Herausgeber: Österreichische Mathematische Gesellschaft in Wien
Schriftleitung: Prof. Dr. W. Gröbner, Universität Innsbruck
Wagner'sche Univ.-Buchdruckerei Buchroithner & Co., Innsbruck

NACHRICHTEN

DER

ÖSTERREICHISCHEN
MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

BEILAGE ZU
„INTERNATIONALE MATHEMATISCHE NACHRICHTEN"

*

SONDERNUMMER

BERICHT ÜBER DEN
V. ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATIKERKONGRESS
INNSBRUCK, 12.—17. IX. 1960

NR. 66 JÄNNER 1961

WIEN

NACHRICHTEN

DER

ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

SEKRETARIAT: WIEN IV, KARLSPLATZ 13 (TECHNISCHE HOCHSCHULE)
TELEPHON 65 76 41 — POSTSPARKASSENKONTO 82.395

15. Jahrgang | Jänner 1961 | Nr. 66

ZUM V. ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATIKERKONGRESS

Innsbruck, 12. bis 17. September 1960

In neuerer Zeit werden öfter Zweifel darüber geäußert, ob große Kongresse über ein umfassendes Wissenschaftsgebiet heute noch zweckentsprechend gestaltet werden können; es wird die Ansicht vertreten, daß nur Symposien über ein sehr eingeschränktes Wissensgebiet, an denen bloß eine kleine Anzahl von engeren Fachkollegen teilnimmt, die gesteckten wissenschaftlichen Ziele voll erreichen könnten. Dieser Ansicht kann entgegengehalten werden, daß das Ziel eines derartigen größeren Kongresses von vorneherein nicht so sehr darin gesehen werden darf, neuen, umwälzenden Erkenntnissen auf wissenschaftlichem Gebiet Bahn zu brechen — ein solcher Erfolg wird einem Kongreß nur in ganz wenigen Ausnahmefällen beschieden sein können —, sondern daß sein Ziel in der Erreichung eines weiteren, menschlich sozialen Zweckes erblickt werden muß. Dadurch, daß unser Kongreß nicht auf eine spezielle Forschungsrichtung beschränkt war, sollte er vornehmlich dem Zwecke dienen, Mathematikern verschiedener Länder und Sprachen eine Gelegenheit zu persönlicher Fühlungnahme und zu fruchtbaren Diskussionen zu bieten; auf diese Weise sollte er die Einheit unserer Wissenschaft erhalten helfen und das allgemeine menschliche Bestreben, sich gegenseitig besser zu verstehen, wenigstens in diesem bescheidenen Rahmen unterstützen.

Der fünfte Österreichische Mathematikerkongreß war, so wie die vergangenen Kongresse (1949 in Innsbruck, 1952 in Salzburg, 1956 in Wien), mit einem internationalen Mathematikertreffen verbunden. Auch die Deutsche Mathematikervereinigung hat in dankenswerter Weise dieser Zielsetzung dadurch Rechnung getragen, daß sie ihre diesjährige Hauptversammlung während unseres Kongresses in Innsbruck abgehalten hat.

Über den Verlauf des Kongresses und das wissenschaftliche Programm geben die folgende Übersicht und die nach Sektionen geordneten Vortragsauszüge ein Bild. Wenn der Kongreß, wie wir hoffen, die Erwartungen der Teilnehmer erfüllt hat, so danken wir das vielen Stellen, vor allem den im Ehrenkomitee vertretenen Herren, nämlich dem Herrn Bundesminister für Unterricht, Dr. H. Drimmel, dem Herrn Landeshauptmann von Tirol, Dr. H. Tschiggfrey, dem Herrn Bürgermeister von Innsbruck, DDr. A. Lugger, und S. Magnifizenz dem Herrn Rektor der Universität Innsbruck, Prof. Dr. E. Sachers.

Das Städtische Verkehrsamt, geleitet von Herrn Dr. Kettl, hat die während der Fremdensaison schwierige Unterbringung so vieler Teilnehmer vorbildlich organisiert und außerdem die Kongreßleitung mit Rat und Tat unterstützt.

Nicht zuletzt aber soll hier allen Teilnehmern, die durch Vorträge und wissenschaftliche Diskussionen zum Gelingen des Kongresses in vorbildlicher Weise beigetragen haben, der aufrichtigste Dank ausgesprochen werden, und es sei erlaubt, die Bitte hinzuzufügen, daß sie auch dem nächsten österreichischen Mathematikerkongreß, der voraussichtlich im Jahre 1964 in Graz stattfinden wird, ihre Treue bewahren mögen.

Innsbruck, im Dezember 1960.

Im Namen der Kongreßleitung
W. Gröbner

Auszug aus dem Kongreßprogramm

Sonntag, 11. September 1960: Anreisetag

Zwanglose Zusammenkunft im Café „Greif".

Montag, 12. September 1960: Eröffnung und 1. Arbeitstag

11 Uhr: Eröffnung des Kongresses im Madonnensaal der Alten Universität. Anschließend Empfang durch den Hern Landeshauptmann von Tirol, den Herrn Bürgermeister von Innsbruck und S. Magnifizenz, den Rektor, im Kaiser-Leopold-Saal.

15—18 Uhr: Sitzungen in den Sektionen.
Besuch der Hofburg.

Dienstag, 13. September 1960: 2. Arbeitstag

9—12 Uhr: Sitzungen in den Sektionen.

15—18 Uhr: Sitzungen in den Sektionen.
Ausflug zum „Grünwalderhof".

Mittwoch, 14. September 1960: Ausflug nach Seefeld

9.44 Uhr: Abfahrt vom Hauptbahnhof Innsbruck mit Sonderzug nach Seefeld.

11.30 Uhr: Mittagessen in Seefeld (1200 m) im Hotel „Karwendelhof", Hotel „Klosterbräu" und Grandhotel „Post".
Nach dem Mittagessen Auffahrt mit Sessellift zur Roßhütte (1800 m); von dort mit Kabinenseilbahn auf das Seefelder Joch (2064 m), oder den Härmelekopf (2050 m), Besteigung der Reither Spitze (2373 m), oder Spaziergang nach Mösern.

18 Uhr: Abfahrt von Seefeld.

Donnerstag, 15. September 1960: 3. Arbeitstag

9—12 Uhr: Sitzungen in den Sektionen.

15—18 Uhr: Sitzungen in den Sektionen.
Besuch der Sillschlucht und des Berg Isels.

Freitag, 16. September 1960: 4. Arbeitstag

9—12 Uhr: Sitzungen in den Sektionen.

15—17 Uhr: Sitzungen in den Sektionen.
Fahrt zum Hafelekar (2334 m).

Ab 17 Uhr: Fahrt zur Hungerburg; zwangloses Treffen auf der Hungerburg.

Samstag, 17. September 1960: 5. Arbeitstag und Abschluß

9—13 Uhr: Sitzungen in den Sektionen.

19 Uhr: Abschlußabend im Hotel „Maria Theresia", gemeinsames Abendessen.

EINDRÜCKE VOM INNSBRUCKER KONGRESS

Der fünfte Österreichische Mathematikerkongreß, zugleich Internationales Mathematikertreffen, wie seine Vorgänger von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft veranstaltet, fand in der Zeit vom 12.—17. September 1960 in Innsbruck statt. Die Tagung, die von der örtlichen Kongreßleitung mit größter Sorgfalt vorbereitet war und vorbildlich geleitet wurde, hatte eine hohe Besucherzahl aufzuweisen. Es waren anwesend 309 aktive Teilnehmer und 103 Begleitpersonen, die aus insgesamt 28 europäischen und außereuropäischen Ländern gekommen waren. Es wurden 159 Vorträge gehalten, 54 in der Sektion Analysis, 41 in der Sektion Geometrie und Topologie, 33 in der Sektion Algebra und Zahlentheorie, 26 in der Sektion Angewandte Mathematik und 5 in der Sektion Philosophie und Geschichte der Mathematik.

Über die Vorträge inhaltlich zu berichten, ist hier nicht beabsichtigt. Nur soviel sei gesagt, daß sie sich als äußerst anziehend erwiesen; denn obwohl auf den Gängen und Fluren zeitweise intensiv diskutiert wurde, füllten sich die Hörsäle ziemlich regelmäßig kurz nach Vortragsbeginn von neuem (es sei nicht verschwiegen: Etwas eher wäre besser gewesen). Die Fülle des in wohlpräparierter Darlegung Gebotenen war beträchtlich, und die faktischen Hörerzahlen legen den Schluß nahe, daß so mancher, der in der Absicht gekommen war, diesmal nicht wieder so viele Vorträge zu hören wie auf seinem letzten Kongreß, seine Absicht nicht realisiert hat. Für diese Kongreßteilnehmer war die Einrichtung der Parallelsitzungen segensreich; alle aber hatten unvermeidliche Verzichte zu leisten. Im übrigen war es gar nicht so einfach, vor Ende einer Sitzung das Gebäude zu verlassen, etwa um das kaum glaubhafte Panorama der Landschaft im Schein der Nachmittagssonne zu bewundern. Ich bekenne, daß ich mit einem solchen Versuch keinen Erfolg hatte: Als die Sitzungen endeten, war ich noch immer im Gebäude und im Gespräch mit anderen Kongreßteilnehmern. Vielleicht ist diese Beobachtung geeignet, etwas über das mentale Klima der österreichischen Kongresse auszusagen: Es könnte kein erfreulicheres Klima geben, und wenn ich irgend etwas an diesen Kongressen mit Bedauern betrachte, so ist es, daß ich einige von ihnen zu besuchen versäumt habe.

Für die Pflege der Geselligkeit hatte die Kongreßleitung gut und reichlich gesorgt; insbesondere lag ein sehr ausführliches Damenprogramm vor, um dessen Realisierung die ortsansässigen Kollegengattinnen unablässig bemüht waren. Das erste gesellige Treffen der Teilnehmer fand am Vorabend der formellen Eröffnung der Tagung im Café „Greif" statt. Die Eröffnung erfolgte am 12. September im Madonnensaal der Alten Universität mit Ansprachen der Gastgeber und einem Empfang im benachbarten Kaiser-Leopold-Saal, zu dem der Herr Landeshauptmann von Tirol, der Herr Bürgermeister der Stadt Innsbruck und Seine Magnifizenz der Herr Rektor der Universität eingeladen hatten. In den Ansprachen wurden die Teilnehmer mit den herzlichsten Worten begrüßt. Es ist kaum nötig, hier darauf hinzuweisen, daß die guten Wünsche, die die genannten Herren und der Vorsitzende unserer Gesellschaft, Prof. Dr. H. Hornich, der Tagung mit auf den Weg gaben, im besten Sinne in Erfüllung gegangen sind. Die Vortragenden der Tagung

haben dem Herrn Bürgermeister der Stadt Innsbruck für die Überreichung eines Bildbandes von der Stadt und ihrer Umgebung herzlichst zu danken. Mit großem Ernst wurden die nachdrücklichen Hinweise von Prof. Hornich auf die drückende Notlage aufgenommen, in der sich die österreichische Vertretung unseres Faches infolge zu geringer Ausstattung der Hochschulen mit Planstellen befindet.

Eine schöne Gelegenheit zu einer Feier im kleineren Kreise bot sich am 13. September, dem 75. Geburtstag von Prof. Dr. W. Blaschke, der uns bei einem Mittagessen die Ehre seiner Anwesenheit schenkte. Es wurden sehr kurze Tischreden gehalten; der Jubilar selbst hielt (wie so oft) die kürzeste, als er für die herzlichen ihm von allen Seiten dargebrachten Glückwünsche dankte.

Am 14. September ruhte die Arbeit offiziell, und die Teilnehmer versammelten sich zu einem Ausflug nach Seefeld in Tirol. Trotz einer Wetterverschlechterung, die an diesem Tage eintrat, vermittelten die Fahrten, die mit den verschiedensten Beförderungsmitteln (Eisenbahn, Sessellift, Kabinenseilbahn) unternommen wurden, großartige Eindrücke von der alpinen Welt. Diejenigen Teilnehmer, die Bergbeine mitgebracht hatten, erhielten eine sehr willkommene Gelegenheit, sich diese zu vertreten. Die Organisationsleitung erwarb sich höchste Bewunderung durch pünktliche und verlustlose Abwicklung eines komplizierten Zeitplans mit Hunderten von gelehrten Leuten, deren Zerstreutheit zum mindesten für möglich gehalten werden mußte. (Gerüchtweise geäußerte Befürchtungen, ein Kongreßteilnehmer habe die letzte Seilbahn verpaßt und irre in den Gebirgsschluchten umher, erwiesen sich als unbegründet.)

Am 16. September, dem vorletzten Kongreßtag, erfolgte gegen Abend ein zwangloses Treffen auf der Hungerburg, von der man einen eindrucksvollen Blick auf die beleuchtete Stadt hatte. Der Abschlußabend am 17. September vereinte die Teilnehmer in dem Festsaal des Hotels „Maria Theresia" zu einem gemeinsamen Essen als Gäste der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. Prof. Dr. Hornich sprach den Vortragenden, den Organisationsleitern und den hilfreichen Damen im Kongreßbüro den Dank der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft aus. Im Namen der Kongreßteilnehmer und der Deutschen Mathematikervereinigung dankte Prof. Dr. Grunsky den Veranstaltern und den Damen und Herren der örtlichen Kongreßleitung. Seinen Dankesworten schlossen sich die anwesenden Delegationsleiter der anderen Länder an.

Bei dem Abschlußabend äußerte Prof. Dr. Hornich die Hoffnung, diese Tagung möge — wie Innsbruck und Österreich — in der Erinnerung der Teilnehmer bleiben. Wir dürfen fest davon überzeugt sein, daß sich seine Hoffnung erfüllen wird. Was die Erinnerung an Österreich betrifft, so waren wir bisher in der glücklichen Lage, daß diese Erinnerung alle vier Jahre sehr nachdrücklich aufgefrischt wurde. Es sei gestattet, hier die intensive Hoffnung auszudrücken, daß wiederum dies bleiben werde.

H. Petersson (Münster)

Inhalt

SEKTION I:

Algebra und Zahlentheorie

R. A p é r y (Caen): *Sur l'équation diophantienne* $2^{m+2} = x^2 + A$.
Vortragsauszug nicht eingelangt.

R. B e r g e r (Heidelberg): *Fortsetzung von Derivationen und Schachtelung der Differente.*

Die Kählersche Theorie der Derivationen und Differenten von Ringen legt es nahe, die Frage der Fortsetzung einer Derivation auf einen Oberring zu untersuchen. Sie hängt eng mit dem Schachtelungssatz für die Differente zusammen, wie er aus der Theorie der Dedekindschen Differente bekannt ist. Da die Fortsetzung einer Derivation nicht immer möglich ist, wird ein abgeschwächter Prozeß, der der universellen Ausdehnung eingeführt, der stets vorgenommen werden kann. Seine Eigenschaften und ihre Bedeutung für den Schachtelungssatz der Differente werden untersucht. Die Ergebnisse ermöglichen es, die feinere Zusammensetzung des Divisors eines Differentials in einem algebraischen Funktionenkörper von endlich vielen Veränderlichen zu übersehen.

L. B e r n s t e i n (Tel-Aviv): *Nichtkommutative unendliche Gruppen mit Elementen von durchweg endlicher Ordnung.*

Es sei eine unendliche Folge (a_i) verschiedener, unabhängiger Elemente gegeben. Wir nennen ein Element dieser Folge unabhängig, wenn es auf keine Weise durch Produkte vorangehender Elemente dargestellt werden kann. Diese Elemente seien alle von der Ordnung zwei.

Es werden Verknüpfungsregeln für die endlichen und unendlichen Produkte der Elemente der Folge (a_i) aufgestellt. Das ergibt den

HAUPTSATZ 1. Die Elemente der Folge (a_i) erzeugen eine unendliche Gruppe G, die das direkte Produkt der Gruppen $\{a_i\}$ in ihrer gegebenen Reihenfolge ist.

Es wird daraufhin sofort bewiesen:

HAUPTSATZ 2. Alle (endlichen oder unendlichen) Elemente der Gruppe G sind von der Ordnung zwei oder vier.

Es werden dann die verschiedenen Untergruppen von G aufgefunden, vor allem die Normalteiler. Diese Untersuchungen gipfeln in

HAUPTSATZ 3. Die Gruppe G besitzt ein unendliches, aus lauter abelschen Elementen gebildetes Zentrum. Dieses ist auch die Kommutatorgruppe. Der Index des Zentrums unter G ist von unendlicher Ordnung.

HAUPTSATZ 4. Die Gruppe G ist „auflösbar" in dem Sinne, daß sie einen Normalteiler vom Index zwei, dieser wieder einen vom Index zwei und so fort besitzt.

Abschließend werden die Normalisatoren der Elemente und Gruppen von G und die Indexe der Normalisatoren untersucht und die Inneren Automorphismen und Permutationsgruppen von G betrachtet.

Ausblick: G ist in bezug auf eine gewisse (unendliche) Klasse von Untergruppen quasi-Abelsch. Es fragt sich, ob eine unendliche (nichtkommutative) Gruppe mit Elementen von durchweg endlicher Ordnung konstruiert werden kann, die durchweg quasi-Abelsch ist.

L. Budach (Berlin): *Verallgemeinerte Quotientenringe und ihre Anwendung auf die Theorie der Noetherschen Integritätsbereiche.*

Unter einem quasilokalen Ring versteht man nach *Nagata* einen kommutativen Ring mit Einselement und mit genau einem Maximalideal. Man kann ihn auch charakterisieren als einen kommutativen Ring, in dem die Menge aller Einheiten von der leeren Menge verschieden ist und in dem die Menge aller Nichteinheiten ein Ideal bildet. Läßt man bei der ersten Definition die Forderung, daß der Ring ein Einselement enthält, fallen, so muß die zweite Definition in dem Sinne modifiziert werden, daß man das Wort Einheit durch das Wort Quasieinheit und das Wort Ideal durch das Wort Maximalideal ersetzt. Dabei soll unter einer Quasieinheit ein erzeugendes Element eines Hauptideals verstanden werden, welches ein zum Einheitsideal gehöriges Primärideal darstellt. In meinem Vortrag untersuche ich nun in beliebigen kommutativen Ringen die Eigenschaften der Quasieinheiten und die Frage, unter welchen Bedingungen es möglich ist, verallgemeinerte Quotientenringe, die ich Quotalringe nenne, in dem Sinne zu bilden, daß ein multiplikativ abgeschlossenes System von Elementen des Ringes in einem Oberring zu Quasieinheiten gemacht wird. Die Anwendung der dabei gewonnenen Ergebnisse auf die Theorie der Noetherschen Ringe ergibt den Satz: Ein Noetherscher Ring ist dann und nur dann einartig, wenn alle zwischen ihm und seinem Quotientenkörper liegenden Ringe Noethersch sind.

J. Cigler (Mainz): *Einige Probleme aus der Theorie der Gleichverteilung mod 1.*

Auf einem kompakten Raum X mit abzählbarer Basis wird die Menge aller Maße untersucht, die invariant bezüglich einer vorgegebenen Transformation T sind. Unter Verwendung des individuellen Ergodensatzes und eines bekannten Satzes von *Krein-Milman* gewinnt man Ergebnisse über die Menge der Verteilungsmaße der Folgen $(T^n x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, x aus X. Spezialisiert man den zugrunde gelegten Raum X und die Transformation T

in geeigneter Weise, so gelangt man zu Sätzen, die einige Resultate von *I. I. Schapiro-Pjatezkij, A. G. Postnikow* u. a., welche ursprünglich mit teilweise anderen Methoden bewiesen wurden, in verschiedenen Richtungen verallgemeinern und erweitern.

