicher, nicht-negativer, unzerlegbarer Matrizen aufgefaßt werden.

Es wird gezeigt, daß unendliche Matrizen A und B, für die ein Kommutator X von bestimmter Form existiert, d. h. für die $AX = XB$ gilt, denselben Konvergenzparameter besitzen.

Ferner existiert für eine unendliche Matrix unter gewissen Voraussetzungen ein modifiziertes „charakteristisches Polynom", dessen dem Absolutbetrag nach kleinste Wurzel reell ist und mit dem Konvergenzparameter übereinstimmt.

E. Lammel (München): *Über die Koeffizienten in der Reihenentwicklung von $(s-1)\,\zeta(s)$ nach Potenzen von $s-1$.*

Es werden Eigenschaften der Koeffizienten angegeben, aus denen sich insbesondere Abschätzungen herleiten lassen, welche zeigen, daß die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ in $|s-1|\leqq 1$ keine Nullstelle besitzt.

K. Lehmann (Berlin): *Quadratische Integralgleichungen.*

Wichtige Aufgaben in Physik und Technik führen auf eine Klasse von Integralgleichungen, die *W. Schmeidler* als algebraische Integralgleichungen (a. I. G.) eingeführt hat. Sie sind neben den von *E. Schmidt* betrachteten Integralpotenzreihen ein systematischer Schritt vom Linearen ins Nichtlineare, weil sie in der Fredholmschen Alternative ein wesentliches Moment der linearen Theorie zum Einsatz bringen. Während für Integralpotenzreihen ihrer Natur nach lokale Untersuchungen angemessen sind, lassen sich Integralpolynome (I. P.) auch im großen studieren. Für ein quadratisches I.P.

$$P(y;s) = a_0(s) + a_1(s)y(s) + a_2(s)y(s)^2 + \int_G K(s,t)y(t)\,dt + y(s)\int_G L(s,t)y(t)\,dt + \int_G M(s,t)y(t)^2 dt + \iint_{G\times G} N(s,t_1,t_2)y(t_1)y(t_2)\,dt_1 dt_2$$

[$y(s)$, alle Kerne und Koeffizienten aus dem Hilbert-Raum $H^2(G), H^2(G\times G)\ldots$] läßt sich ein globaler Satz über die Lösbarkeit einer a.I.G. gewinnen, der die in einer a.I.G. steckende „funktionalanalytische von ihrer algebraischen Komponente trennt" und der in einer speziellen Fassung wie folgt lautet: Mit den Fréchet-Differentialen $dP(x,u;s) = a_1u + 2a_2xu + \int Ku + x\int Lu + u\int Lx + 2\int Mxu + \int\int N(xu+ux)$; $\frac{1}{2}d^2P(x,u;s) = a_2u^2 + u\int Lu + \int Mu^2 + \int\int Nuu$ und den mit willkürlichem $P(s)\in H^2$ gebildeten Funktionalen

$$A_p = \int_G P(x;s)p(s)\,ds\,,\quad B_p = \int_G dP(x,u;s)p(s)\,ds\,,\quad 2C_p = \int_G d^2P(u;s)p(s)\,ds$$

sowie dem „Funktionaloperator" $\Phi_p(x,u;s) = A_p dP(x,u;s) - B_p P(x;s)$ *ist* notwendig und hinreichend dafür, daß nach willkürlicher Wahl von $x(s)\in H^2$ $y(s) = x(s) + \vartheta u(s)$ Lösunng ist von $P(y;s) = 0$ oder $u(s)$ nichttriviale Lösung ist von $d^2P(u;s) = 0$ die nichttriviale Lösbarkeit der "Entscheidungsgleichungen" $\Phi_p(x,u;s) = 0$, $d^2\Phi_p(x,u;s) = 0$ $\forall\, p(s)\in H^2$

$$A_p + \vartheta B_p + \vartheta^2 C_p = 0 \qquad \vartheta\in \mathbf{C}$$

Bemerkenswert ist hierbei das Auftreten einer linearen I. G. $\Phi_p(x,u;s) = 0$ Während in Anwendung der Schmidtschen Theorie auf I. P. das Auftreten von Verzweigungen lediglich von $dP(o,u;s)$ abhängt, zeigt es sich, daß sie bei der Behandlung im großen außerdem noch von $d^2P(u;s)$ abhängen.

P. Lelong (Paris): *Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels complexes et applications aux fonctions analytiques.*

Soit E un espace vectoriel séparé et complet sur C; on définit les fonctions analytiques $E\to C$, les fonctions convexes et les fonctions plurisousharmoniques $E\to R$. Si G est un domaine de E, on note les classes correspondantes de fonctions dans G par $A(G)$, $\gamma(G)$, $P(G)$ respectivement. Comme dans le cas classique ($E = C^n$), on a $\gamma(G)\subset P(G)$ et si $f\in A(G)$ on a $\log|f|\in P(G)$. Dans le cas où E est muni d'une involution $x\to\bar{x}$, on a $E = E_1\oplus E_2$, $x = x_1 + ix_2$, $x_1\in E_1$, $x_2\in E_2$, et si $f\in P(G)$ ne dépand que de x_1, on a $f\in\gamma(G_1)$, $G_1\subset E_1$. *Théorème:* si h est une application analytique de $G\subset E$ dans F, où F est un espace vectoriel sur C, et si $f\in P(G')$, où $h(G)\subset G'\subset F$, alors on a $f\circ h\in P(G)$. *Théorème:* si p est une semi-norme sur F, $\log p(h)\in P(G)$. *Théorème.* Soit f_i, $i\in J$, $f_i\in P(G)$ une famille localement bornée supérieurement, $G\subset E$ et soit $F = \sup f_i$, alors pour la régularisée supérieure F^*, on a $F^*\in P(G)$ ce qui étend des résultats récents de *Kiselman* et de *Coeuré*. Résultat analogue pour $G = \lim\sup f_i$, si E est un espace de Fréchet et J un ensemble filtrant à base dénombrable.

Application: Soit Ω un domaine de C^n, et $A(\Omega)$ considéré comme espace de Fréchet; soit η l'ensemble des fonctions holomorphes prolongeables hors

de Ω : ou bien $\eta = A(\Omega)$, ou bien η est un ensemble polaire dans $E = A(\Omega)$. $A(\Omega)$, ou bien η est un ensemble polaire dans

Généralisation aux espaces de Banach du théorème des trois couples de boules et d'un théorème de fonctions implicites donnés par l'auteur au Chap. 6. du cours „Fonctions entères et fonctionnelles analytiques", Séminaire de Mathématiques supérieures, Université de Montréal, été 1967.

E. Makai (Budapest): *Complete orthogonal systems of eigenfunctions of two triangular membranes.*

Let us introduce the notations

$$U^+_{m,n} = \cos mx\ \cos 3^{-1/2}ny,\qquad U^-_{m,n} = \sin mx\ \sin 3^{-1/2}ny,$$
$$V^+_{m,n} = \cos mx\ \sin 3^{-1/2}ny,\qquad V^-_{m,n} = \sin mx\ \cos 3^{-1/2}ny,$$

and

$$u^+_{m,n} = U^+_{n,n+2m} + U^+_{m,m+2n} + U^+_{m+n,m-n}\,,$$
$$u^-_{m,n} = U^-_{n,n+2m} - U^-_{m,m+2n} + U^-_{m+n,m-n}\,,$$
$$v^+_{m,n} = V^+_{n,n+2m} - V^+_{m,m+2n} - V^+_{m+n,m-n}\,,$$
$$v^-_{m,n} = V^-_{n,n+2m} + V^-_{m,m+2n} - V^-_{m+n,m-n}\,.$$

Each of the functions $u^{\pm}_{m,n}$, $v^{\pm}_{m,n}$ satisfies the plane wave equation $\Delta u + \lambda u = 0$ with $\lambda = (4/3)\cdot(m^2 + mn + n^2)$. From now on let m and n denote integers.

Consider the 30^0—60^0—90^0 triangular membrane $y\geqslant 0$, $x\leqslant\pi$, $y\leqslant 3^{-1/2}x$. For this domain a complete set of orthogonal eigenfunctions of the first and second boundary condition problems is given by $\{u^-_{mn}\}$ $(m>n>0)$ and $\{u^+_{mn}\}$ $(m\geqslant n\geqslant 0)$, respectively.

In the case of the equilateral triangular domain $x\leqslant\pi$, $|y|\leqslant 3^{-1/2}x$ one can state the following: a complete set of orthogonal eigenfunctions of the first (second) boundary condition problem is the union of the sets $\{u^-_{mn}\}$ $(m>n>0)$ and $\{v^-_{mn}\}$ $(m\geqslant n>0)$ $[\{u^+_{mn}\}$ $(m\geqslant n\geqslant 0)$ and $\{v^+_{mn}\}(m>n\geqslant 0)]$.

Consider the wave equation $\Delta u + \lambda u = 0$ for a domain D of area A and let L be the length of the perimeter of D. Let further $N^-(\lambda)$ and $N^+(\lambda)$ denote the number of eigenvalues not exceeding λ for the first and second boundary problems, respectively, each eigenvalue conted with proper multiplicity. The conjecture

$$\text{(C)}\qquad 4\pi N^{\pm}(\lambda) = A\lambda \pm L\sqrt{\lambda} + o\,(\sqrt{\lambda})$$

is credited to *H. Weyl.* This was confirmed in 1966 by *N. V. Kuznecov* in the cases when the wave equation can be solved by the method of separating the variables. It can be shown that the asymptotic relation (C) is true for the above mentioned two triangular domains, too.

V. Maric (Novi Sad) und S. M. Shah (Lexington): *Entire functions defined by gap power series and satisfying a differential equation.*

An entire function $f(z)$ is said to be of bounded index, if there exists a nonnegative integer N such that

$$(1) \qquad \max\left\{|f(z)|, \frac{|f'(z)|}{1!}, \ldots, \frac{|f^{N}(z)|}{N!}\right\} \geqslant \frac{|f^{(k)}(z)|}{k!}, \quad k = 0,1,\ldots$$

for every complex number z. The index of $f(z)$ is then defined to be the smallest integer N such that (1) holds for all z.

We give here a method for estimating the index N of the entire function $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{m\nu}$, m positive integer, by proving the following

Theorem: Let $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^{m\nu}$ be an entire function satisfying a differential equation of the form

$$zy^{(k)} + P_1(z)y^{(k-1)} + \ldots + P_k(z)y = 0 \quad , \quad l \geqslant 1$$

where $\quad P_i(z) = \sum_{\nu=0}^{\lambda_i} A_\nu^{(i)} z^{\lambda_i - \nu}, \lambda_i \leqslant l, i = 1,2,\ldots,k,$

If $\quad \dfrac{\{m(n+1)\}!}{mn!} \cdot \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant c^{-m} \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots,$ where $c > 1$

$T = c \log\left(2 - \dfrac{2}{1+c^m(m+1)^m}\right)$, and $l < T \log 2$, then $f(z)$ of is bounded index N and $N < \max(m, n_0)$, where n_0 can be determined.

As an application of the procedure the index of the entire function $f(z) = z^{-k}J_k(z)$ for $0 \leqslant k \leqslant 0{,}2\ l$ has been calculated, and for $k > 0{,}2\ l$ an upper bound for the index has been determined. E. g. the index of $J_0(k)$ is l.

B. Meulenbeld (Delft): *Jacobi and Gegenbauer polynomials as spherical harmonics.*

The Jacobi and Gegenbauer polynomials will be characterized as surface spherical harmonics in q dimensions which are invariant for certain orthogonal transformations.

A Laplace representation of the Jacobi polynomials will be given as an application.

J. Michalicek (Hamburg): *Stabile Maße im n-dimensionalen Raum.*

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ n-dimensionale Zufallsgrößen. Man betrachte die Grenzverteilung der Zufallsvariablen der Bauart $B_k(X_1 + \ldots + X_k)$ wobei B_k ein linearer Operator im R_n ist und $k \to \infty$ gilt. Es sei weiters angenommen, daß die X_i identisch verteilt seien. Man zeigt leicht, daß für diese Grenzverteilung folgende Funktionalgleichung gilt: Es gibt zu jedem $r \in N^+$ einen Operator A_r, sodaß $F^{r*}(t) = F(A_r t)$ gilt. (Der Stern im Exponenten bedeutet die Faltung).

Es wird weiters gezeigt, daß diese A_r eine kommutative Halbgruppe bilden. Je nach Verschiedenheit der Halbgruppe wird nun die Gestalt der Grenzverteilung festgestellt. Unter einer Voraussetzung über die Operatoren B_k wird der Anziehungsbereich gekennzeichnet. Zum Abschluß wird ein Anwendungsbeispiel angegeben.

M. W. Müller (Stuttgart): *Über die Ordnung der Approximation durch die Folge der Operatoren von Meyer-König und Zeller.*

Der n-te lineare positive Operator M_n $(n = 1,2\ldots)$ von *Meyer - König* und *Zeller* ordnet bekanntlich einer Funktion $f \in C[0,1]$ formal die n-te Bernsteinsche Potenzreihe

$$(M_n f)(x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{k} x^k f\left(\frac{k}{k+n}\right) := \sum_{k=0}^{\infty} m_{nk}(x) f\left(\frac{k}{k+n}\right)$$

$(0 \leqq x < 1)$ mit den positiven Gewichten $m_{nk}(x)$ zu. Durch die Festsetzung $(M_n f)(1) := f(1)$ $(n = 1,2\ldots)$ läßt sich die Funktion $M_n f$ stetig bis in den Punkt $x = 1$ hinein fortsetzen. Wir zeigen:

(I) Ist $f \in C[0,1]$ und $\omega(f,\delta)$ der Stetigkeitsmodul von f, so gilt

$$\|M_n f - f\| \leqq 1,(148)\ \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \quad (n = 2,3,\ldots).$$

(II) Ist $f \in C^{(1)}[0,1]$ und $\omega(f',\delta)$ der Stetigkeitsmodul von f', so gilt

$$\|M_n f - f\| \leqq \frac{2(2+\sqrt{3})}{27\sqrt{n-1}}\ \omega\left(f', \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \qquad (n = 2,3\ldots).$$

(III) Die in (I) bzw. (II) gegebenen Approximationsordnungen sind bestmöglich. In (I) läßt sich das Infimum aller Konstanten

$$C > 0 \text{ mit } \|M_n f - f\| \leqq C\,\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \qquad (n = 2,3,\ldots;\ f \in C[0,1])$$

einschränken durch $1 \leqq K \leqq 1$, (148).

Die Ergebnisse (I) und (II) entsprechen inhaltlich den Sätzen von *Popoviciu* bzw. *Lorentz* für Bernsteinsche Polynome. Der Beweis von (III) stützt sich auf eine asymptotische Abschätzung der Gewichte $m_{nk}(x)$, die sich wahrscheinlichkeitstheoretisch als ein lokaler zentraler Grenzwertsatz interpretieren läßt.

G. Neubauer (Heidelberg): *Zur Struktur der Automorphismengruppe einiger Banachräume.*

Es ist bekannt, daß die Automorphismengruppen über den Folgenräumen l_p $(1 \leqq p < \infty)$ und c_0 zusammenziehbar sind.

Andererseits hat *A. Douady* gezeigt, daß dies für $l_2 \oplus c_0$ nicht mehr zutrifft.

Es ist nun möglich, für Folgenräume einige Bedingungen anzugeben, die die Zusammenziehbarkeit der Automorphismengruppe zur Folge haben. U. a. fallen hierunter die zusammengesetzten Räume $l_p(l_q)$, $c_0(l_p)$ und $l_p(c_0)$.

Außerdem ergeben sich für diese Räume besonders einfache Indexsätze für Fredholmoperatoren.

H.-D. Nießen (Köln): *Sätze vom abgeschlossenen Graphen für nichtlineare Abbildungen.*

Banach's Sätze vom abgeschlossenen Graphen und von der offenen Abbildung lassen sich in einem Satz über lineare Relationen mit abgeschlossenem Graphen zusammenfassen. Es wird gezeigt, daß sich dieser Satz in folgender Form auf nichtlineare Relationen übertragen läßt:

Satz 1. Sei f eine gleichmäßig faststetige Relation eines pseudometrischen Raumes in einen vollständigen pseudometrischen Raum. Dann ist f gleichmäßig stetig, wenn der Graph von f abgeschlossen ist.

Dabei heißt die Relation f des uniformen Raumes E (mit dem Nachbarschaftsfilter $\mathfrak{U}$) in den uniformen Raum F (mit dem Nachbarschaftsfilter $\mathfrak{V}$) gleichmäßig stetig (bzw. faststetig), wenn es zu jedem $V \in \mathfrak{V}$ ein $U \in \mathfrak{U}$ gibt derart, daß für jedes y aus dem Wertebereich von f

$$U(f^{-1}(y)) := \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} U(x) \subset f^{-1}(V(y)) \quad (\text{bzw.} \subset \overline{f^{-1}(V(y))}\ ).$$

Satz 1 enthält die genannten Banach'schen Sätze, da jede lineare Relation eines tonnelierten Raumes in einen lokalkonvexen Raum gleichmäßig faststetig ist.

Nennt man f gleichmäßig offen (bzw. fastoffen), wenn f^{-1} gleichmäßig stetig (bzw. faststetig) ist, so gilt

Satz 2: Jede stetige, gleichmäßig fastoffene Abbildung eines vollständigen pseudometrischen Raumes in einen uniformen Hausdorffraum ist gleichmäßig offen.

Ferner werden Modifikationen und Verschärfungen von Satz 1 und Satz 2 angegeben. Z. B. erweist sich jede faststetige Relation eines topologischen Raumes in einen lokalkompakten Hausdorffraum als stetig, wenn ihr Graph abgeschlossen ist.

W. Orlicz (Poznań): *On orthogonally additive functionals.*

Let $(E, \mathfrak{E}, \mu)$ denote a finite measure space with σ-additive non-negative measure μ on a σ-algebra $\mathfrak{E}$ of subsets of an abstract set E. Let us denote by X a linear space of real-valued μ-measurable functions on E, finite a. e. on E, in which a complete F-norm is defined and which satisfy the following conditions: $\chi_E \in X$; if y is μ-measurable on E, $x \in X$ and $|y(t)| \leqslant x(t)$ a. e. then $y \in X$ and $\|y\| \leqslant \|X\|$; $\lim \|x\chi_e\| = 0$, as $\mu(e) \to 0$, for every $x \in X$. A functional $F: X \to R$ is said to be orthogonally additive if $F(x+y) = F(x) + F(y)$ provided that the intersection of supports of x and y is of μ-measure 0. Recently several papers have been appeared which deal with the representation of orthogonally additive functionals in the form

$$(*) \qquad F(x) = \int_E f(x(t), t)\, \mu(dt)$$

on various function spaces X. In the paper: *L. Drewnowsky - W. Orlicz,* On orthogonally additive functionals, Bull. Ac. Pol. (1968) we have established two representation theorems of the form (*). These theorems generalize some theorems of *Friedman - Katz* and *Sundaresan.*

A. Pietsch (Jena): *Ideale von Operatoren in Banachräumen.*

Wir bezeichnen mit L die Klasse aller beschränkten linearen Operatoren zwischen beliebigen Banachräumen und mit $L(E,F)$ die Menge derjenigen Operatoren aus L, die einen festen Banachraum E in einen festen Banachraum F abbilden. Eine Teilklasse A von L heißt Ideal, wenn für die Mengen $A(E,F) = A \cap L(E,F)$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(A) Aus $S, T \in A(E,F)$ folgt $S+T \in A(E,F)$.
(I_1) Aus $T \in L(E,F)$ und $S \in A(F,G)$ folgt $ST \in A(E,G)$.
(I_2) Aus $T \in A(E,F)$ und $S \in L(F,G)$ folgt $ST \in A(E,G)$.

Unter diesem Gesichtspunkt lassen sich viele interessante Operatorenklassen einheitlich betrachten. Beispiele: ausgeartete, vollstetige, kompakte, schwachkompakte, nukleare, absolut-p-summierende und Hilbertsche Operatoren.

R. Rado (Reading): *A set of measure zero containing circumferences of every radius.*

This is a report on joint work with *A. S. Besicovitch.* In the course of solving a problem due to *Kakeya, Besicovitch* constructed a closed plane set of measure zero which contains corresponding to every direction δ, a straight segment of length unity and direction δ (Math. Z. 27/1928). A set with the properties given in the title can be constructed as follows. An annulus A with radii r, R is cut into n subannuli A_i of equal width. Every A_i, except the largest, is moved until it coincides in a specified direction δ_1 from the centre with the largest A_i. Now every A_i, in its new position, is treated in the same way with a new direction δ_2, etc. until a set S is obtained which is the union of n^n annuli of width $n^{-n}(R-r)$. Clearly, S contains circumferences of every radius between r and R. Also, if n is sufficiently large and the directions $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ are equally spaced, then S is of arbitrarily small measure. From here some almost standard procedures lead to a set of the required kind. Details will be published in the Journal of the London Mathematical Society.

A. Reich (Göttingen): *Elliptische Funktionen längs Geraden.*

Es wird untersucht, ob das doppeltperiodische Verhalten der elliptischen Funktionen ein gewisses fastperiodisches Verhalten längs beliebiger Geraden zur Folge hat. Längs Geraden, auf denen mehrere Punkte des Periodengitters liegen, ist die Funktion natürlich periodisch. Im allgemeinen jedoch kommt eine Gerade den Polen der Funktion beliebig nahe, so daß sie längs solcher Geraden unbeschränkt ist. Daher scheidet im allgemeinen schon eine Fastperiodizität im Sinne von *Bohr* aus. Es erweist sich daher, daß eine elliptische Funktion längs einer beliebigen Geraden, auf der kein Pol liegt, Levitan-fastperiodisch ist. Dieses Ergebnis ist für die wesentlich größere Klasse der sogenannten fastelliptischen Funktionen richtig. Wegen der Unbeschränktheit kann man für die Levitan-fastperiodischen Funktionen keine zufriedenstellende Fouriertheorie aufbauen, jedoch hat *B. Ja. Levin* eine Klasse Levitan-fastperiodischer Funktionen angegeben, die eine weitergehende Theorie zulassen. Unter den elliptischen (fastelliptischen) Funktionen gehören genau die Funktionen mit Polen erster Ordnung längs einer jeden Geraden dieser besonderen Klasse an, so daß man sie längs Geraden durch ihre Fourierreihe approximieren kann. Die Fourierreihen längs der einzelnen Geraden lassen sich berechnen und schließen sich zu einer Reihe zusammen.

L. Reich (Bonn): *Das Normalformenproblem bei analytischen Differentialgleichungssystemen in der Nähe einer Gleichgewichtslage.*

Gegeben sei das analytische Differentialgleichungssystem

$$(1) \qquad dw_k/dt = \sum_{1 \leq l \leq n} a_{kl}\, w_l + F_k(w_1, \ldots, w_n), \qquad k = 1, \ldots, n$$

mit $|a_{kl}| \neq 0$ und in Umgebung von $w_1 = \ldots = w_n = 0$ konvergenten Potenzreihen F_k, die mit quadratischen Gliedern beginnen. Γ sei die Gruppe der biholomorphen Koordinatentransformationen

$$(2) \qquad w_k = \sum_{l=1}^{n} b_{kl}\, v_l + T_k(v_1, \ldots, v_n), \qquad k = 1, \ldots, n$$

mit $|b_{kl}| \neq 0$ und in Umgebung von $v_1 = \ldots = v_n = 0$ konvergenten Potenzreihen T_k, die mit quadratischen Gliedern beginnen. Es wird die Frage behandelt: Wie lauten die Normalformen der Systeme (1) gegenüber Γ? Wir machen folgende Voraussetzung:

(3) Für die Eigenwerte r_i von (a_{kl}) gilt: Es existiert eine Gerade g durch den Punkt $r = 0$, so daß alle r_i auf einer Seite von g liegen.

Ergebnisse:

1. Unter der Voraussetzung (3) werden halbkanonische polynomiale Formen von (1) angegeben, d. h. solche, in denen die F_k Polynome sind. Ihre Struktur wird beschrieben. Überblick über alle konvergenten Transformationen T auf halbkanonische Form.

2. Ein Konvergenzbeweis für T ergibt sich durch Reduktion des Problems auf das zuerst von *E. Peschl* betrachtete Normalformproblem für kontrahierende biholomorphe Abbildungen.

3. Ein weiterer, direkter Konvergenzbeweis läßt sich mittels einer Majorantenmethode führen.

4. Diese Majorantenmethode läßt sich auch anwenden in einem Normalformenproblem von *C. L. Siegel* für Systeme (1) gegenüber einer kleineren Gruppe unter allgemeineren Voraussetzungen als (3). Dadurch Vereinfachung der bisherigen Methode. Dabei werden einfache, auch für sich interessante Sätze über lokale analytische Varietäten verwendet.

Ausblick auf ungelöste Fragen.

M. Reichert (Frankfurt): *Über die Lösungsgesamtheit Uryson-Volterrascher Integralgleichungen.*

Auf $C_0([0,1])$ wird der durch $(Ay)(x) = \int_0^x K(x,t,y(t))\,dt$ für y aus $C_0([0,1])$ definierte Volterrasche Integraloperator A betrachtet. Die Kernfunktion A möge dabei so beschaffen sein, daß $C_0([0,1])$ durch A vollstetig in sich abgebildet wird. Es wird behauptet, daß die Fixpunkte der Abbildung $Az = Z$ eine zusammenhängende Menge in $C_0([0,1])$ bilden. Der Beweis dieser Behauptung wird mit Hilfe der Indextheorie von *Leray* und *Schauder* indirekt geführt: Zunächst läßt sich zeigen, daß sich in $C_0([0,1])$ disjunkte, kompakte Mengen durch disjunkte, abgeschlossene, kugelhomöomorphe Umgebungen trennen lassen. Aus der Annahme, die Fixpunktmenge von $Az = Z$ wäre nicht zusammenhängend, folgt, daß für zwei Fixpunkte z_1 und z_2 dieser Abbildung disjunkte, abgeschlossene, kugelhomöomorphe Umgebungen $U(z_1)$ und $U(z_2)$ existieren, in deren Innern sämtliche Fixpunkte von $Az = Z$ liegen. Die Umgebungen $U(z_1)$ und $U(z_2)$ schließen demnach Fixpunktmengen von $Az = Z$ ein, und es läßt sich durch Angabe eines geeigneten Homotopieoperators zeigen, daß der Index dieser Fixpunktmengen auf dem Rand von $U(z_1)$ bzw. $U(z_2)$ gleich 1 ist. Damit läßt sich aus der Indexformel sofort ein Widerspruch herleiten.

J Reinermann (Aachen): *Über Matrix-Limitierungen der einem Fixpunktproblem zugeordneten Picard-Folge.*

(1) Ist E ein komplexer (B)-Raum, $b \in E$, A ein stetiger Endomorphismus von E, und liegt das (kompakte) Spektrum $\sigma(A)$ von A im offenen Einheitskreis K_1, so konvergiert bekanntlich die dem Problem $(I-A)x = b$

zugeordnete Neumannsche Reihe $\sum A^\nu b$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung desselben. Im Falle $\sigma(A) \not\subset K_1$ findet dagegen für wenigstens ein $b \in E$ Divergenz statt. Man kann zeigen: Ist E ein komplexer Hilbert-Raum, A normal, $Re(z) < 1$, $z \in \sigma(A)$ und ist $K_\alpha := \{z | z \in \mathbf{C}, |\alpha z + 1 - \alpha| < 1\}$ eine (dann aufzuweisende) offene Kreisscheibe, welche $\sigma(A)$ enthält, so ist die für beliebige $b \in E$ angesetzte Neumannsche Reihe $\sum A^\nu b$ ggegen das (eindeutig bestimmte) $x \in E$ mit $(I-A)x = b$ E_α-limitierbar.

(2) *Satz.* Vor.: $T = (t_{nk})$ absolut-translative Toeplitz-Matrix; $(E, \|\ \|)$ (B)-Raum; $f: E \to E$ affin und stetig, d. h. $f(x) = Ax + b$, A stetiger Endomorphismus von E, $b \in E$, mit: (i) $\|A^n\| \leqslant M$ $(M \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N})$, (ii) Es gibt $x_0, x \in E$ und eine monotone Teilfolge $\{n_j\}$ von $\mathbf{Z}^+$ mit

$$\lim_{j \to \infty} \{\sum_{k=0}^{\infty} t_{n_j k} \sum_{l=0}^{k} A^l x_0\} = x \text{ im Sinne der schwachen Topologie von } E.$$

Beh.: a) Es ist $f(x) = x$, d. h. $(I-A)x = b$. b) Die Neumannsche Reihe $\sum_\nu A^\nu x_0$ ist stark T-limitierbar gegen x.

(3) Die unter (2) formulierte Aussage erlaubt es, für kontrahierende Abbildungen in strikt-konvexen (B)-Räumen Fixpunktsätze konstruktiver Art abzuleiten.

H. Reitberger (Innsbruck): *Simultane Invarianten von Lie-Operatoren.*

Es werden Kriterien für die Existenz simultaner invarianter Funktionen eines Systems Liescher Differentialoperatoren angegeben und die damit zusammenhängende Frage nach einer Koordinatentransformation zur Linearisierung einer Liealgebra von Vektorfeldern in der Umgebung eines kritischen Punktes behandelt. Im Fall einer halbeinfachen Algebra kann mit jüngsten Ergebnissen von *R. Hermann* bzw. *Guillemin* und *Sternberg* verglichen werden, die eine Problemstellung von *Palais* und *Smale* zum Ausgangspunkt haben.

K. Scherer (Aachen): *Über die Approximationssätze von Jackson, Bernstein und Zamansky.*

Bezeichnet $t_n^*(f)$ das trigonometrische Polynom n-ten Grades bester Approximation einer Funktion $f \in C_{2\pi}$, so sagen die Sätze von *Jackson* und *Bernstein* (und *Zygmund*) aus, daß $E_n(f) = \|t_n^*(f) - f\|_C = O(n^{-\alpha-r})$, $r = 0, 1, \ldots$ und $0 < \alpha \leqslant 1$, äquivalent zu $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}^*\alpha$. Der Satz von *Zamansky* besagt für Polynome bester Approximation, daß aus $E_n(f) = O(n^{-\alpha})$ folgt $\|(t_n^*(f))^{(r)}\|_C = O(n^{r-\alpha})$ für $0 < \alpha < r$. Eine wichtige Rolle spielen hier die Ungleichungen $E_n(f) \leqslant C n^{-r} \|f^{(r)}\|_C$ von *Jackson* und $\|t_n^{(r)}\|_C \leqslant n^r \|t_n\|_C$ von *Bernstein* für trigonometrische Polynome n-ten Grades.

Unter Verwendung allgemeinerer Ungleichungen dieses Typs (*Peetre 1964*)

$$E_n(f) = \inf_{p_n \in P_n} \|f - p_n\|_X \leqslant C n^{-\alpha} \|f\|_Y \text{ und } \|p_n\|_Y \leqslant D n^\alpha \|p_n\|_X, \quad (p_n \in P_n),$$

wobei X ein Banachraum und $P_0 \subset P_1 \subset \ldots$ eine Folge von linearen Unterräumen aus X ist, Y ein belieb. Banachunterraum aus X mit $\cup P_n Y$, kann man diese Sätze in allgemeinerer Form für den Raum X beweisen, sowie

die Umkehrung des Zamansky-Satzes. An die Stelle der Lipschitzräume treten dabei Interpolationsräume von X und Y auf (erzeugt z. B. durch die K-Methode von *Peetre*).

Ferner werden diese Sätze für Approximationsprozesse auf X, die durch eine Operatorenfolge $\{V_n\}$ auf X erzeugt werden, unter entsprechenden Ungleichungen vom Jacksonschen und Bernsteinschen Typ

$$\|V_n f - f\|_X \leqslant C_V n^{-\alpha} \|f\|_Y \quad \text{und} \quad \|V_n f\|_Y \leqslant D_V n^{-\alpha} \|f\|_X$$

bewiesen. Wie Beispiele zeigen, erfaßt man dadurch eine recht weite Klasse von Approximationsprozessen.

L. Schmetterer (Wien): *Über ein Näherungsverfahren.*

Krasnoselski hat 1955 ein Näherungsverfahren für die Lösung von Operatorgleichungen in gleichmäßig konvexen Banach-Räumen gegeben, wenn der Operator kompakt ist und einer Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstanten 1 genügt. Weitere Resultate hat *Schäfer* 1957 hinzugefügt. Es wird dabei nicht verlangt, daß die Lösung eindeutig ist. Fordert man jedoch die Eindeutigkeit, dann läßt sich das Verfahren so modifizieren, daß es für beliebige Banachräume die Lösung liefert.

R. Schnabl (Wien): *Eine Verallgemeinerung der Bernsteinpolynome.*

S. Bernstein hat für eine auf dem Einheitsintervall definierte, reelle Funktion eine Folge von Polynomen erklärt, die eine Reihe interessanter Eigenschaften besitzt. Dieser Ansatz wurde in verschiedenen Richtungen verallgemeinert. So wurde von *D. D. Stancu* für Funktionen auf einem Simplex im R^n eine Folge von Polynomen angegeben, die ähnliche Eigenschaften wie die Bernsteinpolynome besitzt. Die Punkte des Simplex können vermittels baryzentrischer Koordinaten als die möglichen Verteilungen der Masse 1 auf die $n+1$ Eckpunkte aufgefaßt werden. Analog zu dieser Auffassung wird der Raum $K(S)$ der positiven, normierten Radonmaße auf dem kompakten Raum S betrachtet und für gewisse Funktionen auf $K(S)$ Folgen von „Bernsteinpolynomen" erklärt. Die approximationstheoretischen Eigenschaften dieser verallgemeinerten Bernsteinpolynome sind ähnlich denen der gewöhnlichen Bernsteinpolynome. Ein Differentiationsbegriff für Funktionen auf $K(S)$ wird in diesem Zusammenhang erklärt.

A. Schneider (Köln): *Weylsche Grenzkreise und -punkte bei reellen S-hermiteschen Differentialgleichungen im Normalfall.*

Auf einem beliebigen Intervall $\{a,b\}$ heißt das System

$$(1) \quad C_1(x)y'(x) + D_1(x)y(x) = \lambda\{C_2(x)y'(x) + D_2(x)y(x)\}$$

mit reellen stetigen Koeffizientenmatrizen und stets invertierbarem

$$C_1(x) - \lambda C_2(x)$$

ein reelles S-hermitesches System im Normalfall, wenn mit reellen stetigen Matrizen $C_3(x)$, $D_3(x)$ und einer reellen, stetig differenzierbaren, regulären und schiefsymmetrischen Matrix $H(x)$ für alle stetig differenzierbaren u,v eine verallgemeinerte Lagrangesche Identität

$$(2) \quad (C_3v' + D_3v)^*[(C_1-\lambda C_2)u' + (D_1-\lambda D_2)u] - [C_1-\lambda C_2)v' + (D_1-\lambda D_2)v]^*(C_3u' + D_3u) = d[v^*(x)H(x)u(x)]/dx$$

für alle reellen λ erfüllt ist. Dann ist u. a. die Ordnung $n = 2m$.

(1) heißt rechtsdefinit, wenn für stetig differenzierbares u und $a<\alpha<\beta<b$ die reelle Form

$$(3) \quad G_\alpha^\beta(u,u) = \int_\alpha^\beta (C_3u' + D_3u)^*(C_2u' + D_2u)\,dx \geqq 0$$

ausfällt, und normal wenn (3) für nichttriviale Lösungen von (1) sogar > 0 ist. (2) ergibt für Lösungen von (1) bei $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$

$$(4) \quad G_\alpha^\beta(u,u) = \langle u,u\rangle(\beta) - \langle u,u\rangle(\alpha) \;;$$
$$\langle u,u\rangle(x) = u^*(x)\,[-i/(2\operatorname{Im}\lambda)H(x)]\,u(x)$$

Dann gilt der

Satz: Sei $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $a<c<b$, (1) ein reelles S-hermitesches, rechtsdefinites und normales System im Normalfall. Dann kann der Lösungsraum von (1) in m zweidimensionale direkte Summanden N_V derart zerlegt werden, daß gilt:

1) Es gibt mindestens ein $u \in N_V$ mit $G_a^c(u,u) < \infty$
2) Gibt es ein $v \in N_V$ mit $G_a^c(v,v) = +\infty$, so ist für alle $u \in N_V$ mit $G_a^c(u,u) < \infty$: $\langle u,u\rangle(a) = 0$.
3) Ist $G_a^c(u,u) < \infty$ für alle $u \in N_V$, so gibt es eine Basis $u_1^V, u_2^V \in N_V$ und einen Kreis $K_a^V = \{\alpha \mid |\alpha| = r_0,\ r_0 > 0\}$, so daß für alle $w = u_1^V + \alpha u_2^V$ mit $\alpha \in K_a^V$: $\langle w,w\rangle(a) = 0$.

R. Schneider (Bochum): *Eine Bemerkung zum Plateauschen Problem.*

Sei C eine Jordankurve im dreidimensionalen euklidischen Raum und M eine von C berandete Minimalfläche vom Typ der Kreisscheibe. Es wird gezeigt, daß M ein schwaches relatives Minimum des Flächeninhalts liefert, falls die Totalkrümmung $k(C)$ der Kurve C kleiner als 4π ist. Aus der Ungleichung

$$\int |K|\,dO + 2\pi(l + \Sigma\, m_i) \leqslant k(C)$$

(K Gaußsche Krümmung von M, $\{m_i\}$ Ordnungen der eventuell auf M vorhandenen Verzweigungspunkte) und der Voraussetzung $k(C) < 4\pi$ folgt nämlich, daß der Inhalt des sphärischen Bildes der Minimalfläche kleiner als 2π ist, und daraus läßt sich folgern, daß für jede zulässige Normalvariation die zweite Variation positiv sein muß. — In Verbindung mit bekannten Ergebnissen über unstabile Minimalflächen liefert das eine Eindeutigkeitsaussage.

W. Schuster (München): *Einige Beispiele von Erweiterungen komplexer Räume durch kohärente Moduln.*

Ist X ein komplexer Raum, F einen kohärente Modulgarbe auf X, so wird eine Erweiterung von X durch F im wesentlichen durch eine abgeschlossene Einbettung $i: X \to X'$ geliefert, wobei für die Idealgarbe I von X in X' folgendes gilt: $I^2 = 0$, $F \simeq I/I^2|X$. Die Gesamtheit der Erweiterungen von X durch F läßt sich als Menge auffassen; sie wird mit $\operatorname{Ex}(X,F)$ bezeichnet. Man kann $\operatorname{Ex}(X,F)$ die Struktur einer abelschen Gruppe geben. Es wird ein Monomorphismus

$$i_F : \operatorname{Ext}(\Omega_X,F) \to \operatorname{Ex}(X,F)$$

angegeben, der funktoriell in F ist.

Mit Hilfe der Abbildung i_F lassen sich folgende Beispiele angeben:

1. Ein komplexer Raum, der nicht holomorph-konvex ist, aber dessen Reduktion holomorph-konvex ist.

2. Ein komplexer Raum, der nicht holomorph-separabel ist, aber dessen Reduktion ein Gebiet in einem $\mathbf{C}^n$ ist.

W. Schwarz (Freiburg i. Br): *Bemerkungen zu einem Satz der Herren Turán and Clunie über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises.*

Sei E der abgeschlossene Einheitskreis der komplexen Ebene, E^o sein Inneres, $\zeta \in E^o$, $\zeta \neq 0$; sei $\Phi_\zeta : E \to E$ die durch $\Phi_\zeta(z) = (z-\zeta)(1-\bar{\zeta}z)^{-1}$ definierte (bijektive) Abbildung und Φ_ζ^{-1} deren Umkehrabbildung. Einen Satz von *Turán* (1958) verschärfend, zeigte *J. Clunie* (Acta Math. Acad. Sci. Hung. *18*/1967, 165—169) folgenden Satz:

Es gibt eine in E stetige, in E^o holomorphe Funktion $f : E \to C$, deren Potenzreihe $\Sigma\, a_n z^n$ im Punkte $z = 1$ konvergiert, während die Potenzreihe für $f \,.\, \Phi_\zeta$ im $z = 1$ entsprechenden Punkte $\Phi_\zeta^{-1}(1)$ divergiert.

Der Begriff „Konvergenz" braucht also bei konformen Abbildungen nicht erhalten zu werden. Unter Verwendung der Hilfssätze von *Clunie* und des Satzes von *Banach-Steinhaus* wird für den genannten Satz von *Clunie* ein etwas anderer Beweis gegeben, der zu folgender Verschärfung führt:

Sind $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ abzählbar viele vorgegebene Punkte aus E^o, alle $\neq 0$, so existieren überabzählbar viele Funktionen $f : E \to C$, die stetig in E und holomorph in E^o sind, deren Potenzreihen in $z = 1$ konvergieren, während die Potenzreihe für $f \,.\, \Phi_{\zeta_n}$ im Punkte $\Phi_{\zeta_n}^{-1}(1)$ divergiert $(n = 1,2,\ldots)$.

M. Stieglitz (Stuttgart): *Über restringierte Limitierung konvergenter Doppelfolgen durch die Kreisverfahren der Limitierungstheorie.*

Es werden die Kreis(K)-Verfahren der Limitierungstheorie, das sind das Meyer-König-Vermes-, das Euler-Knopp-, das Valiron-, das Taylor- und das Borel-Verfahren für Doppelfolgen betrachtet. Für die K-Verfahren ist folgender Satz bekannt: Ist die transformierte Doppelfolge (S_{mn}) einer zum Wert s konvergenten Doppelfolge $(s_{\mu\nu})$ existent und schließlich restringiert beschränkt, so ist sie auch restringiert konvergent zum Wert s, d. h. es ist

(*) $\lim\limits_{\substack{m,n \to \infty \\ \vartheta \leq m/n \leq \vartheta^{-1}}} S_{mn} = s$ für jedes $0 < \vartheta \leqq 1$.

Im Gegensatz zu diesem Ergebnis wird hier nun nach Bedingungen für die Ausgangsdoppelfolge $(s_{\mu\nu})$ gefragt.

Als Ergebnis wird erstens eine Klasse $\mathfrak{K}_1$ konvergenter Doppelfolgen $(s_{\mu\nu})$ angegeben und gezeigt, daß für alle $(s_{\mu\nu})$ aus $\mathfrak{K}_1$ der Permanenzsatz für restringierte K-Limitierbarkeit gilt. Zweitens wird eine $\mathfrak{K}_1$ umfassende Klasse $\mathfrak{K}_2$ von konvergenten Doppelfolgen $(s_{\mu\nu})$ angegeben, deren K-Transformierte wieder konvergiert, wenn ϑ aus (*) noch einer zusätzlichen Bedingung genügt. Schließlich wird gezeigt, daß die genannte Bedingung in gewissem Sinn bestmöglich ist.

H. Tietz (Stuttgart): *Über Tauber-Bedingungen vom Typ o.*

Die (komplexen) Glieder der Folgen $\{\lambda_n\}$, $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ $(n = 0,1,\ldots)$ seien von einer Stelle an ungleich Null; ferner sei

(1) $\dfrac{q_{n-1}}{p_n\lambda_n} = O(1)$, $\dfrac{q_{n-1}}{p_n\lambda_n}$ reell und monoton von einer Stelle an,

(2) $$\frac{q_n - q_{n-1}}{p_n} = O(1).$$

Ist dann V ein permanentes und additives Verfahren zur Summierung unendlicher Reihen, und ist $\lambda_n a_n = o(1)$ eine Tauber-Bedingung für V, so ist auch

$$\frac{1}{q_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \lambda_\nu a_\nu = o(1)$$

eine Tauber-Bedingung für V. Die Bedingungen (1) und (2) lassen sich durch

$$\frac{q_{n-1}}{p_n\lambda_n} = O(1), \qquad \lambda_n q_n \left(\frac{1}{p_n\lambda_n} - \frac{1}{p_{n+1}\lambda_{n+1}}\right) = O(1)$$

ersetzen. Ähnliche Sätze gelten für Verfahren zur Summierung uneigentlicher Integrale.

W. Trebels (Aachen): *Charakterisierung von Beziehungen zwischen Fouriertransformierten im E_n.*

Es sei E_n der n-dimensionale Euklidische Raum, $x,u,v \in E_n$ mit $\langle x,v\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j v_j$ und $|x| = \langle x,x\rangle^{1/2}$. Wir betrachten für $\alpha > 0$

(*) $|v|^\alpha f^\wedge(v) = \mu^\vee(v)$ für $p = 1$ bzw. $= g^\wedge(v)$ für $1 < p \leqslant 2$,

wobei $f^\wedge$ bzw. $\mu^\vee$ die klassische Fourier- bzw. Fourier-Stieltjestransformierte von $f \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, bzw. $\mu \in M$ (Menge der beschränkten (Borel-) Maße auf E_n) bezeichnet. Dann läßt sich beweisen:
$\|T_\varepsilon^{(\alpha)} f\|_p = \|c_\alpha \int_{|u| \geq \varepsilon} |u|^{-n-\alpha} \Delta_u^{2k} f(x)\, du\|_p = O(1)$ $(\varepsilon > 0)$ ist für $0 < \alpha < 2k$ äquivalent zu (*), wobei c_α eine nur von α, n und k abhängige Konstante ist und $\Delta_u^{2k} f(x) = \sum_0^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} f(x + (k-j)u)$.

Beachtet man, daß man aus (*) $0 < \alpha < 2k$ auf $\|\Delta_u^{2k} f\|_p = O(|u|^\alpha)$ schließen kann, so folgt unmittelbar die n-dimensionale Version eines Satzes von *Titchmarsh:* Ist $f \in L^p$ und $\|\Delta_u^{2k} f\|_p = O(|u|^\alpha)$, so folgt $f^\wedge \in L^q$ mit $p/p-1 + (\alpha\, p/n) < q \leqslant p/p-1$, wobei $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Weiter ergibt sich, daß für $f,g \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ und $\alpha > 0$ $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \|T_\varepsilon^{(\alpha)} f - g\|_p = 0$ äquivalent zu $|v|^\alpha f^\wedge(v) = g^\wedge(v)$ ist. Hieraus folgert man: Ist $|v|^\alpha f^\wedge(v) = \mu^\vee(v)$ im Falle $p = 1$, so ist $|v|^\beta f^\wedge(v)$ für $0 < \beta < \alpha$ Fouriertransformierte einer L^1-Funktion. Für $0 < \beta < \min(\alpha,n)$ läßt sich f sogar als gebrochenes (Riesz-) Integral darstellen. Diese letzte Folgerung enthält die Übertragung eines bekannten Satzes von *H. Weyl* über gebrochene Differentiation von $C_{2\pi}$ auf $L^1(E_n)$. Für weitere Ergebnisse im E_1 siehe *Butzer-Trebels:* Hilberttransformation, gebrochene Integration und Differentiation, No. 1889, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1968.

P. Ucsnay (Bonn): *Bemerkungen zu einem Satz über projektive Familien von Mengen.*

Es soll am Beispiels eines Satzes gezeigt werden, daß der Begriff „maximal — komplett", der in der Bewertungstheorie von *Krull* häufig benutzt worden ist, auch in der Theorie der projektiven Familien seinen Platz hat. Außerdem soll auf einen Weg hingewiesen werden, wie man Sätze, bei denen die Indexmenge der projektiven Familie gewöhnlich als gerichtet vorausge-

setzt wird, ohne diese Voraussetzung beweisen kann. Bei dem gewählten Beispiel handelt es sich um einen Satz *Bourbaki*, in dem Bedingungen aufgestellt werden, unter denen die Limes einer projektiven Mengenfamilie nicht leer ist.

W. Walter (Karlsruhe): *Die Linienmethode bei parabolischen Differentialgleichungen.*

Die (longitudinale) Linienmethode zur Lösung einer parabolischen Differentialgleichung besteht darin, die räumlichen Ableitungen durch endliche Differenzen zu ersetzen, während die zeitliche Ableitung ungeändert bleibt. Dadurch wird ein Randwertproblem übergeführt in ein Anfangswertproblem für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Entscheidend ist die folgende Tatsache: Dieses System von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist quasimonoton, d. h. die rechte Seite der Differentialgleichung besitzt jene speziellen (zuerst von *M. Müller* und *E. Kamke* um 1930 formulierten) Monotonieeigenschaften, die für die Gültigkeit eines Monotoniesatzes notwendig sind. Insbesondere lassen sich Ober- und Unterfunktionen als Lösungen entsprechender Differential-Ungleichungen bestimmen. Die erzielten Ergebnisse liegen in zwei Richtungen. Erstens werden Konvergenzsätze bewiesen, also Bedingungen angegeben, unter denen die Linienmethode-Näherungen gegen die Lösung der ursprünglichen parabolischen Randwertaufgabe (deren Existenz vorausgesetzt wird) konvergieren. Diese Aussagen gelten für eine sehr weite Klasse von nichtlinearen Gleichungen, und sie gehen wesentlich weiter als die bisher in der Literatur bekannt gewordenen Ergebnisse. Zweitens ist es möglich, konstruktive Existenzbeweise zu führen, und zwar wieder für nichtlineare Differentialgleichungen. Auch das Cauchy-Problem kann mit der Linienmethode behandelt werden. Das entsprechende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist dann unendlich und wird als eine gewöhnliche Differentialgleichung in einem Banachschen Folgenraum aufgefaßt.

N. Weck (Bonn): *Die Außenraumaufgaben in der mathematischen Theorie stationärer Schwingungen elastischer Medien.*

Inhomogene, isotrope elastische Medien, die stationäre Schwingungen ausführen, genügen dem System

$$(*) \qquad \partial_j \left(c_{ijkl} \left(\partial_k u_l\right)\right) + \omega^2 \rho\, u_i = f_i \quad , \quad i = 1,2,3$$

mit

$$c_{ijkl}(x) = \lambda(x)\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu(x) \left(\delta_{ik}\, \delta_{il} + \delta_{il}\, \delta_{jk}\right) .$$

Für große $|x|$ seien $\lambda, \mu, \varrho =$ const und $f = 0$. Es wird gezeigt, daß es in einem Außenraum $S = R^3 - \overline{G}$ jeweils genau eine schwache Lösung zum System (*) und der Randbedingung $u|_{\partial S} = 0$ bzw. $n_j\, c_{ijkl}\, \partial_k\, u_l|_{\partial S} = 0$ gibt, die der Ausstrahlungsbedingung genügt.

Beim Eindeutigkeitsbeweis wird an entscheidender Stelle das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit für Lösungen von (*) benötigt. Dieses wird mit Hilfe bekannter Integralschätzungen für Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung bewiesen. Ansonsten verläuft der Nachweis der Eindeutigkeit wie im klassischen, homogenen Fall.

Der Existenzsatz wird durch eine Kombination von Integralgleichungsmethoden und Hilbertraummethoden hergeleitet. Dabei ist wichtig, daß eine

bestimmte Innenraumaufgabe in einem Zwischengebiet $Z_R := K(O,R) - \overline{G}$ keine Eigenlösungen besitzt. Dies wird durch eine geeignete Randbedingung auf $\partial K(O,R)$ erreicht.

Der Existenzsatz wird unter den gleichen schwachen Voraussetzungen an ∂G bewiesen, die auch bei der Behandlung von Innenraumaufgaben mit Hilbertraummethoden gestellt werden müssen.

K.-W. Wiegmann (München): *Ein Satz über komplexe Unterstrukturen.*

Ist (X,O) ein (nicht notwendig reduzierter) komplexer Raum mit abzählbarer Topologie, so ist O eine Garbe von Fréchet-Algebren. Jede Teilmenge F von $O(X)$, der globalen holomorphen Funktionen, definiert eine Äquivalenzrelation auf X und auf dem Quotienten X/F die sogenannte Spektralstruktur S_F: Der Halm $S_{F,y}$ ist die Algebra derjenigen Potenzreihen aus $C[[F - F(y)]]$, die in einer Umgebung der Faser von F über y konvergieren.

Ist F eine eigentliche Äquivalenzrelation, so ist $(X/F, S_F)$ ein F-regulärer und F-separabler komplexer Raum. Hieraus folgt eine Charakterisierung komplexer Unterstrukturen auf (X,O):

Eine Garbe A lokaler Unteralgebren von O definiert genau dann einen komplexen Raum (X,A), wenn gilt: (a) A ist mit der von O induzierten Topologie eine Fréchet-Garbe; und X ist (b) lokal-A-separabel und (c) lokal-A-regulär.

(a) bedeutet, daß $A(U)$ abgeschlossen in $O(U)$ ist für offenes U in X. (b) und (c) besagen, daß zu jedem Punkt aus X eine Umgebung U existiert, so daß die Schnitte aus $A(U)$ die Punkte trennen und jeden Tangentialraum $T_x(U,A)$ für x aus U erzeugen. (a), (b) und (c) sind unabhängige Bedingungen. Nicht hinreichend wären (a), (b') und (c) mit (b'): X ist lokal-A-ausbreitbar, d. h. zu jedem Punkt aus X gibt es eine Umgebung U, so daß die Fasern von $A(U)$ aus isolierten Punkten bestehen.

J. Winkler (Berlin): *Eine Bemerkung über Picard-Mengen ganzer Funktionen.*

In der Arbeit „A generalization of Picards theorem" (Ark. Mat. 3/1958, 45) untersuchte *O. Lehto* Picard-Mengen: Eine Punktmenge E ist Picard-Menge der in der komplexen Ebene meromorphen Funktionen, wenn jede dieser Funktionen im Komplement von E (bezüglich der komplexen Ebene) höchstens zwei Werte ausläßt.

In der genannten Arbeit untersucht *Lehto* insbesondere auch Picard-Mengen ganzer Funktionen endlicher Ordnung und gibt für derartige Picard-Mengen hinreichende Kriterien an, die verschärft werden. Im Zusammenhang mit dieser Verschärfung ergibt sich auch ein in gewisser Hinsicht interessanter Aspekt, der über die eigentliche Verschärfung hinausgeht.

G. Wittstock (Berlin): *Über indefinit symmetrisierbare lineare Abbildungen.*

Es seien X ein linearer Raum über $\mathbf{C}$ und $Q : X \times X \to \mathbf{C}$ eine indefinite Metrik (d. h. eine nichtausgeartete Hermitesche Bilinearform) auf X. Unter einer Abbildung $A : (X,Q) \to (Y,R)$ verstehe man eine lineare Abbildung $A : X \to Y$, zu der es eine adjungierte Abbildung $A^* : Y \to X$ so gibt, daß

$Q(x,A^*y) = R(Ax,y)$ für alle $x \in X, y \in Y$ gilt. Es sei $S(Q)$ die Menge aller Vektorraumtopologien T auf X, für die die Abbildung $Q : (X,T) \times (X,T) \to \mathbf{C}$ stetig ist. Wenn $T_1 \in S(Q)$ und $T_2 \in S(R)$ sind, so bedeute $A : (X,Q,T_1) \to (Y,R,T_2)$, daß $A : (X,Q) \to (Y,R)$ und daß die Abbildung $A : (X,T_1) \to (Y,T_2)$ stetig ist.

Wir betrachten nur Räume (X,Q), für die es eine Banachraumtopologie in $S(Q)$ gibt. Für diese Räume gibt es eine Topologie $T_0(Q) \in S(Q)$ mit folgenden Eigenschaften: $T_0(Q)$ ist normierbar und bezüglich der üblichen Ordnung unter Topologien minimal in der Menge $S(Q)$. Wenn $A : (X,Q) \to (Y,R)$ ist, dann gilt $A : (X,Q,T_0(Q)) \to (Y,R,T_0(R))$. Wenn Q definit ist, dann wird $T_0(Q)$ von der Norm $\|x\|_Q = \sqrt{|Q(x,x)|}$, $x \in X$, erzeugt

Es werden weitere Eigenschaften der Topologie $T_0(Q)$ untersucht.

H. J. Ziegler (London): *Banach-Algebra-wertige analytische Funktionen und Wertverteilung.*

Es sei $x(\cdot)$ eine in $K_R = \{z \mid |z| < R\}$ $(0 < R \leqq +\infty)$ meromorphe Funktion der komplexen Veränderlichen z mit Werten in einer kommutativen Banach-Algebra B. Es wird gezeigt, wie die beiden Hauptsätze der Wertverteilungslehre der komplexwertigen meromorphen Funktionen für derartige vektorwertige Funktionen übertragen werden können. Die angewandte Methode besteht in der Integration der Nevanlinnaschen Ungleichungen über den lokalkompakten Hausdorffschen Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale von B.

P. Zinterhof (Wien): *Zu einem Banachraum von H. Hornich.*

Es wird die funktionalanalytische Struktur eines Banachraumes analytischer Funktionen beleuchtet, der von *H. Hornich* im Zusammenhang mit den schlichten Funktionen betrachtet wurde.

SEKTION III:

Geometrie und Topologie

M. Aigner (Detroit): *Graphs without partial orderings.*

An undirected graph is said to permit a partial ordering if its edges can be oriented in such a way that the resulting directed graph represents a partial ordering of the vertex-set. In 1962 *Gilbert* and *Hoffman* succeeded in characterizing such graphs by means of certain subgraphs which they do not contain. In this paper graphs without partial orderings are analyzed. Theorems are derived concerning minimal configurations, the complementary graph, the linegraph, etc. Further, another Kuratowski-type characterization and connections to the theory of matchings are demonstrated.

O. Baier (München): *Vorführung von Demonstrationsmodellen für Verschneidungskurven von Drehflächen mit Ebenen und Kegeln.*

Die Apparatur besteht aus einer Rotationsvorrichtung zur Erzeugung von Drehflächen und einem Projektor mit verschiedenen Einschubblenden zur Erzeugung von Ebenen und Kegeln. Vorgeführt werden:

Kurven 2. Ordnung mit Ausartungen. (Ebene Schnitte einer Kugel, eines Drehzylinders, eines Drehkegels, eines einschaligen Drehhyperboloids). — Beispiele für Raumkurven 4. Ordnung. (Schnitte eines Drehkegels mit einer Kugel, einem Drehzylinder, einem Drehkegel, einem einschaligen Drehhyperboloid). Durch geeignete gegenseitige Lage der Flächen erhält man Raumkurven mit 0, 1, 2 Doppelpunkten, die man aus verschiedenen Stellungen betrachten kann. Dabei läßt sich beim Auftreten von 2 Doppelpunkten das Zerfallen der Kurven in ein Paar von Kegelschnitten demonstrieren. — Beispiele für Raumkurven 3. Ordnung. Die Achse des Drehkegels und die Achse des einschaligen Drehhyperboloids lassen sich so neigen, daß eine Erzeugende der Fläche mit einer Mantellinie des Lichtdrehkegls zur Deckung kommt; als Restschnitt entsteht eine Raumkurve 3. Ordnung. — Schnitte Torus — Ebene, Torus — Drehkegel. Außerdem können Torusumrisse bei verschiedener Neigung der Drehachse gegen die Projektionsrichtung gezeigt werden.

O. Baier (München): *Über die Trochoidenhüllkurven der Dreh- und Kreiskolbenmaschinen, speziell des NSU-Wankel-Motors.*

Die betreffenden Trochoiden (T) — die Läuferquerschnitte — werden beim Abrollen eines Kreises (R) an einem Kreis (K) von außerhalb (R) gelegenen Punkten durchlaufen. Die Radien der Kreise verhalten sich wie aufeinander folgende ganze Zahlen und der größere Kreis umschließt den kleineren. (R) außerhalb bzw. innerhalb von (K) ergibt Epi- bzw. Hypotrochoiden. Bei Umkehr der Bewegung gleitet (T) als Kurve der Ebene von (K) durch feste Punkte, die „Anliege-" bzw. „Dichtpunkte", und umhüllt die Kurve (H), deren innerer bzw. äußerer Teil die Gegenläuferkontur bildet. (Vgl. hierzu *O. Baier*, Die Kinematik der Dreh- und Kreiskolbenmaschinen, VDI-Bericht *45*/1960, und *F. Wankel*, Einteilung der Rotationskolbenmaschinen, Stuttgart 1963, Bauformenblätter 13—18).

Bezeichnet a den Abstand der Kreismittelpunkte, p den Abstand eines die Trochoide beschreibenden Punktes vom Rollkreismittelpunkt, und ist der Mittelpunkt von (K) Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebene z, so gilt

$$z = a \,.\, e^{i\alpha} + p \,.\, e^{i\alpha/n} \qquad \begin{array}{l} n \text{ ganz, } n > 1 \text{ Epitrochoiden} \\ p > a|n|,\ n < 0 \text{ Hypotrochoiden.} \end{array}$$

Die Hüllkurven (H_n) haben folgende Eigenschaften:

1. Der Mittelpunkt von (R) sei Nullpunkt der Gaußschen Zahlenebenen w und z. Ferner sei durch Ähnlichkeitstransformation p auf den Wert 1 normiert.
$$a^{-2} z^{n-1} (w-z)^2 + n\,(z^{2n}-1)\,(w-z) + z\,(z^n-1)^2 = 0$$
bildet $|z| = 1$ auf (H_n) in der w-Ebene ab.
2. (H_n) und (H_{-n}) sind kongruent.
3. (H_n) ist Hüllkurve der Kreise um $e^{i\varphi}$ mit den Radien $2a|\sin n\varphi/2|$ und somit die durch die Dichtpunkte gehende Schichtlinie der Böschungsfläche einer auf einen Kreiszylinder aufgewickelten Sinuslinie der Periode $4\pi n^{-1}$.
4. Die Gleichung von (H_n) ist in Determinantenform darstellbar. (H_n) hat die Ordnung $4n$ und ist $2n$-zirkular.

G. Baron (Wien): *Asymmetrische Graphen.*

Unter Graph wird ein endlicher Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten verstanden. Ein Graph heißt asymmetrisch, wenn seine Automorphismengruppe die Ordnung 1 hat, sonst heißt er symmetrisch. Jeder Graph X kann durch Einfügen von etwa a Kanten und Weglassen von etwa d Kanten symmetrisiert werden, wobei die Knotenpunktmenge unverändert bleibt. Die kleinste der Zahlen $a + d$ bezeichnet man als Asymmetriemaß $A[X]$ (*P. Erdös-A. Rényi,* Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *14*/1963, 295—315). Die minimale Kantenzahl eines p-punktigen (zusammenhängenden) Graphen mit $A[X] = k$ wird mit $F(p,k)$ $(C(p,k))$ bezeichnet. Für $k = 1$ stammen die Ergebnisse von *L. V. Quintas* (J. Comb. Theory *3*/1967, 57—82), für $k = 2$ wird durch die gefundenen Resultate die Vermutung von *Erdös-Rényi* $F(p,2) = C(p,2)$ widerlegt. Weiters wurden die minimalen Kantenzahlen auch unter der Beschränkung auf Graphen ohne Punkte vom Grad 1 für $k = 1$ und $k = 2$ bestimmt.