H. Delange (Clermont-Ferrand): *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives.*

Une fonction arithmétique est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels.

On sait qu'une fonction arithmétique f, réelle ou complexe, est dite multiplicative si l'on a

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{lorsque} \quad (m,n) = 1.$$

Si $f(n)$ n'est pas toujours nul, ceci implique $f(1) = 1$.

f est dite additive si l'on a

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad \text{lorsque} \quad (m,n) = 1.$$

Nous considérons ici la classe M_0 des fonctions arithmétiques réelles ou complexes multiplicatives, non toujours nulles, et toujours de module au plus égal à 1.

Si f est une fonction arithmétique réelle additive, la fonction égale à $\exp\,[itf\,(n)]$, où t est une constante réelle, appartient à la classe M_0.

Notre résultat principal est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de la classe M_0 possède une valeur moyenne non nulle. Une partie de cette condition est suffisante pour l'existence d'une valeur moyenne, pas forcément non nulle.

On déduit aisément de là, par application d'un théorème classique du calcul des probabilités, les conditions nécessaires et suffisantes trouvées par *Erdös* pour qu'une fonction arithmétique réelle additive possède une loi de distribution.

O. Endler (Bonn): *Multiplikative Strukturen in (additiven) archimedischen totalgeordneten Gruppen.*

Diejenigen *a. tg.* (archimedischen totalgeordneten) Gruppen A, die durch Einführung einer geeigneten Multiplikation zu einem *a. tg. Körper* gemacht werden können, lassen sich durch das *Eudoxische Axiom* charakterisieren: „Zu positiven $r, s, t \varepsilon A$ existiert stets die durch $r : s = t : u$ bestimmte ‚vierte Proportionale' $u \varepsilon A$." — Bei einer solchen „eudoxischen Gruppe" A bildet die Menge aller ordnungserhaltenden und -umkehrenden Endomorphismen in natürlicher Weise einen a. tg. Körper $\mathfrak{A}$ mit zu A ordnungsisomorpher Additionsgruppe. Die betrachteten Multiplikationen von A werden gerade durch die Ordnungsisomorphismen von $\mathfrak{A}$ auf A induziert und entsprechen eindeutig den positiven $s \varepsilon A$ derart, daß der mit der „s-Multiplikation" gebildete Körper A das Einselement s besitzt. (Z. B. ist in der additiven

Gruppe R aller reellen Zahlen die s-Multiplikation durch $a^s . b = a . b . s^{-1}$ $(a, b \varepsilon R)$ definiert.)

Die Frage nach den multiplikativen (mit der Totalordnung verträglichen) Strukturen einer *beliebigen* a. tg. Gruppe A führt daher zwanglos zur Untersuchung der Menge $\mathfrak{A}$ aller ordnungserhaltenden und -umkehrenden Endomorphismen von A und auf das Problem der Einbettung von A in eine „eudoxische Hülle". Man zeigt, daß $\mathfrak{A}$ stets einen a. tg. Integritätsbereich bildet und daß jeder (nichttriviale) Ring mit der Additionsgruppe A zu einem Unterring von $\mathfrak{A}$ ordnungsisomorph ist; und zwar zu $\mathfrak{A}$ selbst genau dann, wenn er ein Einselement besitzt. Aus der Existenz einer multiplikativen Struktur folgt ferner, daß A „zusammenhängend" ist, d. h., daß die Transitivitätsbereiche zweier Elemente von A stets einen nichtleeren Durchschnitt besitzen. — Die (stets existierende) eudoxische Hülle von A läßt sich für zusammenhängende A besonders einfach konstruieren, nämlich als Fraktionsgruppe $A\mathfrak{p}$ von A nach der multiplikativen Halbgruppe $\mathfrak{P}$ aller ordnungserhaltenden Endomorphismen.

Als Hauptresultat erhält man: Für die Existenz nichttrivialer multiplikativer Strukturen von A ist notwendig (und, falls A endlich erzeugt ist, auch hinreichend), daß A zusammenhängend ist. Die betrachteten Multiplikationen sind sämtlich kommutativ und nullteilerfrei und entsprechen eineindeutig denjenigen positiven $s^* \varepsilon A\mathfrak{p}$, für die A „s^*-transitiv" ist. Genau dann, wenn $s^* = s \varepsilon A$ ist, besitzt der mit der s^*-Multiplikation gebildete a. tg. Ring A ein Einselement, nämlich das Element s.

A. G l o d e n (Luxembourg): *Résolution de quelques congruences du 4^e degré.*

Nous résolvons d'abord quelques congruences binômes. Par la congruence $x^n + 1 \equiv 0$ $(mod\ p)$, on connaît les formules dites de *Western*, nous établirons des formules nouvelles pour résoudre cette congruence. Nous indiquons ensuite une méthode pour résoudre les congruences $x^n + 1 \equiv 0$ $(mod\ p^2)$ et $x^n + 1 \equiv 0$ $(mod\ p^3)$. Finalement nous donnons deux méthodes de résolution de la congruence $x^4 - x^2 + 1 \equiv 0$ $(mod\ p)$.

M. H a s s e (Dresden): *Einige Bemerkungen zur Algebra der Kategorien.* Vortragsauszug nicht eingelangt.

H. I z b i c k i (Wien): *Neuere Entwicklungen in der Theorie der Graphen.*

Ein nicht orientierter Graph X wird üblicherweise als geordnetes Tripel $X = \langle V, E, f \rangle$ dargestellt, wo V die Menge der Knotenpunkte, E die Menge der Kanten und f eine Funktion bedeutet, die jeder Kante das ungeordnete Paar ihrer Endpunkte zuordnet. Hat X keine Mehrfachkanten, so genügt die Angabe von V und E^*, wo E^* die Menge der als Punktepaare gegebenen Kanten bedeutet. Hat X zusätzlich keine isolierten Punkte, so genügt die Angabe von E^* allein.

Nun hat es sich bei der Behandlung von Graphentransformationen gezeigt,

daß keine dieser Notationen den Anforderungen voll entspricht. Ich habe daher für diese Zwecke eine neue Schreibweise entwickelt:

Zunächst seien wieder V und E gegeben. Dann wird jeder Kante e aus E ein ungeordnetes Paar ge $= [\langle e, 1\rangle, \langle e, 2\rangle]$ von sogenannten Halbkanten zugeordnet und jeder Halbkante $\langle e, i\rangle$ ein Endpunkt $h\langle e, i\rangle =$ v. Wegen $fe = [h\langle e, 1\rangle, h\langle e, 2\rangle]$ ist es offenkundig, daß der Graph X durch Angabe von V, E und h bestimmt ist. Die so eingeführte *VEh*-Notation hat sich bei der Behandlung von Graphentransformationen gut bewährt.

Literatur:

Herbert Izbicki, Graphentransformationen, Mh. f. Math. 64 (1960) 135—175.

W. B. J u r k a t (Syracuse): *Eine Bemerkung zur Vermutung von Mertens.*

Wie allgemein üblich, bezeichne $M(x)$ die summatorische Funktion der Möbiuszahlen $\mu(n)$. Von *Mertens* war die Ungleichung $|M(x)| \leqq \sqrt{x}$ vermutet und für $x \leqq 10^4$ bestätigt worden. *Sterneck* bestätigte durch Rechnung sogar $|M(x)| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{x}$ für $2 \leqq x \leqq 5 . 10^5$ abgesehen von einer Umgebung von $x = 200$ und durch Stichproben für $x \leqq 5 . 10^6$. Wir zeigen dagegen, daß $|M(x)| > \frac{1}{2}\sqrt{x}$ immer wieder gelten muß. Bezeichnen wir mit M_- bzw. M^- den unteren bzw. oberen Grenzwert von $M(x)/\sqrt{x}$ für $x \to +\infty$, so gilt genauer die Ungleichung

$$M_- \sqrt{x} \leqq M(x) + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\pi/x)^{2n}}{n\,(2n)!\,\zeta(2n+1)} \leqq M^- \sqrt{x}$$

für alle nicht-ganzen positiven Werte von x. Für $x = 1 - 0$ ergibt sich durch einfache Rechnung $M_- < -\frac{1}{2}$, wobei die Konstante sogar noch um 1% verbessert werden kann. Da M(x) an der Stelle $x = 1$ um 1 springt, folgt auch ohne Rechnung, daß $M_- \leqq -\frac{1}{2}$ oder $M^- \geqq \frac{1}{2}$ sein muß. Der Beweis der obigen Ungleichung beruht auf der Fastperiodizität gewisser Hilfsfunktionen, die von den Nullstellen der Zetafunktion abhängen. Hieraus ergeben sich noch weitere Ungleichungen für M_- und M^-, die aber bis jetzt noch nicht weitergeführt haben.

H. J. K a n o l d (Braunschweig): *Multiplikativ benachbarte zahlentheoretische Funktionen.*

Eine zahlentheoretische Funktion $f(n)$ heißt multiplikativ, wenn für je zwei teilerfremde natürliche Zahlen m und n stets $f(mn) = f(m) f(n)$ erfüllt ist. Es seien $f(n)$ und $g(n)$ zwei multiplikative zahlentheoretische Funktionen. Dann soll $g(n)$ der „a-te rechte (bzw. linke) Nachbar von $f(n)$" heißen, wenn für jede Primzahlpotenz p^α (mit $\alpha \geqq 1$, ganz) gilt: $g(p^\alpha) = f(p^\alpha) + a$ (bzw. $g(p^\alpha) = f(p^\alpha) - a$), wobei $a \geqq 0$, ganz sein soll. Wir wollen dafür auch kurz sagen, daß $f(n)$ und $g(n)$ multiplikativ benachbart sind. Wir setzen voraus, daß alle betrachteten Funktionen an der Stelle 1 auch den Wert 1 annehmen und wollen den a-ten rechten bzw. linken Nachbarn von $f(n)$ mit $f_{+a}(n)$ bzw. $f_{-a}(n)$ bezeichnen. Das Ziel der Untersuchungen ist, Eigenschaften von $f(n)$ zu finden, die sich auf gewisse Nachbarn übertragen lassen; z. B. folgt aus $f(n)\, n^{-1} \to \infty$ auch $f_{+a}(n) \,.\, n^{-1} \to \infty$ und aus $f(n) \,.\, n^{-1} \to 0$ auch $f_{+a}(n) \,.\, n^{-1} \to 0$. Ist der Wertevorrat von $f(n)$ eine Untermenge der Menge aller natürlichen Zahlen, so gilt dies auch für den Wertevorrat von $f_{+a}(n)$, unter gewissen Voraussetzungen auch für den Wertevorrat von $f_{-a}(n)$. Eine Reihe von Aussagen über den Wertevorrat einer zahlentheoretischen Funktion können wir sodann auf gewisse benachbarte Funktionen übertragen.

F. K a s c h (Heidelberg): *Homologische Eigenschaften von Frobenius-erweiterungen.* Vortragsauszug nicht eingelangt.

E. K l e i n f e l d (Ohio State University): *Rings of type* (γ, δ).

In *A. A. Albert's* "Almost Alternative Algebras." Portugal Math. Vol. 8 (1949) pp. 23—26, a class of rings called of type (γ, δ) is introduced. We are interested in determining the structure of these rings. One of the main results states that simple, finite-dimensional algebras of type (1, 1) and characteristic $\neq$ 2, 3 are associative. The same Conclusion holds if we replace the assumption of finite dimensionality by the existence of a non-zero idempotent. Moreover rings of type (γ, δ) without divisors of zero are associative. This result has some bearing on the foundations of projective geometry.

W. K l i n g e n b e r g (Göttingen): *Klassische Gruppen über lokalen Ringen.*

Es wird darüber berichtet, wie sich die Strukturuntersuchungen der klassischen Gruppen über Körpern, wie sie Dieudonné zum Abschluß gebracht hat, auf klassische Gruppen über lokalen Ringen übertragen lassen. Ein lokaler Ring ist dabei ein nicht notwendig kommutativer Ring mit Eins und einem größten Ideal. Das Endergebnis läßt sich folgendermaßen beschreiben: Man ordne jeder Untergruppe U einer der betrachteten klassischen Gruppen G über dem lokalen Ring L als (Größen-)Ordnung das kleinste Ideal J von L zu mit der Eigenschaft: U mod J gehört zum Zentrum von G mod J. Die Menge der invarianten Untergruppen der Ordnung J besitzt nun ein größtes und ein kleinstes Element (größtes und kleinstes stets verstanden im Sinne der Inklusion), und jede zwischen dem größten und kleinsten Element (deren Struktur sich genau beschreiben läßt) der Ordnung J gelegene Untergruppe U von G ist invariant in G und hat die Ordnung J. —

Diese Ergebnisse bilden eine weitere Stütze für die in letzter Zeit immer häufiger vertretene und durch mannigfache Ergebnisse belegte Ansicht, daß große Teile der Algebra und Geometrie, die man bisher fast nur in Verbindung mit Körpern untersucht hat, eine natürliche Erweiterung zu Strukturen über lokalen Ringen zulassen.

M. K n e s e r (München): *Erzeugung von Einheitengruppen quadratischer Formen durch Spiegelungen.*

$Q(x_1, \ldots, x_n) = Q(x)$ sei eine quadratische Form mit ganzen rationalen Koeffizienten, $S(a)$ die Spiegelung an der zu a orthogonalen Hyperebene, d. h. diejenige lineare Transformation, die den Vektor a in $-a$ überführt und alle zu a bezüglich Q orthogonalen Vektoren fest läßt. Es ist bekannt, daß die Gruppe der bezüglich Q orthogonalen Transformationen mit rationalen Koeffizienten durch solche Spiegelungen erzeugt wird. Dasselbe gilt für die orthogonalen Transformationen mit p—adisch ganzen Koeffizienten, mit eventueller Ausnahme von $p = 2$, wo die Spiegelungen aber jedenfalls noch eine Kongruenzuntergruppe erzeugen. Über die entsprechende Frage für ganz rationale orthogonale Transformationen gibt der folgende Satz teilweise Auskunft: Ist t eine rationale Zahl, so sei $E(t)$ die Gruppe, die erzeugt wird von Spiegelungen $S(a)$ mit ganz rationalen Koeffizienten und $Q(a) = t$; $E_p(t)$ sei die entsprechende Gruppe, wenn man für $S(a)$ Spiegelungen mit p—adisch ganzen Koeffizienten zuläßt. Wenn nun $Q(x)$ die quadratische Form $x_1x_2 + x_3x_4$ ganzzahlig darstellt, so ist $E(t)$ gleich dem Durchschnitt aller $E_p(t)$. Insbesondere folgt, daß $E(1)$ und damit auch die von Spiegelungen erzeugte Untergruppe der Gruppe G aller ganzzahligen orthogonalen Transformationen eine Kongruenzuntergruppe von G ist. Andererseits gibt es eine zu $x_1x_2 + x_3x_4$ rationalzahlig äquivalente quadratische Form, für welche diese Aussagen falsch sind.

S. H. L e h n i g k (Huntsville): *Über den Zusammenhang zwischen zwei Sätzen von Hermite und Bilharz.*

Ch. Hermite[2] hat den folgenden Satz bewiesen. Satz 1: Sämtliche Nullstellen eines Polynoms vom Grade n mit reellen oder komplexen Koeffizienten haben positiven Imaginärteil dann und nur dann, wenn sämtliche Hauptminoren einer diesem Polynom eindeutig zugeordneten Matrix $\mathfrak{H}$ der Ordnung n positiv sind.

Von *H. Bilharz*[1] stammt ein ähnlicher Satz (Bilharzsches Stabilitätskriterium), der Bedingungen dafür angibt, daß sämtliche Nullstellen negativen Realteil haben. Dieser Satz kann durch eine geeignete Transformation der Variablen und der Koeffizienten des Polynoms leicht in den Fall positiver Imaginärteile übergeführt werden. Satz 2: Sämtliche Nullstellen eines Polynoms vom Grade n mit reellen oder komplexen Koeffizienten haben positiven Imaginärteil dann und nur dann, wenn sämtliche Hauptminoren einer diesem Polynom eindeutig zugeordneten Matrix $\mathfrak{B}$ der Ordnung $2n$ positiv sind.

W. Schmeidler[3] erwähnte, es sei wünschenswert, den direkten Zusammenhang zwischen den Bedingungen der Sätze 1 und 2 aufzudecken.

Es wird gezeigt, daß die entsprechenden Hauptminoren von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ identisch sind. Dieses Ergebnis wird erhalten, indem jeder Hauptminor von $\mathfrak{B}$ mit einer geeigneten Determinante multipliziert wird, die nur von dem absoluten Glied des Polynoms abhängt.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Sätzen von *Hermite* und *Bilharz* macht es möglich, endgültig sämtliche Kriterien der linearen Stabilitätstheorie auf den Hermitschen Satz 1 (bzw. auf den auf den Fall negativer Realteile transformierten Satz) zurückzuführen.

Literatur:

1 *H. Bilharz,* Bemerkung zu einem Satze von Hurwitz, Z. angew. Math. Mech., 24, 2 (1944), S. 77—82.

2 *Ch. Hermite,* Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre deux limites données, Journ. Reine Angew. Math., 52 (1854), S. 39—51, oder Œuvres I, S. 397—414.

3 *W. Schmeidler,* Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik, Akademie-Verlag, Berlin, 1949.

R. C. Lyndon (University of Michigan): *Remarks on the Freiheitssatz of Magnus.*

The Freiheitssatz of Magnus asserts that, in the free group F on generators $x_1, x_2, \ldots$, if the sets of x_i occurring in words $r_1, r_2, \ldots$, and w satisfy certain conditions, and if w is a consequence of $r_1, r_2, \ldots$ (that is, belongs to the smallest normal subgroup containing them), then w is a consequence of a certain subset of the r_j. This theorem is extended by (1) replacing the r_j by certain subgroups R_j of F; (2) replacing F be a free product of subgroups X_i; and (3) replacing conditions referring to linear orderings of the x_i and r_j by conditions of a more general settheoretic nature. This includes, for example, cases in which the generators are doubly indexed. Proofs rely upon elementary facts about generalized free products.

A. Mallios (Athen): *On certain groups of isomorphismes in normed vector lattices.*

Let E be a normed vector lattice and A a vector sublattice (i. e. subspace and sublattice) of E; $(T_\alpha)_{\alpha \varepsilon G}$ is a group of order-preserving isomorphismes of E into itself (i. e. order-preserving, one-to-one linear transformations of E into itself), such that $T_\alpha (A) \subset A$ for every $\alpha \varepsilon G$. Let $B = \{(T_\alpha x - x) \; \varepsilon \; E: \alpha \varepsilon G, x \varepsilon A\}$; if N denotes the closed linear extension of B in A, N° the annihilator of N and A^{*+} the set of all positive linear functionals on A, we have the following: *Theorem:* If $A^{*+} \cap N^\circ = \{0\}$, *where* $\{0\}$ is the subspace of E consisting of 0 alone, then $A = N$.

Applications: The above theorem contains as a special case a theorem of *E. Følner* concerning approximation of real-valued functions in a vector space without Banach mean value, as well as another statement of the *Følner's* theorem given by *R. Raimi.* It also contains a similar result to the *Følner's* theorem of *M. M. Day.*

A generalisation will be suggested for p. o. l. t. spaces where a decomposition of a bounded linear functional into its positive parts is possible.

H. J. Nastold (Heidelberg): *Zur Multiplizitätstheorie in der arithmetischen Geometrie.*

In der Multiplizitätstheorie der algebraischen Geometrie handelt es sich bekanntlich darum, einer Komponente P des Schnittes zweier Untervarietäten V, W etwa einer affinen Varietät X eine nichtnegative ganze Zahl als Vielfachheit zuzuordnen, so daß das damit definierte Schnittprodukt von Zyklen auf X vernünftige Eigenschaften besitzt. Algebraisch bedeutet dies nach Lokalisierung an der Stelle P, zwei Primidealen $\mathfrak{p}_V$ und $\mathfrak{p}_W$ zu V und W im lokalen Ring A von P auf X, für die also die Länge $l\ (A/\mathfrak{p}_V + \mathfrak{p}_W) < \infty$ ist, eine Zahl $i\ (V \cdot W \mid P) = \chi^A\ (A/\mathfrak{p}_V, A/\mathfrak{p}_W)$ zuzuordnen. *J. P. Serre* gab hierfür die folgende für über beliebigem regulären lokalen Ring A endlich erzeugte Moduln M und N mit $l\ (M \otimes_A N) < \infty$ sinnvolle Definition: $\chi^A\ (M, N) = \Sigma\ (-1)^i\ l\ (\mathrm{Tor}_i^A\ [M, N])$. Diese Definition, die auch auf Ringe A anwendbar ist, die nicht notwendig einen Konstantenkörper k enthalten, liefert somit auch eine Vielfachheit für die arithmetische Geometrie. Von ihr sind die folgenden grundlegenden Eigenschaften zu fordern (*i*) χ^A $(M, N) \geqq 0$, (ii) $\dim M + \dim N \leqq \dim A$, (iii) $\dim M + \dim N < \dim A$ genau dann, wenn $\chi^A\ (M, N) = 0$. *Serre* bewies (ii) für beliebige, (i) und (iii) für unverzweigte reguläre lokale Ringe. Es wird über einen Versuch berichtet, die Gültigkeit auch von (i) und (iii) für beliebige reguläre lokale Ringe durch Zurückführung auf den unverzweigten Fall zu beweisen. Dazu stellen wir den o. E. d. A. kompletten verzweigten regulären lokalen Ring A als homomorphes Bild eines Potenzreihenringes R über einem kompletten diskreten Bewertungsring, also eines unverzweigten regulären lokalen Ringes, in der Form $0 \to (x) \to R \to A \to 0$, x nicht $\varepsilon\ m^2_R$, dar. $\mathfrak{P}$ sei Urbild eines Primideals aus A, d. h. $x\ \varepsilon\ \mathfrak{P}$. Dann gilt: (i) und (iii) sind gültig für den Ring A, wenn die folgende Vermutung zutrifft: Es gibt ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$, x nicht $\varepsilon\ \mathfrak{p}$, so daß $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} + (x)$. Für Rang $\mathfrak{P} = 2$ ist diese Vermutung gleichbedeutend mit der eindeutigen Primfaktorzerlegung in A, nach *Auslander-Buchsbaum,* Proc. Nat. Acad. of Sci 45 (1959), p. 733 ff. also richtig.

W. Nöbauer (Wien): *Die Operation des Einsetzens bei rationalen Funktionen.*

Während sich im Polynomring P in einer Unbestimmten über einen Integritätsbereich J die im Einsetzen eines Elementes in ein anderes bestehende Operation unbeschränkt ausführen läßt, ist das im Quotientenkörper dieses Polynomringes nicht der Fall. Beschränkt man sich aber auf den Unterring dieses Quotientenkörpers, bestehend aus jenen Elementen, die eine Quotientendarstellung besitzen, bei der der Nenner $n(x)$ bei Ersetzung von x durch Elemente von J stets Werte annimmt, die im Restklassenring nach einem gegebenen Ideal A von J invertierbar sind, so erhält man einen Ring R_A rationaler Funktionen, in welchem die Operation „Einsetzen" unbeschränkt möglich ist, also eine algebraische Struktur mit drei zweistelligen — bzw., wenn auch noch die Differentiation in Betracht gezogen wird — mit drei zweistelligen und einer einstelligen Verknüpfung. Die Untersuchung der homomorphen Bilder dieser Strukturen führt auf verschiedene Probleme, von denen erwähnt seien die Aufgabe, die homomorphen Bilder zu charakterisieren durch Ideale von P, die Untersuchung der Eigenschaften der von den homomorphen Bildern bezüglich der Operation Einsetzen gebildeten Halbgruppen und ihrer Gruppenkerne, sowie das Studium der von den Elementen von R_A induzierten Abbildungen des Restklassenringes J/A in sich.

Chr. J. Penning (Delft): *Reguläre Ringe erzeugt von gegebenen Booleschen Ringen.*

Es sei B ein gegebener Boolescher Ring mit Einselement; d.h. B sei ein kommutativer Ring mit Einselement, dessen Elemente sämtlich idempotent sind. Bekanntlich kann man B auch betrachten wie eine Boolesche Algebra [1]. Wir wollen voraussetzen, daß diese Boolesche Algebra vollständig sei.

Es sei weiter R ein kommutativer Ring mit Einselement. Die idempotenten Elemente aus R bilden einen Booleschen Ring [2] und also auch eine Boolesche Algebra. R heißt *regulär*, wenn es für jedes a aus R ein x in R gibt mit $axa = a$ [3]. Es gibt nun folgendes Problem: bei gegebenem Booleschen Ring B einen kommutativen regulären Ring R mit Einselement zu konstruieren, dessen idempotente Elemente eine Boolesche Algebra bilden isomorph zu B.

Zur Lösung des Problems betrachten wir Abbildungen eines Körpers F in die Boolesche Algebra B mit der Eigenschaft, daß der Durchschnitt zweier Bilder verschiedener Elemente aus F immer das Nullelement aus B und die Vereinigung aller Bilder das Einselement aus B ist. Eine solche Abbildung von F in B heiße eine Aufspaltungsabbildung.

SATZ: Die Menge aller Aufspaltungsabbildungen eines gegebenen Körpers F in eine gegebene vollständige Boolesche Algebra B ist ein kommutativer regulärer Ring FB^* mit Einselement, dessen idempotente Elemente eine Menge B^* isomorph zu B bilden, während FB^* einen Teilkörper F^* isomorph zu F enthält.

Man kann auch ohne Voraussetzung der Vollständigkeit von B zur Existenz eines kommutativen regulären Ringes FB mit denselben Eigenschaften schließen, wenn FB die Menge aller solchen Aufspaltungsabbildungen von F in B ist, für die nur endlich viele Elemente aus F ein Bild ungleich Null haben.

Literatur:

1 *H. Hermes*, Einführung in die Verbandstheorie, Springer-Verlag, § 22.

2 *N. Jacobson*, Lectures in abstract algebra, Vol. I, Basic concepts, *Van Nostrand*, exercise 2, p. 211.

3 *N. H. McCoy*, Rings and Ideals, The Mathematical Monographs, chap. VIII.

W. Peremans (Eindhoven): *Halbkörper und freie Halbalgebren.*

Die übliche Theorie der freien Algebren ist für Körper unbrauchbar. Der Grund dafür ist, daß der Begriff des Homomorphismus für den Begriff der freien Algebra wesentlich ist und Körper nur triviale Homomorphismen besitzen. Bei kommutativen Ringen ist ein freier Ring dasselbe wie ein Polynomring und sind die Homomorphismen einfach Substitutionen für die Unbestimmten (= Erzeugenden des freien Ringes). Ersetzt man den Polynomring durch den Körper der gebrochenen rationalen Funktionen, dann hat man auch einen Substitutionsbegriff und man möchte diese Körper deshalb freie Körper nennen. Die Substitutionen sind aber keine Homomorphismen im üblichen Sinne, weil sie nicht immer definiert sind. Dies führt zur Betrachtung von Halbalgebren (= Algebren, in denen die Operationen nicht unbeschränkt definiert sind), für die wir die Begriffe der Teilalgebra, des Homomorphismus und der freien Algebra dem Sachverhalt bei Körpern entsprechend definieren werden. Eindeutigkeit bis auf Isomorphismus läßt sich auch für die freien Halbalgebren nachweisen. Die Existenz aber ist hier ein Problem, das wesentlich schwieriger ist als im Falle der Vollalgebren.

H. Petersson (Münster, Westf.): *Über eine von G. Lochs eingeführte Funktion.*

Bei einer Untersuchung, die *G. Lochs* über die relative Häufigkeit der Teilnenner in der Kettenbruchentwicklung rationaler Zahlen angestellt hat, tritt im ersten Restglied ein expliziter Ausdruck $K(z)$ auf, dessen Bauart vermuten läßt, daß er mit Modulfunktionen in naher Beziehung steht. Diese Vermutung bestätigt sich zunächst im folgenden Sinne: $K(z)$ ist in der von -1 nach 0 geradlinig aufgeschnittenen komplexen z-Ebene erklärt und stellt dort eine eindeutige holomorphe Funktion von z dar. Bildet man $K(z+m)$ für die z in der oberen Halbebene und summiert dies über alle ganzen Zahlen m, so entsteht $\pi i/3\,(\log\Delta(z) - 2\pi i z)$, wo $\Delta(z)$ die (normierte) Diskriminante der elliptischen Funktionen bezeichnet. Zum Beweise sind lediglich direkte Umformungen und Konvergenzbetrachtungen erforderlich.

Auf einen tiefer liegenden Zusammenhang wird man durch die Feststellung geführt, daß die $K(z)$ definierende Doppelsumme in gewissem Sinne als ein Viertel der $\log\Delta(z)$ definierenden Doppelsumme aufzufassen ist. Die genauere Analyse dieser Beziehung basiert auf der Einführung eines neuen komplexen Parameters nach dem Ansatz der bei den binären Epsteinschen Zetafunktionen zur Kroneckerschen Grenzformel führt. Als deren Analogon erscheint hier die gesuchte Relation in der Gestalt

$$K(z) + K\left(-\frac{1}{z}\right) - K(-z) - K\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi i}{3}\log\Delta(z) + 8\,\psi^-(z),$$

wo $\psi^-(z)$ den ungeraden Bestandteil des Dilogarithmus angibt.

S. Piccard (Neuchâtel): *Les groupes libres et les groupes quasilibres.*

Soit G un groupe libre dont la loi de composition est appelée multiplication. Soit A un ensemble d'éléments générateurs libres de G, c'est-à-dire d'éléments qui ne sont liés que par des relations triviales. Tout élément b de G peut être mis de façon unique sous la forme d'une composition finie réduite d'éléments de A. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les éléments de A qui font partie de cette composition b possède un degré fixe par rapport à tout élément de A, ce degré étant la somme des exposants de a_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) dans la composition finie d'éléments de A qui représente b et 0 par rapport à tout autre éléments de A. On peut donc décomposer l'ensemble des éléments de G en classes, en prenant dans un même classe tout les éléments de G qui ont le même degré par rapport à chaque élément de A. Quel que soit l'entier λ_a que l'on fasse correspondre à chaque élément a de A, la classe $M(a, \lambda_a)_{a \varepsilon A}$ formée de tous les éléments de G qui sont de degré λ_a par rapport à a, quel que soit $a \varepsilon A$, contient une infinité d'éléments de G, si G n'est pas abélien, et elle en contient un et un seul, si G est abélien. Chaque classe M qui contient un élément b de G contient la classe entière des éléments de G conjugués à b. Appelons produit de deux classes $M(a, \lambda_a)_{a \varepsilon A}$ et $M(a, \mu_a)_{a \varepsilon A}$ l'ensemble des éléments de G de la forme bc, $b \varepsilon M(a, \lambda_a)_{a \varepsilon A}$, $c \varepsilon M(a, \mu_a)_{a \varepsilon A}$. On a $M(a, \lambda_a)_{a \varepsilon A} \cdot M(a, \mu_a)_{a \varepsilon A} = M(a, \nu_a)_{a \varepsilon A}$, où $\nu_a = \lambda_a + \mu_a$ quel que soit $a \varepsilon A$. Avec cette loi de composition, les classes M forment un groupe abélien Γ^0 associé au groupe G et dont élément neutre est la classe nulle $M(a, 0)_{a \varepsilon A}$. La réunion des classes M qui forment un sous-groupe de Γ^0 est un sous-groupe invariant de G. Toutes les classes M sont d'égale puissance et ces classes ont un caractère intrinsèque, indépendent de la base A qui a servi à les définir.

Quel que soit l'entier $n \geqq 1$, on peut associer au groupe G un groupe abélien Γ^n dont les éléments sont des classes $M^{(n)}(a, \lambda_a)_{a \varepsilon A}$ d'éléments de G dont la loi de composition est analogue à celle des éléments du groupe Γ^0. Quel que soit l'entier $n \geqq 1$ et quels que soient les entiers λ_a de la suite $0, 1, \ldots, n$ — la classe $M^{(n)}(a, \lambda_a)_{a \varepsilon A}$ est formée de tous les éléments de G dont le degré par rapport à a est congru à λ_a modulo n, quel que soit $a \varepsilon A$. Aucune de ces classes n'est vide et chacune d'elles contient avec tout élément b de G la classe entière des éléments de G conjugués à b. Toutes ces classes $M^{(n)}(a, \lambda_a)_{a \varepsilon A}$ sont d'égale puissance et, avec la loi de composition $M^{(n)}(a, \lambda_a)_{a \varepsilon A}\, M^{(n)}(a, \mu_a)_{a \varepsilon A} = M^{(n)}(a, \nu_a)_{a \varepsilon A}$ où $\lambda_a + \mu_a$ (mod n), elles forment un groupe abélien Γ^n associé à G et dont l'élément neutre est la classe nulle $M^{(n)}(a, 0)_{a \varepsilon A}$. On peut ordonner l'ensemble des groupes abéliens $\{\Gamma^0, \Gamma^1, \Gamma^2, \ldots\}$ en convenant que $\Gamma^m \leqq \Gamma^n$ si la classe nulle du groupe Γ^n est un sous-ensemble de celle du groupe Γ^m. L'ensemble des groupes Γ^n muni des deux lois de composition; intersection $\cap$ et union $\cup$ définies comme suit: L'intersection des deux groupes Γ^n et $\Gamma^{n'}$ est le groupe Γ^d et l'union de Γ^n et $\Gamma^{n'}$ est le groupe Γ^m, où d (m) désigne le p. g. c. d. (p. p. c. m.) des deux nombres n et n', $\Gamma^n \cap \Gamma^0 = \Gamma^n$ et $\Gamma^n \cup \Gamma^0 = \Gamma^0$, constitue un treillis distributif, unimodulaire, possèdant un élément nul et un élément universel. L'étude de ce treillis permet de mettre en lumière de nombreuses propriétés du groupe libre G.

Les groupes quasi-libres. Nous appelons quasi-libre un groupe multiplicatif qui peut être engendré par un ensemble A d'éléments générateurs liés par des relations définissantes dont chacune est degré nul par rapport à tout élément de A. Un élément qui fait partié d'une telle base A de G est appelé quasi-libre. Tous les éléments de G ne sont pas quasi-libres. Tout groupe libre est quasi-libre, ne la réciproque n'est pas vraie et il existe une infinité de groupes quasi-libres qui ne sont pas libres. On peut associer à chacun de ces groupes un treillis de groupes abéliens et on peut utiliser ce treillis pour analyser la structure du groupe quasi-libre.

K. Prachar (Wien): *Über die Verteilung der quadratfreien Zahlen.*

Sei k eine natürliche Zahl, $0 \leqq l < k$, $(l, k) = 1$ oder wenigstens (l, k) quadratfrei. Es ist leicht zu beweisen, daß in der arithmetischen Reihe l, $l + k$, $l + 2k, \ldots$ unendlich viele quadratfreie Zahlen vorkommen. Sei q_0 die kleinste unter ihnen. Dann gilt: $q_0 < k^{3/2+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ beliebig), wenn k genügend groß ist. Dies wurde von *P. Erdös* noch etwas verbessert. Außer über diese Ergebnisse wird noch über ähnliche Ergebnisse berichtet, welche die quadratfreien Zahlen der Folge $k + 1^2$, $k + 2^2, \ldots$ betreffen, insbesondere auch über die Größenordnung der Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen dieser Art.

H.-E. Richert (Göttingen): *Ein Problem der multiplikativen Zahlentheorie.*

Es wird der Satz bewiesen:

Für eine Folge komplexer Zahlen a_n, $n = 1, 2, \ldots$ gelte mit einer Konstanten c bei $x \to \infty$

$$\sum_{mn \leqq x} a_m a_n = x \log x + cx + O(x^\alpha),$$

und es sei auch

$$\sum_{n \leqq x} a_n = x + O(x^\alpha).$$

Dann ist $\alpha \geqq 1/4$.

Hieraus erkennt man, daß dieses für $a_n = 1$ (Hardy) wohlbekannte Ergebnis für das Dirichletsche Teilerproblem nicht charakteristisch ist.

Der Beweis benutzt verschiedene Eigenschaften der Mittelwerte Dirichletscher Reihen.

W. Schwarz (Freiburg): *Zur Darstellung einer Zahl als Summe einer k-ten Potenz einer potenzfreien Zahl und einer g-ten-potenzfreien Zahl.*

Estermann zeigte 1931 (Journal of the London Math. Soc. 6), daß sich jede hinreichend große ganze Zahl als Summe einer Primzahl und einer quadratfreien Zahl darstellen läßt. Seine Methode wurde in der Folge mehrfach auf ähnliche Probleme angewandt, unter anderem von *Pillai*, *Sambasiva Rao*, *Evelyn-Linfoot* und *Roth*. Mit seiner Methode beweisen wir:
Sind $k \geqq 1$, $g \geqq 2$, $h \geqq 2$ ganze Zahlen mit $g \geqq k$, so ist jede hinreichend große ganze Zahl als Summe einer g-ten-potenzfreien Zahl und einer k-ten Potenz einer h-ten-potenzfreien Zahl darstellbar. Für die Anzahl der Darstellungen erhält man eine asymptotische Formel.

Der Beweis kommt, abgesehen von der Heranziehung eines Hilfssatzes von *Oppenheim-Rademacher*, mit elementaren Methoden aus.

V. Sedmak (Zagreb): *Sur quelques propriétés des groups.*

Soit un group G, presenté par l'ensemble des permutations P_i. Ordonnons ces permutations d'après une loi. L'ensemble obténu S, est une fonction déterminée de G et L, ainsi que chaque fonction f_i de S (les chaines maximals de S, d_s, D_s etc). En général, divèrs groups G_i, possèdent divèrs propriétés f_i. Spécialement on examine ces fonctions f_i pour les groups des polyèdres réguliérs. On compare aussi les propriétés énoncées, avec les propriétés analogues, en traitant le polyèdre régulier comme le complex polyèdrique.