D. Biallas (Hamburg): *Topologische schwach-affine Räume.*

Ein schwach-affiner Raum (s. [1]) wird topologisch genannt, wenn Punkt- und Geradenmenge topologische Räume sind, und die Verbindung zweier Punkte sowie die Bestimmung der Parallelen stetige Operationen. Schwach-affine Räume können durch Quasimoduln algebraisch beschrieben werden (s. [1]). Nennt man einen Quasimodul topologisch, wenn auf ihm eine Topologie gegeben ist, für welche die algebraischen Operationen stetig sind, so gilt: Jeder topologische Quasimodul liefert einen topologischen schwach-affinen Raum. Das Umkehrproblem ist für den allgemeinen Fall ungelöst. — Beispiele für topologische Quasimoduln kann man mit Hilfe topologischer Quasikörper und topologischer Fastkörper angeben.

Referenz: [1] *E. Sperner,* Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen. J. reine angew. Math., *204* (1960).

S. Bilinski (Zagreb): *Eine Anwendung der ptolemäischen Matrizen.*

Eine schiefsymmetrische Matrix vom Rang 2 soll eine „Ptolemäische Matrix" heißen. Auf dem Begriff solcher Matrizen kann ein analytisches Modell des projektiven Linienraumes gegründet werden. Dazu werden zuerst zwei Grundbegriffe der Liniengeometrie analytisch erklärt: Eine Gerade ist eine Ptolemäische Matrix g $(n + 1)$-ter Ordnung Zwei Geraden g_1 und g_2 schneiden sich dann und nur dann, wenn auch $g_1 + g_2$ eine Ptolemäische Matrix ist. Auch andere Begriffe der Liniengeometrie werden dann analytisch gedeutet, und es wird gezeigt, daß damit wirklich ein Modell des n-dimensionalen projektiven Raumes gegeben ist. Die entwickelte Methode zeigt sich aber auch gut anwendbar für allgemeine Untersuchungen in der Liniengeometrie.

G. Blind (Stuttgart): *Ein Unterdeckungsproblem.*

Gesucht ist die dichteste Unterdeckung der euklidischen Ebene mit kongruenten Kreisscheiben K_i derart, daß jeder Kreis K_i durch eine Bewegung beliebig weit von seiner Ausgangslage entfernt werden kann. Dabei soll die Bewegung so vor sich gehen, daß die bewegte Scheibe in keiner Lage einen gemeinsamen inneren Punkt mit einer anderen Scheibe hat.

Der Vortrag beschäftigt sich mit der Lösung dieses Problems. Folgendes Ergebnis wird bewiesen: Für die Unterdeckungsdichten $\overline{D}$ aller Kreislagerungen, welche die genannte Bedingung erfüllen, gilt die Abschätzung

$$\overline{D} \leqq \frac{\pi}{\sqrt{3} + \sqrt{15}} = 0{,}56049\ldots \quad .$$

Ein Beispiel mit $\overline{D} = \dfrac{\pi}{\sqrt{3} + \sqrt{15}}$ zeigt, daß diese Abschätzung nicht verbessert werden kann.

Zur Beweisidee: Eine Kreisunterdeckung kann die genannte Forderung nur dann erfüllen, wenn jeder Kreis der Lagerung Zugang zu einer „Abfuhrschneise" hat. Der Flächeninhalt der K_i zugeordneten Dirichletschen Zelle wird als konvexe Funktion von vier Veränderlichen angegeben. Mittels der Jensenschen Ungleichung und unter Verwendung von Bedingungen, denen aus geometrischen Gründen die vier Veränderlichen genügen, läßt sich das arithmetische Mittel der Flächeninhalte der Dirichletschen Zellen nach unten abschätzen.

B. Bollow (Darmstadt): *Metrisch-euklidische und pseudoelliptische Gruppenebenen.*

F. Bachmann hat in [1] einen Aufbau der Geometrie der Ebene gegeben, der weitgehend gemeinsam für die euklidische, elliptische und hyperbolische Geometrie verläuft. Wir legen das gruppentheoretisch formulierte Axiomensystem aus *R. Lingenberg* [2] zugrunde, welches das Axiomensystem aus [1] verallgemeinert. Dabei interessieren wir uns besonders für solche Modelle, die keine metrischen Ebenen im Sinne von [1] sind. — Ein Modell des Axiomensystems aus [2] heißt metrisch-euklidische Ebene, wenn für Geraden a, b, c, d gilt: Aus $a \perp c$, $a \perp d$, $b \perp c$ folgt folgt $b \perp d$. Es werden die metrisch-euklidischen Ebenen charakterisiert, deren Idealebene die euklidische Ebene über dem Körper Q der rationalen Zahlen ist. Diejenigen Modelle, die das Axiomensystem aus [1] nicht erfüllen, lassen sich durch eine

Eigenschaft der Koordinatenmengen aussondern. Die metrisch-euklidischen Ebenen, deren Idealebene die euklidische Ebene über Q ist, erfüllen alle das Axiomensystem aus *E. Sperner* [3]. Es lassen sich aber über quadratischen Erweiterungskörpern von Q metrisch-euklidische Ebenen konstruieren, die keine Modelle von [3] sind. Über euklidischen Körpern und Körpern von Primzahlcharakteristik stimmen die metrisch-euklidischen Ebenen aus [1], [2] und [3] überein. — Im Gegensatz zu dem Axiomensystem aus [1] läßt das Axiomensystem aus [2] auch Modelle (pseudoelliptische Ebenen) zu, die echte Teilebenen von elliptischen Ebenen sind, in denen es aber schon Tripel von paarweise senkrechten Geraden gibt.

[1] *F. Bachmann:* Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. (Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959).

[2] *R. Lingenberg:* Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. I—IV. Math. Ann. *137*/1959, 26—41, 83—106; *142*/1962, 184—224; *158*/1965, 297—325.

[3] *E. Sperner:* Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik. Arch. Math. 5/1954, 458—468.

W. Bos (Heidelberg): *Die Richtigkeit der Ringvermutung bei „guter" Verdickbarkeit.*

E sei die offene euklidische Einheitsvollkugel von $\mathbf{R}^{n-1}$ und B sei eine topologische verdickbare $(n-1)$-Vollkugel des $\mathbf{R}^n$, für die $\overline{B}$ eine abgeschlossene $(n-1)$-Vollkugel ist. Die Verdickbarkeit besagt: es gibt eine topologische Einbettung $F: E \times (-1,1) \to \mathbf{R}^n$ mit $F(E \times \{0\}) = B$. Wir nennen eine topologische Abbildung zwischen zwei offenen Mengen des $\mathbf{R}^n$ nur dann in einem Punkt differenzierbar, wenn in diesem Punkt überdies die Jacobimatrix nicht singulär ist. B heißt gut verdickbar, wenn es eine Verdickung F von B gibt, die in einem (!) Punkt von $E \times (-1,1) \subset \mathbf{R}^n$ differenzierbar ist. Sei $A(\Sigma_1, \Sigma_2)$ diejenige zusammenhängende Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$, deren Rand von den beiden disjunkten, lokalflachen $(n-1)$-Sphären $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbf{R}^n$ gebildet wird. Ein topologischer Raum $A(\Sigma_1, \Sigma_2)$ heiße Pseudoring. Nach der bisher unbewiesenen Ringvermutung sind alle Pseudoringe Ringe, d. h. homöomorph zu $S^{n-1} \times [0,1]$. Wir verweisen auf die ausführliche Behandlung dieser Frage in [1]. Wir zeigen hier u. a., daß $A(\Sigma_1, \Sigma_2)$ ein Ring ist, wenn Σ_i für $i = 1,2$ eine gut verdickbare $(n-1)$-Vollkugel B_i enthält. Das in [2] angegebene hinreichende Kriterium (Lipschitz-Einbettung) ist eine einfache Folge dieses Satzes (s. [2]). Falls die Ringvermutung richtig ist, erfüllt jeder Pseudoring die Voraussetzung unseres Satzes; im andern Fall gibt es Ringe, die die Voraussetzung nicht erfüllen.

[1] *M. Brown-H. Gluck:* Stable structures on manifolds I—III. Ann. Math. *79*/1964, 1—58.

[2] *W. A. Labach:* Note on the annulus conjecture. Proc. Amer. Math. Soc. *18*/1967, 1079.

V. van Bouchout (Löwen): *Drehungen in Strahlenkongruenzen.*

Falls eine beliebige Strahlenkongruenz gegeben ist, ist es immer möglich, hieraus eine Normalkongruenz zu bilden, indem jeder einzelne Strahl um eine entsprechende parallele Achse um 90° gedreht wird. Die Differentialgleichungen, die die Drehachsenkongruenz bestimmen, haben ganz einfache Lösungen.

Wie bekannt, kann durch geeignete Drehungen eine Appell-Kongruenz in eine Normalenkongruenz umgebildet werden. Es wird nun gezeigt, daß ganz ähnlich eine parabolische Kongruenz leicht übergeführt wird in eine Kongruenz mit einer in einen Punkt entarteten Grenzhüllfläche. Die Drehachsen müssen eine spezielle isotrope Kongruenz bilden. In diesem Zusammenhang stellt es sich aber heraus, daß auch bei ganz beliebigen isotropen Achsen der Grenzpunktabstand für jede Kongruenz ungeändert bleibt. Eine parallele isotrope Kongruenz liefert auch ein einfaches Verfahren, um Kongruenzen mit gleichem Grenzpunktabstand zu bestimmen.

Bei diesen Untersuchungen wird ein Cartan-Dreibein auf die gewählte Hüllfläche der Kongruenz aufgesetzt. Hierbei sieht man gleich, daß auf jeder Hüllfläche die Bildlinien der Flächen, deren Kehllinien durch den Mittelpunkt des Strahles gehen, von den Bildlinien der Hauptflächen harmonisch getrennt sind. Die Netze, die je einer dieser Scharen von Regelflächen entsprechen, sind orthogonal, wenn die Hüllfläche eine Minimalfläche oder eine Kugel ist.

E. M. Bruins (Amsterdam): *Komplexsymbolik, Linz 1908 und Quantenmechanik.*

Im Jahre 1908 veröffentlichte *R. Weitzenböck*, k. u. k. Leutnant im Pionierbataillon Nr. 2, Linz a. d. Donau, seine Komplexsymbolik. Er hegte immer die Hoffnung, daß seine Symbolik für die Physik einmal nützlich sein werde, wie seine Tensoranalysis für die Relativitäts- und Invariantentheorie. 1948 konnte ich zeigen, daß sich die Diracschen Gleichungen und Hypothesen sowie die Mesonengleichungen direkt aus den Komplexsymbolen ergeben. Um diese Zeit war die Liniengeometrie so sehr aus dem Interesse gerückt, daß der Rezensent *Taub* der „Mathematical Revues" sich unter Komplexsymbolik nichts anderes als komplexe Zahlen vorstellen konnte und daher sein Weg zum Verständnis blockiert war. Die Beziehungen zwischen Dirac-Matrizen sind identisch mit denen der Kummer-Konfigurationen. Die Unbekanntheit ist daher Ursache des heutigen Formelgestrüpps der Quantentheorie.

G. Burde (Frankfurt): *Dualität in Gruppen Neuwirthscher Knoten.*

Der Außenraum C eines Neuwirthschen Knotens vom Geschlecht g ist ein Faserraum über der S^1 mit einer orientierbaren Fläche F vom Geschlecht g als Faser. Mit der Schreibweise $C = F \times I/\zeta$ (I = Einheitsintervall) soll angedeutet werden, daß C aus $F \times I$ durch Identifikation von $F \times 0$ und $F \times 1$ mittels des orientierungserhaltenden Homöomorphismus $\zeta: F \to F$ entsteht. ζ induziert einen Automorphismus α der Gruppe $\Pi_1(F) \cong G'$ (wo G die Knotengruppe und G' deren Kommutatoruntergruppe bezeichnen) sowie einem Automorphismus von $H_1(F)$, der durch eine $2g \times 2g$-Matrix A beschrieben wird. Es gilt (bei geeigneter Basis)

$$(1) \qquad A^{-1} = FAF^{-1}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix},$$

woraus die bekannte Symmetrie der Alexandermatrix $B = A - tE$ und des Alexanderpolynoms $|A - tE| = \Delta_1(t)$ folgt. In der universellen Überlagerung $\hat{F}$ von F induziert ζ einen Automorphismus $\hat{\alpha}$ des eindimensionalen Homotopiekettenmoduls, der sich durch eine Matrix $\hat{A}$ mit Elementen aus dem

Gruppenring ZG' ausdrücken läßt. Für A ergibt sich eine zu (1) analoge Relation, aus der eine entsprechende Symmetriebeziehung für $\hat{B} = \hat{A} - tE$ folgt. Diese Beziehung geht bei dem Homomorphismus $G \to G/G' \cong Z$ $(\hat{B} \to B)$ in die Alexandersymmetrie über.

L. R. A. Casse (London): *A solution to B. Segre's Problem $I_{r,q}$.*

A finite linear space of dimension r over a Galois field $GF(q)$ is denoted by $S_{r,q}$.

Definition: A k-arc K of an $S_{r,q}$ is a set of k points of the $S_{r,q}$, no $r+1$ of which are linearly dependent, $k \geqslant r+1$.

Problem $I_{r,q}$: For given r and q, what is the maximum value of k, denoted by $|k|$, for which k-arcs exist in $S_{r,q}$? And what, precisely, are the k-arcs corresponding to such a value of k?

B. Segre has produced the following answers:

(i) The case q odd: (a) If $r = 2,3,4$ then $|k| = q+1$. (b) If $r > 4$, then $|k| \leqslant q+r-3$. (c) In $S_{2,q}$, every $(q+1)$-arc is a conic. (d) In $S_{3,q}$, every $(q+1)$-arc is a twisted cubic.

(ii) The case q even: (a) If $r = 2$, then $|k| = q+2$. (b) If $r > 2$, then $|k| \leqslant q+r$.

We define a tangent line t at a point P of a k-arc K of an $S_{3,q}$ as a unisecant line through P such that any plane containing t has at most one further point in common with K. We prove, under the hypothesis that q is even: (a) If $r = 3$ or 4, $q \geqslant r+1$, then $|k| = q+1$. (b) The tangent lines to a $(q+1)$-arc of an $S_{3,q}$ are the generators of a hyperbolic quadric. (c) If $r > 4$, $q \geqslant r+1$, then $|k| \leqslant q+r-3$.

Y. Chen (Bochum): *Eine Kennzeichnung der pseudoeuklidischen Kreisgeometrie.*

Die pseudoeuklidische Kreisgeometrie $A(\mathfrak{K})$ wurde von *W. Benz* (J. rein. angew. Math. 1968) bzw. *G. Kaerlein* (Diplomarbeit Bochum 1968) durch Inzidenz- zusammen mit Transitivitätseigenschaften der Automorphismengruppe bzw. mit einem Schließungssatz gekennzeichnet. Wir axiomatisieren sie nun auf Grund von Polaritätsforderungen.

Eine mit einer reflexiven und symmetrischen Berührrelation versehene Menge $\mathfrak{L}$ wird Liemenge genannt, wenn gelten: (L0) Es gibt $x,y,z \in \mathfrak{L}$ mit „x berührt y" und „z berührt weder x noch y"; (L1) Zu $x,y,z \in \mathfrak{L}$ mit „x berührt y und z" und „y berührt z nicht" existiert genau ein t, das x nicht berührt, wohl aber y und z; (L2) Zu $x,y,z \in \mathfrak{L}$ mit „x berührt y" existiert t, das x,y und z berührt.

Jede Berührreihe ist eine maximale Menge sich paarweise berührender Elemente. Eine Sekantenebene ist eine Teilmenge von $\mathfrak{L}$ der Art, daß sie mit jeder Berührreihe genau ein Element gemeinsam hat. Unter einer Tangentialebene $e[x]$ versteht man die Gesamtheit aller Elemente, die x berühren. Zwei Sekantenebenen e_1, e_2 heißen konjugiert, wenn $x,y \in e_1$ und $t,u \in e_2$ existieren mit „x und y berühren t und u". Ebenen $e[x]$ und e' sind konjugiert, wenn $x \in e'$ gilt. Drei Ebenen werden konjugiert abhängig genannt, wenn eine der drei von den anderen zwei konjugiert abhängig ist, sonst konjugiert unabhängig. e_1 heißt von e_2 und e_3 konjugiert abhängig, wenn „e und e_1 sind konjugiert" aus „e ist konjugiert zu e_2 und zu e_3" folgt.

Satz: Die Klasse der Geometrien $A(\mathfrak{K})$, $\mathfrak{K}$ ein kommutativer Körper der Charakteristik ungleich zwei, ist identisch mit der Klasse der Liemengen mit (PEO). Drei verschiedene und paarweise nicht berührende Elemente aus $\mathfrak{L}$ bestimmen genau eine Sekantenebene (PE1). Zu drei konjugiert unabhängigen Sekantenebenen existiert genau eine Ebene, die zu allen drei konjugiert ist.

L. Danzer (Göttingen): *Vergleiche von Teilmengen des R^n auf Grund der aus ihren Translaten bestehenden Überdeckungen bzw. Packungen.*

Ist $A \subseteq \mathbf{R}^n$, so sei $\mathfrak{C}(A) := \{C \mid C + A = \mathbf{R}^n\}$; schreibt man statt $C + A$ $\{c + A \mid c \in C\}$, so stellt sich $\mathfrak{C}(A)$ als die Menge der Überdeckungen des $\mathbf{R}^n$ mit Translaten von A dar. Herr *Groemer* hat 1961 gezeigt: Ist $n \geqslant 2$, K ein konvexer Kegel, aber Z ein zentralsymmetrischer konvexer Körper, so ist $\mathfrak{C}_d(K) \neq \mathfrak{C}_d(Z)$ (Der Index d bedeute, daß alle C diskret, der Index g, daß sie Gitter sein sollen.). Es zeigt sich, daß sogar gilt — und zwar für beliebige Mengen A,B —: Ist $\mathfrak{C}(A) \subseteq \mathfrak{C}(B)$, so liegt A in einem Translat von B. Folglich impliziert $\mathfrak{C}_d(A) = \mathfrak{C}_d(B)$, daß $\mathrm{int}(A)$ in einem Translat von $\mathrm{cl}(B)$ liegt und umgekehrt. Jeder konvexe Körper K ist also durch $\mathfrak{C}_d(K)$ bis auf Translationen eindeutig bestimmt. Das Entsprechende gilt für $\mathfrak{C}_g(K)$ nicht mehr. Ob allgemein $\mathfrak{C}_g(K) \subseteq \mathfrak{C}_g(K^*)$ gilt $(K^* := {}^1/_2[K + (-K)])$, ist offen; immerhin gibt es symmetrische konvexe Körper X, Z mit $\mathfrak{C}_g(X) \cap \mathfrak{C}_g(Z) \not\subseteq \mathfrak{C}_g({}^1/_2[X + Z])$.

Bezeichnet man analog mit $\mathfrak{P}(A)$ die Menge der aus Translaten von A bestehenden Packungen (d. h. $\mathfrak{P}(A) := \{P \mid p,q \in P$ und $p \neq q$ implizieren $(p + A) \cap (q + A) = \emptyset\}$), so ist bekanntlich $\mathfrak{P}(K) = \mathfrak{P}(K^*)$, wenn K konvex ist (*Minkowski*); und dies war natürlich der Ausgangspunkt der Untersuchungen. Unter Verzicht auf die Konvexität ergibt sich unter anderem: $\mathfrak{P}(A) \subseteq \mathfrak{P}(B)$ ist äquivalent mit $A^* \cup \{o\} \supseteq B^* \cup \{o\}$. Ist A^* ein Sternbereich bezüglich des Nullpunktes o, so setzt sich diese Äquivalenz sogar zu $\mathfrak{P}_g(A) \subseteq \mathfrak{P}_g(B)$ fort. Schließlich ist allgemein $\mathfrak{P}(A) \supseteq \mathfrak{P}(A^*) \supseteq \mathfrak{P}(\mathrm{conv}(A))$ und $\mathfrak{P}(A) = \mathfrak{P}(\mathrm{conv}(A))$ genau dann, wenn A^* konvex ist.

L. Dočkal (Zagreb): *Die Striktionslinienfläche eines Büschels von Regelflächen zweiten Grades.*

Jede Regelfläche zweiten Grades H enthält zwei Striktionslinien s, die, wie bekannt, vierter Ordnung zweiter Art sind. Diese zwei Kurven sind zum Flächenmittelpunkt symmetrisch und die Verbindungsgeraden so zugeordneter Punktepaare bilden einen rationalen Kegel vierter Ordnung K, dessen Doppelerzeugenden die Flächenachsen sind. Die Erzeugenden dieses Kegels K sind die zu den zugeordneten Zentralebenen konjugierten Durchmesser der Fläche H.

In einem Regelflächenbüschel (H) ist jeder Fläche H je ein Kegel K eindeutig zugeordnet. Diese Kegel K bilden ein System und es wird bewiesen, daß jeder Raumpunkt deren fünf enthält. Die Striktionslinien der Flächen eines Büschels (H) bilden eine Fläche S, die von der vierzehnten Ordnung ist. Da jeder Punkt einer Geraden je eine Fläche H und fünf Kegel K enthält, wird durch das Chaslessche Prinzip bewiesen, daß es auf jeder Geraden vierzehn Treffpunkte der zugeordneten Regel- und Kegelflächen gibt. Auf Grund dessen schließt man, daß die Striktionslinienfläche von der vierzehnten Ordnung ist. Die Grundkurve des Flächenbüschels (H) ist fünffache Kurve und der Scheitelort ist Doppelkurve dieser Fläche S.

K.-H. Elster (Ilmenau): *Zu Verallgemeinerungen von speziellen Punktverwandtschaften.*

Unter Berücksichtigung von Untersuchungen von *E. Müller, W. Kautny* und *W. Wunderlich* werden zwei spezielle Punktverwandtschaften betrachtet und verallgemeinert.

1. Die im R_3 definierte „axiale Inversion" wird zu einer R_{n-2}-Punktverwandtschaft von einem $(n-2)$-dimensionalen linearen Zentralraum aus verallgemeinert. Es wird auf mehrere Möglichkeiten der Definition dieser Transformation, Inversion I_n^{n-2} genannt, hingewiesen.
2. Der „lineare harmonische Umschwung", der sich aus einer harmonischen (i. a. gedämpften) Schwingung auf zueinander parallelen Geraden beliebiger Richtung und einer Rotation dieser Geraden um einen linearen $(n-2)$-dimensionalen Unterraum des R_n zusammensetzt, enthält den im R_3 behandelten Umschwung auf koaxialen Zylinderflächen als Sonderfall.

Die analytische Darstellung im R_n wird ergänzt durch eine konstruktive Behandlung im R_4 unter Verwendung eines speziellen Zweibildersystems nach *H. Dallmann*. Klassifizierende und gemeinsame Gesichtspunkte sowie Eigenschaften der Punktverwandtschaften werden angegeben.

G. Fischer (München): *Steinsche holomorphe Faserbündel.*

Es bezeichnen B, X und Y reduzierte komplexe Räume, G eine komplexe Liegruppe.

Satz 1. Sei $\pi: B \to X$ ein holomorphes Faserbündel mit Faser Y und Strukturgruppe G. Für eine Zusammenhangskomponente Y' von Y sei $G' = \{g \in G : g(Y') = Y'\}$. Dann gilt: Sind X und Y Steinsch und hat G' endlich viele Zusammenhangskomponenten, so ist B Steinsch.

Ein komplexer Raum Y heißt Hilbertsch, wenn es einen Hilbertraum $H \subset \mathfrak{O}(Y)$ gibt, so daß gilt: i) Y ist H-separabel und H-konvex; ii) für jeden biholomorphen Automorphismus f von Y ist $f^*(H) \subset H$, wobei $f^*: \mathfrak{O}(Y) \to \mathfrak{O}(Y)$ den durch f induzierten Automorphismus der Funktionenalgebren bezeichnet.

Satz 2. Sei $\pi: B \to X$ eine lokaltriviale holomorphe Faserung mit Faser Y. Ist X Steinsch und Y Hilbertsch, so ist B Steinsch.

P. Funk (Wien): *Über zweidimensionale Geometrien mit geradlinigen Extremalen und konstantem Krümmungsmaß.*

Diese Geometrien können auch dadurch gekennzeichnet werden, daß die Sehnen konzentrischer Kreissektoren sich in einem Punkt schneiden. Im Anschluß an diese zweite Definition wird eine anschauliche Übersicht für die verschiedenen Fälle gegeben, wo für das Krümmungsmaß K gilt: $K > 0$, $K < 0$, $K = 0$ und je nachdem, ob das starke oder das schwache Monotonieaxiom gefordert wird ($AB = BA$, $AB \neq BA$). Kennzeichnung der Geometrien mit geradlinigen Extremalen, bei denen die Äquidistanten zu Geraden wieder Gerade sind.

Geometrische Deutung des Legendreschen Kriteriums. Kürzeste Verbindung zweier Punkte A,B im Falle, wo die Gerade AB eine schwache Extremale ist. Über die Horizyklen im Falle $K = 0$.

O. Giering (Stuttgart): *Die konstant gedrallten Strahlflächen 4. Grades mit einer reellen Torsallinie.*

Durch die von *H. Brauner* 1959 und 1960 angegebenen notwendigen Bedingungen dafür, daß eine windschiefe Fläche konstanten Drall besitzt, wurde die Ermittlung bestimmter Flächen dieser Art wesentlich erleichtert. Besonderes Interesse fanden konstant gedrallte algebraische Flächen bestimmten Grades, die also zugleich einer differentialgeometrischen und einer algebraischen Bedingung genügen müssen. So konnte *H. Brauner* eine 1924 von *J. Krames* gefundene Cayleysche Strahlfläche 3. Grades als einzige Fläche 3. Grades mit konstantem Drall nachweisen und unter den Strahlflächen 4. Grades alle konstant gedrallten Netzflächen sowie alle Flächen mit reduzibler Fernkurve angeben. Dabei ergab sich genau eine konstant gedrallte Netzfläche 4. Grades, die wie alle Flächen konstanten Dralls nur bis auf Ähnlichkeiten bestimmt ist. Die Ermittlung sämtlicher konstant gedrallten windschiefen Flächen 4. Grades ist jedoch bis heute nicht gelungen. Dagegen ist es unter Voraussetzung einer reellen Torsallinie möglich, diese Flächen alle anzugeben.

P. Gruber (Wien): *Durchschnitte translationsgleicher konvexer Körper.*

Nach *Rogers* und *Shephard* kann man die Simplexe des n-dimensionalen euklidischen Raumes R^n durch folgende Eigenschaften kennzeichnen: Ist C die Klasse der konvexen Körper des R^n mit inneren Punkten, so ist $K \in C$ genau dann ein Simplex, wenn es zu jedem $x \in R^n$, für das $K \cap (K + x) \in C$ ist, eine reelle Zahl $s \geqq 0$ und ein $y \in R^n$ gibt mit $K \cap (K + x) = sK + y$. Dieser Satz legt mehrere Verallgemeinerungen nahe. Es zeigt sich, daß man die Simplexe durch die obige Eigenschaft innerhalb der Klasse der kompakten Teilmenge des R^n mit inneren Punkten charakterisieren kann und bei Vernachlässigung von Randpunkten in noch weiteren Klassen. Weiters ist es möglich, eine Folge $x_1, x_2, \ldots \to o$ von Punkten aus R^n anzugeben, sodaß $K \in C$ genau dann ein Simplex ist, wenn für alle hinreichend großen i Zahlen $s_i \geqq 0$ und Punkte $y_i \in R^n$ vorhanden sind, für welche $K \cap (K + x_i) = s_i K + y_i$ gilt. Hält man K fest, so kann man genauere Aussagen machen.

R. Schneider hat die Frage angeschnitten, welche Körper $K \in C$ durch andere Relationen zwischen $K \cap (K + x)$ und K ausgezeichnet werden. In diesem Zusammenhang gilt: $K \in C$ ist genau dann eine direkte lineare Summe von Simplexen, wenn es zu jedem $x \in R^n$ mit $K \cap (K + x) \in C$ eine affine Transformation σ gibt mit $K \cap (K + x) = \sigma K$.

R. Halin (Köln): *Minimale n-fach zusammenhängende Graphen.*

Es wird die Struktur solcher n-fach zusammenhängender Graphen untersucht, die nach Streichung einer beliebigen Kante stets $(n-1)$-trennbar werden. Unter anderem wird gezeigt, daß ein solcher Graph beliebig viele Ecken n-ten Grades enthalten muß, wenn n oder der Maximalgrad der Ecken des Graphen hinreichend groß ist. Für $n = 3$ ergeben sich einige Verschärfungen der Theorie der dreifach zusammenhängenden Graphen von *Tutte*.

E. Harzheim (Köln): *Ein Satz über endlich färbbare Graphen.*

Es sei G eine Menge mit einer symmetrischen Relation R, und der Graph (G,R) sei mit n (eine nat. Zahl) Farben färbbar. Die Eckenmenge G sei wohlgeordnet; der Einfachheit halber können wir annehmen, daß G ein Abschnitt der Ordinalzahlreihe ist: $G = \{\xi \mid \xi < \lambda\}$. Jeder zulässigen Färbung von

(G,R) mit n Farben ($\in \{0,1,\ldots,n-1\}$) entspricht also eine Belegung von G mit Ziffern $0,1,\ldots,n-1$, also ein Element aus $n((\lambda))$ (= Menge aller Folgen der Länge λ von Ordinalzahlen $< n$). Da $n((\lambda))$ bezüglich der lexikographischen Ordnung nach ersten Differenzen mit einer Totalordnung $<$ versehen ist, haben wir in der Menge F aller zulässigen Färbungen von (G,R) eine natürliche Totalordnung $<$. Es folgt dann, daß F bezüglich $<$ ein erstes und ein letztes Element hat und daß F ohne Lücken ist. Anders formuliert: F bildet bezüglich der Ordnung $<$ einen vollständigen Verband. Speziell gibt es also ausgezeichnete Färbungen, z. B. die lexikographisch kleinste.

K. Havlíček (Prag): *Zur Geometrie der Punktkonfigurationen.*

Es sei M eine nicht leere Menge, $\mathfrak{M}$ die Gruppe aller Transformationen der Menge M und $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{M}$; ist $x \in M$, $\tau \in \mathfrak{G}$, dann bezeichnen wir mit $y \in M$ das zugehörige Bild von x. Für alle $\tau \in \mathfrak{G}$ bekommt man auf diese Weise die Gesamtheit der Elemente $y \in M$, die man Verzweigung des Punktes x nennt. — Verschiedene Eigenschaften solcher Verzweigungen werden durch Beispiele näher erläutert, wo $\mathfrak{G}$ eine Gruppe von Kollineationen der projektiven Ebene M ist, zum Beispiel die Tetraedergruppe oder die Gruppe der automorphen Kollineationen der kubischen Kurven. Einige dieser Konfigurationen werden konstruktiv beschrieben.