T. A. Springer (Utrecht): *Die Klassifikation der reduzierten exzeptionellen einfachen Jordanschen Algebren.*

Es sei A eine im Titel genannte Algebra, d. h. eine Algebra von 3×3-Matrizen x mit Elementen in einem Oktavenkörper C (= Cayley-Dicksonsche Algebra ohne Nullteiler), die Hermitisch sind in dem Sinne, daß

$$x' = d\bar{x}d^{-1}.$$

Hier ist x' die transponierte Matrix, der Strich bedeutet Übergang zum Konjugierten in C, d ist eine feste Diagonalmatrix deren Elemente $F \neq 0$ sind und im Zentrum K von C liegen. Die Multiplikation in A ist die Jordansche Multiplikation:

$$xy = \tfrac{1}{2}\,(x \cdot y + y \cdot x),$$

wo $x \cdot y$ das Matrixprodukt bedeutet.

Es gibt auf dem 27dimensionalen Vektorraum A über K eine quadratische Form Q mit

$$Q(x) = \tfrac{1}{2}\,s\,(x^2),$$

wo s die Spur ist.

Die Klassifikation dieser Algebren wird durch folgenden Satz gegeben: *Zwei solche Algebren A und A' mit demselben C sind dann und nur dann isomorph, wenn die zugehörigen quadratischen Formen Q und Q′ equivalent sind.*

Eine ausführliche Behandlung erscheint demnächst in Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam.

J. Szép (Szeged): *Über die minimalen Quasinormalteiler.*

Der Begriff des Quasinormalteilers ist von *O. Ore* eingeführt. *Ore* nennt eine Untergruppe Q der Gruppe G Quasinormalteiler, wenn Q mit jeder Untergruppe von G vertauschbar ist (nicht elementenweise, sondern im Ganzen). In Verbindung mit dem Quasinormalteiler sind schon viele Ergebnisse bekannt, z. B. die Gruppen, deren sämtliche Untergruppe Quasinormalteiler sind, sind wohlbekannt *(Iwasawa)*. *Ore* hat bewiesen, daß jeder maximale Quasinormalteiler gleichzeitig ein Normalteiler in der gegebenen Gruppe ist. Von den minimalen Quasinormalteilern wissen wir aber wenig. Die Probleme, ebenso die Lösungen sind in diesem Fall wesentlich tiefer und zusammengesetzter als im Fall der maximalen Quasinormalteiler. Das Ziel dieses Vortrags ist einige Ergebnisse von den minimalen Quasinormalteilern im Fall von endlichen Gruppen bekanntzumachen.

Man nennt einen Quasinormalteiler Q von der Gruppe G minimal, wenn es keinen anderen Quasinormalteiler Q′ mit $Q' \subset Q$ in G gibt.

Ein Hauptergebnis ist: Ist die Gruppe Q mit Ordnung $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ ein minimaler Quasinormalteiler (aber nicht ein Normalteiler) in der Gruppe G mit Ordnung $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ ($\beta_i \leqq \alpha_i$; $n > 1$), so gelten

1. $\beta_i < \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$),
2. wenigstens ein von den β_i gleich 0.

Olga Taussky Todd (Pasadena, California): *Commutators of finite matrices.*

Ein kurzer Bericht über neue Ergebnisse bez. additiver und multiplikativer Kommutatoren, insbesondere über höhere Kommutatoren von A und A*, über Kommutatoren unitärer Matrizen, und über die Charakterisierung von Kommutatoren.

John Todd (Pasadena, California): *The condition of integral equations.*

Condition-numbers for the matrices arising by discretizing various differential equations have been determined and their relevance for the numerical solution of the equations has been studied. A similar investigation, both theoretical and experimental is being carried out for certain integral equations, in particular that of *Lichtenstein* and *Gerschgorin*, which arises in the theory of conformal mapping.

P. Turán (Budapest): *Über einige neuere einseitige Sätze der Theorie der diophantischen Approximationen mit Anwendungen auf die Primzahltheorie.*

Der Vortragende hat seit einigen Jahren als sinngemäße Weiterführung klassischer Sätze der Theorie der diophantischen Approximationen verschiedene Abschätzungen verallgemeinerter Potenzsummen komplexer Zahlen untersucht und diese auf verschiedenste Fragen der Analysis und der Zahlentheorie angewandt. In diesem Vortrag wird über neuartige solche Abschätzungen, die einen einseitigen Charakter haben, referiert und Anwendungen auf die Frage des Zeichenwechsels des Restgliedes des Primzahlsatzes und auf den Vergleich der Anzahlen der Primzahlen von zwei arithmetischen Progressionen mod Δ skizziert.

SEKTION II:

Analysis

H. A. Antosiewicz (Los Angeles): *On the existence of Lyapunov functions.*

The stability and instability of a particular solution of a system of first order ordinary differential equations is known to be equivalent to the existence of a real valued function with certain properties relative to the given system. It is shown that functions with all but one of these properties always exist, even when the particular solution is neither stable nor unstable. The proof rests on topological methods which make use of the existence of suitable sections in the flow determined by the trajectories of the system.

I. Babuška (Prag): *Über Stabilitätsprobleme der Lösung von elliptischen Differentialgleichungen mit Rücksicht auf die Veränderung des Definitionsgebietes.*

Eine der grundlegenden Eigenschaften der Lösung von partiellen Differentialgleichungen ist die stetige Abhängigkeit vom Definitionsgebiet. Es werden stabile und nicht stabile Gebiete für allgemeine elliptische Gleichungen und die Dirichletsche und Neumannsche Aufgabe behandelt werden. Es wird weiter der Zusammenhang mit der Approximationstheorie gezeigt, der z. B. in der Frage beruht, wann eine harmonische quadratisch integrierbare Funktion durch harmonische Polynome in L_2 approximiert werden kann. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist die Stabilität des Definitionsgebietes mit Rücksicht auf das Biharmonische Problem. Es wird auch der Zusammenhang der Eigenwerte und Eigenfunktionen mit dem Definitionsgebiet gezeigt werden.

H. Bauer (Hamburg): *Zur Axiomatik des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen.*

Es wird eine Axiomatik des Dirichletschen Problems in gewissen lokal-kompakten Räumen entwickelt, welche eine gemeinsame Behandlung der Randwertaufgabe für elliptische und parabolische Differentialgleichungen in euklidischen und lokal-euklidischen Räumen nach der Methode von Perron-

Wiener gestattet. Die Theorie hat einen einfacheren Ausgangspunkt als die bereits vorliegende Axiomatik von J. L. Doob (Proc. third Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., 1954—1955, p. 49—80) und gestattet weitergehende Resultate. Gleichzeitig werden hierdurch Untersuchungen von M. Brelot über den elliptischen Fall (Séminaire de théorie du potentiel, 1[re] et 2[e] année, Institut H. Poincaré, Paris, 1958/1959) weitergeführt.

St. Bergman (Stanford University): *On Power Series Yielding Schlicht Mappings in the Space of Two Complex Variables.*

The author considers schlicht mappings of a Reinhardt circular domain C into a domain B. Let

$$\zeta_k = \overset{(k)}{a}_{10} z_1 + \overset{(k)}{a}_{01} z_2 + \overset{(k)}{a}_{20} z_1^2 + \overset{(k)}{a}_{11} z_1 z_2 + \overset{(k)}{a}_{02} z_2^2 + \dots,$$

$k = 1,2$, be the function elements of the pair mapping B into C. Here $|\overset{(1)}{a}_{10}\overset{(2)}{a}_{01} - \overset{(1)}{a}_{01}\overset{(2)}{a}_{10}| = 1$. Further, we assume that B omits two segments of analytic hypersurfaces $z_k = h_k(z_{3-k}) + d_k$, $2k_k \leqq d_k \leqq 2k_k + p_k$, $h_k(0) = 0$ (Hypothesis A), and that the functions h_k are chosen in such a way that $v_k = z_k - h_k(z_{3-k})$ is schlicht in B. Generalizing the considerations of the papers in Math. Zeitschrift, vol. 29 (1929) and Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 162, Heft 4 (1930) it is shown that there are certain Hermitian forms $H_\gamma(X; \overset{(k)}{a}_{mn}, \overset{-(k)}{a}_{mn})$, $X = (X_{00}, \dots, X_{m\gamma n\gamma})$, determined. Bounds $H_\gamma(X; \overset{(k)}{a}_{mn}, \overset{-(k)}{a}_{mn}) \leqq C_\gamma(X, k_k, p_k)$ are derived for the H_γ. The functions C_γ in addition to X depend on k_k, p_k, but are independent of $\overset{(k)}{a}_{mn}$ and their conjugates. Since $C_\gamma(X, k_k, p_k) - H_\gamma(X; \overset{(k)}{a}_{mn}, \overset{-(k)}{a}_{mn})$ is a non negative Hermitian form one obtains for the coefficients $\overset{(k)}{a}_{mn}$ and their conjugate inequalities of Grunsky's type. Finally, it is shown that the Hypothesis A can be replaced by a weaker one.

E. Berz (Gießen): *Transformation der linearen Differentialgleichung in einem Schiefkörper.*

Die lineare Differentialgleichung $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = f(t)$, deren $a_i(t)$ und $f(t)$ in einer Umgebung von $t = 0$ analytisch sind, wird durch eine Transformation $\mathfrak{T}$ gelöst, die die Klasse der in $|t| < \delta$, $|\tau| < \delta$ analytischen Funktionen $F(t, \tau)$ in einen Schiefkörper SK abbildet. Die Differentialgleichung geht dabei in eine algebraische Gleichung $ax = b$ in bezug auf SK über, deren b von den Anfangsbedingungen abhängt. Zu der Lösung $x = a^{-1}b$ im Schiefkörper SK gibt es eine Urfunktion, und diese ist die Lösung der Differentialgleichung mit den vorgegebenen Anfangswerten.

I. Bihari (Budapest): *Über die periodischen Lösungen gewisser gewöhnlicher periodischer Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.*

In einem älteren Werk hat der Verfasser für die Gleichung $y'' + \varphi(x) f(y) h(y') = 0$ — im Falle von monotonen (zunehmenden) $\varphi(x)$, beschränkten, zunehmenden, ungeraden $f(y)$ und für $u \geqq 0$ abnehmenden, positiven, geraden $h(u)$ — die Existenz oszillierender Lösungen mit abnehmenden Amplituden bewiesen. Unter gewissen ergänzenden Bedingungen gilt die Abnahme der Länge der Viertelwellen und der Flächeninhalte derselben. (S. „Oscillation and monotonity theorems...", Acta Math. Hung. 9 (1958) S. 83—104.) Neuerdings gelang es für positive, nach T *periodische*, aus monotonen symmetrischen Halbwellen bestehende $\varphi(x)$ das folgende neue Ergebnis nachzuweisen:

Ist $p(\eta, c)$ die Periode der period. Lösung der obigen Gleichung, die zu den Anfangsbedingungen $y(0) = \eta$, $y'(0) = 0$ und $\varphi(x) = c = \text{const} > 0$ gehört (was auch explicite angegeben werden kann), dann stellt die Bedingung $n\, p\,(0, k) \leqq 2\,T \leqq n\, p\,(\infty, K)$ $[k = \min \varphi(x), K = \max \varphi(x)]$ bei $n = 1$ die Existenz einer aus zwei Halbwellen bestehenden Lösung der Periode $2\,T$ sicher. Für $n = n_0 > 1$ existieren alle die periodischen Lösungen, die schon für $n < n_0$ existieren, aber auch eine Lösung mit $2n_0$ Halbwellen und der Periode $2\,T$, bzw. eine Lösung mit n_0 Halbwellen und der Periode T, je nachdem n_0 ungerade bzw. gerade ist.

Die obige Bedingung geht in einzelnen Fällen in eine einfachere Form über. Sind z. B. $f(y) = y$, $h(u) = \dfrac{1}{1 + \varepsilon^2 u^2}$, so wird sie die Form $kT^2 \geqq n^2 \pi^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ haben. Der Grenzdurchgang $\varepsilon \to 0$ läßt sich hier nicht durchführen (führt im allgemeinen zu keiner periodischen Lösung), doch gilt der auf lineare Gleichungen bezügliche Satz wie folgt: In der Gleichung $y'' + (\alpha + \beta\, \varphi\,(x))\, y = 0$ können die Zahlen α und β in der Weise gewählt werden, daß die obengenannten periodischen Lösungen auch hier existieren.

Sind $f(\lambda\, u, \lambda\, v) = \lambda\, f\,(u, v)$, $sg\, f\,(u, v) = sg\, u$ gültig, dann kann der letztere Satz auch auf die Gleichung $y'' + (\alpha + \beta\, \varphi(x))\, f(y, y') = 0$ ausgedehnt werden. Die Gleichung $y'' + \varphi(x)\, f(y, y') = 0$ wurde mit Rücksicht auf oszillierende Lösungen in einem früheren Aufsatz des Verfassers untersucht.

M. Brelot (Paris): *Über die Beziehungen zwischen den Prinzipien der allgemeinen Potentialtheorie.*

Es sei Ω ein kompakter Raum mit einer abzählbaren Basis von offenen Mengen. Für eine Kernfunktion $G\,(x, y)$ (unterhalbstetig $\geqq 0$) ist das Potential $G\mu\,(x)$ eines Radonschen Maßes $\mu \geqq 0$ auf Ω gleich $\int G\,(x, y)\, d\mu\,(y)$.

Die G-Kapazität einer kompakten Menge K ist gleich $\sup \mu\,(\Omega)$ für alle μ mit $\mu\,(\Omega - K) = 0$, $G \leqq 1$.

Weitere Voraussetzungen auf G:

1) G ist stetig auf $\Omega \times \Omega$, endlich, falls $x \neq y$;
2) G und $G^*\,(x, y) = G\,(y, x)$ sind regulär im Sinne von Choquet;
3) es gilt das Prinzip der unteren Enveloppe:

$$\inf\,(G\mu_1, G\mu_2) = G\mu_3\ ;$$

4) es existiert ein $G^*\mu_0$, das > 0 und beschränkt ist.

Nun sei μ und irgendeine Menge $\alpha \subset \Omega$ gegeben. Unter allen G-Potentialfunktionen u gibt es eine Funktion u, die a) die kleinste ist; b) die folgenden Eigenschaften besitzt: $u \leqq G\mu$ überall, $u = G\mu$ auf α "$G^* — q\,.\,u$", das soll heißen, auf α bis auf eine Menge von der äußeren G-Kapazität Null.

u ist das Potential eines einzigen μ' (man sagt, u werde durch Balayage erzeugt), falls das folgende Prinzip gültig ist: c) $G\mu_1 = G\mu_2$, $G^* — q\,.\,u \to$ $\to \mu_1 = \mu_2$.

Mit dieser Voraussetzung kann man beweisen, daß $\mu'\,(C\bar{\alpha}) = 0$, falls diese Eigenschaft in den folgenden besonderen Fällen gültig ist:

ω_i sei eine Basis von offenen Mengen; für jedes μ mit kompaktem Träger in ω_i soll das $C\,\omega_i$ entsprechende μ' die Beziehung: $\mu'\,(\omega_i) = 0$ erfüllen. (Man kann diese Voraussetzung durch irgendeine Partialbalayage abschwächen, die ohne a) und c) definiert ist.)

H. J. Bremermann (Berkeley): *Analytische Fortsetzung und Multiplikation von Schwartzschen Distributionen.*

Es wird gezeigt, daß sich einer Klasse von Schwartzschen Distributionen auf der reellen Achse jeweils ein Paar von Funktionen zuordnen läßt, holomorph in der oberen bzw. unteren komplexen Halbebene, so daß der „Sprung" der beiden Funktionen an der reellen Achse die Distribution repräsentiert. Manche Operationen mit Distributionen lassen sich auf Operationen mit den Funktionen zurückführen, was besonders beim Konvolutionsprodukt und bei Fouriertransformationen interessant ist. Entsprechende Resultate gelten für mehrere Veränderliche. Mit Hilfe der Fortsetzungen lassen sich verschiedene Arten von Multiplikationen erklären, wovon besonders eine für die Quantenfeldtheorie wichtig ist.

M. Breuer (Bonn): *Charakteristikentheorie von Differentialformen und Anwendungen.*

Es wird ein allgemeiner Satz aus der Charakteristikentheorie von Differentialformen besprochen, der im Spezialfall einer geschlossenen Differentialform 2. Grades eine Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems für partielle Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung liefert und ferner auf das

Pfaffsche Problem sowie auf das Multiplikatorproblem erfolgreich angewendet werden kann. Dieser Satz kann als der Hauptsatz der Charakteristikentheorie von Differentialformen angesehen werden.

Das charakteristische Vektorraumfeld einer Differentialform a wird, anders als bei *E. Cartan*, i. w. als die Menge aller Tangentialfelder definiert, die durch Überschiebung mit a annulliert werden. Ist das charakteristische Vektorraumfeld von a integrabel, so heißen deren Integralmannigfaltigkeiten die Charakteristiken von a. Nehmen wir an, daß die Charakteristiken von a existieren und daß der mit der Quotiententopologie versehene Raum aller Charakteristiken von a so zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit V^* gemacht werden kann, daß die kanonische Abbildung $k : V \to V^*$ differenzierbar ist! Dann ist es naheliegend, danach zu fragen, ob auf V^* eine Differentialform a^* existiert, welche der Bedingung

$$a = k^* a^* \tag{1}$$

genügt, wobei k^* die der Abbildung k zugeordnete Abbildung bezeichnet, die jeder Differentialform auf V^* in kanonischer Weise eine Differentialform auf V zuordnet. Der Hauptsatz der Charakteristikentheorie gibt eine Antwort auf diese Frage. Sie lautet: Auf V^* existiert dann und nur dann eine der Bedingung (1) genügende Differentialform a^*, wenn das charakteristische Vektorraumfeld von a in dem charakteristischen Vektorraumfeld der Cartanschen Ableitung $d\,a$ von a enthalten ist. Existiert eine der Bedingung (1) genügende Differentialform a^*, so ist a^* trivialerweise eindeutig bestimmt, und das charakteristische Vektorraumfeld von a^* ist das Nullvektorraumfeld. Die Analogie zur Methode der Restklassenbildung in der Algebra ist evident. Zur Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems für die Differentialform a hat man nur zu untersuchen, wie sich die Integralmannigfaltigkeiten von a bei der Abbildung k verhalten. Für diese Untersuchungen benötigt man nur noch einfache Hilfsmittel der multilinearen Algebra und der Topologie, insbesondere sind keine zusätzlichen Integrationen mehr erforderlich.

F. J. Bureau (Liège): *Un théorème Taubérien.*

En étudiant la représentation asymptotique de la fonction spectrale des opérateurs elliptiques auto-adjoints du second ordre à coefficients variables, nous avons été conduits au *théorème* I Taubérien: Si n et p sont des entiers positifs tels que $0 < p < 2n$, si $f(t) \geqq 0$, $t \varepsilon (0, \infty)$ est intégrable au sens de Lebesgue dans tout intervalle fini et si

$$T^{-p} \int_0^T f(t)\, dt < M \quad \text{pour } T > 0, \tag{1}$$

M independent de T; alors,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{p-2n} \int_0^\infty f(t)\, t^{-2n} \sin^{2n} \varepsilon\, t\, dt = Ap \int_0^\infty t^{-2n-1+p} \sin^{2n} t\, dt \tag{2}$$

(A constant), implique

$$\lim_{T \to \infty} T^{-p} \int_0^\infty f(t)\, dt = A. \tag{3}$$

Ce théorème a été démontré par *N. Wiener* pour $n = p = 1$. Il est une réciproque partielle du *théorème* II: Si (1) a lieu, alors, (3) implique (2).

Ce théorème II dû pour $n = p = 1$, *à Bochner* et *Hardy*, peut être déduit du *théorème* III plus général: Si $f(t)$ vérifie (1) et si $p > 0$; si $K(t)$ est dérivable dans $(0, \infty)$ et tel que

(i) $t^{p-1}K(t)$ est intégrable au sense de Lebesgue dans $[0, \infty]$,

(ii) $t^p K'(t)$ est intégrable au sense de Lebesgue dans tout intervalle fini,

(iii) $| t^{2p} K(t) | \leqq N$, $1 \leqq t < \infty$, N constant;

alors, (3) implique

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{p-1} \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) K(t)\, dt = Ap \int_0^\infty t^{p-1} K(t)\, dt.$$

La démonstration du théorème I peut être déduite du théorème Taubérien général de *N. Wiener* et se ramène au *théorème* IV: La fonction

$$K_{n,\,p}\,(it) = \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h\, C_{2n}^h\, (n-h)^{p-1-it}$$

t réel, s'annule au plus en $t = 0$.

On peut démontrer le théorème IV pour diverses valeurs de n et de $p : n = 2$, $p \neq 3$; $n = 3$, $p = 2, 3, 4, 5, 6$; $n = 4$, $p = 3, 4, 5, 6, 7$ en utilisant fait que lg 2 : lg 3 est irrationnel.

P. L. Butzer (Aachen): *Fourier-Transformationsmethoden in der Approximationstheorie.*

Anwendungen der Integraltransformationen auf Rand- und Anfangswertprobleme der mathematischen Physik, insbesondere die Anwendung der Fourier-Transformation, haben sich als sehr wertvoll erwiesen. Das Ziel hier ist zu zeigen, daß solche Fourier-Transformationsmethoden für viele Probleme der Approximationstheorie anwendbar sind. Außerdem lassen sich die Probleme völlig einheitlich behandeln, was bisher in dieser Theorie nicht der Fall war. So werden z. B. direkte Sätze vom Jackson-Typ sowie Umkehrsätze vom Bernstein-Typ in dieser Weise betrachtet. Manche bisher ungelöste Probleme aus der Theorie der Saturation sowie Sätze von *Titchmarsh*, *Hardy* und *Littlewood* werden gelöst. Einige Probleme dieser Art wurden bisher mittels Methoden der Halbgruppentheorie von *Butzer* (Math. Annalen, *133*, 410—425 [1957]) betrachtet. Diese letztere Theorie ist besonders geeignet in den Fällen, wo die gegebenen Funktionen f einem reflexiven Banach-Raum angehören und die approximierenden singulären Integrale Halbgruppenoperatoren sind. Sonst jedoch, falls f zu $L_1(-\infty, \infty)$ gehört, ist die Fourier-Methode vorteilhafter. Sie wurde von *Butzer* (C. R. Acad. Sciences Paris *249*, 2467—2469 [1959], und Arch. rat. Mech. Analysis [1960] [im Druck]) betrachtet. Ist die Funktion f periodisch und $f \varepsilon L_1(-\pi, \pi)$, so nehmen die Fourier-Koeffizienten die Rolle der Fourier-Transformation an.

R. Dolinsky (Grevenbroich): *Ein Kriterium für ganze Funktionen.*

$\sum\limits_{k=o}^{\infty} a_k z^k$ sei eine formal gebildete Potenzreihe. $P_n(z) = \sum\limits_{k=o}^{n} a_k z^k$ ihre Abschnitte.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe eine ganze Funktion darstellt, ist, daß es zu jedem $r > 0$ ein z_0 ($|z_0| = r$) gibt, so daß in einer Umgebung von z_0 keine Nullstellen der $P_n(z)$ liegen.

Zum Beweis werden die Sätze von *Montel* benutzt.

W. Eichhorn (Würzburg): *„Reguläre" hyperkomplexe Funktionen.*

Verallgemeinert man die klassische Funktionentheorie zu einer Funktionentheorie in hyperkomplexen Systemen über dem reellen Zahlkörper P, so geht dabei viel von der Schönheit und Geschlossenheit verloren, welche die klassische Theorie auszeichnet. Das liegt nicht so sehr an den in Algebren über P i. a. auftretenden Nullteilern; denn deren „Gefährlichkeit" ist mit der Angabe ihres geometrischen Ortes im „Zahlenraum" der jeweils betrachteten Algebra behoben — ganz zu schweigen davon, daß etwa zur Erklärung der Differenzierbarkeit einer hyperkomplexen Funktion Quotienten nicht erforderlich sind. Der Hauptgrund für den Verlust an Geschlossenheit gegenüber der klassischen Funktionentheorie ist vielmehr darin zu sehen, daß sich der klassische Begriff der regulär-analytischen Funktion in im wesentlichen drei Definitionen aufspaltet, die in speziellen Algebren nicht mehr äquivalent sind. Diese drei Definitionen gehen zurück auf

Scheffers: $w = w(z)$ soll richtungsunabhängig differenzierbar sein,

Fueter: Es soll der Satz von *Morera*, aufgefaßt als Definition, gelten, d. h. es sollen Integralsätze über Hyperflächen im n-dimensionalen Zahlenraum existieren,

Hausdorff: Das Differential dw, dessen Existenz vorausgesetzt wird, soll eine lineare Funktion des Differentials dz sein.

In einer vergleichenden Analyse der eben genannten drei Definitionen wird u. a. gezeigt:

1. Das bemerkenswerte Ergebnis von *Adolf Kriszten* (Comm. Math. Helv. 26 (1952), 6—35), wonach die Regularitätsdefinitionen von *Scheffers* und *Fueter* nur in der klassischen Funktionentheorie (und sonst über keiner Algebra mit der Basis e^0 = Einheit, $e^1, \ldots, e^{n-1}$) äquivalent sind, trifft wörtlich auch beim Vergleich der Klasse der Fueter-regulären mit der der Hausdorff-regulären Funktionen zu;

2. Die Regularitätsdefinitionen von *Scheffers* und *Hausdorff* sind über allen kommutativen Algebren — und nur über diesen — äquivalent.

R. Faure (Dakar): *Solutions périodiques des systèmes d'équations différentielles a coefficients périodiques.*

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda f_i(x_k, t), \qquad i, k = 1, \ldots, n$$
$$f_i(x_k, t), = f_i(x_k, t + T)$$

1⁰ Lorsque λ tend vers zéro.

2⁰ Lorsque λ augmente indéfiniment.

3⁰ λ fini.

On étudie les solutions périodiques lorsques $\lambda \to 0$ en particulier: *le cas ou 1⁰ $p \leqq n$ équations de synchronisation de Haag Minorsky (E)*

$$\int_0^T f_i(x_k, t)\, dt = 0$$

ou les x_k sont des constantes avec $i = 1, \ldots, p$, $k = 1, \ldots, n$ sont identiquement vérifiées (dégénérescence).

Tous les points de la variété Vp ne sont pas des points de synchronisation. On donne les équations remplaçant les p premières équations de synchronisation et on fait l'étude de la stabilité.

Application diverses des systèmes précédents:
cas des fréquences augmentant indéfiniment (Phénomène Bethenod).

2⁰ Etude du cas $\lambda \to \infty$.

On montre à l'aide d'une récurrence dans l'espace de Banach des séries trigonométriques absolument convergentes, *l'existence de solution périodique du système*

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda f_i(x_k, t)$$

Tendant vers les solutions de $f_i(x_k, t) = 0$ pourvu que certaines conditions soient vérifiées. (Etude diverse de systèmes comme application).

3⁰ Lorsque λ ne tend ni vers zéro, ni vers l'infini on peut conclure *pour les solutions de*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_k, t)$$

voisines des positions d'équilibre
on peut appliquer cette étude au cas du Phénomène Bethenod et des équations différentielles d'ordre supérieur.

G. Fichera (Rom): *Equazioni lineari ellittiche di ordine superiore in due variabili ed equazioni integrali singolari.*

Sia $E \equiv D^p a_{pq} D^q$ ($|p|, |q| \leqq m$) un operatore differenziale lineare, nelle due variabili reali x e y, di ordine $2m$ ed a coefficienti reali definiti in tutto il piano. Sia per $|p| + |q| = 2m$, $a_{pq} \varepsilon C^{2m+\lambda}$ (cioè a_{pq} continua con tutte le derivate di ordine $\leqq 2m$ e con le derivate di ordine $2m$ uniformemente hölderiane in ogni compatto). Per $|p|+|q| \leqq 2m$ sia $a_{pq} \varepsilon C^{\max(|p|,|q|)+\lambda}$. L'operatore E sia ellittico positivo in ogni punto del piano. Sia A un campo limitato avente per frontiera una singola curva di Jordan di classe $C^{1+\mu}$. Si considera il seguente problema al contorno: determinare una funzione di classe $2m$ in A e d i c l a s s e m i n $\overline{A}$, soluzione dell'equazione differenziale $E(u) = f$ in A e verificante le condizioni al contorno $D^p u = \psi^p$ $(0 \leqq |p| \leqq m-1)$. La f è supposta hölderiana in $\overline{A}$ e le ψ^p, oltre che verificanti ovvie condizioni di compatibilità, appartenenti a $C^{1+\mu}$ come funzioni dell'arco s su ∂A. Si suppone che sia in $\overline{A}: (-1)^m a_{(00),(00)} > \overline{a} > 0$ con a costante opportuna. Detto T un campo circolare contenente $\overline{A}$ si dimostra l'esistenza di una funzione (soluzione fondamentale principale) $F(z, \zeta)$ definita per $z, \zeta \varepsilon T$ $(z \neq \zeta)$ soluzione fondamentale relativa all'operatore E come funzione di $z = x + iy$ e relativa all'operatore aggiunto E^* come funzione di $\zeta = \xi + i\eta$. Inoltre riesce $D_z^p F(z, \zeta) = 0$ $(0 \leqq |p| \leqq m-1$, $z \varepsilon \partial A, \zeta \varepsilon A)$, $D_\zeta^p F(z, \zeta) = 0$ $(0 \leqq |p| \leqq m-1, \zeta \varepsilon \partial A, z \varepsilon A)$.

Per ottenere tale F si modifica opportunamente la definizione dei coefficienti a_{pq} in punti esterni ad A. Ottenuta la F, si può assumere $f \equiv 0$ senza ledere la generalità del problema. Successivamente si considera la soluzione in A dell'equazione $E(u) = 0$ data da $v(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \int \varphi_k(\zeta) F_{\xi^{m-1-k}\eta^k}(z, \zeta)\, ds_\zeta$ con le $\psi_k \varepsilon C^\mu$. Imponendo le condizioni al contorno $\partial/\partial s\, D^p v = \partial/\partial s\, \psi^p$ $(|p| = m-1)$ si ottiene un sistema di equazioni integrali singolari per le φ_k, che si dimostra essere di tipo regolare e ad indice nullo. Dopo aver discusso e caratterizzato le autosoluzioni del sistema omogeneo associato al sistema integrale singolare, si perviene al teorema di esistenza (e unicità) per il problema posto. Successivamente si studia il problema $E(u) + \lambda u = f$ in A, $D^p u = \psi^p$ $(0 \leqq |p| \leqq m-1)$ *su* ∂A e si dimostra il teorema dell'alternativa.

E. G o t t s c h l i n g (Berlin-Zehlendorf): *Über die Fixpunkte der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades.*

Die Modulgruppe n-ten Grades kann als Abbildungsgruppe einer verallgemeinerten oberen Halbebene H aufgefaßt werden (vgl.: C. L. *Siegel:* Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann. **116**, und Symplectic Geometry, Amer. J. Math. **65**). Es wird für n = 2 eine vollständige Übersicht über diejenigen Punkte von H gegeben, die bei einer Modulsubstitution festbleiben. Ferner wird zu einem beliebig vorgegebenem Punkt aus H die Gruppe derjenigen Modulsubstitutionen untersucht, die den Punkt festlassen.

K. H a b e t h a (Berlin-Charlottenburg): *Konvexitätsfragen bei Mittelwerten von Lösungen elliptischer Differentialgleichungen.*

In Verallgemeinerung von ähnlichen Untersuchungen bei der Differentialgleichung $\Delta u = cu$ werden für Lösungen von $\Delta u + A_1 u_x + A_2 u_y = C u$ Mittelwerte $\mu_k(r)$ von $(u^+)^k$ auf den in der rechten Halbebene liegenden Halbkreisen vom Radius r um den Nullpunkt betrachtet. Ist u auf der y-Achse nicht positiv, so lassen sich mit einer von *T. Carleman* und *A. Dinghas* entwickelten Methode Sätze vom Phragmén-Lindelöf-Typus beweisen. Dazu sind gewisse Forderungen an die Koeffizienten der obigen Gleichung zu stellen, wobei sowohl negative Werte von C als auch singuläre A_1 erfaßt werden können $(A_1 = q/x,\ A_2 = 0)$. Dann ist z. B. $\mu_k(r)$ eine konvexe Funktion von r, während $m_k = \mu_k^{1/k}$ eine konvexe Funktion einer Variablen $s(r)$ ist, in welche die Koeffizienten A_1 und A_2 eingehen. Das Wachstumsverhalten von $s(r)$ entspricht dem Hadamardschen Dreikreisesatz. Verallgemeinerungen dieser Ergebnisse auf n Variable sind möglich. Schließlich wird auf Verbindungen zum Maximumprinzip sowie auf verwandte Folgerungen aus letzterem hingewiesen.

E. H a r z h e i m (Köln): *Über ausrichtungsgleiche Kerne in Mengen mit mehreren Totalordnungen.*

Hat man in einer Menge M eine Menge T von Totalordnungen vorgegeben, so nennen wir eine Teilmenge $M' \leqq M$ einen ausrichtungsgleichen Kern (bezüglich T), wenn je zwei Totalordnungen aus T in der Menge M' übereinstimmen oder zueinander dual sind (— die eine die Inverse der anderen —).

Es ergibt sich dann durch Ausdehnung eines Beweisverfahrens von *Urysohn* (Fund. Math. 5 [1923]: Un théorème sur la puissance des ensembles ordonnés) der Satz:

> Ist M eine Menge mit der Mächtigkeit $|M| > 2^{\mathfrak{a}_\mu}$ sowie T eine Menge von Totalordnungen von M mit $2^{|T|} < \mathfrak{a}_{\mu+1}$, so existiert ein ausrichtungsgleicher Kern der Mächtigkeit $\mathfrak{a}_{\mu+1}$. ($\mathfrak{a}$ = Alef.)

Nimmt man die Kontinuumhypothese ($2^{\mathfrak{a}_\nu} = \mathfrak{a}_{\nu+1}$ für jedes ν) als gültig an, so lassen sich Beispiele angeben, die zeigen, daß dieser Satz nicht verbessert werden kann, weder im Hinblick auf die Mächtigkeit von T noch auf die des Kerns.

Es interessiert dann eine Reihe von Sonderfällen, z. B. der, daß die Ordnungen aus T aus einer einzigen Ordnung aus T durch Permutationen von M entstehen.

G. H e l m b e r g (Mainz): *Zur Definition der Gleichverteilung.*

Es seien X_1 und X_2 beliebige Mengen und $\{X_\tau : \tau \varepsilon T\}$ ein Netz von Untermengen von X_2. Es sei $\mathfrak{M}_1$ ein (mittels der sup-Norm) normierter linearer Raum beschränkter komplexwertiger Funktionen auf X_1 und φ_1 ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathfrak{M}_1$. Analog seien für alle $\tau \varepsilon T$, $\mathfrak{M}_\tau$ und φ_τ für X_τ definiert. Die Funktionale φ_τ seien gleichgradig beschränkt

($\|\varphi_\tau\| \leqq \chi$ für alle $\tau \in T$). Ein Netz $\{\varphi_\tau : \tau \in T\}$ von Abbildungen von X_τ in X_1 heiße eine asymptotische ($\mathfrak{M}_1$, φ_1; $\mathfrak{M}_\tau$, φ_τ)-Gleichverteilung von X_2 in X_1, wenn für alle $f \in \mathfrak{M}_1$ $f o \varphi_\tau \in \mathfrak{M}_\tau$ (für alle $\tau \in T$) und das Netz $\{\varphi_\tau(f o \varphi_\tau) : \tau \in T\}$ gegen φ_1 (f) konvergiert. Diese Definition erlaubt 1. die Gleichverteilungs-Definitionen von *Weyl, van der Corput, Eckmann, Hlawka, Kuipers* und *Meulenbeld* als Spezialfälle einer einzigen Definition aufzufassen, 2. die Anwendung des entsprechend formulierten Weylschen Kriteriums, 3. die Betrachtung verschiedener maßtheoretischer und funktionalanalytischer Sätze unter dem Gesichtspunkt der Gleichverteilung und 4. eine Erweiterung und Verschärfung von Gleichverteilungssätzen von *Maak* und vom Verfasser.

L. Ilieff (Sofia): *Singularitäten an der Peripherie des Konvergenzkreises einer Potenzreihe.*

Es werden einige neue Sätze über die analytische Nichtfortsetzbarkeit verschiedener Klassen von Potenzreihen, sowie manche Ergebnisse über die Konvergenz von Abschnittsfolgen auf der Peripherie des Konvergenzkreises solcher Reihen festgestellt.

J. Jaenicke (Berlin-Charlottenburg): *Eine Beziehung zwischen Lösungen adjungierter Randwertprobleme bei elliptischen Differentialgleichungssystemen.*

Es wird das folgende Randwertproblem A betrachtet: Gesucht ist eine Lösung u, v des Systems

$$u_x - v_y = au + bv + c,$$
$$u_y + v_x = \bar{a}u + \bar{b}v + \bar{c},$$

die die Randbedingung $\alpha u + \beta v = f(s)$ erfüllt. In den Existenzsätzen von *W. Haack* bzw. *I. N. Vekua* ist ein hierzu adjungiertes Randwertproblem A_h^* von Bedeutung. So benötigt man die explizite Kenntnis der Lösungen von A_h^* zur Entscheidung der Frage, ob das gegebene inhomogene Problem eine stetige Lösung besitzt, wenn die Vektorschar $\{\beta, \alpha\}$ eine positive Charakteristik hat. Da die Bestimmung der Lösungen dieser Probleme im allgemeinen nicht mit elementaren Methoden möglich ist, interessiert die folgende Frage: Besteht zwischen den Lösungen der zueinander adjungierten Probleme (es ist nämlich A_h^{**} wieder A_h, wobei A_h das zu A gehörige homogene Problem ist: $c = \bar{c} = 0$; $f(s) = 0$) ein Zusammenhang, der es ermöglicht, die Lösung des anderen Problems durch elementare Operationen aus der zuerst bestimmten Lösung zu ermitteln? Eine solche Relation läßt sich aus demselben Integralsatz ableiten, durch den das adjungierte Randwertproblem definiert wurde. Sie besagt, daß die beiden gesuchten Lösungsfunktionen linear abhängig sind von zwei Funktionen, die in sehr einfacher Weise aus den Lösungen des hierzu adjungierten Problems berechenbar sind. Damit läßt sich die Lösung elementar durch Quadraturen bestimmen, indem man im System eine der gesuchten Lösungsfunktionen mittels dieser linearen Relation eliminiert.

L. Koschmieder (Tübingen): *Ein Abschnitt aus dem Gebiete der besonderen Funktionen.*

Der Vortragende berichtet über die Geschichte der Turánschen und verwandter Ungleichungen im letzten Jahrzehnt.