F. Hohenberg (Graz): *Die Doppeltangenten und Haupttangenten des Torus.*

Einige Eigenschaften der von den Doppeltangenten und Haupttangenten des Torus gebildeten Strahlkongruenzen folgen aus der Theorie der Flächen 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt. Weitere Eigenschaften ergeben sich durch Untersuchung der Drehflächen 2. Ordnung und anderer Regelflächen, die in diesen Strahlkongruenzen enthalten sind. Eine besondere Rolle spielen sechs von Haupttangenten des Torus gebildete Drehparaboloide; zwei von ihnen sind beim Spindeltorus reell.

Durch einen Raumpunkt gehen 4 Doppeltangenten und 12 Haupttangenten. Realitätsverhältnisse und Zusammenrücken richten sich nach der Lage des Punktes zu den beiden Drehflächen 2. Grades, deren Meridiane die Meridiankreise des Torus hyperoskulieren, ferner nach der Lage des Punktes zu den Flachkreisebenen, zum Loxodromenkegel und zum Torus selbst. Es können bis zu zweimal 2 Doppeltangenten und bis zu 8 Haupttangenten zusammenrücken. Daraus folgt eine Diskussion der beim Parallelriß des Torus (Toroide) und beim Zentralriß des Torus auftretenden Doppelpunkte und Spitzen. Zum Beispiel kann der Zentralriß des Torus vier reelle Doppelpunkte haben. Verschiedene höhere Singularitäten des Zentralrisses treten auf, wenn das Projektionszentrum auf einem von zehn bestimmten Kreisen liegt.

Einzelne Torusformen weisen Besonderheiten auf, zum Beispiel der Dorntorus und jener Spindeltorus, dessen Mittelkreis auf der Fläche liegt.

G. Hübner (Hamburg): *Verallgemeinerte absolute Räume.*

Für die absolute — oder metrische — Ebene hat u. a. *Bachmann* (1937) ein gegenständliches und später (1951) ein gruppentheoretisches Axiomensystem angegeben. Durch die Axiome von *Sperner/Karzel* (1954) wurde dieser Begriff der absoluten Ebene noch verallgemeinert. Beiden Axiomensystemen ist gemeinsam, daß sich jede absolute Ebene in eine projektive Ebene über einem kommutativen Körper einbetten läßt und daß die Metrik durch eine symmetrische Bilinearform im zugehörigen Vektorraum erzeugt wird.

Bei *Bachmann* jedoch besitzen sämtliche endlichen Modelle euklidische Metrik, während bei *Sperner/Karzel* auch endliche hyperbolische Ebenen sowie Ebenen über Körpern der Charakteristik 2 möglich sind. Für Dimension 3 läßt der von *Ahrens* (1959) definierte metrische (absolute) Raum, der auf *Bachmann* aufbaut, keine endlichen Modelle zu (ebenso bei *Nolte*, 1965).

Deshalb soll ein verallgemeinerter absoluter Raum mit Hilfe eines Axiomensystems für die Bewegungsgruppe definiert werden, der auch endliche Modelle zuläßt. Es ergibt sich dabei, daß über jedem Körper, der nicht Charakteristik 2 besitzt und mehr als drei Elemente hat, Modelle eines solchen verallgemeinerten Raumes möglich sind. Es ist vorgesehen, diesen Begriff auf beliebige Dimension auszudehnen. Wünschenswert wäre ferner die Einbeziehung der Charakteristik 2.

W. Imrich (Wien): *Automorphismen und Produkte von Graphen.*

Man kann zeigen, daß die Primfaktorzerlegung von zusammenhängenden Graphen bezüglich des kartesischen Produktes eindeutig ist, falls überhaupt eine Primfaktorzerlegung existiert, und daß die Automorphismengruppe des kartesischen Produktes von primen zusammenhängenden Graphen isomorph zur Automorphismengruppe der direkten Summe der Faktoren ist. Mit Hilfe dieses Resultats ergibt sich, daß ein zusammenhängender Graph G mit Primfaktorzerlegung bezüglich des kartesischen Produkts genau dann eine reguläre bzw. semireguläre Automorphismengruppe hat, wenn die Primfaktoren von G paarweise nichtisomorph sind und reguläre bzw. semireguläre Automorphismengruppen haben. Für zusammenhängende Graphen mit Primfaktorzerlegung und abelscher Automorphismengruppe gilt ein analoger Satz mit der Einschränkung, daß Primfaktoren, deren Automorphismengruppe nur aus dem Einselement besteht, höchstens einen zweiten isomorphen Faktor haben. Weiters ist die Automorphismengruppe eines endlichen zusammenhängenden Graphen G genau dann primitiv, wenn G nicht mehr als zwei Knoten hat, oder alle Primfaktoren von G isomorph sind, primitive Automorphismengruppen haben und mindestens drei Knoten enthalten.

H. Izbicki (Wien): *Über die Existenz asymmetrischer regulärer Graphen.*

Es werden zusammenhängende, einfache (= spezielle, schlichte), ungerichtete, asymmetrische (d. h. mit trivialer Automorphismengruppe behaftete) reguläre Graphen betrachtet. *G. Baron* und *W. Imrich* haben in [1] Existenzsätze für solche Graphen gegeben. Es wird nun

(1) eine Methode zur Bestimmung der Automorphismengruppe eines vorgegebenen Graphen entwickelt, die sich in vielen Fällen gut verwenden läßt, und

(2) eine Verschärfung der Ergebnisse von [1] angegeben.

Das Resultat läßt sich in folgenden Satz zusammenfassen: Für die in der Spalte NE der folgenden Tabelle angegebenen Werte n gibt es keinen zusammenhängenden, einfachen, ungerichteten, asymmetrischen, regulären Graphen mit n Punkten und dem in der entsprechenden Zeile angegebenen Grad

k. Hingegen gibt es für die in der Spalte E angegebenen Werte n solche Graphen. Für ungerade Werte k sind allerdings nur gerade Werte n in der Spalte E zulässig, da es in diesen Fällen überhaupt keinen regulären Graphen mit ungerader Punkteanzahl gibt. In der letzten Spalte sind die noch ungelösten Fälle angeführt:

Grad k	NE	E	noch ungelöst
3	$n \leqslant 11$	$12 \leqslant n$	—
4	$n \leqslant 9$	$10 \leqslant n$	—
5	$n \leqslant 9$	$10 \leqslant n$	—
6	$n \leqslant 10$	$11 \leqslant n \leqslant 12,\ 21 \leqslant n$	$13 \leqslant n \leqslant 20$
$7 \leqslant k \leqslant 13$, unger.	$n \leqslant k+4$	$n = k+5,\ 2k+10 \leqslant n$	$k+7 \leqslant n \leqslant 2k+8$, n ger.
$k \geqslant 15$, unger.	$n \leqslant k+4$	$k+5 \leqslant n \leqslant 2k-6,\ 2k+10 \leqslant n$	$2k-4 \leqslant n \leqslant 2k+8$, n ger.
8	$n \leqslant 11$	$12 \leqslant n \leqslant 14,\ 24 \leqslant n$	$15 \leqslant n \leqslant 23$
10	$n \leqslant 13$	$14 \leqslant n \leqslant 16,\ 28 \leqslant n$	$17 \leqslant n \leqslant 27$
12	$n \leqslant 15$	$16 \leqslant n \leqslant 18,\ 32 \leqslant n$	$19 \leqslant n \leqslant 31$
$k \geqslant 14$, gerade	$n \leqslant k+3$	$k+4 \leqslant n \leqslant 2k-7,\ 2k+8 \leqslant n$	$2k-6 \leqslant n \leqslant 2k+7$

[1] *G. Baron - W. Imrich:* Asymmetrische reguläre Graphen, Manuskript.
[2] *H. Izbicki:* Über asymmetrische reguläre Graphen, Mh. Math., 1969.

K. Jänich - E. Ossa (Bonn): *Über die Signatur einer Involution.*

Alle unsere Mannigfaltigkeiten seien kompakt und differenzierbar, und wir betrachten nur differenzierbare Abbildungen. Sei T eine Involution auf einer $4k$-dimensionalen (evtl. berandeten) Mannigfaltigkeit M. Dann ist eine symmetrische Bilinearform $H_{2k}(M,R) \times H_{2k}(M,R) \to R$ durch $(x,y) \to x \circ T_* y$ gegeben. Die Signatur (Differenz der Anzahlen der positiven und der negativen Eigenwerte) dieser Form bezeichnet man mit $\tau(M,T)$. Ist $\dim M \neq 0$ (4), so setzt man $\tau(M,T) = 0$. Man nennt $\tau(M,T)$ die Signatur der Involution T. Für $T = \mathrm{Id}$ ist das die übliche Signatur (oder „Index") $\tau(M)$ von M (vergl. z. B. [3]). Beim Studium von Involutionen spielt nun die folgende Formel eine Rolle

$$\tau(M,T) = \tau(\mathrm{Fix}T \circ \mathrm{Fix}T) \tag{1}$$

wobei $\mathrm{Fix}T \circ \mathrm{Fix}T$ der „Selbstschnitt" der Fixpunktmenge ist (siehe [4]). Man kann (1) beweisen, indem man $\tau(M,T)$ als Index eines gewissen äquivarianten elliptischen Differentialoperators interpretiert und dann den Atiyah-Bott-Singerschen Fixpunktsatz anwendet [1]. In [6] geben wir einen elementaren Beweis von (1), und darüber berichtet der Vortrag. Unsere (ebenfalls elementar beweisbaren) Hilfsmittel dabei sind:

(A): Additivitätseigenschaft der Signatur nach *S. P. Novikov* (vgl. [1], [4], [5]): Wenn man eine Mannigfaltigkeit in zwei Stücke zerschneidet, dann ist die Summe der Signaturen der Stücke die Signatur der Mannigfaltigkeit.

(B): Beispiel: $\tau(P_{2n}(\mathbf{C}),T) = (-1)^n$, wenn T die komplexe Konjugation ist.

(C): Chern-Hirzebruch-Serre-Theorem, [2], wonach $\tau(E) = \tau(B)\,\tau(F)$ für gewisse Faserbündel mit Faser F, Basis B und Totalraum E.

Literatur:

[1] *M. F. Atiyah - I. M. Singer,* The index of elliptic operators III. (Erscheint demnächst).
[2] *S. S. Chern - F. Hirzebruch - J. P. Serre,* Proc. Amer. Math. Soc. *8* (1957), 587—596.
[3] *F. Hirzebruch,* Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie (Springer-Verlag 1956, 1962, 1966).

[4] *F. Hirzebruch,* Proc. Conference on Transformation groups (Tulane 1967, erscheint demnächst).
[5] *K. Jänich,* Charakterisierung der Signatur von Mannigfaltigkeiten durch eine Additivitätseigenschaft. (Erscheint demnächst).
[6] *K. Jänich - E. Ossa,* On the signature of an involution. (Erscheint demnächst).

B. Kučinić (Zagreb): *Kegelschnittnetztheorie und einige Modelle der Geometrie der hyperbolischen Ebene.*

Es wird die ebene $(FGH+s)$-Figur untersucht, die aus dem Kegelschnittnetz (FGH) und aus der Grundgerade s zusammengesetzt ist. Es wird die Interpretation der Grundbegriffe der Geometrie der hyperbolischen Ebene in die $(FGH+s)$-Figur eingeführt. Es wird das $(FGH+s)$-Modell der Geometrie der hyperbolischen Ebene aufgebaut. Es werden die Verbindung mit der Π_1-Interpretation von *Bilinski* und das Lobatschewskische Parallelenaxiom in dem $(FGH+s)$-Modell betrachtet, wie auch die speziellen Fälle des $(FGH+s)$-Modells, innerhalb dessen sich auch das bekannte Modell von *Gyarmathi* findet.

P. Kurilj (Zagreb): *Die Anwendung der isolierten Nabelpunkte bei der konstruktiven Behandlung der Regelflächen dritten und vierten Grades.*

Wenn es auf einer Regelfläche dritten oder vierten Grades Paare von Minimalerzeugenden gibt, so gehören ihre Schnittpunkte dem isolierten Teil der Doppellinie an; man nennt sie die isolierten Nabelpunkte der Fläche. Die Tatsache, daß die ebenen Schnitte der Fläche sich aus einem isolierten Nabelpunkt auf eine Ebene, die zu dem Minimalerzeugendenpaar dieses Punktes parallel ist, als zirkulare Kurven projizieren, ermöglicht einfachere Lösungen vieler graphischen Konstruktionsaufgaben für solche Flächen. Dies wird an Hand einiger konkreten Aufgaben auseinandergesetzt, z. B. für den Schnitt einer Regelfläche dritten oder vierten Grades mit einer Geraden, für die Bestimmung der Berührungspunkte von Tangentialebenen usw.

A. Mallios (Athen): *On topological tensor algebras.*

By a topological tensor algebra is meant a topological algebra, expressed as a tensor product (finite or infinite), suitably topologized, of topological algebras. In this respect, an item of a particular interest is the Gel'fand space (spectrum) of the tensor algebra, represented in terms of the respective spaces of the factor algebras (cf. this author, Math. Ann. *154*/1964, 171—180 and *170*/1967, 214—220). One has, for certain particular cases, a similar representation concerning the same set endowed with the Stone-Jacobson topology (*K. B. Laursen,* to appear). Now, the situation regarding the first case is subsummed into the following result.

Theorem: Let E,F,G be locally convex topological algebras with continuous multiplication and identity elements, and let G be complete. Moreover, suppose that $\mathrm{Hom}(E,G) \subseteq L_s(E,G)$ and $\mathrm{Hom}(F,G) \subseteq L_s(F,G)$ are locally equicontinuous subsets of the spaces indicated and let α be an „admissible topology" on $E \otimes F$. Then, there exists a bicontinuous injection of $\mathrm{Hom}(E \hat{\otimes}_\alpha F, G)$ into $\mathrm{Hom}(E,G) \times \mathrm{Hom}(F,G)$, with respect to the weak to-

pologies of the spaces involved, this being a bijection (homeomorphism) for G commutative.

The preceding specializes to a recent result of *H. Porta* and *J. T. Schwartz* (cf. Comm. Pure Appl. Math. *20*/1967, 457—492). Some variants of this theorem will be indicated. Besides, applications to vector-valued holomorphic maps on a complex space will be considered extending analogous results of the same authors above, *H. Fujimoto* (cf. J. Math. Soc. Japan *17*/1965, 52—66) and *E. Bishop* (cf. Pacific J. Math. *12*/1962, 1177—1192).

H. Mascart (Toulouse) : *Limites de foncteurs en théorie des modules topologiques.*

La notion de limite d'un foncteur conduit, pour les modules topologiques, à des résultats généraux. Ceux-ci admettent pour conséquences diverses propriétés déjà connues des espaces vectoriels topologiques localement convexes et concernant les limites inductives et les limites projectives, les topologiques initiales et les topologies finales, l'inclusion dense et la réunion topologique. Dans certains cas, des foncteurs adjoints convenablement choisis permettent d'établir, par dualité, des relations entre ces différentes notions.

K. Meyer (München) : *Relationen in orthogonalen Gruppen.*

V sei ein n-dimensionaler halbeinfacher Vektorraum über einem kommutativen Körper mit Kardinalität $o(K) > 2$. q sei eine quadratische Form, die mit der symmetrischen Bilinearform f_q durch $q(\alpha + \beta) = q(\alpha) + q(\beta) + f_q(\alpha,\beta)$ verbunden ist. Man ordnet V den $(n-1)$-dimensionalen, projektiven Raum $V' = V-O/K-O$ zu und definiert Ketten $P = (\alpha'_1, \ldots \alpha'_k)$ von projektiven Punkten α'_j, die zu nichtsingulären Vektoren α_j $(q(\alpha_j) \neq 0)$ gehören. Die Menge $\mathfrak{P}$ aller Ketten bildet eine Semigruppe mit Einselement. $O_n(K,q)$ sei die in V zu q gehörige orthogonale Gruppe. $\pi : \mathfrak{P} \to O_n(K,q)$ sei ein durch $\Pi((\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k)) := S_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot S_{\alpha_k}$ definierter Homomorphismus (S_{α_j} seien Spiegelungen längs α_j). Die Umformungen $(\alpha', \alpha') \to (\phi)$ und $(\alpha', \beta', \gamma') \to (\delta')$, wenn $S_\alpha S_\beta S_\gamma = S_\delta$ (Dreispiegelungssatz von *Bachmann*), ergeben in $\mathfrak{P}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$. Für die Äquivalenzklassen, die eine Gruppe $\tilde{\mathfrak{P}}$ bilden, wurde in [1] für den Fall char $K \neq 2$ und für jede Körperkardinalität und in [2] für $o(K) \geqq 4n$ im Fall char $K = 2$ der Satz bewiesen: $\tilde{\mathfrak{P}} \cong \mathfrak{P}/\ker \pi \cong O_n(K, q)$. D. h. Alle Relationen in $O_n(K, q)$ werden von Relationen der Länge 2 oder 4 (Dreispiegelungssatz) erzeugt. Der Satz wird jetzt unabhängig von der Charakteristik für $o(k) > 2$ bewiesen.

Literatur:

[1] *S. Becken,* Spiegelungsrelationen in orthogonalen Gruppen. (J. reine angew. Math. *210*/1962, 205—215).

[2] *K. Meyer,* Transvektionssrelationen in metrischen Vektorräumen der Charakteristik 2. (Erscheint in J. reine angew. Math.).

P. Meyer (Braunschweig) : *Über Geschwindigkeitspolkurven höherer Ordnung.*

In der ebenen euklidischen Kinematik wird mittels einer verallgemeinerten Gleitzahl das Bewegungsverhalten eines höheren Geschwindigkeitspolkurvenpaares festgelegt. Hieran anschließend lassen sich gewisse Polkonfigurationen in Verbindung mit der Euler-Savaryschen Formel auszeichnen.

In einigen Fällen kann man auf Grund einer Eigenschaft der Polbahnen Schlüsse hinsichtlich Existenz und Eindeutigkeit der zugehörigen Bewegung ziehen.

J. Misfeld (Hamburg) : *Eine topologische Kennzeichnung der projektiven Räume über den reellen Zahlen.*

Die erste Frage, die sich im Zusammenhang mit der Themenstellung ergibt, ist die Kennzeichnung der projektiven Räume über topologischen Körpern. Der Ansatz von *H. Lenz* (Vorlesungen über projektive Geometrie, Leipzig 1965) liefert nur im kompakten Fall eine Kennzeichnung. In der Note „Topologische projektive Räume" (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Bd. 32, Heft 3—4, ersch. demn.) konnte ich zeigen, daß die projektiven Räume über topologischen Körpern gerade durch den Begriff des topologischen projektiven Raumes beschrieben werden, also durch projektive Räume, die eine topologische Struktur besitzen, so daß Hüllenbildung von Punkt und Teilraum und Schnittbildung von Hyperebene und Teilraum stetige Operationen sind. Jeder n-dimensionale topologische projektive Raum (in diesem Sinne) läßt sich also topologisch und algebraisch in der Form $(K^{n+1})^*/K^*$ über einem topologischen Körper K darstellen.

Es ist dann nach weiteren topologischen Eigenschaften des projektiven Raumes zu suchen, so daß als Koordinatenbereich nur der Körper der reellen Zahlen in Frage kommt. Bei der Untersuchung spezifischer Eigenschaften reeller projektiver Räume findet man, daß solche Räume eine Topologie besitzen, bezüglich der sie zusammenhängend sind. Eine weitere wesentliche Eigenschaft reeller projektiver Räume ist die Tatsache, daß ihre Topologie mit der aus der Anordnungsstruktur der reellen projektiven Räume abgeleiteten Ordnungstopologie übereinstimmt. Es taucht hiermit das Problem auf, diese letzte Eigenschaft rein topologisch zu formulieren. Als Ergebnis erhält man, daß die projektiven Räume über dem Körper der reellen Zahlen unter den desarguesschen topologischen projektiven Räumen dadurch gekennzeichnet sind, daß sie zusammenhängend und nach Herausnahme zweier Hyperebenen unzusammenhängend sind.

V. Murgescu (Jassy) : *Espaces de Weyl généralisés.*

Soit X_n une variété différentiable douée d'objets géométriques suivants: a) un champ tensoriel g_{ij} asymétrique et de classe C^1, dont la partie symétrique $g_{\underline{ij}}$ a le rang n, b) un champ véctoriel r_k et, c) une C^1-connection affine, $L_{ij}^{\ k}$, qui vérifient les relations $g_{ij\|k} = 2r_k g_{ij}$, où $g_{ij\|k}$ est la dérivée covariante de g_{ij} par rapport aux coefficients $L_{ik}^{\ j}$. C'est la définition d'un espace de Weyl généralisé (espace à tenseur asymétrique récurrent), pour lequel r_k est le vecteur de récurrence.

En utilisant deux théorèmes de *J. R. Vanstone* au regard le tenseur $b^i_j = g^{\underline{im}} g_{\underline{mj}}$, où $g_{\underline{mj}} = (1/2)(g_{mj} - g_{jm})$ et $g^{\underline{im}} g_{\underline{mj}} = k^i_j$ (symboles de Kronecker), qui furent publiés dans le Canad. J. Math., *16* (1964), on aboutit aux résultats suivants:

Théorème 1. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une connection $L_{ij}^{\ k}$, de classe C^1, ainsi que le tenseur g_{ij} soit récurrent, est que la forme normale (Jordan) de $B = (b^i_j)$ soit constante.

Théorème 2. Dans les conditions du théorème 1, la plus générale connection pour laquelle le tenseur g_{ij} est récurrent a l'expression

$$L_k = W_k + (1/2)\,(\underline{G}T_{;k}T^{-1}\underline{G}^{-1} - (T')^{-1}T'_{;k}) + (T')^{-1}Z_kT^{-1}\underline{G}^{-1},$$

où $L_k = (L^i_{jk})$, $W_k = (W^i_{jk})$ sont les matrices de la connection de Weyl induite par le tenseur g_{ij}, $\underline{G} = (g_{ij})$, $T = (t^i_j)$ est la matrice dont les colonnes transforment la matrice B dans sa forme normale $\overline{B}$ et Z_k est la solution générale du système $Z_k\overline{B} + \overline{B}'Z_k = 0$, $Z_k + Z'_k = 0$. (Par „;" on entend l'opération de dérivation covariante par rapport aux coefficients W^i_{jk}).

Théorème 3. Si la matrice B a la forme normale (Jordan) constante et ses valeurs propres ne sont pas nulles ou de signe opposé, alors, il existe une seule connection,

$$L_k = W_k + (1/2)\,(\underline{G}T_{;k}T^{-1}\underline{G}^{-1} - (T')^{-1}T'_{;k}),$$

pour laquelle le tenseur g_{ij} est récurrent.

Z. Nádeník (Prag) : *Über Enveloppen von konvexen Zylinderflächen.*

Im gewöhnlichen Raum sei C eine geschlossene Kurve mit positiver Krümmung $1/\varrho$. In der Normalebene jedes Punktes P von C, in welcher γ den von der Hauptnormale von C gemessenen Winkel bedeuten wird, sei eine Eikurve gewählt und in Richtung der Tangente von C in P durch eine Zylinderfläche Z projiziert. Die Familie dieser Zylinderflächen möge eine geschlossene singularitätenfreie Enveloppe S vom Zusammenhang der Ringfläche haben. — Sind alle Zylinderflächen Z achsensymmetrisch, so gilt für das Volumen V, die Oberfläche O und das Integral M der mittleren Krümmung von S die Ungleichung $O^2 - 4MV \geqq 0$, welche verallgemeinert und verschärft werden kann. Für eine geschlossene Kanalfläche vom Zusammenhang der Ringfläche gilt die umgekehrte Ungleichung; die Gleichheit besteht beidesmal nur für die Rohrflächen. — Punkte Q, Q^* auf einer Charakteristik von S, in denen die Tangentenebenen parallel sind, mögen Gegenpunkte heißen. Es seien R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien von S in Q. Die Zylinderflächen Z sind dann und nur dann achsensymmetrisch, wenn in jedem Paar der nichtparabolischen Gegenpunkte $R_1^*R_2^* - R_1R_2 = 2\varrho r/\cos\gamma$ oder $R_1^* + R_2^* - R_1 - R_2 = 2\varrho/\cos\gamma$. — Falls jede Zylinderfläche Z von konstanter Breite B ist, so gilt $O = BM$. — Ähnliche Ergebnisse gelten im n-dimensionalen Raum.

V. Niče (Zagreb) : *Ein Beitrag zum Flächenbüschel 2. Grades.*

Die Normalen jeder der ∞^1 Flächen eines Büschels von Flächen 2. Grades längs der Grundkurve 4. Ordnung I. Art dieses Flächenbüschels bilden eine Regelfläche 8. Grades, die jene Fläche 2. Grades außer in der Grundkurve 4. Ordnung noch in einer Raumkurve 12. Ordnung durchdringt. Alle derart den Flächen des Büschels zugeordneten Raumkurven 12. Ordnung bilden eine Fläche 32. Ordnung, die die Grundkurve des Flächenbüschels als eine dreizehnfache Kurve enthält. In jedem Punkt dieser dreizehnfachen Raumkurve 4. Ordnung wird diese Fläche 32. Ordnung von einem isotropen Ebenenpaar berührt, das die Tangente dieser Raumkurve enthält.

G. Ringel (Berlin) : *Die Lösung des Heawoodschen Kartenfärbungsproblems.*

Es sei F_p die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlechte p. Ein Standardmodell für F_p ist die Kugel mit p Henkeln. Eine Landkarte auf F_p heißt mit m Farben zulässig färbbar, wenn jedem Land eine der m Farben so zugeordnet werden kann, daß je zwei (längs mindestens einer Kante) benachbarte Länder verschiedene Farben erhalten. Es gibt eine kleinste Zahl $\chi(F_p)$ derart, daß jede Landkarte auf F_p mit $\chi(F_p)$ Farben zulässig gefärbt werden kann. $\chi(F_p)$ heißt die chromatische Zahl von F_p. Von der chromatischen Zahl $\chi(F_0)$ auf der Kugel weiß man nur, daß sie gleich 4 oder 5 ist, während zum Beispiel $\chi(F_1) = 7$ seit 1890 bekannt ist. Für $\chi(F_p)$ bewies *P. J. Heawood* 1890 die Ungleichung

$$(1) \qquad \chi(F_p) \leqslant \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right] \text{ für alle } p \geqslant 1.$$

Die Aussage, daß in (1) stets das Gleichheitszeichen gilt, heißt die Heawoodsche Vermutung.

In den bisherigen Versuchen (*Heffter, Ringel, Gustin, Terry, Welch, Youngs*) wurde diese Vermutung für gewisse Klassen von Geschlechtszahlen p bewiesen. Im Herbst 1967 begannen *J. W. T. Youngs* und der Verfasser gemeinsam an der Lösung des Problems in den noch ungelösten Fällen zu arbeiten, nämlich in der Hauptsache für diejenigen p, für die die rechte Seite von (1) kongruent 2, 8 oder 11 (mod 12) ist. Sie konnten bis März 1968 den Beweis für alle noch ausstehenden Fälle erbringen. Die drei Einzelfälle $p = 18$, 23 und 32 waren in der Zwischenzeit von *J. Mayer*, Professor für französische Literatur an der Universität Montpellier, gelöst worden. Somit ist in (1) das Gleichheitszeichen für alle $p \geqslant 1$ bewiesen.

H. Schaal (Stuttgart) : *Neuere Untersuchungen über Bewegflächen.*

Als „Bewegflächen" werden jene Flächen im dreidimensionalen reellen euklidischen Raum bezeichnet, die durch kontinuierliche Bewegung einer starren Kurve e erzeugbar sind. Darunter gibt es Flächen, auf denen sogar die Streifen längs e kongruent sind und die somit durch kontinuierliche Bewegung eines solchen starren Streifens erzeugt werden können; sie wurden in [2] eingehend studiert. In [3] wurden darunter jene speziellen Flächen bestimmt, auf denen die Bahnkurven der Punkte von e Krümmungslinien sind. Außer den Gesimsflächen sind dies gewisse Verallgemeinerungen der Edlingerschen Flächen, die im Sonderfall geradliniger Erzeugender e vorliegen. Diese Fragestellung gehört zu dem von *A. Schreiner* in [4] angeschnittenen Problemkreis spezieller kinematischer Netze. Er hat in [4] alle kinematischen Netze aus Krümmungslinien (Fall 1) und in [5] alle kinematischen Netze aus Schmieglinien (Fall 2) bestimmt. Fall 2 wurde in [1] auf einfachere Weise hergeleitet und eingehend studiert. Über kinematische Netze jener gemischten Art, bei denen die Erzeugenden Schmieglinien und die Bahnkurven Krümmungslinien sind (Fall 3) oder umgekehrt (Fall 4), war bisher jedoch nichts bekannt. Als Anwendung von [3] kann Fall 3 jetzt erledigt werden; es gilt: Die einzigen Trägerflächen zum Fall 3 sind außer den Drehflächen und den Torsen die Edlingerschen Flächen. Im Fall 4 liegen inzwischen einige Teilergebnisse vor, die auch hier eine abschließende Erledigung erwarten lassen.

[1] *H. Brauner - H. Schaal:* Die Flächen mit einem kinematischen Netz aus Schmieglinien. Archiv Math. *18*, 91—99 (1967).

[2] *H. Schaal:* Über die durch Bewegung eines Streifens erzeugbaren Flächen. Math. Z. *96*, 143—178 (1967).
[3] *H. Schaal:* Eine Verallgemeinerung der Edlingerschen Flächen. Math. Z. *103*, 69—77 (1968).
[4] *A. Schreiner:* Bewegflächen mit speziellen kinematischen Netzes. Diss. T. H. München 1959.
[5] *A. Schreiner:* Netze von Asymptotenlinien, die sich kinematisch erzeugen lassen. Archiv. Math. *11*, 392—400 (1960).

W. Schwabhäuser (Bonn): *Axiomatisierbarkeit der dimensionsfreien euklidischen Geometrie über geeigneten Körpern.*

Für eine beliebige Klasse $\mathfrak{K}$ von angeordneten Körpern wird unter der dimensionsfreien euklidischen Geometrie $\Gamma(\mathfrak{K})$ über Körpern aus $\mathfrak{K}$ die Menge der geometrischen Sätze (in einer geeigneten elementaren Sprache) verstanden, die für jede endliche Dimension $n \geqslant 2$ in den n-dimensionalen kartesischen Räumen über Körpern aus $\mathfrak{K}$ gelten.

Von *H. N. Gupta* wurde gezeigt, daß $\Gamma(\mathrm{PF})$ über pythagoreischen angeordneten Körpern endlich axiomatisierbar ist, und die Frage gestellt, ob $\Gamma(\mathrm{OF})$ über beliebigen angeordneten Körpern überhaupt (rekursiv) axiomatisierbar ist. Diese Frage bleibt offen. Das Resultat wird folgendermaßen erweitert.

Ein Körper heiße k-pythagoreisch ($k \in \mathbf{N}$), falls sich jede endliche Quadratsumme von Körperelementen schon als Summe von k Quadraten darstellen läßt. Sei PF_k die Klasse aller k-pythagoreischen angeordneten Körper. (Beispiele: $\mathrm{PF}_1 = \mathrm{PF}$, der Körper der rationalen Zahlen liegt in PF_4, es gibt jedoch angeordnete Körper, die in keinem PF_k liegen). Dann gilt für jede natürliche Zahl k der

Satz: $\Gamma(\mathrm{PF}_k)$ ist rekursiv axiomatisierbar (aber für $k \geqslant 2$ nicht endlich axiomatisierbar).

Zunächst läßt sich ein Axiomensystem angeben, so daß sämtliche endlichdimensionalen Modelle bis auf Isomorphie von der vorgegebenen Form sind. Auf Grund des Endlichkeitssatzes der Prädikatenlogik der ersten Stufe lassen sich jedoch unendlichdimensionale Modelle prinzipiell nicht ausschalten. Zu ihrer Behandlung dient der folgende Satz ($m \in \mathbf{N}$ beliebig): Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Modelle eines geeigneten Axiomensystems für $\Gamma(\mathrm{PF}_k)$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ $\dim \mathfrak{A} \geqslant m.k$. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine $(m+1)$-gradig elementare Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ im Sinne von *D. Scott*.

V. Sčurić (Zagreb): *Über die Rotationsflächen eines Flächenbüschels 2. Grades und über ein Rotationsflächenbüschel.*

I. In einem allgemeinen Flächenbüschel 2. Grades P_n gibt es höchstens zwei Rotationsflächen. Gibt es in einem Flächenbüschel 2. Grades drei Rotationsflächen, dann sind alle Flächen dieses Büschels Rotationsflächen. Befindet sich im Flächenbüschel P_n eine Kugel, dann gibt es im Raum zwei parallele Richtungslagen ebener Kreisschnitte, die gemeinsam für alle Flächen dieses Flächenbüschels sind.

II. Es gibt zwei wesentlich verschiedene Fälle des Rotationsflächenbüschels. Im ersten Fall handelt es sich um das bekannte Rotationsflächenbüschel mit gemeinsamer Achse, und im zweiten um das Büschel, dessen Flächenachsen untereinander parallel sind und in einer Ebene liegen.

U. Seip (New York): *Zur Kategorie quasitopologischer Räume.*

Eine Menge X heißt Quasiraum bezüglich der Kategorie kompackter Räume, wenn jedem kompakten Raum C eine Teilmenge (C,X) der Menge $\hom_{\mathrm{M}}(C,X)$ zugeordnet ist, die vier Axiomen genügt. Die Definition geht auf *E. Spanier* zurück. Die Kategorie der Quasiräume werde mit QR bezeichnet. Sie zeichnet sich durch die Einfachheit des (Quasi)Stetigkeitsbegriffs ($f:X \to Y$ ist stetig, wenn für beliebiges $g \in (C,X)$ stets $fg \in (C,Y)$ ist) und durch die folgenden (und andere) Eigenschaften aus: QR ist vollständig und kovollständig, erlaubt induzierte und koinduzierte Strukturen, und der Vergißfunktor V:QR$\to$M ist stetig und kostetig. Funktionenräumen wird eine eindeutig bestimmte Quasistruktur aufgeprägt, die zulässig, passend und funktoriell ist, und die QR zu einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie macht. Weiter sind Kolimites über kogerichteten Kategorien sogar mit Produkten verträglich, und es gilt der Dualitätssatz zwischen Limites und Kolimites via Funktionenräumen bezüglich kogerichteter Kategorien.

Weiter existiert ein Paar adjungierter Funktoren E:T$\to$QR, F:QR$\to$T (T = Kategorie topologischer Räume), welches insbesonders die Gleichwertigkeit von Quasiraum und topologischem Raum für alle „interessanten" Räume liefert. Der Funktor F erlaubt uns, die Begriffe „abgeschlossen" und „offen" auf Quasiräume zu übertragen und lokale Sätze zu beweisen. Speziell definieren wir Quasi-CW-Komplexe, die neben den üblichen Eigenschaften insbesondere verträglich mit Produkten sind.

U. Simon (Berlin): *Zur Differentialgeometrie im Großen; Eindeutigkeitsaussagen für Untermannigfaltigkeiten der Kodimension k im* E_{n+k}.

M_n sei eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n, und $x:M_n \to E_{n+k}$ eine Immersion in den euklidischen Raum, $k>0$. Zu jedem $p \in M_n$ existiert ein k-dimensionaler Normalenraum $N(p)$ von $x(M_n)$ in $x(p)$; ist $e_r(p) \in N(p)$, so lassen sich quadratische Formen $I = \langle dx(p), dx(p) \rangle$, $II_r = \langle de_r(p), dx(p) \rangle$, $III_r = \langle de_r(p), de_r(p) \rangle$ definieren ($dx(p)$ bzw. $de_r(p)$ sind vektorwertige lineare Differentialformen auf M_n). Die Eigenwerte von II_r bezüglich I sind die Hauptkrümmungen bezüglich der Normalen e_r; durch Bildung der elementarsymmetrischen Funktionen gewinnt man die Krümmungen bezüglich e_r. Spannen $\{e_1, \ldots, e_k\}$ den Normalenraum auf, so lassen sich mit Hilfe der zugehörigen Krümmungen Eindeutigkeitsaussagen für gewisse Klassen kompakter Untermannigfaltigkeiten herleiten, die u. a. das Ergebnis von *Alexandroff-Fenchel-Jessen* verallgemeinern (vgl. *Chern*, J. Math. Mech. *8*/1959, 947—955). Einzelergebnisse in dieser Richtung wurden von *Hsiung* (Illinois J. Math. *4*/1960, 526—540) und *Stong* (Proc. Amer. Math. Soc. *12*/1961, 343—349) bewiesen.

St. Šmakal (Prag): *Über die Geschlossenheit von Raumkurven.*

Es sei C eine Kurve im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n ($n \geqslant 3$). Durch eine günstig gewählte Stützfunktion stellen wir die Kurve C in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha)$ dar, wobei α die Bogenlänge des Tangentenbildes ist. Ist die Kurve C von der Klasse n mit allen Krümmungen verschieden von Null, dann kann man die Stützfunktion bestimmen und auf Grund gewisser Voraussetzungen Bedingungen der Geschlossenheit der Kurve C angeben.

Z. Šnajder (Beograd): *Zweidimensionale Modelle des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes.*

Im Jahre 1931 gab *E. Kruppa* ein zweidimensionales Modell zur Darstellung des hyperbolischen und elliptischen dreidimensionalen Raumes, und zwar durch Normalprojektionen auf zwei zueinander senkrechte Ebenen im euklidischen Raum. Im Lauf der Zeit wurden verschiedene Modelle konstruiert, einerseits durch Übertragung bekannter Projektionsmethoden aus dem euklidischen Raum auf die nichteuklidischen Räume und andererseits durch Entwicklung von Projektionsmethoden, die für nichteuklidische Räume spezifisch sind. Hier werden einige zweidimensionale Modelle des hyperbolischen dreidimensionalen Raumes angegeben, die auf Projektionsmethoden beruhen.

K. Sörensen (Hamburg): *Topologische geschlitzte Inzidenzgruppen und topologische normale Fastmoduln.*

Eine geschlitzte Inzidenzgruppe G (siehe: *H. Karzel - H. Meissner*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *31*/1967, 69—88) heißt topologische geschlitzte Inzidenzgruppe, wenn sie weiter mit einer Topologie versehen ist, so daß G bezüglich der Gruppen- und der topologischen Struktur eine topologische Gruppe und bezüglich der geschlitzten und der topologischen Struktur ein topologischer geschlitzter Raum ist. Zuerst wird eine Darstellung topologischer geschlitzter Räume (insbesondere also topologischer affiner und topologischer projektiver Räume) mit Hilfe einer speziellen Klasse topologischer Vektorräume angegeben. Nach *Karzel - Meissner* lassen sich desarguessche geschlitzte Inzidenzgruppen durch normale Fastmoduln darstellen. Insgesamt erhält man damit, daß jede topologische endlich-dimensionale desarguessche geschlitzte Inzidenzgruppe G durch einen topologischen normalen Fastmodul und, falls G zweiseitig und nicht affin ist, sogar durch eine topologische lokale Algebra A dargestellt wird. Wenn G weiter lokalkompakt und zusammenhängend ist, so ist A eine topologische lokale Algebra entweder über den reellen Zahlen oder über den komplexen Zahlen oder über den Quaternionen.

H. Stachel (Graz): *Die beiden Lieschen Geraden-Kugel-Transformationen.*

Durch geeignete Zusammensetzungen von linearen Zweibildersystemen, Zweispurensystemen, Eckhart-Rehbock-Abbildungen und Netzprojektionen des dreidimensionalen projektiven Raumes ist es möglich, die projektiv verallgemeinerte euklidische oder die nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation zu erzeugen. Vergleicht man solche Zusammensetzungen untereinander, so ergeben sich bemerkenswerte Beziehungen zwischen den Abbildungen von Raumpunkten a) durch Netzprojektionen auf Punkte einer Ebene, b) durch die kinematische Abbildung auf die orientierten Linienelemente einer Ebene, c) durch die Studysche Speerabbildung auf orientierte Linienelemente einer Kugel.

E. Stein - L. R. A. Casse (London): *The bitangents of irreducible plane quartic curves over $GF(2^h)$.*

A point of coordinates (λ, μ, ν) is said to have no polar cubic with respect to an irreducible plane quartic curve $f = 0$ if

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_0} + \mu \frac{\partial f}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial f}{\partial x_2} \equiv 0 .$$

There is at most one point which has no polar cubic with respect to a quartic curve C^4; if there is one such point P all lines through P are bitangents to C^4, and in addition to these there is one more bitangent which might or might not be identical with one of the lines through P.

If there is not such point then C^4 has at most seven bitangents, and:

(1) The intersection of two bitangents of C^4 is a base point of the net of polar cubics.

(2) The polar cubic of a base point Q of the net of polar cubics degenerates into three bitangents through Q (not necessarily distinct).

(3) The number η of base points of the net of polar cubics is 1, 2, 4, or 7.

(4) If $\eta = 7$ the base points of the net of polar cubics and the bitangents of C^4 are the points and lines of a Fano-configuration, and of the seven bitangents 0, 1, 3, or 7 belong to the base field. We also find, in each case, the minimum extension of the base field in which the remaining bitangents lie.

V. Tomašić (Rijeka): *Spiegelungsrechnen in mikrodesarguesschen Ebenen.*

Es sei eine mikrodesarguessche Ebene gegeben und der zugeordnete Alternativkörper der Koordinaten mit bekannten Eigenschaften. In dieser Ebene werden folgende involutorischen Abbildungen eingeführt:

1. $\sigma_u : (x,y)\ \sigma_u = (x,\ 2u - y)$, wobei u eine zur x-Achse parallele Gerade ist

2. $\sigma_v : (x,y)\ \sigma_v = (2v - x, y)$, wobei v eine zur y-Achse parallele Gerade ist.

3. $\sigma_z : (x,y)\ \sigma_z = (k^{-1}y - k^{-1}l,\ kx + l)$, wobei z eine beliebige Gerade mit der Gleichung $y = kx + l$ ist.

Es wird gezeigt, daß diese Abbildungen involutorisch sind und daß jeder Punkt der Geraden, durch welche die Abbildungen definiert sind, ein Fixpunkt ist. Inzidenz und Parallelismus werden durch die Spiegelungen erklärt. Schließlich wird untersucht, wann der Dreispiegelungssatz gültig ist.

O. Varga (Budapest): *Zur Invarianz des Krümmungsmaßes der Winkelmetrik in Finslerräumen bei Einbettungen.*

Die Winkelmetrik von Linienelementen wird auch im Finslerschen Raum durch eine quadratische Form bestimmt. Der Krümmungstensor dieser Form legt das Krümmungsausmaß fest. Betrachtet man eine Hyperfläche des Raumes, so wird zwar die Winkelmessung ihrer Linienelemente, aufgefaßt als solche der Hyperfläche, mit derjenigen des Raumes übereinstimmen. Das Krümmungsmaß auf der Hyperfläche unterscheidet sich aber von dem des Raumes. Es werden diejenigen Hyperflächen untersucht, für die diese beiden Invarianten übereinstimmen, und es wird gezeigt, daß für solche Hyperflächen die innere und die induzierte Übertragung zusammenfallen.

H. Vogler (Wien): *Geodätische Koordinatensysteme mit pseudogeodätischen Querlinien.*

Die Parameterlinien eines geodätischen Koordinatensystems auf einer Fläche bestehen bekanntlich aus einer Schar von geodätischen Linien und ihren orthogonalen Trajektorien, im folgenden kurz Querlinien genannt. Es werden jene geodätischen Parameternetze näher untersucht, deren Querlinien pseudogeodätisch sind. Nach *W. Wunderlich* versteht man unter einer Pseudogeodätischen eine Flächenkurve, deren Schmiegebenen gegen die in den Oskulationspunkten berührenden Tangentialebenen der Trägerfläche feste Neigung besitzen. Ist nun eine Querlinie eines geodätischen Koordinatensystems der betrachteten Art eben, so gilt dies für alle Querlinien des Systems. Die Fläche ist dann eine spezielle Gesimsfläche, die Geodätischen des Parameternetzes sind ebene Fallinien und ihre Trägerebenen umhüllen einen Zylinder. Dieser Zylinder ist der gemeinsame Evolutenzylinder aller pseudogeodätischen Querlinien des Netzes.

Spezialisiert man dieses Ergebnis für geodätische Polarkoordinaten, so kann man die Kugel durch ihre pseudogeodätischen Linien wie folgt kennzeichnen: Ein Flächenstück, auf dem zwei geodätische Polarkoordinatensysteme mit pseudogeodätischen Querlinien existieren, ist mit Notwendigkeit Teil einer Kugel.

K. Voss (Zürich): *Isometrie von Flächen bezüglich der zweiten Fundamentalform.*

Eine Abbildung einer Fläche im Raum auf eine andere heißt II-Isometrie, wenn die 2. Fundamentalform II bei der Abbildung invariant bleibt; eine einparametrige Schar II-isometrisch aufeinander bezogener Flächen heißt II-Verbiegung. Eine infinitesimale II-Verbiegung einer Fläche ist eine Variation, bei der II stationär ist. Es wird bewiesen:

1. Es gibt Flächen (mit Gaußscher Krümmung $\neq 0$), die eine nicht-triviale II-Verbiegung gestatten, bei der außerdem beide Hauptkrümmungen erhalten bleiben.
2. Jeder echte Teil der Kugel gestattet infinitesimale II-Verbiegungen, bei denen außerdem beide Hauptkrümmungen stationär sind.
3. Die Kugel als Ganzes gestattet keine infinitesimale II-Verbiegung.

B. J. Wilson (London): *Cubic arcs in the Galois plane of order 2^2.*

It has been shown by *Barlotti* [1] that the maximum number of points upon a (k, n)-arc in a finite plane of order q ($= p^h$ when p is a prime integer and h any positive integer) is, in the case where p and n are coprime, $nq + n - q - 2$. For $n = 3$ and $q = 2^2$ it follows that the maximum value of k is 9. D'Orgeval [2] has shown that the points of $(nq + n - q - 2, 3)$-arcs may be divided into two types:

a) Through the point pass q 3-secants and one 1-secant
b) Through the point pass $q-1$ 3-secants and two 2-secants.

If all the points of an arc C are of the same type then C is called homogeneous of type a) or type b). Both *Barlotti* and *d'Orgeval* have given constructions for homogeneous $(9, 3)$-arcs of type a).

I prove that every homogeneous $(9, 3)$-arc of type a) in the plane of order 2^2 may be constructed by both methods and give a construction for every homogeneous $(9, 3)$-arc of type b). Further I show that every homogeneous $(8, 3)$-arc has through each point three 3-secants, one 2-secant and one 1-secant, and may be extended to an arc of type a) by the addition of a uniquely determined point.

References:
[1] *A. Barlotti*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) *11*, 553—6 (1956).
[2] *B. d'Orgeval*, Bull. Acad. Roy. Belg. *46*, 597—603 (1960).

W. Wunderlich (Wien): *Eine Verallgemeinerung der Netzprojektion.*

Im dreidimensionalen Raum mit projektiver, elliptischer, auf die euklidische Kugel $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ gegründeter Metrik wird zur Abbildung auf die Bildebene $z = 0$ jene doppelte Netzprojektion eingeführt, welche durch die zur z-Achse im Cliffordschen Sinn rechts- bzw. linksparallelen Strahlen vermittelt wird. Jedem Raumpunkt P werden auf diese Weise ein „Rechtsriß" P^r und ein „Linksriß" P^l zugeordnet, wobei $\mathrm{dist}(OP^r) = \mathrm{dist}(OP^l)$. Eine Gerade g bildet sich auf ein euklidisches Kreispaar g^r, g^l ab, wobei der Radius von g^r gleich der vom Ursprung O aus gemessenen Zentraldistanz von g^l ist und umgekehrt.

Gleichzeitige Drehung der beiden Bildfelder um O mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten α, β induziert im Raum eine eingliedrige Kollineationsgruppe, die als Schraubung des elliptischen Raumes aufzufassen ist. Für rationalen Schraubparameter $p = (\beta - \alpha)/(\beta + \alpha)$ liegt eine algebraische Schraubung vor.

Verwendet man statt der Netzstrahlen, die als Bahnen der Schraubungen $p = \pm 1$ (Cliffordsche Schiebungen) gedeutet werden können, Schraublinien für einen Parameterwert $p \neq \pm 1, 0, \infty$ zur Projektion, so gelangt man zu einem „Schraubriß", der Gerade jetzt nicht mehr auf Kreise, sondern auf euklidische Radlinien abbildet, und zwar auf Epitrochoiden für $|p| < 1$, auf Hypotrochoiden für $|p| > 1$. Bei der Abbildung einer Ebene tritt als wahrer Umriß eine gerade Linie auf, die im Bild als gespitzte Radlinie erscheint.

T. Zamfirescu (Bochum): *Comments on Hamiltonian paths.*

Some remarks on 2- and 3-connected 3-valent graphs not possessing Hamiltonian paths or circuits are made. The main contribution consists of an example of a 3-connected 3-valent graph (hence the Schlegel-diagram of a simple convex polytope) without Hamiltonian paths.

SEKTION IV:

Angewandte Mathematik

T. Andjelic (Beograd): *Einige Bemerkungen über nichtholonome Bindungen zweiten Grades.*

Die Frage der nichtholonomen Bindungen zweiten Grades wird ausführlich erörtert. Es wird festgestellt, welche von diesen Bindungen einen dynamischen Sinn haben und welche nicht. Es stellt sich dabei heraus, daß eine Behauptung von *Carathéodory*, daß solche Bindungen, wenn sie skleronom sind, unbedingt homogen in den Geschwindigkeiten sein müssen, wenn sie dynamisch sinnvoll sein sollen, nicht haltbar ist.

Weiterhin wird durch geometrische Deutung dieser Bindungen als Hodographen (im dreidimensionalen Raum Flächen zweiten Grades und entsprechend im Konfigurationsraum mehrerer Dimensionen) ein einfaches Kriterium für die Verträglichkeit bzw. Unverträglichkeit solcher Bindungen gegeben.

Zum Schluß wird ein dynamisches Beispiel mit der Bindung

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{z} = 0,$$

wo der Punkt die Ableitung nach der Zeit bezeichnet, behandelt und für den Fall der Bewegung eines Massenpunktes im Feld einer Widerstandskraft, welche der Geschwindigkeit proportional ist, gelöst.

F. Kappel (Graz): *Einige Probleme bei der Anwendung der direkten Methode von Ljapunov auf Stabilitätsfragen von Kernreaktoren.*

An Hand der kinetischen Gleichungen für das punktförmige Reaktormodell wird gezeigt, daß die „klassischen" Sätze der direkten Methode von *Ljapunov* nicht ohne weiteres für die Untersuchung der Stabilität der Ruhelage des Systems verwendet werden können. Dies liegt daran, daß nicht alle Lösungen des Systems physikalisch sinnvoll sind, und man sich bei Stabilitätsuntersuchungen jedoch auf physikalisch sinnvolle Lösungen beschränkt. Es werden einige Sätze angegeben, welche auf den hier vorliegenden Fall zugeschnitten sind. Man gewinnt diese Sätze aus sehr allgemeinen Sätzen der Ljapunovschen Theorie, welche in letzter Zeit von *LaSalle* u. a. angegeben wurden.

J. Kováč (Bratislava): *Die Mannigfaltigkeit der nullwertigen Normal- und Tangentialbeschleunigungen der Punkte eines Körpers.*

Bei einer allgemeinen Momentanbewegung $B(T/T')$ in E_3 sei $\bar{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit, $\bar{\varepsilon}$ die Winkelbeschleunigung des Körpers T, $\bar{v}$ die Geschwindigkeit, $\bar{a}$ die Beschleunigung des Punktes $O \in \{T\}$, wobei $\bar{\omega} \cdot \bar{v} \neq 0$ (1), $\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon} \neq 0$ (2). Unter der Bedingung (2) existiert der Beschleunigungspol $Q \in \{T\}$, dessen

$$\bar{r}_{QO} = J_s^{-2}\{[(J_1\bar{\omega} + \bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}) \cdot \bar{a}]\bar{\omega} + (\bar{\varepsilon} \cdot \bar{a})\bar{\varepsilon} + (\bar{\omega} \cdot \bar{a})\bar{\varepsilon}\times\bar{\omega}\} \quad ; \quad \bar{r}_{QO} = \overrightarrow{OQ} \; ;$$

$$\bar{v} = J_s^{-2}[(J_9\bar{\omega} - J_4\bar{\varepsilon}) \times (\bar{\varepsilon}\times\bar{\omega}) + J_{10}\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}] \; ; \quad \bar{a}_Q = \bar{0} \quad \text{ist, wobei}$$

$$J_s^2 = (\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})^2; \; J_1 = \bar{\omega}^2; \; J_4 = \bar{\omega} \cdot \bar{v}; \; J_9 = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{v} + \bar{\omega} \cdot \bar{a}; \; J_{10} = (\bar{v}\times\bar{\omega} + \bar{a}) \cdot \bar{\varepsilon}$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines beliebigen Punktes $L \in \{T\}$ ist $\bar{v}_L = \bar{v}_Q + \bar{\omega}\times\bar{r}_L$; $\bar{a}_L = \bar{\varepsilon}\times\bar{r}_L + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_L)$; $\bar{r}_L = \overrightarrow{QL}$. Wir bilden das Vektorfeld $\bar{u}(\bar{r}_L) = \bar{v}_L\times\bar{a}_L$ (3) und das Skalarfeld $u(\bar{r}_L) = \bar{v}_L \cdot \bar{a}_L$ (4). Die Menge der Punkte $W \in \{T\}$ des Feldes (3), für dessen $\bar{u}(\bar{r}_W) = \bar{0}$; $\bar{r}_W = \overrightarrow{QW}$ ist, ist eine einparametrige Mannigfaltigkeit der nullwertigen Normalbeschleunigung der Punkte des Körpers T, die eine Raumkurve dritten Grades $\bar{r}_W = \mu J_s^{-2}\{[\mu(J_9 - \mu J_4) - J_1 J_4 - J_{10}]\bar{\omega} + (\mu J_4 - J_9)\bar{\varepsilon} + J_4\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}\}$ ist, wobei μ der Parameter ($\bar{a}_W = \mu\bar{v}_W$) bedeutet. Die Menge der Punkte $U \in \{T\}$ der Niveaufläche des Feldes (4), für dessen $u(\bar{r}_U) = 0$; $\bar{r}_U = \overrightarrow{QU}$ ist, ist eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit der nullwertigen Tangentialbeschleunigungen der Punkte des Körpers T, die eine Fläche zweiten Grades $\bar{r}_U \cdot \bar{\bar{T}} \cdot \bar{r}_U + \bar{w} \cdot \bar{r}_U = 0$ (5) ist, wobei $\bar{w} = \bar{v}_Q\times\bar{\varepsilon} + (\bar{v}_Q\times\bar{\omega})\times\bar{\omega}$; $\bar{\bar{T}} = J_3\bar{\bar{I}} - 2^{-1}(\bar{\omega}\otimes\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}\otimes\bar{\omega})$ ein konstanter symmetrischer Tensor zweiten Grades, $J_3 = \bar{\omega} \cdot \bar{\varepsilon}$ und $\bar{\bar{I}}$ der Einheitstensor ist. Im Grundsystem $Q(\bar{e}_i, x_i)$; $i = 1,2,3$; $J_1^{1/2}\bar{e}_1 = \bar{\omega}$; $J_s\bar{e}_2 = \bar{\omega}\times\bar{\varepsilon}$; $J_1^{1/2}J_s\bar{e}_3 = \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\varepsilon})$ ist die charakteristische Matrix der Fläche (5) $\|a_{mn}\|$ (6); $m,n = 1,2,3,4$; $a_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{\bar{T}} \cdot \bar{e}_j$; $j = 1,2,3$; $a_{i4} = 2^{-1}\bar{w} \cdot \bar{e}_i$, $a_{44} = 0$. Sei A die Determinante der Matrix (6) und $J_2 = \bar{\varepsilon}^2$.

J_3	J_9	J_{10}	Flächentypen
$\neq 0$	$A < 0$		Zweischaliges Hyperboloid
	$A > 0$		Einschaliges Hyperboloid
	$A = 0$		Kegel
$= 0$		$\neq J_2J_4J_1^{-1}$	Orthogonales hyperbolisches Paraboloid
	$\neq 0$	$= J_2J_4J_1^{-1}$	Gleichseitiger hyperbolischer Zylinder
	$= 0$		Zwei aufeinander senkrechte Ebenen

R. Leis (Bonn): *Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien.*

Es sei $G_a = R^3 - G$ ein Außenraum, und es seien ε, μ positiv definite, symmetrische Matrizen mit variablen Koeffizienten, die für genügend große $|x|$ mit der Einheitsmatrix übereinstimmen. Dann gibt es genau eine Lösung (E,H) der Außenraumaufgabe der Maxwellschen Gleichungen

(1) $\operatorname{rot} E - i\omega\mu H = J$; $\operatorname{rot} H + i\omega\varepsilon E = K$ mit $n \times E|\partial G = 0$,

die der Ausstrahlungbedingung genügt.

Zum Beweis wird als erstes gezeigt, daß für die Maxwellschen Gleichungen das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit gilt. Dazu wird eine Abschätzung herangezogen, die *Protter* für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung angegeben hat. Hieraus folgt die Eindeutigkeit der Randwertaufgabe.

Zum Nachweis der Existenz einer Lösung wird zunächst die Gleichung

$$(2) \qquad \begin{aligned} &-\operatorname{rot}\mu^{-1}\operatorname{rot}E + \varepsilon\operatorname{grad}\operatorname{div}\varepsilon E + \bar{\omega}^2\varepsilon E = G \\ &n \times E|\partial G = 0; \; \operatorname{div}\varepsilon E|\partial G = 0 \end{aligned}$$

mit Hilbertraummethoden in einem beschränkten Gebiet diskutiert und u. a. gezeigt, daß es abzählbar unendlich viele Eigenwerte und zugehörige Eigen-

schwingungen gibt. Es sei K eine genügend große Kugel, die $\bar{G}$ enthält. Dann erhält man die Lösung der Außenraumaufgabe, indem man Gl. (2) mit Hilbertraummethoden in dem beschränkten Gebiet $K - G$ löst und die Lösung mit Hilfe der Integralgleichungsmethode geeignet fortsetzt. Aus der Rand- und Ausstrahlungsbedingung folgt dann div $\varepsilon E = 0$ in G_a, d. h. die Lösung von Gl. (2) löst auch die Maxwellschen Gleichungen (1).

D. Mangeron (Iasi) und M. N. Oguztöreli (Edmonton): *Functional equations and optimal problems in distributed parameter control systems concerning polyvibrating systems.*

Starting from their own research work related with „polyvibrating" equations [1] having as prototype the boundary value problem

$$[A(x)u^1 + \alpha B(x)u]^1 + \alpha[B(x)u^1 + C(x)u] = 0, \quad x = (x_1, x_2, \ldots x_m),$$

$u = 0$ on the boundary of R, $R = [a_i \leq x_i \leq b_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, or the corresponding variational problem of the minimum of the functional

$$D(f) = \int_R A(x) f^{12}(x)\, dx,$$

subject to the conditions that

$$H(f) = \int_R [2B(x) f'(x) f^1(x) + C(x) f^2(x)]\, dx = +1 \text{ (or } -1)$$

and $f(x) = 0$ on the boundary of R, the authors have considered in their very recent set of papers published in the „Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei" various problems pertaining to the theory of polyvibrating systems. The novel aspect of the theorems lies in the interpretation of R as a m-dimensional rectangular domain and the symbol ^{1} as designating „total differentiation" in the sense of *Picone* that

$$u^1 \equiv \partial^m u / (\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m)$$

In the present paper, using the dynamic programming approach, functional equations and optimal problems in distributed parameter control systems concerning polyvibrating equations are given and discussed.

F. Pichler (Innsbruck): *Über verallgemeinerte Übertragungsfunktionen linearer Systeme.*

Lineare zeitinvariante Systeme werden in verschiedenen Disziplinen, wie Nachrichtentechnik, Regelungstechnik, Akustik und Volkswirtschaftslehre, vielfach mit Hilfe von Übertragungsfunktionen beschrieben, deren Definitionsbereich der Frequenzbereich ist. Diese geben interessierende Systemeigenschaften bekannt und sie dienen damit auch als Ausgangspunkt zur Synthese solcher Systeme.

In diesem Beitrag wird der Begriff der Übertragungsfunktion, Ideen von *N. Wiener* folgend, für lineare Systeme, die bezüglich der Verknüpfung in einer abelschen topologischen Gruppe invariant sind, erweitert. In der Folge werden speziell solche Systeme, die Sequenzsysteme genannt, betrachtet. Diese sind gegenüber der „ohne-Übertrag-Addition" von Binärzahlen invariant. Von vorgegebenen Übertragungsfunktionen ausgehend kann eine Synthese technisch mit elektronischen Bausteinen realisierbarer Sequenzsysteme durchgeführt werden. Diese stehen in direkter Analogie zu den bekannten Tief- und Bandpaßfiltern der Nachrichtentechnik.

K. Ritter (Karlsruhe): *Nichtlineare Optimierungsprobleme in teilweise geordneten Banachräumen.*

Es seien $X, Y_0, \ldots, Y_n$ Banachräume. In jedem Y_j sei ein konvexer Kegel K_j gegeben, durch den eine teilweise Ordnung von Y_j in der Weise definiert wird, daß für zwei Elemente y_1 und y_2 aus Y_j die Beziehung $y_1 \geqslant y_2$ genau dann gilt, wenn $y_2 - y_1 \in K_j$. Ferner sei F eine Abbildung von X nach Y_0 und g_j eine Abbildung von X nach Y_j, $j = 1, \ldots, n$. Dann wird folgendes Optimierungsproblem betrachtet: Man bestimme ein x_0 aus der Menge $R = \{x \in X \mid g_j(x) \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n\}$ so daß $F(x) \geqslant F(x_0)$ für alle $x \in R$. Unter gewissen Voraussetzungen an F und $g_1, \ldots, g_n$ werden notwendige und hinreichende Bedingungen für eine Lösung dieses Problems hergeleitet.