L. Kuipers (Delft): *Generalisierte Legendresche Funktionen.*

Wir betrachten eine Verallgemeinerung der Heineschen Formel in der Theorie der Legendreschen Funktionen.

In 1851 bewies Heine eine Reihenentwicklung von $(t - z)^{-1}$ nach Produkten der Legendreschen Funktionen:

$$\frac{1}{t - z} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)\, P_n(z)\, Q_n(t). \tag{1}$$

Der Punkt z liegt innerhalb der Elipse durch t, mit $+1$ und -1 als Brennpunkte, oder, was auf dasselbe hinkommt:

$$|z + (z^2 - 1)^{1/2}| < |t + (t^2 - 1)^{1/2}| \,.$$

In 1959 verallgemeinerte E. van Spiegel die Formel (1) in seiner Dissertation [1].

Er findet:

$$\frac{(-1)^m}{t - z}\left(\frac{z^2 - 1}{t^2 - 1}\right)^{m/2} = \sum_{n=m}^{\infty} (2n + 1)\frac{(n - m)!}{(n + m)!}\, P_n^m(z)\, Q_n^m(t). \tag{2}$$

Hier ist $m = 0, 1, \ldots$, und z und t genügen derselben Bedingung wie in (1).

$P_n^m(z)$ und $Q_n^m(t)$ sind die zugeordneten Legendreschen Funktionen.

Eine noch weiter gehende Verallgemeinerung ist die Formel:

$$\frac{(-1)^m}{t - z}\left(\frac{z - 1}{t - 1}\right)^{n/2}\left(\frac{z + 1}{t + 1}\right)^{m/2} = \sum_{k=\frac{m+n}{2}}^{\infty} \frac{(2k+1)\,\beta!\,\delta!}{2^{-m+n}\,\alpha!\,\gamma!}\, P_k^{m,n}(z)\, Q_k^{m,n}(t) \tag{3}$$

wo wir zur Kürzung geschrieben haben

$\alpha = k + (m + n)/2$, $\beta = k - (m - n)/2$, $\gamma = k + (m - n/2$,
$\delta = k - (m + n)/2$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, = 0, 1, \ldots)$.

Die in (3) vorkommenden Funktionen $P_k^{m,n}(z)$ und $Q_k^{m,n}(t)$ sind die verallgemeinerten zugeordneten Legendreschen Funktionen, und sind unabhängige Lösungen der Differenzialgleichung.

$(1 - z^2)\, d^2w/d_z^2 - 2z\, dw/dz + \{k(k+1) - m^2/2\,(1-z) - n^2/2\,(1+z)\}$
$w = 0$ (siehe [2]).

Literatur:

[1] *E. van Spiegel,* Boundary value problems in lifting surface theory, Thesis, T. H. Delft (1959)

[2] *L. Kuipers* and *B. Meulenbeld,* On a generalization of Legendre's associated differential equation, I, Proceedings Kon. Ned. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, Series A, 60, No 4, 1957

R. Kultze (Heidelberg): *Ein Dualitätssatz für kompakte Riemannsche Flächen.*

Es sei $\mathfrak{R}$ eine kompakte Riemannsche Fläche und $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{R}$ ein Gebiet, das ein reell-zweidimensionales Stück von $\mathfrak{R}$ freiläßt. $\mathfrak{H}(\mathfrak{D})$ sei der Raum, der in $\mathfrak{D}$ holomorphen Funktionen, versehen mit einer natürlichen lokalkonvexen (metrisierbaren) Topologie. Dann wird der topologische Dual von $\mathfrak{H}(\mathfrak{D})$ mit einer geeigneten Klasse von meromorphen Funktionen auf einer $\mathfrak{R}-\mathfrak{D}$ umfassenden Teilmenge identifiziert.

G. G. Legatos (Athen): *Sur les solutions bornées des équations différentielles ordinaires.*

Soit l'équation différentielle:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)y = f(x, y, y') \tag{1}$$

où p, q sont des fonctions numériques finies dans un intervalle $I = \{t : \xi \leqq x < +\infty\}$ de la droite réelle R et f une fonction numérique finie dans $I \times R^2$. Soit qu'il existe une fonction $g(x)$ dans I, telle que $|f(x, y, y')| \leqq g(x)$ dans $I \times R^2$ et une fonction $\Theta(x)$ strictement positive et dérivable dans I, telle que $p\,\Theta' \geqq 0$ dans I; de plus on suppose que:

$$a_1(\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} \left| 2p(x) + \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} \right| dx < +\infty, \quad a_2(\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} \frac{|\Theta(x) - q(x)|}{\sqrt{\theta(x)}}\, dx < +\infty$$

$$a_3(\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} \frac{|g(x)|}{\sqrt{\theta(x)}}\, dx < +\infty$$

Dans ces conditions toute solution $y(x)$ dans I de (1) vérifie la relation:

$$y^2(x) < \frac{\theta(\xi)}{\theta(x)} A(\xi) \text{ pour tout } x \,\varepsilon\, I,$$

où $A(\xi) = \sum_{i=1}^{3} a_i(\xi)$ et $\Theta(\xi) = \Theta(\xi)\,[1 + y^2(\xi)] + y'^2(\xi)$.

Si la fonction $\Theta(x)$ est strictement croissante dans I, alors pour toute solution $y(x)$ dans I de (1) on a: $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Par les résultats ci-dessus un théorème connu de *S. Takahashi* [Proc. Japan Acad. 34 (1958), p. 599), dans le cas consideré, est amelioré.

Pour des fonctions particulières $\Theta(x)$ et des formes particulières de (1) on obtient des propositions, qui sont utiles dans la recherche des solutions bornées de (1).

N. J. Lehmann (Dresden): *Optimale Eigenwerteinschließungen bei selbstadjungierten vollstetigen Operatoren.*

H. Wielandt hat bewiesen, daß bei ausschließlicher Benutzung der in einem Elementenpaar x und Ax (A der Operator, x beliebiges Element des zugehörigen Definitionsbereiches) enthaltenen Informationen über die Aufgabe alle minimalen Eigenwerteinschließungsintervalle durch die sogenannten Tempel'schen Schranken geliefert werden.

Im Vortrag wird die Lösung des allgemeinen Problems bei Nutzung von n-Elementenpaaren $x(i)$, $Ax(i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ mitgeteilt.

Die Ergebnisse stimmen mit den vom Vortragenden früher (ZAMM 1949/50) hergeleiteten Eigenwertschranken überein.

R. Leis (Aachen): *Über das Randverhalten von Potentialfunktionen.*

Im Anschluß an die Theorie der Halbgruppen werden Approximationssätze für allgemeinere Operatoren hergeleitet und die Ergebnisse auf die Potentialtheorie angewendet. Es sei U eine Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe mit den Randwerten g. Die Funktion g sei in p-ter *Potenz* absolut integrierbar; r sei der Abstand vom Rande. Werden dann die Randwerte im Sinne der Norm von der Ordnung $o(r)$ approximiert, so folgt, daß U konstant ist. Für die Approximation von der Ordnung $O(r)$ wird ebenfalls eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, die im wesentlichen besagt, daß g differenzierbar ist.

P. Lelong (Paris): *Résultats récents dans la théorie des fonctions plurisousharmoniques.*

On rappelle des résultats déjà publiés de *R. Remmert* et *H. Grauert* et de l'auteur (Journal de Mathématiques, 1957, Archiv der Mathematik, 1958) sur les singularités des fonctions plurisousharmoniques.

On étudie plus particulièrement le comportement d'une fonction plurisousharmonique au voisinage du sousespace réel R^n de l'espace complexe C^n. Un résultat conservant les enveloppes supérieures de familles localement bornées supérieurement a une portée générale; il est appliqué à l'étude des classes de fonctions analytiques ou quasianalytiques de plusieurs variables réelles.

J. H. van Lint (Eindhoven): *Über asymptotische Orthonormalität im Hilbert Raum.*

Eine Reihe $\{\varphi_n\}$ im Hilbert Raum heißt orthonormal approximierbar, wenn es eine Orthonormalreihe $\{\psi_n\}$ gibt, für welche $\|\varphi_n - \psi_n\| \to 0$ wenn $n \to \infty$. *N. G. de Bruijn* hat bewiesen, daß wenn $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots$ eine Orthonormalreihe ist, und φ_1 beliebig ist, es eine Orthonormalreihe $\psi_1, \psi_2, \ldots$ gibt, wofür $\|\varphi_n - \psi_n\|^2 = O(n^{-1})$ für $n \to \infty$.

Jetzt beweisen wir folgenden Satz von *K. A. Post* und *J. H. van Lint:* Für die Existenz einer Orthonormalreihe $\psi_1, \psi_2, \ldots$ mit $\|\varphi_n - \psi_n\|^2 = O(f(n))$ für $n \to \infty$ ist die Divergenz von $\Sigma f(n)$ notwendig und hinreichend.

W. Maier (Jena): *Integrodifferentialgleichungen.*

Durch *K. Weierstraß* und O. *Hölder* wurde das Interesse der Analytiker auf solche Transzendenten gelenkt, welche keiner Differentialgleichung n. Ordnung mit algebraischen Koeffizienten genügen. In einigen Fällen gelingt eine Kennzeichnung mittels Integralgleichungen. Als Übergangsfall kann der Integrallogarithmus gelten, dessen lineare Differentialgleichung mit

$$(1) \qquad \int_x^\infty \frac{dt\, e^{-t}}{t} = \lambda(x)$$

und komplexen x, y, u, v zur „Integration"

$$(1') \quad \begin{cases} \lambda(ux)\,\lambda(vy) = \lambda[(u+v)y]\,\lambda[u(x-y)] + \\ \lambda[(u+v)x]\,\lambda[v(y-x)] - \\ \int_{u+v}^{\infty} \frac{ds}{s}\{e^{-sy}\lambda[(s-v)\,(x-y)] + e^{-sx}\lambda\,[(s-u)\,(y-x)]\} \end{cases}$$

führt. Der Γ-Funktion nahe steht mit $0 < \mathrm{Im}(x)$ die durch den Ausdruck

$$\sum_{0}^{\infty} k\, \frac{e^{2k\pi i x}}{u+k} = \psi\binom{x}{u}$$

bestimmte Transzendente. Sie genügt der Funktionalgleichung:

$$(2') \quad \psi\binom{x}{u}\,\psi\binom{y}{v} =$$

$$= 2\pi i \int_0^{-i\infty} dt\, e^{-2\pi i t\,(u+v)} \left\{ \frac{\psi\binom{x-t}{u}}{1-e^{2\pi i(y-t)}} + \frac{\psi\binom{y-t}{v}}{1-e^{2\pi i(x-t)}} \right\}$$

mit dem Sonderfall

$$\psi^2\binom{u}{x} = 4\pi i \int_0^{-i\infty} \frac{dt\; e^{-4\pi i t u}}{1-e^{2\pi i(x-t)}}\; \psi\binom{x-t}{u}$$

K. Maurin (Warschau): *Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen.*

Dem vollständigen v. Neumannschen Spektralsatz wird eine für Anwendungen (Eigenfunktionsentwicklungen der klassischen Analysis, Unitäre Darstellungen Liescher Gruppen, Quantenfeldtheorie) geeignete Form gegeben. Es gelten folgende zwei Sätze:

1. Es sei H ein separabler Hilbertscher Raum, (A_β) ein vertauschbares System selbstadjungierter Operatoren mit dichtem Durchschnitt D in H. Es sei: a) $\varphi \to F\varphi = \hat{\varphi}\ \varepsilon\ \hat{H} = \int \hat{H}(\lambda)\, d\mu(\lambda)$, $\varphi\ \varepsilon\ H$, $\hat{\varphi}(\lambda)\ \varepsilon\ \hat{H}(\lambda)$

die von (A_β) induzierte Fouriertransformation. Falls $D \supset \Phi = l.$ ind Φ_α, wobei: b) die Einbettungen $\Phi_\alpha \to H$ nuklear sind, dann gilt:

c) $\hat{\psi}_k(\lambda) = \langle\varphi, e_k(\lambda)\rangle$, $e_k(\lambda)\ \varepsilon\ \Phi'$, $k = 1, 2, \ldots, \dim \hat{H}(\lambda)$ und $e_k(\lambda)$ sind gemeinsame Eigenelemente von (A_β). Es gilt die Parsevalsche Formel

$$\text{d)} \quad (\varphi, \psi) = \int \sum_{k=1}^{\dim H(\lambda)} \langle\varphi, e_k(\lambda)\rangle\, \overline{\langle\psi, e_k(\lambda)\rangle}\, d\mu(\lambda).$$

Da der Raum Φ' im allgemeinen sehr groß ist, ist in besonderen Fällen (A_β — Differentialoperatoren, Integraloperatoren vom Carlemanschen Typus) die Untersuchung der Eigenfunktionen $e_k(\lambda)$ durch den folgenden Satz wesentlich erleichtert.

2. Falls Φ_α (pre) Hilbertsche Räume sind und die Einbettungen (b) vom Hilbert-Schmidtschen Typus sind, dann gelten die Behauptungen (c), (d) vom Satz 1. Auf diese Weise konnten viele bisherige Untersuchungen von *Browdev, Berezanskij, Kac, Foiac, Gelfond-Kostincenko* u. a. verallgemeinert und verschärft werden.

T. Meis (Münster): *Die minimale Blätterzahl der Konkretisierungen einer kompakten Riemannschen Fläche.*

Durch eine nichtkonstante meromorphe Funktion g auf einer Riemannschen Fläche R wird R der Riemannschen Zahlenkugel überlagert. Das Paar (R, g) nennt man eine Konkretisierung von R. Falls R kompakt ist, besitzt die Überlagerung (R, g) endlich viele Blätter. *A. Brill* und *M. Nöther* zeigten 1874, daß es zu einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht p „im allgemeinen" eine Konkretisierung mit $1/2\,(p+2)$ bzw. $1/2\,(p+3)$ Blättern gibt. Es wird gezeigt: Jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht p besitzt eine Konkretisierung mit $1/2\,(p+2)$ oder $1/2\,(p+3)$ oder weniger Blättern. Diese Aussage ist scharf.

M. Mikolás (Budapest): *Über gewisse Funktionalgleichungen und andere neue Ergebnisse in der Theorie der Zetafunktionen.*

Dieser Vortrag gibt eine kurze Übersicht einiger, in den letzten Jahren gewonnener Resultate des Verfassers über die Hurwitzsche Zetafunktion $\zeta(s, u)$ (definiert für $\mathfrak{R}(s) > 1$ durch $\sum_{n=0}^{\infty}(n+u)^{-s}$; $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$, die Riemannsche Zetafunktion). Es sei z. B. auf die Abhandlungen in Acta Sci. Math. Szeged, **17** (1956), 143—164; **18** (1957), 261—263; **19** (1958), 247—250, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **10** (1959), 77—124; Publ. Math. Debrecen, **5** (1957), 44—53; ferner auf weitere, in den letzteren Zeitschriften bald zu erscheinenden Arbeiten hingewiesen.

Wir erwähnen u. a. eine „transzendente" Funktionalgleichung für $\mathfrak{Z}_s(u) = \Gamma(s)^{-1}\zeta(1-s, u)$ $(0 < u < 1)$, welche die „Faltungsgleichung" (I)

$\mathfrak{Z}_{s1} * \mathfrak{Z}_{s2} = \mathfrak{Z}_{s1+s2}$ ($\Re(s_1), \Re(s_2) > 0$) und eine 1955 gefundene Integralrelation (II) zwischen $\zeta(s, u)$, $\zeta(s)$ *und* $\Gamma(s)$ zusammen umfaßt. $\mathfrak{Z}_s(u)$ und (I) spielen in einer unlängst publizierten Theorie des Verf. über Derivierte bzw. Integrale komplexer Ordnung eine wesentliche Rolle, während (II) (geltend genau für $\Re(s) > 1/2$) als eine gemeinsame Erweiterung einer fundamentalen Formel von *Landau* und der gleichfalls vor fünf Jahren entdeckten *Orthogonalitätsrelation* von $\zeta(s, u)$ anzusehen ist. (I) samt $[\mathfrak{Z}_{s+1}(x)]_x = \mathfrak{Z}_s(x)$ läßt auch eine eindeutige *Charakterisierung* von $\mathfrak{Z}_s(u)$ bzw. $\zeta(s, u)$ zu; durch direkte und inverse Mellinsche Transformation folgen neue Zusammenhänge im „kritischen" Streifen bzw. eine Verallgemeinerung der *Riemannschen* Funktionalgleichung von $\zeta(s)$. — Anwendungen: neue und erweiterte Behandlung eines *Hardy-Littlewoodschen* Problems über diophantische Approximationen, einfacher Beweis der *Hurwitzschen* Formel für $\zeta(s, u)$ und somit der letztgenannten Funktionalgleichung usw.

G. Neubauer (Heidelberg): *Zur Spektraltheorie in lokalkonvexen Algebren.*

Sei A eine lokalkonvexe Algebra, die Multiplikation in ihr stetig in jeder Variablen einzeln, a ein Element von A. Als Spektrum $\sigma(a)$ sei die Menge aller Punkte (der komplexen Ebene) bezeichnet, in denen die Resolvente von a nicht lokalholomorph ist, mit $\sigma'(a)$ die Menge der Punkte, in denen die Resolvente nicht existiert. Es ist dann möglich, den bekannten Funktionalkalkül für Funktionen, die in einer Umgebung von $\sigma(a)$ lokalholomorph sind, in der Weise auszudehnen, daß man auch isolierte Singularitäten in den Punkten von $\sigma(a) - \sigma'(a)$ zuläßt. Dazu muß man sich außer auf die übliche Verallgemeinerung des Cauchy-Integrals auf verallgemeinerte Laurentreihen, d. h. Entwicklungen nach Potenzen der Resolventen stützen. Dies erfordert eine genauere Klassifizierung von $\sigma(a) - \sigma'(a)$ nach dem Wachstum dieser Potenzen in diesen Punkten, und diese Klassifizierung bestimmt die Klassen der zum Kalkül zugelassenen Funktionen. Man erhält für den so verallgemeinerten Kalkül die üblichen Ergebnisse, insbesondere einen Homomorphiesatz und Abbildungssätze für die verschiedenen Spektralklassen.

J. C. C. Nitsche (University of Minnesota): *Über eine Kompaktheitseigenschaft der Lösungen des Dirichletschen Problems für quasilineare elliptische Differentialgleichungen.*

Es handelt sich um die Übertragung eines interessanten Resultates von Herrn *H. Beckert* (Math. Ann **139**, 1960) auf nichtlineare elliptische Differentialgleichungen und speziell auf quasilineare Differentiagleichungen zweiter Ordnung in zwei Variablen: Man betrachtet die Gesamtheit der Lösungen des Dirichletschen Problems, welche sich ergibt, wenn die Randwerte nur auf einem festen, beliebig kleinen Teile des Randes variiert werden. Es sei M eine vorgegebene (niedriger dimensionale) Mannigfaltigkeit im Inneren des Grundgebietes. Die Lösungen sind dann im Raum $L^p(M)$ dicht ($1 < p < \infty$). Eine Anwendung auf das nichtparametrische Plateausche Problem wird gegeben.