P. Roos (Stuttgart): *Eine Abschätzung des Quadraturfehlers mit Hilfe der Effizienz.*

$\overline{W}^k = (x : o \leqslant x \leqslant e)$ sei das abgeschlossene k-dimensionale Einheitsintervall im reellen k-dimensionalen Euklidischen Raum R_k mit den Intervallendpunkten $o = (0, \ldots, 0)$ und $e = (1, \ldots, 1)$ und den Zwischenpunkten $x = (x_1, \ldots, x_k)$. $W^k = (x : o \leqslant x < e)$ sei das rechtsoffene Einheitsintervall. $K = (1, \ldots, k)$ repräsentiert die Menge der Indizes der Koordinatenachsen. Ferner sei $i = (i_1, \ldots, i_l) \subset K$. Dann bezeichnet $\overline{W}_i(e) = (x : o \leqslant x_j \leqslant 1,\ j \in i;\ x_j = 1,\ j \notin i)$ eine l-dimensionale Seitenfläche von W^k. Die Projektion von x auf $\overline{W}_i(e)$ werde mit $p_i(x)$ bezeichnet. Die Funktion $f : \overline{W}^k \to R_1$ sei eine reellwertige, beschränkte Riemann-integrierbare Funktion. Das über $\overline{W}^k$ genommene Riemannsche Gebietsintegral $I(f) = \int f(x)\, dx$ soll durch den Mittelwert $\hat{I}_n(f, z) = (1/n) \sum_{j=1}^{n} f(z_j)$ approximiert werden, wobei $z = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ eine Folge von Stützstellen $z_\nu \in W^k$ ist. $A_n(Q, z)$ sei die Anzahl der Glieder von z, die in dem Intervall $Q = (x : o \leqslant x < q)$ mit den Endpunkten $o = (0, \ldots, 0)$ und $q = (q_1, \ldots, q_k) \leqslant e$ liegen. $|Q|$ bezeichne das Volumen von Q. Die Größe

$$D_n^{(r)}(z) = \sqrt[r]{\int_{\overline{W}^k} |A_n(Q, z)/n - |Q||^r dq}, \quad r \geqslant 1,$$

werde als Diskrepanz r-ter Ordnung der Folge z bezeichnet. Für $r = \infty$ erhält man die gewöhnliche Diskrepanz der Gleichverteilungstheorie und für $r = 2$ den wichtigen Fall der (hier modifizierten) von *Hammersley* eingeführten sogenannten Effizienz. Es gilt folgender Satz: Sind die partiellen Ableitungen $\partial^l f / \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}$ für alle nichtleeren $i \subset K$ stetig in $\overline{W}^k$ und ist $r^{-1} + s^{-1} = 1$, dann gilt

$$|\hat{I}_n(f, z) - I(f)| \leqslant D_n^{(r)}(z) \sum_{\Phi \neq i \subset K} \sqrt[s]{\int_{\overline{W}^l} |\partial^l f(p_i(x)) / \partial p_i(x)|^s dp_i(x)},$$

mit $dp_i(x) = dx_{i_1} \ldots dx_{i_l}$, $\quad \partial p_i(x) = \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}$.

Der Beweis stützt sich auf eine Diskretisierung des Problems und eine Anwendung der Abelschen partiellen Summation mit k-dimensionalen Summationsindex. Für den Fall $r = \infty$ wurde der Satz für $f \in BV$ von *E. Hlawka* (1961) bewiesen. Nach einer persönlichen Mitteilung von Herrn *S. K.Zaremba* auf dem ÖMG-Kongress wurde von ihm der Satz in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit für $r = 2$ bewiesen.

D. Schmidt-R. Mennicken (Köln): *Über lineare Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten.*

Lineare Differentialgleichungen des Typs

$$(*) \qquad y^{(m)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda_{-1,k} e^{ix} + \lambda_{0,k} + \lambda_{1,k} e^{-ix}}{\gamma_{-1} e^{ix} + \gamma_0 + \gamma_1 e^{-ix}} y^{(k)}(x) = 0$$

besitzen unter den Voraussetzungen $\gamma_0 = 1 + \gamma_1 \gamma_{-1}$, $|\gamma_1 \gamma_{-1}| < 1$ in den Streifen $\mathfrak{S}_1 = \{x : |e^{ix}| < |\gamma_1|\}$, $\mathfrak{S}_3 = \{x : |\gamma_1| < |e^{ix}| < 1/|\gamma_{-1}|\}$, $\mathfrak{S}_3 = \{x : 1/|\gamma_{-1}| < |e^{ix}|\}$ 2π-periodische holomorphe Koeffizienten. Eine komplexe Zahl ν heißt charakteristischer Exponent der Differentialgleichung (*) in $\mathfrak{S}_i (i = 1,2,3)$, falls zu (*) eine nicht-triviale Lösung existiert, welche der Bedingung

$$y(x+2\pi) = e^{2\pi i \nu} y(x) \qquad (x \in \mathfrak{S}_i)$$

genügt.

Die charakteristischen Exponenten in $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_3$ sind elementar berechenbar. Die Bestimmung der charakteristischen Exponenten in $\mathfrak{S}_2$ bereitete im allgemeinen Schwierigkeiten.

Es zeigt sich, daß die charakteristischen Exponenten in $\mathfrak{S}_2$ die Nullstellen (in ν) einer zweifach-unendlichen Determinante $\Delta(\nu; \gamma_{-1}, \gamma_1, \lambda_{j,k})$ vom „Poincaré-Perronschen Typ" sind. Diese Determinante läßt sich in eine Fourierreihe der Form

$$\Delta(\nu; \gamma_{-1}, \gamma_1, \lambda_{j,k}) = \sum_{n=-m}^{m} a_n(\gamma_{-1}, \gamma_1, \lambda_{j,k}) e^{\pi i n \nu}$$

entwickeln, wobei $a_{2n+1} = 0$, falls m gerade ist, und $a_{2n} = 0$, falls m ungerade ist. Die nicht-verschwindenden Koeffizienten a_n können mit Hilfe einfacher linearer dreigliedriger Rekursionen berechnet werden. Damit ist die Berechnung der charakteristischen Exponenten in $\mathfrak{S}_2$ zurückgeführt auf die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms m-ten Grades.

Als Spezialfälle dieser Verfahren ergeben sich die von *F. W. Schäfke, R. Ebert, H. Groh, D. Schmidt, H. J. Stoß, R. Mennicken* in der Numer. Math. *3*, 30—36 (1960), *4*, 1—7 (1962), *8*, 68—71 (1966), *10*, 423—436 (1967) bzw. im Arch. Rat. Mech. *26*, 163—178 (1967), *29*, 144—160 (1968) publizierten Verfahren für die Mathieu-Hillsche, die Whittaker-Hillsche und Incesche Differentialgleichung. Ableitbar sind entsprechende Verfahren für die Heunsche Differentialgleichung und somit die von *H. Peters* (Diplomarbeit, Köln 1964) für die Sphäroid-Differentialgleichung angegebenen Methoden.

W. Tscharnuter (Wien): *Markoffsche Prozesse und Stellardynamik.*

Vor etwa 25 Jahren wies *Chandrasekhar* darauf hin, daß die Geschwindigkeitsänderungen eines Sternes in einem im quasistationären Zustand befindlichen Sternsystem wegen der Gravitationswirkung der „Nachbarsterne" den Ortsveränderungen eines kolloiden, eine Brownsche Bewegung ausführenden Teilchens analog sind. Zusammen mit *J. v. Neumann* analysierte er das fluktuierende, irreguläre Gravitationsfeld dieser Nachbarsterne, und mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitstheorie wurde auf die Brownsche Bewegung mit dynamischer Reibung geschlossen.

Da aber für die Verteilungsfunktion des irregulären Gravitationsfeldes (Holtsmark-Verteilung) keine 2. Momente existieren, kann man im Rahmen der Hypothesen und der Theorie des fluktuierenden Gravitationsfeldes nicht auf eine (asymptotische) Normalverteilung schließen, sondern der stochastische Prozeß im Geschwindigkeitsraum ist entsprechend den Eigenschaften der Holtsmark-Verteilung durch einen anderen Markoffschen Prozeß, den sogenannten isotropen, stabilen Prozeß im R^3 mit dem charakteristischen Exponenten 3/2 unter Hinzunahme der dynamischen Reibung zu approximieren.

Im Geschwindigkeitsraum ist die Bahn des „Teststernes" rechtsseitig stetig; deswegen ist es möglich, die Energie, die ein aus einem Sternsystem entweichender Stern abführt, sinnvoll zu berechnen, was innerhalb der Theorie der Brownschen Bewegung (stetige Bahnen!) nicht durchführbar ist. Eine fundamentale Folgerung ist, daß die Maxwellsche Verteilung keine Gleichgewichtsverteilung darstellt; Kugelsternhaufen dürfen z. B. nicht als isotherme Gaskugeln beschrieben werden.

J. P. Tschupik (Graz): *Ein geometrisches Modell für die Theorie der Gleichungen dritter und vierter nomographischer Ordnung.*

Einer Gleichung $F = 0$ dritter oder vierter nomographischer Ordnung wird eine auf einem hyperbolischen Paraboloid P liegende Netztafel N_p so zugeordnet, daß zwei Netzkurvenscharen in Erzeugendenscharen von P fallen. Die dritte Netzkurvenschar wird aus P von den Tangentialebenen eines allgemeinen Kegels mit Spitze S oder von den Ebenen eines Büschels mit Träger s ausgeschnitten, je nachdem $F = 0$ von der vierten oder dritten nomographischen Ordnung ist.

Der Typus von $F = 0$ drückt sich in der Lage von S oder s bezüglich P aus; insbesondere gehören zu den bekannten kanonischen Formen sehr spezielle Lagen. Lageänderungen erzwingt man durch automorphe Kollineationen von P, wobei sich diese in Substitutionen ausdrücken, die die nomographische Ordnung und den Typus von $F = 0$ erhalten.

Die klassischen kanonischen Formen sind i. a. nur über Lageänderungen von S oder s erreichbar. Der geometrische Weg legt andersartige Normalformen nahe, zu denen man ohne Lageänderungen gelangen kann.

SEKTION V:

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

L. Arnold (Stuttgart) - H. Michalicek (Hamburg): *Komplexwertige stabile Maße und deren Anziehungsgebiete.*

Sei $M(R)$ die Banach-Algebra aller endlichen regulären komplexwertigen Maße auf der reellen Achse R (mit der Faltung als Multiplikation) und $B(R)$ die Menge aller Fourier-Stieltjes-Transformationen

$$\hat{\mu}(t) = \int \exp(itx)\, d\mu(x)\,, \quad \mu \in M(R)\,.$$

Es werden alle möglichen punktweisen Grenzwerte $\hat{\nu} \in B(R)$ der Folge

$$(\hat{\mu}(t/B_n))^n \exp(itA_n)\,, \quad n = 1,2,\ldots$$

mit positiven B_n und reellen A_n angegeben. Dies ist eine Verallgemeinerung eines alten Problems aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die möglichen Grenzwerte sind stabil, d. h. für alle $a > 0$, $b > 0$ gibt es ein $c > 0$ und ein γ (reell), so daß

$$\hat{\nu}(at)\,\hat{\nu}(bt) = \hat{\nu}(ct)\,\exp(i\gamma t)$$

gilt. Verschiedene Abschätzungen für die Norm stabiler Maße werden gegeben. Die Menge aller $\hat{\mu} \in B(R)$, die von einem $\hat{\nu}$ im obigen Sinne angezogen werden (Anziehungsgebiet von $\hat{\nu}$) wird charakterisiert.

Schließlich wird untersucht, in welchem Sinne die zugehörigen Maße gegen das Grenzmaß konvergieren.

Literatur:

L. Arnold - H. Michalicek, Complex-valued stable measures and their domains of attraction, Trans. Amer. Math. Soc. (demnächst). On the norm of stable measures, Bull. Amer. Math. Soc. *74* (1968), 364—369.

W. Böge (Heidelberg): *Shannon's theorem without entropy.*

Shannon's theorem (in information theory) becomes false, when extended to finite alphabet stationary sources instead of ergodic ones (or to a certain larger class of not necessarily ergodic channels), but becomes correct again (*Winkelbauer*), if the mean entropy of the source is replaced in the theorem by its what I shall call „cardinality rate" k and the entropy-capacity of the channel by its „discernibility rate" d, concepts more directly connected with the coding problem and — up to a normalisation — uniquely determined by the extended Shannon's theorem, and which coincide with the former concepts in the ergodic case.

The extended theorem says: $k < d \to \bar{\varepsilon} = 0 \to \underline{\varepsilon}' = 0 \to k \leqslant d$, where $\underset{(-)}{\bar{\varepsilon}}\,[\underset{(-)}{\bar{\varepsilon}'}]$ is the upper (lower) limit for $t \to \infty$ of the [time mean of] error probability, when words length t of the source are encoded, then sent through the channel and decoded in the best possible way.

As I found out, entropy can also be avoided in the proof, if one proves first (in a very elementary way) the following scheme of implications ($\overline{}$ indicating $\lim\limits_{t}\,\begin{smallmatrix}\inf\\ \sup\end{smallmatrix}$):

$$\begin{array}{lllll}
(0) & \bar{k} < \bar{d} & \nearrow & \bar{\varepsilon} = 0 \longrightarrow \bar{\varepsilon}' = 0 & \nearrow\ \bar{k} \leqslant \bar{d} \quad (3) \\
(1) & \bar{k} < \bar{d} & \searrow & \downarrow \qquad\qquad (*)\ \updownarrow & \searrow\ \underline{k} \leqslant \underline{d} \quad (4) \\
(2) & \underline{k} < \underline{d} & \nearrow & \underline{\varepsilon} = 0 \longrightarrow \underline{\varepsilon}' = 0 &
\end{array}$$

where the crucial implication (*) $\uparrow$ can be proved in the important cases by applying arbitrary good codes blockwise to arbitrary long words. Thus (2)$\to$(3) with trivial channels (identity maps, fulfilling $\underline{d} = \bar{d}$ already) gives $\underline{k} = \bar{k}$ $(= k)$ for stationary sources especially. Similarly (1)$\to$(4) with trivial sources (equidistributions, fulfilling $\underline{k} = \bar{k}$ already) gives $\underline{d} = \bar{d}$ $(= d)$ for channel fulfilling (*). For these channels and stationary sources the extended Shannon's theorem then results from the paths (0)$\to$(3).

G. Feichtinger (Bonn): *Grenzwertsätze für stochastische Automaten.*

Ein stochastischer Moore-Automat besteht aus einer Zustandsmenge Z, einem Eingabenalphabet E und einer Menge A von Ausgabesignalen (E, Z, A seien hier endlich). Weiters soll jedem Paar, bestehend aus einem Input- und Outputsignal, eine Transitionsmatrix der Ordnung Z entsprechen und jedem Zustand eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über A. Gemäß diesen Outputverteilungen und den Übergangsmatrizen funktioniert ein solches System, ausgehend von einer Initialzustandsverteilung in diskreten Takten, falls ein Inputprozeß einwirkt.

Es werden die mit derartigen Modellen verknüpften stochastischen Prozesse untersucht, welche im Zustandsraum Z und in den Ereignismengen A und E ablaufen. Für einfach kontingente Eingebeprozesse handelt es sich beispielsweise um homogene Markovketten mit darauf definierten zufälligen Funktionen.

Interpretiert man die Eingaben als Umgebungseinwirkung auf ein System und die Outputsignale als dessen Reaktionen darauf, so können stochastische Automaten als Modelle in den Verhaltenswissenschaften dienen. Dabei interessiert oft das Verhalten solcher Systeme auf lange Sicht. Über das Grenzverhalten der mit Automaten assoziierten stochastischen Prozesse werden einige Resultate hergeleitet. Unter geeigneten Voraussetzungen gilt beispielsweise das Gesetz der großen Zahlen und der zentrale Grenzwertsatz. Anhand probabilistischer Lernmodelle (*Estes, Bush & Mosteller*) wird die Anwendbarkeit derartiger Systeme und ihrer Grenzwertsätze illustriert.

K. Fischer (Stuttgart): *Über Erwartungswerte zufälliger Weglängen in Gebieten mit Klasseneinteilung.*

Gegeben sei der W-Raum (Ω, A, P). Auf $\Omega \times \Omega$ sei eine reelle Zufallsvariable D erklärt, die überdies die Anforderungen an eine Metrik in Ω erfülle. Der Erwartungswert von D (mittlerer Abstand zweier Punkte) existiere und werde mit d bezeichnet. Wir betrachten Zerlegungen von Ω in m disjunkte meßbare Klassen Ω_i mit $P(\Omega_i) = p_i > 0$ für $i = 1,2,\ldots,m$. Entsprechend wird mit d_{ij} der Erwartungswert des Abstands zweier Punkte aus Ω bezeichnet, wobei der erste Punkt in Ω_i und der zweite Punkt in Ω_j liegt. Dann gilt der Zusammenhang

$$d = \sum_{i=1}^{m} p_i^2 . d_{ii} + 2 . \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-i} p_i p_{i+j} d_{i,i+j} .$$ Eine unabhängige zufällige Punktfolge $\{\omega_i\}$ ($\omega_i \in \Omega$, $i = 1,2,\ldots,n$) beschreibt in Ω einen Weg, dessen mittlere Weglänge $s_n = (n-1) . d$ ist. Wir bilden aus der Folge $\{\omega_i\}$ durch eine einfache „Sortierung" einen anderen Weg: Zunächst werden alle Punkte, die in Ω_1 liegen, in der gleichen Reihenfolge wie in der ursprünglichen Folge angeschrieben; dann folgen alle Punkte, die in Ω_2 liegen usw. Die so gewonnene neue Folge beschreibt wiederum einen zufälligen Weg in Ω, dessen Weglänge den Erwartungswert

$$s_{nm} = \sum_{i=1}^{m} (np_i - 1 + (1-p_i)^n) . d_{ii} + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{m-i} g_{i,i+j} . d_{i,i+j}$$ mit

$$g_{i,i+j} = P(B_{ij}) - P(B_{i-1,j}) - P(B_{i,j+1}) + P(B_{i-1,j+1})$$ hat. Dabei ist

$P(B_{ij}) = (1 - \sum_{t=1}^{j-1} p_{i+t})^n$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keiner der Punkte aus der ursprünglichen Folge in die Klassen $\Omega_{i+1}, \ldots, \Omega_{i+j-1}$ fällt. Eine Zerlegung wird wirksam genannt, wenn $s_{nm} < s_n$ für alle $n > 2$ ist. Notwendige und hinreichende Bedingungen werden für verschiedene Sonderfälle angegeben. Ein spezielles Resultat: Falls $d_{ii} + d_{jj} < 2 . d_{ij}$ für alle $i \neq j$ ist, dann ist die Zerlegung asymptotisch wirksam.

J. Galambos (Legon, Ghana): *Methods to prove inequalities among probabilities and applications.*

The method of indicators (see *Loève's* book, Complements to Chapter I, and *A. Rényi,* J. de Math. 37/1958, 393—398) to prove linear inequalities among probabilities was generalized for quadratic inequalities by the present author and *A. Rényi* (Studia Sci. Hungar., 1968) and by the present author (submitted to the Proc. Amer. Math. Soc.). These methods will be stated and, as applications, several inequalities will be proved.

G. Helmberg (Eindhoven): *Über mittlere Rückkehrzeit unter einer maßtreuen Strömung.*

Der Satz von *M. Kac* über mittlere Rückkehrzeit unter einer zyklischen Halbgruppe maßtreuer Transformationen wird auf den Fall einer maßtreuen Strömung übertragen. Das rein maßtheoretische Resultat wird auf stetige maßtreue Strömungen in einem kompakten metrischen Raum angewandt.

H. Heyer (Erlangen): *Invariante Randomisierung.*

Randomisierungs (R-) Kern zwischen Banachverbänden A und B mit gleichbezeichneter Einheit e heißt jede lineare Abbildung $T : A \to B$, so daß $Ta \geqslant o$ für alle $a \in A$ mit $a \geqslant o$ und $Te = e$ gilt. Die Menge aller R-Kerne zwischen A und B bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}(A,B)$. Zu jedem (statistischen) Experiment $\mathfrak{X} = (X,E,(P_i)_{i\in I})$ im Sinne von *LeCam* (Ann. math. Stat. 35, 1964) und vorgegebener kompakter konvexer Teilmenge D von $[-1,+1]^I$ als Entscheidungsmenge definiert man die zugehörige Menge $\mathfrak{E}(\mathfrak{X},D) := \{f = (f_i)_{i\in I} : X \to D$ mit $f_i \in E$ für alle $i \in I\}$ der Entscheidungsfunktionen. Ist $\mathfrak{X}$ ein μ-dominiertes klassisches Experiment $(X, \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}, (P_i)_{i\in I}$, so läßt sich das μ-assoziierte verallgemeinerte Experiment $\mathfrak{X}(\mu)$ definieren als Tripel $(X, L_{\mathfrak{A}}, (P_i)_{i\in I})$, wobei $L_{\mathfrak{A}}$ der Banachverband der Klassen μ-wesentlich beschränkter Funktionen auf X bezeichnet. Für jedes D wählt man sodann als Menge $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}(\mu),D)$ von verallgemeinerten Entscheidungsfunktionen die Menge $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}(D), L_{\mathfrak{A}})$.

Hierbei ist $\mathfrak{C}(D)$ der Raum der stetigen reellen Funktionen auf D. Zu $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{X}(\mu)$ läßt sich für jedes $f \in \mathfrak{E}(\mathfrak{X},D)$ bzw. $U \in \mathfrak{E}(\mathfrak{X}(\mu),D)$ die Risikofunktion $R_f(i) := \langle f_i, P_i \rangle$ bzw. $R_U(i) := \langle UP_i, P_i \rangle$ für alle $i \in I$ definieren, wobei p_i die i-te Projektionsabbildung ist. Ist nun $\mathfrak{Y}$ ein beliebiges Experiment $(Y,F,(Q_i)_{i\in I})$ und $\varepsilon > 0$, so heißt $\mathfrak{X}(\mu)$ ε-informativer als $\mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{X}(\mu) \supset_\varepsilon \mathfrak{Y}$), falls es zu jedem D und jedem $f \in \mathfrak{E}(\mathfrak{Y},D)$ ein $U \in \mathfrak{E}(\mathfrak{X}(\mu), D)$ gibt mit $R_U \leqslant R_f + \varepsilon$. Seien $\mathfrak{N}_0 := \{U \in \mathfrak{R}(F, L_{\mathfrak{A}}) : UP_i = Q_i$ für alle $i \in I\}$ und $(\Gamma_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ eine Familie von Abbildungen von $\mathfrak{N}_0$ in sich. Dann sind unter gewissen Voraussetzungen für die Familie $(\Gamma_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ die folgenden Aussagen äquivalent: (1) $\mathfrak{X}(\mu) \supset_\varepsilon \mathfrak{Y}$ für alle $\varepsilon > 0$; (2) Es existiert ein $T \in \mathfrak{N}_0$; 3) Es existiert ein Γ_σ-invariante $T \in \mathfrak{N}_0$.

Der Satz gestattet Anwendungen insbesondere auf die Theorie der translationsinvarianten topologischen Experimente.

W. Knödel (Stuttgart): *Über die Verteilung der Binärziffern einer gemessenen Größe.*

Für die wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung von Rundungsfehlern ist es notwendig, die Verteilung der auftretenden Maschinenzahlen zu kennen. Dabei liegen bisher nur Ergebnisse für den Fall vor, daß diese Verteilung gewisse Regularitätsbedingungen erfüllt. Z. B. nimmt *Henrici* Gleichverteilung einer gewissen Klasse von Binärzahlen an. Wir wollen uns hier mit der Verteilung der Eingangsdaten einer Rechnung beschäftigen. Wir zeigen, daß unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Natur der Eingangsdaten wenigstens ein geeignet gewähltes „Mittelstück" der Binärziffernfolge gleichverteilt ist. Dabei ist dieses Mittelstück gegen die niederen Ziffern durch die Meßgenauigkeit begrenzt, gegen die hohen Ziffern durch die Verteilung der gemessenen Größe.

Wir formulieren unsere Ergebnisse für Zahldarstellungen im Festkomma. Bei Darstellungen im Gleitkomma konnten wir für die Mantisse der Gleitkommazahlen entsprechende Ergebnisse erhalten. Die Betrachtungen werden aber wesentlich verwickelter, ohne daß neue Ideen für die Behandlung erforderlich sind, so daß wir auf die Wiedergabe hier verzichten.

R. Liedl (Innsbruck): *Maße auf Sprachen.*

Die Wahrscheinlichkeit eines Satzes aus einer Sprache $\mathfrak{S}$ wird definiert als die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Satz bei einer Interpretation zu einer wahren Aussage im aristotelischen Sinne wird. Für Prädikatenkalküle erster Ordnung werden die Axiome von *H. Gaifman* erfüllt. Durch ein Axiomensystem in $\mathfrak{S}$ bekommt man für jeden Satz aus $\mathfrak{S}$ eine Information.

J. Novák (Prag): *On probabilities defined on a certain class of non-Boolean algebras.*

Let $(T,t,.)$ be a unitary ring consisting of k elements. Denote with XT a Cartesian product of sets T_i where $T_i = T$ for each $i \in I$.

Define $\lim t^n = t$ in T whenever $t^n = t$ for nearly all n. Further define $(t_i) + (u_i) = (t_i + u_i)$, $(t_i) . (u_i) = (t_i . u_i)$, $\lim (t_i^n) = (\lim t_i^n)$.

To each element (t_i) there corresponds a preimage $h((t_i)) = (A_t)_{t\in T}$ consisting of k disjoint subsets of I such that $\bigcup_{t\in T} A_t = I$. The set of

all (A_t) will be denoted by $\dot{I}$. Define on $\dot{I}$:
$(A_t) + (B_t) = (\bigcup_{r+s=t} A_r \cap B_s)$, $(A_t) \cdot (B_t) = (\bigcup_{rs=t} A_r \cap B_s)$, $\mathrm{Lim}(A_t^n) = (\mathrm{Lim}\, A_t^n)$.
Then the map h is an isomorphism and a homeomorphism.

Now fix an element in T, say O, and denote $T' = T - (O)$. Let D be a unitary subring of XT. We say that D has property (α) provided that the following condition is fulfilled: If a occurs in some $(A_t) \in \dot{I}$ and $h^{-1}((A_t)) \in D$ then for each $s \in T'$ there is an element $(B_t) \in \dot{I}$, $h^{-1}((B_t)) \in D$ such that $B_s = A$, $B_t = \emptyset$ for $t \neq s$, $t \in T'$. (All a like this form a set algebra A). Now it is possible to define a probability measure p on D fulfilling (α) as follows: Let $P_m, m \in T'$ be probability measures on A. If $(t_i) \in D$, then put $p((t_i)) = \sum_{t \in T'} P_t(A_t)$ where $(A_t = h((t_i))$. Then p is nonnegative, additive, continuous on D and such that $p((O)) = 0, p((e)) = 1$, (e) being the unit of XT. If $P_t \equiv P$ for each $t \in T'$, then $0 \leq p((t)) \leq 1$. Otherwise there is an element $(u_i) \in D$ such that $p((U_i)) > 1$.

P. Weiß (Innsbruck): *Subjektive Unsicherheit und subjektive Information.*

Die von *Shannon* eingeführten Begriffe „Entropie" bzw. „Information" und die darauf aufgebaute Theorie der statistischen Nachrichtenübertragung haben mit rein technischen Dingen wie Quelle, Kodierer, Kanal, Speicher und Dekodierer zu tun. Dabei wird weder auf den Beobachter, der die Mitteilung erhält, noch auf die Art der Mitteilung Rücksicht genommen. Bei vielen informationstheoretischen Untersuchungen ist dies aber sehr unerwünscht.

Dieser Vortrag soll nun einen Weg aufzeigen, der es ermöglicht, sowohl den Beobachter, als auch die Art der Mitteilung informationstheoretisch zu berücksichtigen. Der daraus resultierende Begriff der subjektiven Unsicherheit enthält sowohl den *Shannon*'schen als auch den *Bongard*'schen Unsicherheitsbegriff als Spezialfälle.

W. Wertz (Wien): *Über gewisse nichtparametrische Schätzfolgen.*

$\mathfrak{B}$ sei eine nichtleere Klasse von Dichten über dem $\mathbf{R}_1$. Jede Folge $(h_n; n \in \mathbf{N})$ von $\mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_n - \mathfrak{B}_1$-meßbaren (d. h. Borel-meßbaren) Funktionen h_n: $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_n \to \mathbf{R}_1$ heißt eine Schätzfolge für $f \in \mathfrak{B}$. K sei eine beschränkte, Borel-meßbare, integrierbare Funktion über dem $\mathbf{R}_1$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = 1$, $\lim_{x \to \infty} |xK(x)| = 0$ und $\lim_{x \to -\infty} |xK(x)| = 0$, und (k_n) sei eine positive Nullfolge.

Es wird das asymptotische Verhalten von Schätzfolgen der Gestalt

$$(x; x_1, \ldots, x_n) \to h_n(x; x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{nk_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{k_n}\right); n \in \mathbf{N}$$

unter verschiedenen zusätzlichen Bedingungen für die Klasse $\mathfrak{B}$, die Folge (k_n) und die Funktion K untersucht.

K. H. Wolff (Wien): *Der Nutzenbegriff in der Versicherungsmathematik.*

Die Risikosituation einer Versicherungsgesellschaft kann für ein bestimmtes Versicherungsjahr durch das vorhandene Kapital K und durch die Verteilungsfunktion $F(x)$ der Summe der gedeckten Schäden beschrieben werden. Bezeichnet $G(z) = 1 - F(K - z + 0)$ die Verteilungsfunktion für das nach Abwicklung der Versicherungen verbleibende Endkapital z, dann kann die Güte der Risikosituation mit Hilfe der Nutzenfunktion

$$N[G(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} n(z)\,dG(z)$$

bewertet werden; $n(z)$ bedeutet hiebei die zugrundegelegte Bewertung eines Geldbetrages der Höhe z. Rationale Bewertungen erfüllen die beiden Bedingungen $n'(z) > 0$ und $n'' < 0$. Insbesondere die zweite Bedingung ist eine Folge der „Risikoaversion", welche Voraussetzung für den Abschluß einer Versicherung ist.

Will die Versicherungsgesellschaft ihre Situation optimieren, dann muß die Nutzenfunktion maximiert werden. Durch den Abschluß von Rückversicherungen wird $G(z)$ geändert. Im allgemeinen werden zwei Gesellschaften durch den Abschluß gegenseitiger Rückversicherungen beide ihre Risikosituationen verbessern können. Ein Teilbereich aus dem Bereich aller möglichen Rückversicherungen führt für beide Gesellschaften zur Verbesserung der Risikosituation. Innerhalb dieses Teilbereiches besteht ein echter Interessenkonflikt, wie er in der Spieltheorie behandelt wird.

Die Überlegungen lassen sich verallgemeinern, indem nicht nur die Risikosituation eines bestimmten Versicherungsjahres, sondern der gesamte zukünftige Versicherungsverlauf in die Betrachtungen einbezogen wird. Mit Hilfe von Modellen aus der kollektiven Risikotheorie läßt sich zeigen, wie die Politik der Gesellschaft beim Abschluß von Versicherungen in der Rückversicherung und in der Dividendenzahlung verbessert werden kann.

Alle Überlegungen beruhen auf der Voraussetzung rationaler Entscheidungen der Gesellschaft, die jedoch, wie gezeigt werden kann, nicht ohne weiteres angenommen werden dürfen.

SEKTION VI:

Numerische Mathematik und Informationsverarbeitung

K. Graf Finck von Finckenstein (Garching/München): *Über die numerische Behandlung der n-dimensionalen Wellengleichung.*

1964 wurden von *P. D. Lax* und *B. Wendroff* Differenzenschemata 2. Ordnung zur numerischen Lösung linearer hyperbolischer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten untersucht. Es wurde für diese Schemata ein hinreichendes Stabilitätskriterium hergeleitet: Seien h die Zeitschrittweite und $\mu_i h$, $i = 1, \ldots, n$ die Ortsschrittweite des Gitternetzes. Dann lautet das Stabilitätskriterium:

$$\mu_i \geqslant \| A_i \| \, . \, n \, . \sqrt{n} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

wobei A_i die Koeffizienten der Differentialgleichung sind. Dieses Kriterium läßt sich für den Fall der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} \quad ,$$

mit $c_i \neq 0$, konstant, reell und $x := (x_1, \ldots, x_n)$ verschärfen. Formt man diese in ein hyperbolisches System um, so ergibt sich als hinreichendes Stabilitätskriterium:

$$\mu_i \geqslant |c_i| \, . \, n \qquad (i = 1, \ldots, n) \, .$$

Bei einem Differenzenschema 1. Ordnung hat man im allgemeinen Fall:

$$\mu_i \geqslant \|A_i\| \, . \, n \qquad (i = 1, \ldots, n) \, ,$$

und im Fall der Wellengleichung:

$$\mu_i \geqslant |c_i| \, . \sqrt{n} \qquad (i = 1, \ldots, n) \, .$$

Diese letzte Bedingung ist auch notwendig für Stabilität.

Th. A. Fuchs (Wien): *Theorie und Praxis der Simulationsmodelle.*

Nicht immer kann man Optimierungen im Sinne des Simplex-Algorithmus durchführen. Hier erweist sich die Anwendung von Simulationsmodellen als gute und brauchbare Annäherung an die angestrebte optimale Lösung (Zielfunktion). Versuchsergebnisse aus dem praktischen Betrieb weisen auf die Zusammenhänge zwischen Modell und Wirklichkeit hin und ermöglichen so eine beste Standardmodellauswahl neben einer praxisnahen Entscheidung für die Optimierung.

Modellbau und Regressionsanalyse werden veranschaulicht, ebenso die daraus resultierenden Trendkurven. Schließlich wird die Notwendigkeit der Selbstkorrektur als Bestandteil des Modells aufgezeigt. In der Folge wird nun die theoretische Beweisführung im Zusammenhang mit möglichen praktischen Anwendungen konkret demonstriert, wobei auf die Simulation als Methode bewußt hingewiesen wird.

Mittels elektronischer Datenverarbeitung können in der Praxis Regelvorgänge, Prozeßsteuerungen und Produktionsabläufe so nachempfunden bzw. rechnerisch nachgebildet werden, daß das Simulationsmodell in jedem spezifischen Fall eine Beurteilung hinsichtlich eines Optimums zuläßt. Weitere Ausblicke und Möglichkeiten für die künftigen Anwendungsbereiche werden ebenfalls dargelegt.

R. F. Gloden (Ispra): *Calcul des fonctions de Bessel I_n, J_n, K_n et Y_n moyennant les fractions continues.*

On sait que la fonction de Bessel I_n, qui constitue la solution distinguée d'une relation de récurrence, se calcule difficilement à partir de celle-ci pour n élevé; cependant le quotient de deux fonctions I_n d'indices consécutifs s'exprime aisément au moyen d'une fraction continue infinie. Nous en avons déduit un algorithme pour calculer les fonctions I_n.

Pour évaluer l'erreur, nous tenons compte du fait que la valeur d'une fraction continue à termes tous positifs est comprise entre celles de deux réduites consécutives. En outre l'erreur relative, qui constitue une fonction de l'abscisse x, de l'indice n et du nombre m de termes des fractions continues est pratiquement indépendante de n pour $n \geqslant 10$. C'est pourquoi nous avons déterminé le nombre de termes correspondant à une erreur relative maxima égale à 10^{-10} en valeur absolue.

Le raisonnement précédent s'applique également aux fonctions J_n; cependant l'erreur relative concernant les fonctions J_n peut être supérieure à 10^{-10} au voisinage des zéros de $J_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ces considérations nous ont permis d'établir des sous-programmes en double précision pour l'IBM 7090, destinés à calculer les fonctions de Bessel I_n, J_n, K_n, et Y_n, $n \leqslant 50$, moyennant les fractions continues.

R. Gorenflo (Garching/München): *Lineare parabolische Differentialgleichungen und Differenzenschemata vom Irrfahrt-Typus.*

Für die n-dimensionale partielle Differentialgleichung von *Fokker* und *Planck* (Vorwärtsdifferentialgleichung von *Kolmogorov*) mit orts- und zeitabhängiger Drift und Diffusionsmatrix werden, unter einigen zusätzlichen Bedingungen, explizite Differenzenschemata konstruiert, die als Beschreibung instationärer inhomogener Irrfahrten auf den Gitterpunkten aufgefaßt werden können. Diese Schemata sind stabil in der Maximum-Norm und können als diskrete Modelle des Diffusionsprozesses dienen. Mit ihrer Hilfe kann man bei gegebener Anfangsbedingung die Differentialgleichung numerisch approximativ lösen oder aber den zugrundeliegenden Diffusionsprozeß durch Monte-Carlo-Simulation approximativ behandeln und veranschaulichen.

Analoge Schemata kann man aufstellen für die Rückwärtsdifferentialgleichung von *Kolmogorov* und, bei geeigneter Modifikation des Begriffes Irrfahrt, auch für allgemeinere lineare parabolische Differentialgleichungen. Dies führt auf spezielle Differenzenschemata von positivem Typus. Es wird eine Bedingung angegeben, unter der diese Schemata eine besonders einfache Struktur haben.

R. J. Ilić (Kragujevac): *Application de la méthode N. Saltykow aux équations aux dérivées partielles de Dynamique.*

D'après la théorie de *N. Saltykow*, les équations aux dérivées partielles de Dynamique, à trois paramètres, intégrables par séparation des variables ont 8 types: un type qui correspond à une équation appartenant à la troisième classe supérieure, trois types d'équations de la seconde classe, trois types d'équations de la première classe, et un type d'équations correspondant à l'intégrale générale.

Dans cet exposé nous présentons l'application de la méthode complétée de Saltykow à l'équation de Hamilton-Jacobi, à trois paramètres, intégrable par séparation des variables

$$H \equiv A\,p_1^2 + 2B\,p_1p_2 + C\,p_2^2 + 2D\,p_1p_3 + 2E\,p_2p_3 + F\,p_3^2 = h\,,$$

A,B,C,D,E et F étant des coefficients dépendant des variables indépendantes x_i $(i = 1,2,3)$, h désignant une constante arbitraire.

D. Marsal (Hannover): *Die numerische Quadratur von uneigentlichen Integralfunktionen, Cauchyschen Hauptwerten, Integraltransformationen und singulären Integralgleichungen mit vorgeschriebener, beliebiger Genauigkeit vermittels einfacher Differenzengleichungen.*

Zu tabellieren sei $J(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ auf $0 \leqslant x \leqslant b$. Der Integrand $f(x)$ sei auf $(0,b]$ stetig mit dort beschränkt-stückweise stetiger Ableitung. Auf $[0,b]$ gelte $|f(b\beta^i)| \leqslant \text{const}\,(\beta^{-\mu})^i$ für $i = 0,1,2,\ldots$, ein $\mu < 1$ und alle β mit $0 \leqslant \beta_0 < \beta < 1$. Setzt man $\alpha = (1-\beta)\,/\,\beta\,(5\beta + 7)$, $A_{n-1} = 5\beta$, $A_n = 7\beta + 1$, $A_{n+1} = -1$ sowie $x_p = b\beta^p$, $J_p = J(x_p)$, $f_p = f(x_p)$, so gilt mit $n = m, m-1, \ldots, 1$ (J^* bzw. J^{**} sind Näherungen für J mit J^* bzw. $J^{**} \to J$ für $\beta \to 1$ und $m \to \infty$):

$$J^*_{n-1} = J^*_n + \frac{1-\beta}{1+\beta_{n-1}} \sum^{n} x_i f_i \qquad J^{**}_{n-1} = (1+\alpha)J^{**}_n - \alpha J^{**}_{n+1} + \alpha \sum_{n-1}^{n+1} A_i x_i f_i\,.$$

Man geht von einem Anfangswert J^*_m bzw. einem Paar J^{**}_m, J^{**}_{m+1} aus und berechnet sukzessiv J^* (J^{**}) an den Stellen $b\beta^{m-1}, \ldots, b\beta^2, b\beta, b$.

Die Herleitung der Formeln geschieht in vier Schritten: (1) Ableitung einer allgemeinen Summenformel für beliebige Intervallteilung; (2) Heuristischer Übergang zu unendlichen Reihen; (3) Konvergenzuntersuchung (zunächst für monotone Integranden) mit Hilfe des 2. Mittelwertsatzes; (4) Übergang zu den Differenzengleichungen.

Umformungen: Cauchysche Hauptwerte, Integrale mit unendlicher Intervallänge usw. überführt man durch einfache Substitutionen in $\int_0^b f$.

Anfangswerte: Man setzt $b\beta^m = B$ und schätzt $J^*_m = J^*(B)$ mit einem großen Schrittlängenquotienten, z. B. $\beta = 1/2$, ab.

Genauigkeit: Für eine sehr umfängliche Integrandenklasse und $\beta^* \leqslant \beta < 1$ gibt $J^{**} - J^*$ den Fehler von J^* vorzeichenrichtig auf eine geltende Dezimale genau wieder und strebt $|J - J^*| \to 0$ monoton für $\beta \to 1$. Man kann deshalb, wenn notwendig, β durch $J^{**} - J^*$ automatisch so verändern lassen, daß $|J - J^*|$ eine vorgegebene Fehlerfunktion $\varepsilon(x)$ nicht wesentlich übersteigt.

Singuläre Integralgleichungen (lineare, nichtlineare, reelle, komplexe; vom Volterra- oder Fredholm-Typ) lassen sich i. a. numerisch nach geeigneten Substitutionen vermittels der linken Differenzengleichung mit einfacher, parallel laufender Fehlerrechnung lösen.

H. Meißner (Hamburg): *"Datenverarbeitung" im Gymnasium.*

Bericht über eine schulgerechte Einführung in die Arbeitsweise elektronischer Datenverarbeitungsanlagen am Modell einer Handrechenmaschine: Einstell-, Resultat- und Umdrehungszählwerk der Handrechenmaschine lassen sich als Speicherplätze für Zahlen auffassen. Durch geeignete Kurbeldrehungen kann man den Inhalt des einen Speichers in einen anderen Speicher bringen, wobei dessen Inhalt ersetzt wird durch die Summe oder die Differenz der beiden Inhalte oder nur durch den neuen Inhalt.

Entsprechend läßt sich eine „Schließfachanlage" konstruieren: Diese wird von einer mechanischen Hilfskraft bedient, die nur gewisse Transportbefehle und Größenvergleiche durchführen kann. Welche Befehle ausgeführt werden sollen, muß der Hilfskraft von außen vorgeschrieben werden. Hierzu ist eine für jede Hilfskraft individuelle Sprache notwendig. Als „Esperanto" dieser Sprachen dient eine besondere Schreibweise, das Flußdiagramm.

K. Orlov (Beograd): *New and old spectral methods in solving algebraic equations.*

Spectral methods based on *M. Petrovitch's* mathematical spectra may be applied to very different problems of analysis, algebra and number theory. Most worked out is the application of mathematical spectra to the first part of Graeffe's method — transformation of equations.

It is known that the fundamental transformation equation

$$(1) \qquad Q(y) = (-1)^n P(x)\,P(-x)\,,$$

when treated in the usual way, gives a sequence of equations expressing the coefficients b_j (of the polynomial Q) as functions of the coefficients a_i (of the polynomial P). For the effective calculation of all coefficients b_j (n even) there should be done in all $(3n^2 + 4n + 4)/4$ operations.

The old spectral method (C. R. Acad. Sci. Paris *243*/1956, 1269—1270) transforms the equation (1) into a single relation between the ordinary spectrum S^{I} of the polynomial Q and the spectra — ordinary S and corrected $\overline{S}$ — of the polynomial P, having the form

$$S^{\mathrm{I}} = S\,.\,\overline{S}\,, \qquad S^{\mathrm{I}} = Q(10^{2h})\,, \qquad S = P(10^h)\,, \qquad \overline{S} = P(-10^h),$$

where h is a conveniently chosen natural number. For such an effective calculating only $n + 4$ operations are necessary in all.

The new spectral method utilizes new operations of choosing, reduces the equation (1) again to a single relation between the spectra of the polynomial Q and those of polynomials P_1 and P_2 (even and odd part of the polynomial P) having the form

$$S^{\mathrm{I}} = S_1^2 - S_2^2 \qquad S^{\mathrm{I}} = Q(10^{2h}) \qquad S_1 = P_1(10^h) \qquad S_2 = P_2(10^h)\,.$$

In this case, for the effective calculating are necessary only 11 operations, independently of the degree n of the equation.

A. Pignedoli (Bologna): *Transfinite Methoden für Transportprobleme.*

Einige Untersuchungen der Schule von Bologna über das Problem der Boltzmannschen Gleichung der Transporttheorie werden vom transfiniten Standpunkt aus betrachtet.

W. Riha (Wien): *Tschebyscheff-Approximation mit Nebenbedingungen.*

Bei Stabilitätsuntersuchungen von Diskretisierungsverfahren zur Auflösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen tritt das Problem auf, die „Stabilitätspolynome" möglichst optimal zu wählen: Zu festen n und k

$(n \geqslant k)$ und vorgegebenen

a_ν $(\nu = 0\ (1)\ k-1,\ a_0 = 1)$ sind Zahlen a_μ $(\mu = k\ (1)\ n)$

derart zu bestimmen, daß

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu\right| \leqslant 1$$

für ein möglichst großes Intervall $[A,0]$ $(A<0)$ ist.

Es wird gezeigt, wie sich die Bestimmung eines solchen „optimalen Polynoms" auf die Lösung einer Approximationsaufgabe im Tschebyscheffschen Sinn zurückführen läßt. Existenz und Eindeutigkeit werden bewiesen. Schließlich wird auch ein Algorithmus zur tatsächlichen numerischen Berechnung der Koeffizienten dieses Polynoms skizziert.

M. Šisler (Prag): *Über die Konvergenzbeschleunigung verschiedener Iterationsverfahren für die Lösung des linearen Gleichungssystems.*

Es wird eine Methode für die Konvergenzbeschleunigung verschiedener Iteratitonsverfahren für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ untersucht. Es handelt sich um die mit Hilfe der Iterationsformel $x_{\nu+1} = P_k^{-1}Q_k x_\nu + P_k^{-1}b$, $\nu = 0,1,2,\ldots$, definierte Methode, wo $P_k = kP_1$, $Q_k = (k-1)P_1 + Q_1$, $k \neq 0$. Dabei ist $A = P_1 - Q_1$ eine solche Zerlegung der Matrix A, daß der Spektralradius $\varrho(P_1^{-1}Q_1)$ der Matrix $P_1^{-1}Q_1$ kleiner als 1 ist. Es ist bekannt (s. z. B. *Isaacson, Keller:* Analysis of Numerical Methods, 1966), daß im Falle eines reellen Spektrums der Matrix $P_2^{-1}Q_1$ der Spektralradius $\varrho(P_k^{-1}Q_k)$ für $k_0 = 1-(M+m)/2$ seinen Minimalwert erlangt, welcher der Zahl $(M-m)/(2-M-m)$ gleich ist $(M = \max \lambda_i$, $m = \min \lambda_i$; λ_i mit $i=1,\ldots,n$ sind die Eigenwerte der Matrix $P_1^{-1}Q_1)$. Es ist immer $0 < k_0 < 2$.

Im Falle eines komplexen Spektrums der Matrix $P_1^{-1}Q_1$ ist die Bestimmung des optimalen Parameters etwas schwieriger. Es gilt allgemein, daß $\min_k \varrho(P_k^{-1}Q_k) = \min_k \max_i |(\lambda_i-1)/k+1|$. Man kann beweisen, daß wieder $0 < k_0 < 2$ ist. Im Falle, daß die Eigenwerte der Matrix $P_1^{-1}Q_1$ im Einheitskreise in gewisser spezieller Art verteilt sind, kann man leicht den optimalen Parameter k_0 nach folgendem Satze feststellen: Sei $|\lambda_i| \leqq |\lambda_n|$, $i=1,\ldots,n$ und mögen alle Zahlen $\Lambda_i = \lambda_i - 1$ im Durchschnitt der Kreise K und K_1 liegen, wo

$$S_K \equiv [-1;0],\ r_K = |\lambda_n|,\quad S_{K_1} \equiv [(|\Lambda_n|^2)/(\mathrm{Re}\Lambda_n)\ ;0],$$

$$r_{K_1} = |\Lambda_n|\ |\sqrt{(|\Lambda_n|^2)/(\mathrm{Re}^2\Lambda_n)} - 1,$$

Dann ist $k_0 = k_n = (|\Lambda_n|)/(|\mathrm{Re}\Lambda_n|)$ und $\varrho(P_{k_0}^{-1}Q_{k_0}) = \sqrt{1-\mathrm{Re}^2\Lambda_n/|\Lambda_n|^2}$. Wenn Λ_n auf dem Rande des Kreises K_2 liegt, wo $S_{K_2} \equiv [-1/2;0]$, $r_{K_2} = 1/2$, so ist $k_0 = k_n = 1$, sodaß gerade die ursprüngliche Matrix $P_1^{-1}Q_1$ optimalen Spektralradius besitzt.

Im Falle, daß es sich um ein komplexes Iterationsverfahren handelt, kann man eine weitere Konvergenzbeschleunigung mit Hilfe des komplexen Parameters $k \neq 0$ erreichen. Man kann beweisen, daß der optimale Spektralradius k_0 immer im Kreise K_3 liegt, wo $S_{K_3} \equiv [1;0]$, $r_{K_3} = 1$.

V. Štepánský (Ostrava): *Zentrale Nomogramme.*

Zentrale Nomogramme für Beziehungen bis zu zwölf reellen Veränderlichen. Zentrale kartesische Nomogramme und zentrale Nomogramme für Beziehungen bis zu sechs Veränderlichen mit einer Skala auf derselben quadratischen Leitlinie. Zentrale Nomogramme für Beziehungen bis zu sechs komplexen Variablen.

G. Wanner (Innsbruck): *Numerische Methoden für gewöhnliche Differentialgleichungen.*

Es wird zunächst über die numerische Auswertung der Integralformel von *W. Gröbner* (siehe dessen Vortrag in der Sektion Analysis) zur numerischen Behandlung von gewöhnlichen Systemen von Differentialgleichungen berichtet. Hierbei ist die Verwendung von Rekursionsformeln und geeigneten Quadraturen wertvoll. Weiters macht die Berechnung der Übertragungsmatrix eine „optimale" Schrittweitensteuerung mit fortlaufender Fehlerabschätzung und die Behandlung von Randwertaufgaben möglich. Abschließend werden Bedingungsgleichungen für Runge - Kutta - Fehlberg - Prozesse und implizite Fehlberg-Formeln angegeben.

S. K. Zaremba (Swansea): *Über zahlentheoretische Methoden für die numerische Berechnung mehrfacher Integrale.*

Es sei f eine Funktion, die über dem s-dimensionalen Quader $\overline{Q}^s$: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1,\ldots,s)$ erklärt ist und partielle Ableitungen bis

$$\partial^{ms} f / \partial x_1^m \ldots \partial x_s^m \qquad (m \geqslant 1)$$

hat, die von beschränkter Schwankung im Sinne von *Hardy* und *Krause* sind, wobei die Funktion selbst und ihre partiellen Ableitungen bis

$$\partial^{(m-1)s} f / \partial x_1^{m-1} \ldots \partial x_s^{m-1}$$

auf entgegengesetzten Seiten von $\overline{Q}^s$ übereinstimmen sollen. Wenn man dann den Durchschnittswert von f über p durch einen guten Gitterpunkt modulo p erzeugten Punkten von $\overline{Q}^s$ als den Wert des Integrales von f über $\overline{Q}^s$ annimmt, so ist der Fehler $O(p^{-(m+1)}(\log p)^{(m+1)s})$. Die Forderung, daß f und ihre partiellen Ableitungen auf entgegengesetzten Seiten von $\overline{Q}^s$ übereinstimmen sollen, kann umgangen werden. Eine von *Korobov* empfohlene Methode ist kaum praktisch, da sie zu unmäßig großen Werten der partiellen Ableitungen des Integranden führt. Eine andere, von diesem Einwand freie Methode wird vorgeschlagen.

Für $s = 2$ konstruiert man die bestmöglichen Gitterpunkte mit Fibonaccizahlen. Der Fehler ist dann sogar um $O(p^{-(m+1)}\log p)$. Für $s>2$ ist kein Rezept für gute Gitterpunkte vorhanden. Gitterpunkte, die nach der Anweisung von *Korobov* für $3 \leqslant s \leqslant 10$ gefunden wurden, sind bei weitem nicht die bestmöglichen, obwohl sie bei ihm „optimal" heißen; der Redner hat ohne künstliche Rechenmittel einige erheblich bessere gefunden. Hoffentlich wird die Suche nach den besten Gitterpunkten weiter geführt; aber schon mit $s = 2$ lohnt es sich, die vorgeschlagenen Methoden anzuwenden.

O. Zaubek (Wien): *Beiträge zur genäherten Durchführung des Newtonschen Nullstellenverfahrens.*

Ausgehend von einem Konvergenz- und Abschätzungssatz für das (genaue) Newtonsche Nullstellenverfahren (demnächst in Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss.), wird in ganz einfacher Weise folgendes Hauptergebnis hergeleitet: Ist die reelle Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x im abgeschlossenen Intervall I: $[x_0, x_0+h]$, bzw. $[x_0-h, x_0]$ zweimal ableitbar und ist

1. $f(x_0)f'(x_0) < 0$, bzw. > 0,
2. $0 < m_1 \leqslant |f'(x)|$ und $|f''(x)| \leqslant M_2$ in I,
3. $|f(x_0)| \leqslant hm_1$,
4. $|f(x_0)| M_2 (2m_1^2)^{-1} < 1$,

ist ferner I^* das zu I konzentrische abgeschlossene Intervall mit der Länge $h^* = h + 2\sigma^*/(1-N^*)$ und ist in I^* $|G'(x)| = |f'^{-2}(x) f''(x) f(x)| \leqslant N^* < 1$ und kann schließlich in jedem Punkt $\bar{x}$ von I^* $G(\bar{x}) = \bar{x} - f'^{-1}(\bar{x}) f(\bar{x})$ durch die Rechnung mit einem absoluten Fehler $\leqslant \sigma^*$ bestimmt werden, so wird die in I liegende Nullstelle r von $f(x)$ durch die Folge $((x_n^*))$ der angenäherten Verfahrenswerte $\sigma^*/(1-N^*)$-angenähert, wobei die angenäherten Verfahrenswerte x_n^* durch $x_0^* = x_0$ und $x_{n+1}^* = G(x_n^*)$ mit einem absoluten Fehler $\leqslant \sigma^*$ berechnet werden. Ferner gilt die Fehlerabschätzung:

$$|r - x_n^*| \leqslant \frac{2m_1 |f(x_0)| \, |M_2 f(x_0)|^{2^n - 1}}{(2m_1^2)^{2^n}} + \frac{\sigma^*}{1-N^*} .$$

Wird das angenäherte Verfahren genügend lange fortgesetzt und dabei mit einer beschränkten (festen) Stellenanzahl gerechnet, so gibt es mindestens einen und höchstens endlich viele Verfahrenswerte x_n^*, welche mindestens zweimal angenommen werden. Ist insbesondere $N^* \leqslant 1/2$, so gibt es höchstens zwei angenäherte Verfahrenswerte ξ_1 und ξ_2, welche mehrmals angenommen werden. Ist dies der Fall und ist $\xi_1 < \xi_2$, so ist $\xi_1 < r < \xi_2$ und $\xi_2 - \xi_1 = 2\sigma^*$. Dabei heißt die endliche Zahl a durch die Zahlenfolge $((a_n))$ τ-angenähert, wenn für jedes $\bar{\tau} > 0$ für fast alle n $a - \tau - \bar{\tau} < a_n < a + \tau + \bar{\tau}$ ist.

SEKTION VII:

Geschichte und Philosophie

E. Bernleithner (Wien): *Johannes von Gmunden und Johannes Stabius — zwei oberösterreichische Leuchten der 1. bzw. 2. Wiener Mathematiker-, Astronomen- und Kartographenschule.*

Da der VII. österreichische Mathematikerkongreß in der Hauptstadt des Bundeslandes Oberösterreich, in Linz, stattfindet, sei zweier Leuchten der mathematischen, astronomischen und kartographischen Wissenschaften gedacht, die diese in der Frühzeit entscheidend beeinflußten und gebürtige Oberösterreicher waren. Es sind dies die beiden Wiener Universitätsprofessoren *Johannes von Gmunden* und *Johannes Stabius*.

Der in Gmunden am Traunsee um 1385 geborene *Johannes Sartorius*, genannt *von Gmunden*, studierte von 1400 bis 1406 an der Universität Wien und las von 1408 bis 1434 über mathematische und astronomische Themen, schuf astronomische Tafelwerke und Beobachtungsinstrumente, wirkte bahnbrechend für die Methode der geographischen Ortsbestimmung und für die der Planetenbewegungen und verbesserte die Dreieckslehre in ihrer Anwendung auf die Winkelmessung, in der er schon die zentesimale Teilung vorschlug. Auf ihn geht auch die älteste Karte von Mitteleuropa zurück, die um 1421 im Stift Klosterneuburg bei Wien entstand und vom Verf. im Jahre 1954 unter dem Arbeitstitel „Klosterneuburger Fridericuskarte von etwa 1421" rekonstruiert und wiederholt veröffentlicht wurde. Aus seiner Schule ging auch der älteste geometrische Plan von Wien aus 1438—55 hervor. Hier starb Johannes von Gmunden als Domherr von St. Stephan am 23. Februar 1442.

Johannes Stöberer oder *Stabius* wurde in Hueb bei Steyr in Oberösterreich um 1460 geboren, studierte Mathematik an der Universität Ingolstadt und wurde 1497 als Professor für Mathematik nach Wien berufen. Hier gründete sein Freund *Conrad Celtes* das „Collegium poetarum et mathematicorum", in welchem Stabius die mathematische Abteilung leitete. Er wurde von seinen Zeitgenossen ob seines großen und scharfen Verstandes und seiner Gelehrsamkeit auf mathematischem, geographischem und astronomischem Gebiete gepriesen. Unter ihm blühte die 2. Wiener Mathematiker-, Astronomen- und Kartographenschule auf. Er ist der erste Projektionstheoretiker der Neuzeit und erfand selbst neue Projektionen für das ganze Erdbild, die sein Freund *Johannes Werner* 1514 in Nürnberg veröffentlichte und die als sogenannte Stab-Wernersche herzförmige Projektion in die Kartengeschichte einging. Nach Celtis Tod (1508) wurde er zum Hofkosmographen und Hofhistoriker von Kaiser Maximilian I. ernannt, nach dessen Tod (1519) sich Stabius vom Hof zurückzog und auf einer Reise am 1. Jänner 1522 in Graz verschied.

K. Ferrari d'Occhieppo (Wien): *Georg Aunpeck von Peuerbach, ein Wegbereiter des neuen Weltbildes.*

* Peuerbach (Oberösterreich), 30. Mai 1423, † Wien, 8. April 1461.

Wie schon *Gassendi* bemerkte, hätte es ohne *Peuerbach* und *Regiomontanus* auch keinen *Copernicus* und *Brahe* geben können. Dies ist nicht in dem Sinne gemeint, als ob Peuerbach etwa in Erinnerung an Aristarchos das heliozentrische System als Alternative zur herrschenden Geozentrik erwogen hätte. Vielmehr bestand seine wichtigste Leistung darin, daß er, des Griechischen noch unkundig und daher allein auf das sachliche Verständnis der Probleme angewiesen, überall zum ursprünglichen Sinn der Theorie des großen alexandrinischen Astronomen vorzudringen suchte, wo die mittelalterlichen lateinischen Übersetzungen Unklarheiten und Entstellungen enthielten. Von den Früchten dieser Arbeit ist infolge seines frühen Todes nur das bis ins 17. Jh. unzähligemal neu aufgelegte elementare Lehrbuch „Theoricae Novae Planetarum" veröffentlicht worden. Neu darin ist auch ein Versuch, die festen Sphären der Aristoteliker mit dem Epizykelsystem zu vereinbaren; Nachwirkungen davon findet man sogar noch in *Keplers* Jugendwerk. Die tiefer eindringende „Epitome in Almagestum Ptolemaei" vollendete erst Regiomontanus.

Auch auf anderen Gebieten der Astronomie bemühte sich *Peuerbach* um Verbesserungen. Als zu seiner Zeit (1456) der später unter Halley's Namen berühmt gewordene Komet erschien, verfaßte er darüber Gutachten *), die vor der vom Publikum verlangten astrologischen Deutung einige brauchbare Ortsbestimmungen und ernsthafte Versuche zur Ermittlung der wahren Entfernung, Größe und Bahn des Kometen enthalten. Auch auf die Herstellung astronomischer Beobachtungsgeräte verwandte er offenbar große Sorgfalt; als Beweis dafür diene die Tatsache, daß an der Kreisteilung der Kompasse einiger unter seiner Anleitung hergestellter Reisesonnenuhren erstmalig die Mißweisung angebracht ist. Neben Elementarrechenbüchern stellte er eine Sinustafel für den Radius 60 000 her.

*) Mitt. Inst. Österr. Geschichtsforschung *68*, 266; Sitzgsber. Österr. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., *169*, 149.

J. O. Fleckenstein (München): *Die Scienza Nuova Galileis und Kepler.*

Kepler und *Galilei* sind als Mathematiker des Barock die Ersten, welche ihre Hauptschriften „Nova Astronomia" und „Nuova Scienza" (Dynamik) zu betiteln wagen. Vor aller wissenschaftlichen Reflexion steht beiden Denkern die Überzeugung von der durchgängigen Harmonie zwischen Mathematik und Natur fest. Dieses Erbgut der Renaissance ist bei *Galilei* in Platonismus geläutert, bei *Kepler* vom Neupythagoreismus überwuchert. *Kepler* hat, durch die Beobachtungen *Tycho Brahes* gezwungen, als er von den Kreisbahnen des Kopernikus zu den elliptischen Bahnen überging, wie seinerseits Galilei auch die Ordnung und die Gesetzlichkeit des Ungleichförmigen in den Rang einer wissenschaftlichen Realität erhoben. Die Antike ließ entsprechend den Axiomen Platons des sozein ta phainomena nur die Gleichförmigkeit von Kreisbewegungen zu. Kepler vollzog den Übergang von der Planetengeometrie der Antike zur Planetendynamik der Neuzeit, während Galilei das erste völlig erledigte Beispiel einer Arithmetik der Kräfte für die Fallbewegung lieferte.