F. Norguet (Paris): *Une formule de Taylor pour les formes différentielles extérieures sur les variétés analytiques complexes.*

J. Leray [Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 81—180] a défini les dérivées partielles de formes différentielles extérieures dans les variétés analytiques complexes. Ces dérivées partielles sont des classes de cohomologie qui interviennent dans l'expression de résidus de formes différentielles semi-méromorphes; elles vérifient des propriétés qui généralisent celles des dérivées partielles ordinaires des fonction. *J. Leray* (loc. cit.) l'a montré dans le cas de la formule de *Leibnitz* et de la formule du changement de variables. Dans ce travail, nous prouvons qu'elles interviennent dans une formule qui généralise le développement des fonctions analytiques en série de *Taylor* convergente. Notre formule englobe également un résultat de *Stieltjes*, publié par *H. Poincaré* [Acta Math. **9** (1887), 321—380].

T. Peyovitch (Beograd): *Sur une classe d'équations différentielles.*

Il s'agit de l'existence de solutions asymptotiques d'une classe d'équations de la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = \pm \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} x_1 + f_1(t) + \psi_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \pm \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} x_2 + x_1 + f_2(t) + \psi_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{dx_n}{dt} = \pm \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} x_n + x_{n-1} + f_n(t) + \psi_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

où $f_i(t)$ sont des fonctions intégrables pour $t \geqq t_0 > 0$, $\varphi(t)$ une fonction positive, monotone et admet la dérivéé $\varphi'(t)$ intégrable pour $t \geqq t_0 > 0$; des fonctions $\psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont définies et continues pour $t \geqq t_0 > 0$, $|x_i| < B$ et satisfont aux conditions

$$|\psi_i(t, X_1, X_2, \ldots, X_n) - \psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqq \lambda(x) \sum_{i=1}^{n} |X_i - x_i|$$

où $\lambda(t)$ est une fonction positive et continue pour $t \geqq t_0 > 0$.

W. Pogorzelski (Warschau): *Sur le système parabolique d'équations aux dérivées partielles.*

L'auteur a présenté une construction de la matrice

$$\{ \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) \}$$

de solutions fondamentales du système parabolique suivant

(1)

$$\sum_{\substack{0 \leqq k_1 + \ldots + k_n \leqq M \\ 1 \leqq j \leqq N}} A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t) \frac{\partial^{k_1 \ldots k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0$$

($\alpha = 1, \ldots, N$) de $N \geqq 1$ équations à N fonctions inconnues $u_1(X, t), \ldots, u_n(X, t)$ de degré $M \geqq 2$. On admet que les coefficients $A_{\alpha j}^{k_1 \ldots k_n}(X, t)$ sont des fonctions bornées définies dans la région ($X \varepsilon$ espace entier; $0 \leqq t \leqq T$), hölderiennes par rapport aux variables spatiales. En outre les coefficients des dérivées d'ordre M sont hölderiens par rapport à t et vérifient la condition de parabolicité de Petrovsky. Les éléments s'expriment par les formules

$$(2)\quad \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = W_{\alpha\beta}^{Y, \tau}(X, t; Y, \tau) + \int_\tau^t \iiint_E \sum_{\gamma=1}^{N} W_{\alpha\gamma}^{Z, \zeta}(X, t; Z, \zeta)$$

$$\Phi_{\gamma\beta}(Z, \zeta, Y, \tau)\, dZ\, d\zeta$$

($0 \leqq \tau < t \leqq T$), où $W_{\alpha\beta}^{Z, \zeta}$ désignent les éléments d'un matrice de quasi-solutions qu'on exprime par les intégrales de Fourier. Les fonctions $\Phi_{\gamma\beta}(Z, \zeta; Y, \tau)$ sont des solutions d'un système d'équations de Volterra.

L'auteur a présenté ensuite quelques propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass de la forme

$$(3)\quad J_\alpha(X, t) = \iiint_E \sum \Gamma_{\alpha\beta}(X, t, Y, 0) f_\beta(Y)\, dY$$

notamment:

1) la propriété limite

$$\lim_{t \to 0} J_\alpha(X, t) = f_\alpha(X)$$

2) la continuité régulière des dérivées d'ordre $1, 2, \ldots, M-1$

3) l'existence et la continuité régulière des dérivées d'ordre M qui vérifient une condition généralisée de Hölder.

Bibliographie:

W. Pogorzelski, Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique. Ann. Ec. Norm. Suf., Paris, LXXVI, 1959

Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique. Ricerche di Matem. Napoli, T. 7, 1958

Sur la continuité régulière des dérivées d'ordre maximum des intégrales de Poisson-Weierstrass du système parabolique. Bull. Ac. Pol. Sc., Varsovice, 1960

B. Rasajski (Belgrad): *Sur les transformations linéaires de contact dans la théorie des équations de Monge-Ampère.*

Il s'agit de profiter les transformations linéaires et normales de contact — dérivées de la formule principale

$$z = u(x, y)\, x_1 + v(x, y)\, y_1 + w(x, y)\, z_1 + a(x, y)$$

pour l'intégration d'une équation donnée de Monge-Ampère

$$R(x, y, z, p, q)\, r + 2\, S(\ldots)\, s + T(\ldots)\, t + U(\ldots)\,(rt - s^2) = V(\ldots).$$

On applique les resultats connus de *S. Lie, V. Imschenetsky, V. Ermakoff* et *N. Saltykow* pour obtenir l'intégrale générale de l'équation de Monge-Ampère.

H. Reiter (Newcastle upon Tyne): *Einige neuere Ergebnisse in der harmonischen Analyse.*

Es wird der Raum $L^1(G)$ der (komplexwertigen) integrierbaren Funktionen auf der Geraden oder allgemeiner auf einer lokal kompakten Abelschen Gruppe betrachtet. Dieser Raum ist auch eine Banachsche Algebra (mit der Faltung als Multiplikation). Es gelingt nun, die Quotientenalgebren $L^1(G)/I$ für eine gewisse Klasse von Idealen I, die mittels der Fouriertransformation definiert sind, explizit zu bestimmen. Dieses Problem wurde in der Arbeit „Contributions to Harmonic Analysis", Acta Math. 96 (1956), S. 253—263, gestellt; eine ausführliche Darstellung der Lösung ist in den Math. Ann. **140** (1960), 422—441, erschienen.

R. Remmert (Erlangen): *Zwei Unitätssätze für die komplex-projektive Ebene.*

Satz 1: *Es sei F eine komplexe Mannigfaltigkeit und τ: $P_2 \to F$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung des P_2 auf F. Dann ist F selbst zur komplex-projektiven Ebene P_2 biholomorph äquivalent und τ ist eine Überlagerungsabbildung.*

Wir nennen eine zusammenhängende kompakte komplexe Mannigfaltigkeit Y eine (irreduzible) Kompaktierung eines Teilgebietes $X c Y$, wenn Y-X eine (irreduzible) analytische Menge in Y ist. Dann gilt:

Satz 2: *Ist Y eine irreduzible Kompaktierung eines Teilgebietes $X c Y$ und gilt $\dim_C Y = 2$, $H_q(X, Z) = 0$ für $q = 1, 2, 3$, so existiert eine biholomorphe Abbildung von Y auf die komplex-projektive Ebene P_2, die Y-X auf eine projektive Gerade und X auf eine affine Ebene abbildet.*

Insbesondere ist der P_2 die einzige Kompaktierung des C_2 mit 1 als zweiter Bettischer Zahl.

Die Beweise dieser Sätze stützen sich auf Resultate von *F. Hirzebruch* und *K. Kodaira;* sie sollen in einer gemeinsamen Arbeit mit Herrn *van de Ven* veröffentlicht werden.

Katherine Rényi (Budapest): *Bemerkungen über trigonometrische Polynome.*

Der Vortrag beschäftigt sich mit der Verteilung der Null-Koeffizienten in der Taylor-Entwicklung trigonometrischer Polynome. Mit der Voraussetzung, daß $P_n(z)$ ein trigonometrisches Polynom mit n Gliedern ist, $P_n(0) = 0$, $P_n(z) \not\equiv 0$, wird folgendes bewiesen:

Wenn im Punkte $z = 0$ mehr als $n - 1$ Derivierte gerader bzw. ungerader Ordnung von $P_n(z)$ verschwinden, dann ist $P_n(z)$ ein sinus- bzw. cosinus-Polynom; sonst aber — also im Falle eines „gemischten" Polynoms — ist die Anzahl der im Punkte $z = 0$ verschwindenden Koeffizienten höchstens n—2.

H. Röhrl (Minneapolis): *Holomorphe Familien von Faserbündeln über der Riemannschen Zahlenkugel.*

Ist $W \to V \to B$ eine holomorphe Familie von Vektorraumbündeln über der Riemannschen Zahlenkugel, deren Parameterraum normal ist, dann gibt es eine analytische Menge A in B, welche entweder leer oder 1 — codimensional ist, derart, daß die gegebene Familie über $B - A$ lokal trivial ist. Als Folgerung ergibt sich, daß die Menge der Punkte t des Parameterraumes B, für welche die Dimension dim H° $(V_t, \Omega\ (W_t))$ größer oder gleich einer gewissen natürlichen Zahl ist, eine analytische Teilmenge von B bildet. Letzterer Satz wird auf Vektorraumbündel über einer holomorphen Familie von kompakten Riemannschen Flächen übertragen und führt hier zu Anwendungen auf klassische Fragen. Eine weitere Anwendung bezieht sich auf die Reduktion der Strukturgruppe in holomorphen Familien von Faserbündeln über der Riemannschen Zahlenkugel.

Ch. Roumieu (Montpellier): *Ultra-distributions sur une variété.*

On définit dans ce travail des ultra-distributions (distributions généralisées) sur certaines variétés différentiables.

On dit qu'une fonction est de classe $\{M_p\}$ si ses dérivées partielles d'ordre p sont majorées par $A\ h^p\ M_p$ (A, h constantes). Un théorème de *H. Cartan* dit que si la classe $\{K_p\}$ est assez «régulière» et contenue dans la classe $\{M_p\}$, on peut effectuer sur les fonctions de classe $\{M_p\}$ tout changement de variable de classe $\{K_p\}$. Cela permet de définir les variétés V^n de classe $\{K_p\}$ et les fonctions de classe $\{M_p\}$ sur V^n.

La classe $\{M_p\}$ étant quasi-analytique, soit $D(\{M_p\})$ l'espace des fonctions de classe $\{M_p\}$ sur V^n, à support compact, muni d'une topologie convenable. Le dual de $D(\{M_p\})$ est un espace d'ultra-distributions. On définit facilement le support d'une ultra-distribution. Toute ultra-distribution sur R^n peut s'écrire sous la forme d'une somme finie de dérivées de mesures.

Roumieu Ch., Sur quelques extensions de la notion de distribution. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **77** (1960) p. 47 à 121.

Cartan H., Sur les classes de fonctions définies par des inégalités... Paris, Hermann, 1940.

F. Rühs (Freiberg i. Sa.): *Über reelle Umkehrformeln der Laplace-Transformation.*

Das Laplace-Integral ordnet jeder Originalfunktion eine Bildfunktion zu. Durch eine Umkehrformel der Laplace-Transformation kann umgekehrt zu einer Bildfunktion die Originalfunktion ermittelt werden. Die bekannteste Umkehrformel benutzt einen Integrationsweg in der komplexen Ebene. Daneben sind verschiedene reelle Umkehrformeln bekannt. Z. B.: kann man aus dem Post-Widderschen Umkehroperator die Originalfunktion durch Grenzübergang erhalten. Es werden ähnliche Umkehroperatoren mittels Besselfunktionen, Hermiteschen und Laguerrischen Polynomen angegeben.

P. O. Runck (Würzburg): *Über Konvergenzbedingungen bei Interpolationsfolgen.*

Bedingungen dafür, daß eine Folge von Interpolationsformeln (z. B. Lagrangesche Interpolationspolynome) gegen die zu interpolierende Funktion gleichmäßig konvergiert, sind bekannt. Entsprechendes gilt für Folgen von Quadraturformeln. Gehen aber bei den Interpolations- und Quadraturformeln Werte der Ableitungen an den Interpolationsstellen ein oder handelt es sich um Folgen von Formeln zur numerischen Differentiation, so weiß man i. a. recht wenig über Konvergenzbedingungen Bescheid.

Es ist nun zweckmäßig, den Begriff einer Interpolationsfolge etwas allgemeiner zu fassen, so daß u. a. Folgen von Formeln zur numerischen Differentiation und Integration darin enthalten sind: Von einer stetigen bzw. endlich oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ seien Funktionswerte bzw. Werte der Ableitungen an den Interpolationsstellen bekannt, und es sei O ein beschränkter linearer Operator, der auf f angewandt werde (z. B. sei $O(f)$ die Funktion f selbst oder deren Ableitung oder eine Stammfunktion von f); weiter werde $O(f)$ angenähert durch $U_n\ [O; f] = U_n(f)$, einer Linearkombination aus insgesamt n Werten der Funktion f bzw. deren Ableitungen an den Interpolationsstellen (mit Koeffizienten, die Grundfunktionen heißen sollen). Die Folge $U_n(f)$, wobei n eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen durchlaufen soll, nennen wir dann Interpolationsfolge. Es werden nun Bedingungen für die Funktion $f(x)$ und für $U_n(f)$ angegeben, bei denen die Folge $U_n(f)$ gegen $O(f)$ strebt.

Schließlich sei $U_n^{[1]}(f)$ eine Folge, die aus $U_n(f)$ entsteht, wenn an Stelle der Grundfunktionen die differenzierten Grundfunktionen genommen werden. Auch hier werde nach Bedingungen gefragt, bei denen die Folge $U_n^{[1]}(f)$ gegen die Ableitung von $O(f)$ strebt.

J. T. Schwartz und H. S. Shapiro (New York University): *Über die Vollständigkeit der Faltungen einer integrierbaren Funktion mit sich selbst.*

L_1 bezeichne den Raum aller komplex-wertigen Funktionen $f(t)$, die für $0 \leqq t < \infty$ definiert und im Lebesgueschen Sinne integrierbar sind. Bekanntlich gehört die Faltung h zweier solcher Funktionen f, g:

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^\infty f(u)\ g(t-u)\ du$$

wieder der Klasse L_1 an. Gegeben sei ein $f \varepsilon L_1$ und man bilde die Funktionen $\{f_n\}$, in der $f_1 = f$, $f_{n+1} = f_n * f$, $n = 1, 2, \ldots$ Für welches f ist diese Folge $\{f_n\}$ eine vollständige? Diese Frage wird zum Teil durch folgenden Satz beantwortet:

Satz. Es sei $F(z) = \int_0^\infty e^{itz} f(t)\ dt$ (Im $z \geqq 0$). Eine notwendige Bedingung für die Vollständigkeit der Folge $\{f_n\}$ ist, daß $F(z)$ für Im $z \geqq 0$ keinen Wert zweimal annimmt. Umgekehrt, wird diese Bedingung erfüllt und bildet ferner $F(z)$ die obere Halbebene auf ein Gebiet ab, das vom Typus C im Sinne von *W. I. Smirnoff* ist, so ist die Folge $\{f_n\}$ vollständig.

Einige Beispiele und Anwendungen dieses Satzes werden gegeben.

S. Stoilow (Bukarest): *Topologische Funktionentheorie auf nichtorientierbaren Flächen.*

Die, in den letzten Jahren, von verschiedenen Forschern, auf nicht orientierbare Flächen übertragenen Tatsachen der gewöhnlichen Funktionentheorie werden zusammengefaßt und verallgemeinert.

Die Rolle der projektiven Ebene, in dieser Auffassung, wird hier besonders hervorgehoben.

M. D. Stojaković (Jugoslawien): *On the General Principle of Convergence.*

The author proves that the following three properties C_0, C_1, C of the sequence $\{x_n\}$ are equivalent:

C_0. The absolute value of the difference of *any* two members of the sequence is smaller then *any* positive ε if only *some* (sufficiently great) beginning piece of the sequence is deleted from the sequence.

C_1. For *any* positive ε there exists *at least* one $a = a(\varepsilon)$ such that the absolute value of the difference between the members of the sequence and $a(\varepsilon)$ is smaller then this ε if only *some* (sufficiently great) beginning piece of the sequence is deleted from the sequence.

C. There exists *an* **a** such that for *any* positive ε, the absolute value of the difference between the members of the sequence and this **a** is smaller then ε if only *some* (sufficiently great) beginning piece of the sequence is deleted from the sequence.

The equivalence $C_0 \longleftrightarrow C$ is known. The equivalence $C_0 \longleftrightarrow C_1 \longleftrightarrow C$ should be a new one.

W. Stoll (Tübingen): *Familien uniformisierbarer Strukturen.*

Sei (W, π, M) eine komplexe Familie komplexer Mannigfaltigkeiten. Sei (Z, φ) eine reguläre Überlagerung von W mit zusammenhängenden Fasern $\varphi^{-1}\pi^{-1}(t) = Z_t$. Dann ist (W, π, M) eine Familie uniformisierbarer Strukturen auf der komplexen Mannigfaltigkeit D bezüglich (Z, φ), wenn es eine biholomorphe Abbildung $\psi : Z \to D \times M$ mit $\psi\,(Z_t) = D \times \{t\}$ gibt.

Sei (W, π, M) eine komplexe Familie kompakter, komplexer Mannigfaltigkeiten. Sei (Z, φ) eine reguläre Überlagerung von W mit zusammenhängenden Fasern Z_t. Sei N eine dünne Teilmenge von M und sei $M' = M - N$ offen. Seien $W' = \pi^{-1}(M')$ und $Z' = \varphi^{-1}(W')$. Sei (W', π', M') über D bezüglich (Z', φ) uniformisierbar. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen (W, π, M) bezüglich (Z, φ) über D uniformisierbar ist. Zum Beispiel ist das der Fall, wenn D eine relativ kompakte, offene, streng pseudokonvexe Teilmenge eines K-vollständigen Raumes ist. Diese Ergebnisse wurden in Zusammenarbeit mit *A. Andreotti* gewonnen.

H. Tietz (Münster): *Echt gebrochene meromorphe Funktionen.*

Diejenigen meromorphen Funktionen der Ebene, die sich als Summe ihrer Hauptteile — ohne konvergenzerzeugenden Summanden — darstellen lassen, heißen echt gebrochen. Sie lassen sich kennzeichnen als solche meromorphen Funktionen ψ, für die $\int \psi\mu dz$ für jeden bei $z = \infty$ holomorphen und verschwindenden Funktionskeim μ gegen Null strebt, wenn der Integrationsweg eine beliebige, sich auf $z = \infty$ zusammenziehende Folge von Zyklen durchläuft. Zu jeder meromorphen Funktion f gibt es zwei ganze Funktionen γ_1, γ_2 und eine echt gebrochene meromorphe Funktion ψ, so daß $f = \gamma_1 + \gamma_2\psi$ gibt.

W. Tutschke (Berlin): *Über harmonische Funktionen mit periodischen Randwerten.*

1. R_q sei eine nullberandete Riemannsche Fläche mit q analytischen, kohärent orientierten Randkurven $[\gamma]_1, \ldots, [\gamma]_q$. Als Folgerung des Maximum-Minimum-Prinzips für harmonische Funktionen kann man den folgenden Satz zeigen:

Es gibt stets eine eindeutige harmonische Funktion mit auf den Randkomponenten konstanten Randwerten, so daß die konjugierte harmonische Funktion beliebig vorgegebene Perioden d_k längs der Randkurven besitzt, falls nur $\sum_1^q d_k = 0$ ist.