W. Knödel (Stuttgart): *Ein Lehrgang für Computer-Wissenschaften.*

Immer tiefer dringen die Computer in mehr und mehr Bereiche von Wissenschaft, Technik, Wirtschaft, Verwaltung und Pädagogik ein. Entsprechend wächst der Bedarf an Computer-Fachleuten. Wurde bisher vor allem Hilfspersonal für Wartung, Betrieb und Programmierung benötigt, so wächst jetzt stärker der Bedarf an hochqualifizierten Kräften. Die Beratungsgesellschaft für Unternehmensplanung *Diebold* (Deutschland) hat 1968 eine Studie über „Bedeutung und Entwicklung der Datenverarbeitung" publiziert. Daraus ist zu entnehmen, daß bei Großrechenanlagen in der Bundesrepublik der Bedarf an Wartungspersonal und Programmierern von 1968 bis 1975 um 200% steigen wird, an Organisations- und Leitungspersonal dagegen um 350%. In den USA bestehen an vielen Universitäten bereits „Departments of Computer Science", an denen Lehre und Forschung in Computer-Wissenschaften betrieben wird. Wie weit die internationale Diskussion über das Studium der Computer-Wissenschaften fortgeschritten ist, zeigen Veröffentlichungen der führenden Fachorganisation Association for Computing Machinery. Sie legte schon im September 1965 und wieder im März 1968 detaillierte Studienpläne vor.

Die aufgezählten Fakten zeigen, daß es höchste Zeit ist, dieser Entwicklung auch in der Bundesrepublik Rechnung zu tragen. Nach dem Förderungsplan von Wissenschaftsminister *Stoltenberg* will die Bundesregierung jährlich 30 Millionen DM für Entwicklung und Beschaffung von elektronischen Datenverarbeitungsanlagen ausgeben. Ein solcher Plan hat nur dann Sinn, wenn er durch eine großzügige Förderung der grundlegenden Forschung in Computer-Wissenschaften ergänzt wird.

G. Kropp (Berlin): *Archimedes' Integrationen als Modelle für Anschaulichkeit und Strenge in der Analysis.*

Seit der Auffindung der „Methodenlehre" des Archimedes durch *Heiberg* und *Zeuthen* (1906) kennt man den heuristischen Weg, der *Archimedes* zu seinen (meist indirekt bewiesenen) Behauptungen geführt hat. Das „mechanische" Verfahren ist anschaulich, der „geometrische" Beweis streng.

An je einem Beispiel wird der logische Gehalt des Verfahrens dargestellt, um dadurch zu zeigen, daß die 1647 von *Gregorius a S. Vincentio* eingeführte Bezeichnung des Archimedischen Beweisverfahrens als „Exhaustion" unhaltbar ist. Als passende Kennzeichnung hat der Vortragende den Begriff „Exklusion" eingeführt, was im Vortrag u. a. motiviert wird.

G. Lochs (Innsbruck): *Der Lehrplan für Mathematik in den ersten beiden Universitätsjahren.*

Es wird die Meinung vertreten und zur Diskussion gestellt, daß für das Lehramt aus Mathematik (mit irgend einem andern Fach), für das Diplom aus Mathematik, das Diplom aus Physik, das Doktorat aus Mathematik und das Doktorat aus Physik in den ersten beiden Jahren derselbe Lehrplan gelten soll.

Entscheidender Vorteil: Der Student braucht das Studienziel erst nach zwei Jahren, wenn er sich und die Fächer besser kennt, festzulegen. Zwei Lehrplanentwürfe, die in Innsbruck ausgearbeitet wurden, werden vorgelegt

und zur Diskussion gestellt. Der zweite geht von der Überlegung aus, daß Analysis schwerer als lineare Algebra ist, und daher zuerst mehr praktisch gelernt werden sollte. Beide nehmen an, daß Mathematik als Grundlage der Physik in den beiden ersten Jahren mehr Zeit als Physik beanspruchen sollte, der Ausgleich in den beiden folgenden Jahren erfolgen muß.

Die ersten beiden Jahre sollten die Grundausbildung des Mathematikers bewirken. Wichtigste Fragen: Können die Studenten soviel in zwei Jahren wirklich bewältigen? Wenn nicht, wie lange brauchen sie dazu? Fehlt wesentlich zur Grundausbildung gehörender Stoff?

W. Nöbauer (Wien): *Zur Reform des Mathematikunterrichtes an den Höheren Schulen.*

Bei der Erneuerung des Mathematikunterrichtes sind sowohl quantitative, als auch qualitative Gesichtspunkte zu bedenken. Es besteht wohl kein Zweifel, daß gewisse Gebiete der Mathematik neu aufgenommen werden müssen, wie etwa die Grundbegriffe der Mengenlehre, die Definitionen der wichtigsten algebraischen Strukturen, die Elemente der linearen Algebra. Um dafür Raum zu gewinnen, müssen wohl Bestandteile des bisherigen Stoffes, die heute nicht mehr wichtig sind, ausgeschieden oder stark reduziert werden (z. B. gewisse Kapitel der Geometrie, arithmetische Reihen). Was die qualitativen Änderungen betrifft, so sollte wesentlich mehr Wert auf das logische Grundgerippe der einzelnen Gebiete gelegt werden (einwandfreie Definitionen, klare Formulierung der Sätze, keine Scheinbeweise, sondern vollständige oder gar keine). Eine Gefahr besteht in der Fehleinschätzung der Schwierigkeit von mathematischen Theorien; es scheint manchmal der Lehrer Dinge für schwieriger zu halten, als sie für den Schüler wirklich sind und dies führt zu unnötigem Breittreten und Zeitverlust. Daher wäre die Sammlung von Erfahrungsmaterial (Versuchsklassen!) sehr wichtig.

TEILNEHMERVERZEICHNIS

Mitglieder der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft sind durch einen Stern gekennzeichnet.
Vortragende sind an der in Klammer nachgesetzten Nummer der Vortragssektion kenntlich.

Ahrens Ingrid, Dipl. Math., Berlin
* Aigner Alexander, Prof., Graz
* Aigner Martin, Ass. Prof., Detroit (III)
Akaza Tohru, Prof., Kanazawa (II)
Akutowicz Edwin, Prof., Montpellier (II)
Akutowicz Ingrid
Albrecht Rudolf, Prof., Graz
Altmann Eckehard, Dipl. Math., Bonn (I)
Amman André, Prof., Genf (II)
* Andjelić Tatomir, Prof., Beograd (IV)
Arnold Ludwig, Ass., Stuttgart (V)
* Aumann Georg, Prof., München
Aumann Lidy
* Aykan Faruk, Prof., Istanbul

Baayen Pieter, Prof., Amsterdam (I)
* Baier Othmar, Prof., München (III)
Bandemer Hans Walter, Prof., Freiburg
Banica Constantin, Cher. Sci., Bukarest (II)
Barkow Klaus, Bibl. Ass., Bremen
Barkow Gerborg
* Barner Martin, Prof., Freiburg
* Baron Gerd, Ass., Wien (III)
* Baron Werner, Dipl. Ing., Wien
Basley Norman, Dr., Genf
* Bauer Karl Wilhelm, Prof., Bonn (II)
Bauer Elisabeth
* Bauer Walter, Wiss. H., Wien
Baum Dieter, Dipl. Math., Berlin
Baum Adelheid
Baumgartner Erich, Ass., Würzburg
Becker Horst, Ass. Prof., Madison (II)
Beer Susanne, Ass., Wien (I)
Behne Jürgen, Ass., Berlin
Benz Walter, Prof., Bochum
Berghahn Hans Horst, Dipl. Math., München
Bergmann Arthur, Wiss. Rat, Würzburg
Bernleithner Ernst, Prof., Wien (VII)
Biallas Dieter, Ass., Hamburg (III)
Biallas Anke
* Bilinski Stanko, Prof., Zagreb (III)
Bilinski Zlata
* Blanuša Danilo, Prof., Zagreb
Blanuša Sofia
Blind Gerd. Akad. Rat, Stuttgart (III)
* Boerner Hermann, Prof., Gießen
Boers Arie, Dr., Delft (I)

Böge Sigrid, Doz., Heidelberg (I)
Böge Werner, Wiss. Rat, Heidelberg (V)
Bödewadt Uwe, Dr., München
Bödewadt Anneliese
Bohun-Chudyniv Boris, Grad. Stud., Burtonsville (I)
Bohun-Chudyniv Volodymyr, Prof., Baltimore (I)
Bollow Bodo, Ass., Darmstadt (III)
Bönecke Ernst, Ass., Hamburg
Bong Uwe, Ass., Stuttgart
Bos Werner, Wiss.. Rat, Heidelberg (III)
Bos Gertrud
* van Bouchout Vincent, Prof., Leuven (III)
van Bouchout Rachel
Brauer Wilfried, Ass., Bonn (I)
Braumann Pedro, Prof., Lissabon (II)
Braune Erhard, Dr., Linz
* Brauner Heinrich, Prof., Stuttgart
Bredendiek Elsbeth, Wiss. Ang., Hamburg
Brenner Jörg, Ass., Stuttgart
* Bruins Evert Maria, Prof., Amsterdam (III)
Bruins Cornelia
* Bukovics Erich, Prof., Wien
Bundschuh Peter, Ass., Freiburg (I)
Burde Gerhard, Doz.. Frankfurt (III)
Burde Klaus, Ass., Braunschweig (I)
Burkard Rainer, Ass., Graz (I)
Burmann Hans Wilhelm, Ass., Göttingen (II)

Casse Louis, Dr., London (III)
Chen Yi, Dr., Bochum (III)
* Cigler Johann, Prof., Groningen
* Clausen Horst, Ass., Graz
Coolen Thomas, Wiss. Mitarb., Amsterdam
Cordes Hans Otto, Prof., Berkeley (II)
Cordes Millopia

Dačić Rado, Ass., Beograd (I)
Danzer Ludwig, Prof., Göttingen (III)
Dean David W., Dr., Ohio
Delanghe Richard, Ass. Prof., Leuven (II)
Denhardt Jürgen, Ass., Hannover
Denhardt Barbara
* Dinghas Alexander, Prof., Berlin
Dirschmidt Hans-Jörg, Ass., Wien
Djaja Časlav, Prof., Beograd (II)
Dočkal Ljerka, Doz., Zagreb (III)
* Domiaty Rudolf, Doz., Graz (I)
Dörfler Willibald, Ass., Wien
* Dorninger Dietmar, Wiss. H., Wien
Doubek Josef, Dipl. Ing., Wien
Duma Andrei, Cher. sci., Bukarest (II)
Duma Maria

* Eberl Walter, Prof., Wien
Ebersold Johannes, Prof., Winterthur
* Ecker Klaus, Ass., Düsseldorf

Einsele Carl, Verleger, Basel
Ellers Erich W., Prof., Fredericton (I)
Ellers Elisabeth
Elster Karl Heinz, Prof., Ilmenau (III)
Emersleben Otto, Prof., Greifswald (II)
Engel Wolfgang, Prof., Rostock
Erwe Friedhelm, Prof., Aachen (II)
Ewald Günter, Prof., Bochum

* Fabian Ilse, Stud. Rat, Wien
Fages France, Dr., Paris
Feichtinger Gustav, Ass., Bonn (V)
Feichtinger Ingrid
Ferrari d'Occhieppo Konradin, Prof., Wien (VII)
* Fieber Heribert, Prof., Graz
Fieger Werner, Doz., Karlsruhe
Fieger Utz
Finck v. Finkenstein Karl, Dipl. Math., München (VI)
Fischer Dieter, Dr., Linz
Fischer Gerd, Ass., München (III)
Fischer Kurt, Ass., Stuttgart (V)
Fleckenstein Joachim, Prof., München (VII)
Flegel Robert, Ass., Stuttgart
Fleischer Wilhelm, Ass.., Salzburg
* Flor Peter, Doz., Wien (I)
* Florian August, Prof., Salzburg
* Florian Helmut, Prof., Graz
Forster Otto, Doz., München
* Frank Wilhelm, Min. Rat, Wien
Freud Géza, Dr., Budapest (II)
Friton Leo, Dr., Hart
* Fuchs Theodor, Ing., Wien (VI)
* Funk Paul, Prof., Wien (III)

Gackstätter Fritz, Ass., Würzburg
Galambos János, Lektor, Ghana (V)
* Gaszt Günter, Ass., Wien
Geishofer Udo, Wiss. H., Graz
* Gell Günter, Ass., Graz
Germer Hennig, Dr., Berlin
Giering Oswald, Akad. Rat, Stuttgart (III)
Gloden Raoul-François, Ispra (VI)
Gloden Théodorie
Gloden Yvonne
Gorenflo Rudolf, Ass., München (VI)
* Gröbner Wolfgang, Prof., Innsbruck (II)
Grölz Wolfgang, Ass., Braunschweig (I)
Großer Siegfried, Ass. Prof., Minnesota (I)
* Grotemeyer Peter, Prof., Berlin
Grotemeyer Sigrid
* Gruber Peter, Ass., Wien (III)

Haberfellner Walter, Dr., Linz
* Haack Wolfgang, Prof., Berlin
Haack Marianne
Haf Herbert, Dr., Stuttgart

* Hahn Wolfgang, Prof., Graz
Hahn Irmgard
Hainer Karl, Dipl. Math., Frankfurt
Hainer Helga
Halin Rudolf, Doz., Köln (III)
Halter-Koch Franz, Dr., Graz (I)
Hammerschick Josef, Ass., Gießen
Hammerschick Agnes
Harborth Heiko, Ass., Braunschweig (I)
Haring Günter, Ass., Graz
Harkness William, Ass. Prof., Pennsylvania
Harzheim Egbert, Doz., Köln (III)
Havliček Karel, Prof., Prag (III)
Havliček Ludmilla
Havliček Anna
* Hazod Wilfried, Ass., Wien (II)
Heisig Herbert, Dr., Stuttgart
Heisig Lotte
* Hejtmanek Johann, Doz., Wien (II)
* Hellmich Kurt, Dr., Graz (I)
* Helmberg Gilbert, Prof., Eindhoven (V)
Helwig Karl-Heinz, Doz., München (I)
Helwig Erika
Henke Rudolf, Dr., Linz
Herrmann Oskar, Doz., Heidelberg (I)
Herz Bernhard, Ass., Berlin
Heyer Herbert, Ass., Erlangen (V)
Heyer Novia
Hinderer Karl, Prof., Hamburg
Hinderer Anneliese
* Hlawka Edmund, Prof., Wien
Höfer Ernst, Ass., Weibling
* Hofreiter Nikolaus, Prof., Wien
* Hohenberg Fritz, Prof., Graz (III)
Hölder Ernst, Prof., Mainz
Hölder Anna
Holdgrün Horst, Ass., Göttingen (II)
Horneffer Klaus, Ass., Göttingen
* Hornich Hans, Prof., Wien (II)
* Horninger Heinrich, Prof., Leoben
Horninger Stefanie
Hoschek Josef, Doz., Darmstadt
Hübner Gerhard, Ass., Hamburg (III)
Huckemann Friedrich, Prof., Gießen (II)

Ilić J. Risto, Prof., Kragujevac (VI)
* Imrich Wilfried, Ass., Wien (III)
van Iperen Hans, Dipl. Math., Delft (II)
* Izbicki Herbert, Doz., Wien (III)

Jaenisch Sigbert, Ass., Gießen (II)
Jänich Klaus, Ass., Bonn (III)
Jank Gerhard, Ass., Graz
Jansen Karl-Heinz, Ass., Aachen (II)
Jansen Helga

Jarosik Helmut, Dr., Wien
Jecklin Heinrich, Prof., Zürich
Jecklin Regina
Jeggle Hansgeorg, Ass., Darmstadt
Jeggle Dorothea
Joussen Jakob, Doz., Hamburg

* Kabakcioglu Okyay, Prof., Istanbul
Kaerkes Rolf, Doz., Aachen
Latusek Ruth
Kanold Hans Joachim, Prof., Braunschweig (I)
Kanold Hermine
* Kappel Franz, Ass., Graz (IV)
Karzel Helmut, Prof., Hamburg
Katzarowa Petja, Lehrb., Sofia
Kaufmann-Bühler Walter, Dipl. Math., Berlin
* Kautschitsch Hermann, Ass., Wien (I)
Kerner Hans, Wiss. Rat, München (II)
Kerner Ilse
Kirchgässer Klaus, Doz., Freiburg
Kiyek Karlheinz, Ass., Saarbrücken (I)
Klingelhöfer Klaus, Ass., Gießen (II)
Klingst Anna, Dr., Linz
* Knapp Hans, Prof., Linz
Knapp Gertraud
Knauff Werner, Dipl. Math., Darmstadt
* Knödel Walter, Prof., Stuttgart (V, VII)
* Koch Alois, Prof., Leoben
Koch Augusta
Koecher Max, Prof., München
Koecher Hansi
Köhnen Walter, Dr., Aachen (II)
König Heinz, Prof., Saarbrücken (II)
König Helga
Königsberger Konrad, Ass., München
* Köthe Gottfried, Prof., Frankfurt
Köthe Irene
Kováč Jozef, Prof., Bratislava (IV)
Krause Ernst, Dipl. Math., Erlangen
* Kreiter Karl, Dr., Wien
Krettek Othmar, Dr. Ing., Aachen
Kreutzkamp Theo, Ass., Stuttgart
Kropp Gerhard, Doz., Berlin (VII)
Kučinić Branko, Ass., Zagreb (III)
* Kuich Werner, Ass. Prof., Michigan (II)
Kuntze Karl Heinz, Prof., Gauting (I)
Kuntze Ingeborg
Kurilj Paula, Ass., Zagreb (III)

Lammel Ernst, Prof., München (II)
Lamprecht Erich, Prof., Saarbrücken
Lamprecht Anita
Lange Stefan, Dr., München
van Leeuwen Leo C., Dr., Delft (I)
van Leeuwen Jo

Lehmann Klaus, Ass., Berlin (II)
Lehmann Renate
Lehnigk Siegfried, Prof., Huntsville
Lehnigk Frieda
Leicht J. Herbert, Doz., Heidelberg
Leichtweiß Kurt, Prof., Berlin
Leis Rolf, Prof., Bonn (IV)
Leis Gisela
Lelong Pierre, Prof., Paris (II)
* Lense Josef, Prof., München
Lense Eugenie
* Lenz Hanfried, Prof., München
* Lesky Peter, Prof., Stuttgart
Lidl Rudolf, Dr., Wien
Liebscher Heinz, Stud. Rat, Graz
* Liedel Roman, Doz., Innsbruck (V)
Lindemann Hans, Ass., München
Linder Heinz, Ass., Braunschweig
Linser Hans, Prof., Gießen
* Lochs Gustav, Prof., Innsbruck (VII)
Lochs Herta
* Loonstra Frans, Prof., Delft (I)
Loonstra Wimke
* Lösch Friedrich, Prof., Stuttgart
Lösch Elsa
Lutz Albert, Dipl. Math., Ulm

Makai Endre, Dr., Budapest (II)
Malet Henri, Dr., Paris
Malet Michèle
Malet Christine
Mallios Anastasios, Ass. Prof., Athen (III)
Mammitzsch Volker, Ass., München
* Mangeron Dumitru, Prof., Iasi
Mangeron Maria
Mann Horst, Ass., Darmstadt
Marić Vojislav, Ass. Prof., Novi Sad (II)
Marić Desa
Marsal Dietrich, Dr., Hannover (VI)
Marsch Gerhard, Dkfm., Wien
* Mascart Henri, Prof., Toulouse (III)
Mathiak Karl, Ass., Braunschweig
Mäurer Helmut, Doz., Darmstadt
* Meirer Klaus, Ass., Wien
Meißl Peter, Doz., Wien
Meißner Hartwig, Dr., Hamburg (VI)
Melchior Ulrich, Dipl.. Math., Bochum
* Meulenbeld Barend, Prof., Delft (II)
Meulenbeld Korria
Meyberg Kurt, Ass., München (I)
Meyer Karlhorst, Ass., München (III)
Meyer Christa
Meyer Peter, Ass., Braunschweig (III)
Michalicek Johannes, Ass., Hamburg (II, V)

* Mikolasch Rainer, Wiss. H., Graz
Michler Gerhard, Doz., Tübingen (I)
Misfeld Jürgen, Ass., Hamburg (III)
Misfeld Dagmar
* Mitsch Heinz, Ass., Wien (I)
Mittenthal Lotrop, Dr., Frankfurt
Mittenthal Inge
* Moik Johannes, Ass., Graz
Möller Herbert, Ass., Bonn (I)
Moshammer Heinrich, Stud. Rat, Linz
* Mück Rudolf, Ass., Wien
* Müller Hans Robert, Prof., Braunschweig
Müller Liselotte
Müller Manfred, Ass., Stuttgart (II)
* Müller Winfried, Ass., Wien (I)
Murgescu Viorel, Dr., Iasi (III)
Nádeník Zbynek, Doz., Prag (III)
Neubauer Gerhard, Doz., Heidelberg (II)
* Niče Vilko, Prof., Zagreb (III)
Nickel Karl, Prof., Karlsruhe
Nickel Gunhilde
* Niederreiter Harald, Wiss. H., Wien (I)
Nießen Heinz, Ass., Köln (II)
* Nöbauer Wilfried, Prof., Wien (I, VII)
Noli Walter, Doz., Gießen
Noli Margaret
Novák Josef, Prof., Prag (V)
Orlicz Wladyslaw, Prof., Poznań (II)
Orlov Konstantin, Prof., Beograd (VI)
Pahlings Herbert, Ass., Gießen (I)
Papacostas Georges, Dipl. Math., Brüssel
Peschl Ernst, Prof., Bonn
Peschl Maria
Pesl Otto, Dir., Wien
Pesl Martina
Peters Klaus, Wiss. H., Heidelberg
Pfister Albrecht, Doz., Göttingen (I)
* Piccard Sophie, Prof., Neuchâtel (I)
Pichler Franz, Ass., Innsbruck (IV)
Pichler Horst, Dipl. Math., Linz
Pickert Günter, Prof., Gießen
Pickert Anneliese
Pieper Irene, Dr., Hamburg (I)
Pietsch Albrecht, Prof., Jena (II)
Pignedoli Antonio, Prof., Bologna (VI)
* Pilz Günter, Ass., Wien (I)
* Pinl Max, Prof., Köln
Plewe Klaus, Ass., Köln
* Rado Richard, Prof., Reading (II)
Rado Luise
Ramspott Karl, Doz., München
Ratschek Helmut, Ass., Düsseldorf
Reich Axel, Dipl. Math., Göttingen (II)

Reich Ludwig, Doz., Bonn (II)
Reich Christa
* Reichel Hans, Ass., Wien
Reichert Marianne, Dr., Frankfurt (II)
Reinermann Jochen, Ass., Aachen (II)
* Reisinger Leo, Dr., Linz
* Reitberger Heinrich, Ass., Innsbruck (II)
* Reuschel Arnulf, Dir., Wien
* Rigele Hermann, Dir., Linz
* Riha Willi, Ass., Wien (VI)
Ringel Gerhard, Prof., Berlin (III)
Ringel Isolde
Ritter Klaus, Ass., Karlsruhe (IV)
Roos Paul, Akad. Rat, Stuttgart (IV)
Rösler Gunther, Ass., Stuttgart
* Rößler Alfred, Prof., Aachen
Rößler Grete
Ruprecht Dietrich, Verl., Göttingen
* Rybarz Josef, Prof., Wien
Rybarz Martha

Sachs Hans, Ass., Stuttgart
Sauter Werner, Dipl. Math., Tübingen
Schaal Hermann, Wiss. Rat, Stuttgart (III)
Schäfke Friedrich, Prof., Köln
Schatz Norbert, Stud., Innsbruck
Scheidemandl Theo, Dr., Linz
Scherer Karl, Dipl. Math., Aachen (II)
Schiek Helmut, Prof., Godesberg
Schintke Joachim, Ass., Berlin
Schleer Dr., Linz
* Schmetterer Leo, Prof., Wien (II)
Schmetterer Elisabeth
* Schmid Josef, Prof., Fribourg
Schmidt Dieter, Dr., Köln (IV)
* Schmidt Klaus, Ass., Wien (I)
Schmidt Peter, Akad. Rat, Marburg
Schmidt Hildegard
Schmidt Rita, Dipl. Math., Berlin
* Schnabl Roman, Ass., Wien (II)
Schneider Albert, Ass., Köln (II)
Schneider Manfred, Dr., Berlin
Schneider Roland, Dr., Duisburg
Schneider Rolf, Ass., Bochum (II)
Schottlaender Stefan, Prof., Clausthal
Schottlaender Ruth
Schrödter Horst, Dipl. Math., Berlin
Schrödter Gudrun
* Schubert Horst, Prof., Kiel
Schubert Sigrid
Schuster Hans Werner, Ass., München (II)
Schwabhäuser Inge, Stud. Rat, Berlin
Schwabhäuser Wolfram, Doz., Bonn, (III)
Schwarz Friedrich, Ass., Saarbrücken
Schwarz Wolfgang, Doz., Freiburg (II)

* Schweiger Fritz, Doz., Wien (I)
Schweiger Elfriede
Ščurić Vlasta, Ass., Zagreb (III)
Seebach Karl, Prof., München
Seebach Vilma
Seip Ulrich, Dr., New York (III)
Shih Kung Sing, Prof., Taiwan
Sigmund Karl, Dr., Wien
Sikkema Pieter, Prof., Delft
Simon Udo, Ass., Berlin (III)
Simon Sabine
Šisler Miroslav, Dr., Prag (VI)
* Skala Helmut, Stud. Rat, Salzburg
Šmakal Stanislav, Ass., Prag (III)
* Šnajder Zagorka, Doz., Beograd (III)
Sochatzky Hilde, Wiss. Ang., Wien
Sörensen Kay, Dipl. Math., Hamburg
* Sperner Emanuel, Prof., Hamburg
Sperner Antonie
Spindelböck Klaus, Ass., Graz
* Stachel Hellmuth, Ass., Graz (III)
Stanasila Octavian, Cher. Sci., Bukarest (II)
* Stein Elise, Lect., London (III)
Stein Karl, Prof., München
Stein Davi
Štepánský Václav, Prof., Ostrava (VI)
Štepánský Jarmila
Stetter Franz, Dr., Tübingen
* Stetter Hans, Prof., Wien
* Stettner Haro, Ass., Graz
* Stieglecker Peter, Ass., Wien
Stieglitz Andreas, Dipl. Math., Stuttgart
Stieglitz Michael, Ass., Stuttgart (II)
* Stöhr Alfred, Prof., Berlin
Stomps Hugo, Dr., Amsterdam
* Strubecker Karl, Prof., Karlsruhe
Strubecker Hildegard

Tamaschke Olaf, Prof., Tübingen (I)
Tauber Michael, Wiss. H., Linz
Teuffel Michael, Ass., Aachen
Thedy Armin, Dr., Aarhus (I)
Tiemeier Udo, Ass., Saarbrücken (I)
Tietz Hubert, Dr., Stuttgart (II)
Timm Jürgen, Ass., Hamburg (I)
Timm Ursula
Timm Andrea
Tirkschleit Lothar, Dipl. Math., Frankfurt
Tirkschleit Ursel, Dipl. Math., Frankfurt
Tomašić Vesna, Doz., Rijeka (III)
Trebels Walter, Wiss. H., Aachen (II)
* Troch Inge, Ass., Wien
* Trost Ernst, Prof., Zürich
Tscharnuter Werner, Wiss. H., Wien (IV)
* Tschupik Josef, Doz., Graz (IV)

Ucsnay Peter, Dr., Bonn (II)
Uhlmann Werner, Prof., Würzburg
Uhlmann Erika

Vachenauer Peter, Ass., München
* Varga Otto, Prof., Budapest (III)
* Vietoris Leopold, Prof., Innsbruck
Vietoris Maria
* Visotschnig Erich, Ass., Graz (I)
* Vogler Hans, Doz., Wien (III)
Vollrath H. Joachim, Stud. Rat, Darmstadt
Voss Konrad, Prof., Zürich (III)

Wagner Klaus, Prof., Köln
Walk Harro, Ass., Stuttgart
Walter Wolfgang, Prof., Karlsruhe (II)
Walter Irmgard
* Wanner Gerhard, Dr., Innsbruck (VI)
Warnecke Gerhard, Dr., Bonn
Watson George Leo, Reader, Twickenham (I)
Watson Carma
Watzlawek Wolfgang, Ass., Stuttgart
Weck Norbert, Ass., Bonn (II)
Wefelscheid Heinrich, Ass. Prof., Pennsylvania (I)
Wefelscheid Elisabeth
Weinert Hanns Joachim, Prof., Mannheim (I)
* Weiß Peter, Ass., Innsbruck (V)
Wellstein Hartmut, Ass., Würzburg
Wendland Wolfgang, Dr., Berlin
* Wertz Wolfgang, Wiss. H., Wien (V)
Wiegmann Klaus Werner, Ass., München (II)
Wiegmann Heinrich
Wills Jörg, Ass., Berlin (I)
Wilson Brian James, Lect., London (III)
Wilson Ann
Wimmer Harald, Ass., Graz
Windelberg Dirk, Ass., Hannover
Rödel Sybille
Winkler Jörg, Ass., Berlin (II)
* Wittich Hans, Prof., Karlsruhe
Wittich Margret
Wittstock Gerd, Doz., Berlin (II)
Woelpert Heinrich, Ass., Stuttgart
Wolff Georg, Obst. Dir., Düsseldorf
* Wolff Karl Heinz, Prof., Wien (V)
* Wunderlich Walter, Prof., Wien (III)
Wunderlich Johanna
Würz Joachim, Ass., Berlin

Zamfirescu Tudor, Ass., Bochum (III)
* Zaremba Stanislav, Dr., Swansea (VI)
* Zaubek Othmar, Stud. Rat, Wien (VI)
Zeuner Frank, Ass., Berlin
Ziegler Hans Jürgen, Dipl. Math., London (II)
Ziermann Margit, Doz., Budapest
* Zinterhof Peter, Ass., Wien (I, II)

ÖSTERREICHISCHE MATHEMATISCHE GESELLSCHAFT
Gegründet 1903
SEKRETARIAT: 1040 WIEN, KARLSPL. 13 (TECHNISCHE HOCHSCHULE)
TELEPHON 65 76 41 — POSTSPARKASSENKONTO 82 896

Vorstand des Vereinsjahres 1969/70

Vorsitzender:	Prof. DDr. H. Brauner (T. H. Wien)
Stellvertreter:	Prof. Dr. W. Nöbauer (T. H. Wien)
Herausgeber der IMN:	Prof. Dr. W. Wunderlich (T. H. Wien)
Schriftführer:	Ass. Dr. K. Kreiter (Univ. Wien)
Kassier:	Doz. Dr. H. Vogler (T. H. Wien)
Stellvertreter:	Ass. Dr. K. Meirer (T. H. Wien)
Beiräte:	Prof. Dr. A. Adam (Hochsch. Linz)
	Prof. Dr. G. Bruckmann (Univ. Wien)
	Prof. Dr. A. Florian (Univ. Salzburg)
	Prof. Dr. W. Gröbner (Univ. Innsbruck)
	Prof. Dr. E. Hlawka (Univ. Wien)
	Prof. Dr. F. Hohenberg (T. H. Graz)
	Prof. Dr. J. Krames (T. H. Wien)
	Dir. Dr. J. Laub (Wien)
	LSI Dr. L. Peczar (Wien)

Jahresbeitrag für in- und ausländische Mitglieder:
S 50.— (2 US-Dollar)

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österreichische Mathematische Gesellschaft
Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. W. Wunderlich,
beide Technische Hochschule Wien IV.
Druck: Albert Kaltschmid, Wien III, Kollergasse 17