Von diesem Satz soll eine Anwendung gemacht werden für additive harmonische Funktionen u mit endlichem Dirichletintegral und stetig differenzierbaren Randwerten.

2. Ist d_k die Periode von u, so gilt notwendigerweise $\sum_1^q d_k = 0$. Also gibt es nach 1. eine Funktion u_2, so das $u - u_2$ längs der Randkurven die Perioden null besitzt. u_2 ist dabei die konjugierte harmonische Funktion einer eindeutigen harmonischen Funktion mit konstanten Randwerten. Dann gibt es weiter eine endeutige harmonische Funktion u_1 mit stetig differenzierbaren Randwerten, so daß

$$u_3 = u - (u_1 + u_2)$$

Element der folgenden Menge ist:

a) u_3 besitzt konstante Randwerte, unter denen der Wert 0 vorkommt,

b) die Randwerte stimmen überein, wenn man längs eines bestimmten Randschnittsystems von einer Randkurve zu einer anderen übergeht.

Es ist dann die Gesamtheit $\{u_3\}$ aller derartigen Funktionen u_3 ein seperabler Hilbertraum, der nur dann ein von $u \equiv 0$ verschiedenes Element enthält, wenn R_q nicht schlichtartig ist.

Die Gesamtheit $\{u\}$ kann daher auf die Gesamtheit der folgenden Vektoren isomorph abgebildet werden:

$$\{f_1, \ldots, f_q \mid d_1, \ldots, d_q \mid c_1, c_2, \ldots\}$$

mit a) f_i auf der i^{ten} Randkomponente eindeutig und stetig differenzierbar.

b) $\sum_1^q d_k = 0$

c) $\sum_1^\infty c_i^2 < +\infty$.

Für die Konstanz von harmonischen Funktionen gilt dann:

$$u_1 = \{f_1, \ldots, f_q \mid 0, \ldots, 0 \mid 0, \ldots, 0\}$$

ist genau dann konstant, wenn

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_q = \text{const.}$$

gilt. Bezüglich der Funktionen

$$u_2 = \{0, \ldots, 0 \mid d_1, \ldots, d_q \mid 0, 0, \ldots\}$$

und

$$u_3 = \{0, \ldots, 0 \mid 0, \ldots, 0 \mid c_1, c_2, \ldots\}$$

sind die folgenden drei Aussagen gleichwertig:

1) u_2 bzw. u_3 ist konstant,
2) u_2 bzw. u_3 ist eindeutig,
3) alle Komponenten d_i bzw. c_j verschwinden.

W. Walter (Karlsruhe): *Abschätzungs- und Eindeutigkeitssätze für nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungen.*

Es wird folgende Fragestellung behandelt. Es sei ein charakteristisches oder nichtcharakteristisches Anfangswertproblem für eine hyperbolische Differentialgleichung in zwei unabhängigen Variablen vorgelegt. Bezeichnen wir mit $u(x, y)$ eine (unbekannte) Lösung, mit $v(x, y)$ eine (als bekannt angesehene, etwa durch ein Näherungsverfahren gewonnene) Näherungslösung des Problems, so sollen Aussagen über die Größe der Differenz $v—u$ gemacht werden. Es werden Abschätzungen für $v—u$ angegeben, in welche der „Defekt" der Funktion v eingeht. Die gewonnenen Sätze zeigen eine weitgehende formale Übereinstimmung mit bekannten Sätzen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Durch Spezialisierung erhält man Eindeutigkeitsaussagen.

J. Weier (Fulda): *Über die Rotation von Tensorfeldern.*

Äußere Differentialformen sind bekanntlich schiefsymmetrische covariante Tensorfelder. Betrachtet man nun statt solcher Felder beliebige covariante Tensorfelder und ersetzt das äußere Differential durch die Rotation, so zeigt sich, daß ein großer Teil der Sätze aus der Cartanschen Theorie mit geringfügigen Ergänzungen richtig bleibt, daß also die Voraussetzung der Schiefsymmetrie entbehrlich ist. Außer bekannten Relationen wie rot rot = 0, f^* rot = rot f^*, rot $(A \times B) = \pm$ (rot $A) \times B \pm A \times$ rot B, die an die Stelle der Relationen $d\, d = 0$, $f^*\, d = d\, f^*$, $d\,(A \times B) = \pm (dA) \times B \pm A \times dB$ treten, lassen sich verschiedene andere Beziehungen aus der d-Theorie in die rot-Theorie übertragen.

SEKTION III:

Geometrie und Topologie

J. Aczél (Debrecen): *Überblick über die Anwendungen der Funktionalgleichungen in der Theorie der geometrischen Objekte.*

Zurückführung nicht rein differentieller Objekte auf differentialgeometrische. Beweis der Nicht-Existenz eindimensionaler geometrischer Objekte vierter und höherer Klasse mit einer Komponente und Bestimmung aller von niedereren Klassen, darunter auch neuer, unter Stetigkeits- statt Derivierbarkeitsvoraussetzung. Bestimmung der Objekte höherer Dimensions- und Komponentenzahl unter der Derivierbarkeits-, speziellen Transitivitäts-Voraussetzungen bzw. solcher mit speziellen (insb. linearen) Transformationsformeln. Ein allgemeines Prinzip: Komitanten (auch Algebren, kovariante Ableitungen) lassen sich, abgesehen von Äquivalenz, bestimmen. Allgemeine Bestimmung der Algebren der Objektive mit einer Komponente. Kovariante Ableitungen der eindimensionalen Objekte und der n-dimensionalen Vektoren. Komitanten (und Differentialkomitanten) von Dichten, Vektoren und Tensoren. Eine neue Theorie gewisser Liescher Ableitungen. Offene Fragen.

(Übersicht der Ergebnisse eines mit *St. Golab* gemeinsamen Buches in Vorbereitung.)

R. Albrecht (München): *Fixpunktsätze in uniformen Räumen.*

Ist E ein uniformer Raum, so wird gezeigt:

1. Ist f eine Abbildung von E in E, M eine nichtleere Teilmenge von E, $M_n := \bigcup_{\substack{l \varepsilon N \\ l \geqq n}} f^l(M)$, $n \varepsilon N$, X die Menge der Limites von $\{M_n\}_{n \varepsilon N}$ und f stetig auf X, dann ist $f(X) C X$. Falls E separiert, hat X höchstens ein Element und $f(X) = X$.

2. Ist E separiert und f in einer bestimmten Weise „kontrahierend", so hat f und E höchstens einen Fixpunkt.

3. Ist E separiert und vollständig, z ein festes Element von E und f in einer bestimmten Weise kontrahierend, so existiert $x = \lim_{n \to \infty} f^n(z)$. Ist f stetig im Punkt x, so ist $f(x) = x$.

In vielen praktischen Fällen wird eine uniforme Struktur mit Hilfe gewöhnlicher oder „verallgemeinerter" Abstände erzeugt. Nach ihrer Einführung erhält man mit obigen Ergebnissen einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Fixpunkte, falls die Iterierten f^ν auf E durch gewisse Operatoren T_ν dehnungsbeschränkt sind, deren Summe konvergiert.

M. Barner (Karlsruhe): *Geschlossene, einander ein- bzw. umbeschriebene Laplace-Ketten.*

Einer geschlossenen Laplace-Kette des R_n lassen sich geschlossene Laplace-Ketten einbeschreiben. „Triviale" geschlossene einbeschriebene Laplace-Ketten entstehen durch Schnitt mit einer Hyperebene. Zur Untersuchung der geschlossenen Laplace-Ketten des R_{n-1} verwendeten wir früher die Umkehrung dieser Aussage: Jede geschlossene Laplace-Kette des R_{n-1} läßt sich so als Schnitt erzeugen (Archiv der Math. **9**, 366—377 (1958). Es zeigt sich jedoch, daß alle Eigenschaften der Figur zweier einander ein- bzw. umbeschriebener geschlossener Laplace-Ketten, die der „triviale" Fall besitzt, auch dem allgemeinen Fall zukommen. Dabei ergeben sich neue geometrische Interpolationen, da die Dimension des Raumes, in dem die einbeschriebene Kette liegt, jetzt nicht mehr der R_{n-1}, sondern der R_n selbst ist. — Diese Untersuchungen interessieren besonders auch mit Bezug auf die geschlossenen Laplace-Ketten der Periode 5 des dreidimensionalen Raumes, da eine enge Verwandtschaft zu der Figur zweier einander ein- bzw. umbeschriebener geschlossener Laplace-Ketten der Periode 5 des R_4 besteht.

F. W. Bauer (Frankfurt a. M.): *Homologie und Homotopie.*

Wir wissen, daß der Homotopietyp von einem topologischen Raum X *i. A.* nicht der von $S(X)$ ist. Letzterer wurde bekanntlich von *N. Postnikoff* bestimmt. Untersuchungen über $\pi_n(X)$ und $H_n(X, G)$ (singuläre Homologie) treffen aber nur $S(X)$. Dies und die Tatsache, daß alle Beziehungen zwischen Homotopie und Homologie durch die singuläre Homologietheorie ausdrückbar sind, legt das folgende Problem nahe:

Zu jeder Homologietheorie $\mathfrak{V}$ soll eine Homotopietheorie $\mathfrak{V}_\pi$ gefunden werden, so daß möglichst die gleichen Sätze gelten wie im klassischen Fall. Die folgenden Überlegungen sind ein erster Schritt in dieser Richtung: Seien $\mathfrak{V} = \{H_n^{\mathfrak{V}}, f_*, \partial\}$, $\mathfrak{W} = \{H_n^{\mathfrak{W}}, f_o, \partial\}$, und $\mathfrak{V}_\pi = \{\pi_n^{\mathfrak{V}}, f\#, \partial\}$ drei Homologiestrukturen (exakt mod 2) über einer Kategorie $\mathfrak{K}$ sowie $\varphi : \mathfrak{W} \to \mathfrak{V}$ und $h_{\mathfrak{v}} : \mathfrak{V}_\pi \to \mathfrak{V}$ Homomorphismen. Wir nennen $\mathfrak{V}_\pi$ eine Homotopiestruktur zu $\mathfrak{V}$, wenn für $\mathfrak{V}_\pi$ noch eine sogenannte „Minimalbedingung" erfüllt und $\mathfrak{V}_\pi$ exakt ist. Es können die folgenden Sätze bewiesen werden:

(1) Durch $h_{\mathfrak{v}}(\mathfrak{V}_\pi) = \mathfrak{V}' \varepsilon \mathfrak{V}$ wird die Homotopiestruktur $\mathfrak{V}_\pi$ bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt.

(2) Ist $\mathfrak{V}$ die singuläre Homologiestruktur und $\mathfrak{K}$ die Kategorie aller Hausdorffschen Räume und $\mathfrak{V}$ wie in (1), so ist $\mathfrak{V}_\pi$ die gewöhnliche Homotopiestruktur (d. h. $\pi^{\mathfrak{V}}_n$ sind die bekannten Homotopiegruppen, f# deren induzierte Homomorph. usw.).

(3) Durch φ wird auch für $\mathfrak{W}$ eine eindeutig bestimmte „maximale" Homotopiestruktur $\mathfrak{W}_\pi$ sowie Homomorphismen $h_\mathfrak{w}$ und $\varphi_\pi : \mathfrak{W}_\pi \to \mathfrak{V}_\pi$ induziert, so daß das leicht zu bildende Diagramm kommutativ ist.

(4) Liegt ganz $\mathfrak{V}'$ in $\varphi(\mathfrak{W})$, und gilt für $(\mathfrak{V}, \mathfrak{V}_\pi, h_\mathfrak{v})$ der Satz von *Hurewicz*, so gilt er auch für $(\mathfrak{W}, \mathfrak{W}_\pi, h_\mathfrak{w})$.

Sigrid Becken (Hamburg): *Spiegelungsrelationen in orthogonalen Gruppen.*

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem kommutativen Körper der Charakteristik $\neq 2$ und f eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V. Die orthogonale Gruppe von V bezüglich f wird nach *Cartan* und *Dieudonné* von Spiegelungen erzeugt. Dabei gelten folgende Relationen:

1. Jede Spiegelung ist involutorisch.

2. Sind drei nicht isotrope Vektoren aus V linear abhängig, so ist das Produkt der drei Spiegelungen längs diesen Vektoren wieder eine Spiegelung.

Es wird gezeigt, daß jede Relation zwischen Spiegelungen in der orthogonalen Gruppe Folgerelation von solchen der beiden Typen 1) und 2) ist.

R. Bereis (Dresden): *Über Geradenhüllbahnen einer Konchoidenbewegung.*

Bewegt sich ein starres ebenes System in seiner Ebene derart, daß eine Gerade a während der gesamten Bewegung durch einen festen Punkt O der Rastebene gleitet, so spricht man von einer Konchoidenbewegung. Ein fester Punkt H von a möge längs einer Kurve (H) geführt werden. Eine in H normal zu a mit a fest verbundene Gerade g_0 umhüllt bei dem geschilderten Bewegungsvorgang die negative Fußpunktkurve (g_0) von (H) in Bezug auf O. Eine weitere in H mit a fest verbundene Gerade g^α ($\sphericalangle\, g_0 g_\alpha = \alpha$) hat bei diesem ebenen Zwanglauf als Hüllbahn (g^α) eine Kurve, die aus (g_0) durch die Drehstreckung (O; $\cos\alpha\, e^{i\alpha}$) hervorgeht.

Da ferner die Hüllbahnen paralleler Geraden Parallelkurven sind, gilt der Satz:

Bei einer Konchoidenbewegung ist die Hüllbahn (g) eine Gerade g der Gangebene in der Rastebene im allgemeinen eine Parallelkurve der negativen Fußpunktkurve c der Bahn (H) eines beliebigen Punktes H der Führungsstange a in Bezug auf die (als Punkt zu denkende) Führungshülse O, oder die Parallelkurve einer aus c durch eine Drehstreckung um O hervorgegangenen ähnlichen Kurve. Alle zur Führungsstange parallelen Geraden der Gangebene umhüllen naturgemäß Kreise, die selbst ein Strahlbüschel durchläuft."

Diese Eigenschaften der Geradenhüllbahnen einer Konchoidenbewegung lassen sich anschaulich leicht erkennen, wenn man ein ebenes Feld π einer Parallelverschiebung normal π unterwirft und die einzelnen Lagen mittels einer Netzprojektion (Hauptstrahl $\perp \pi$) auf die Ausgangslage π_0 von π abbildet. Es ergibt sich hierbei ein Zusammenhang mit einem speziellen ähnlich veränderlichen ebenen System, bei dem alle Punkte auf Kreisen durch einen festen Punkt laufen, während jede Gerade ein Strahlbüschel erfüllt.

Damit ist auf einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen der Konchoidenbewegung und der Netzprojektion hingewiesen.

Genauere Ausführungen sind in einer kleinen Note mit dem gleichen Titel festgelegt, die demnächst in der ZAMM erscheinen wird.

St. Bilinski (Zagreb): *Über eine spezielle Klasse konvexer Polyeder.*

Unter den konvexen Polyedern, die durch eine gewisse metrische Regelmäßigkeit ausgezeichnet sind, wurden neben den regelmäßigen und halbregelmäßigen Polyedern auch solche mit etwas geringeren Regelmäßigkeitsbedingungen untersucht. So untersuchte man häufig auch gleichflächige Polyeder, aber bis heute — wie es scheint — sind diese Polyeder dennoch nicht alle bekannt.

Zu diesen Polyedern gehören auch solche, bei denen alle Flächen untereinander kongruente Rhomben sind. Das sind z. B. das Rhomboeder, das Rhombendodekaeder, das Rhombenikosaeder und das Rhombentriakontaeder. Das Problem, alle Typen solcher Polyeder zu bestimmen, wird gestellt und gelöst, und zugleich wird für alle diese Polyeder der Existenzbeweis gegeben. Es werden auch etwas allgemeinere Polyeder untersucht, und zwar solche, bei denen die Flächen irgendwelche Parallelogramme sind. Für einige Klassen solcher Polyeder werden dann alle möglichen morphologischen Typen bestimmt.

D. Blanuša (Zagreb): *C^∞-isometrische Einbettungen des Kleinschen Schlauches mit euklidischer Metrik in vierdimensionalen Räumen konstanter Krümmung.*

Im Jahre 1941 wurde von *C. Tompkins* eine algebraische Einbettung des euklidischen Kleinschen Schlauches im vierdimensionalen euklidischen Raum angegeben, die jedoch eine Selbstdurchdringung längs eines Kreises besitzt. Um Einbettungen ohne Selbstdurchdringung zu finden, werden zunächst C^∞-Einbettungen des Möbiusschen Bandes (endlicher Breite) in dreidimensionalen Räumen konstanter Krümmung angegeben, wobei das Möbiussche Band die Gaussche Krümmung der geodätischen Flächen des betreffenden Raumes haben soll. Hierauf lassen sich C^∞-isometrische Einbettungen des Kleinschen Schlauches mit euklidischer Metrik im vierdimensionalen euklidischen, sphärischen bzw. hyperbolischen Raum aufbauen. Die Formeln werden explizit angegeben.

J. B ö h m (Jena): *Inhaltsmessung in Räumen konstanter Krümmung.*

Ausgehend von einer Differentialformel von *L. Schläfli,* hat *H. S. M. Coxeter* im Jahre 1935 eine Inhaltsformel für spezielle Simplexe (Orthoscheme) in einem R_3 konstanter Krümmung (für sphärische bzw. hyperbolische Metrik) angegeben. Damit ist die Inhaltsbestimmung in Räumen konstanter Krümmung für dreidimensionale Polyeder infolge deren Zerlegungseigenschaft in Orthoscheme im Prinzip erledigt. Coxeters Methode läßt sich nun in geeigneter Weise verallgemeinern, so daß man allgemeine Aussagen über die Inhaltsfunktionen der (2m-1)-dimensionalen Orthoscheme (m = 1, 2, 3, . . .) machen kann. Die Fälle gerader Dimensionszahlen lassen sich auf Grund einer Reduktionsformel von *Schläfli* bzw. von *H. Poincaré* auf niedere ungerade zurückführen. Das Neue bei dieser verallgemeinerten Coxeterschen Methode ist die Einführung gewisser weiterer Variablen, die auf Grund ihrer Eigenschaften als die „Invarianten" des Orthoschems bezeichnet werden mögen. Als wesentliche Parameter eines (2m-1)-dimensionalen Orthoschems sollen hier immer die 2m-1 charakteristischen Keilwinkel zwischen den Orthoschem-Wänden gewählt werden. Sieht man von den Bindungen der Invarianten mit den Keilwinkeln ab, dann erhält die Schläflische Differentialformel für das vollständige Differential des Orthoschem-Inhalts infolge der Vermehrung der Variablen zusätzliche Summanden. Diese verschwinden jedoch wieder bei Berücksichtigung der Bindungen zwischen den Invarianten und Keilwinkeln. Nicht nur für diese so erweiterte, sondern auch schon für die ursprüngliche Schläflische Differentialformel sind hier die erforderlichen Integrabilitätsbedingungen bezüglich des neuen Variablensatzes erfüllt. Der gesuchte Orthoschem-Inhalt läßt sich in unserem Falle dann als Linienintegral über das erweiterte Schläflische vollständige Differential längs eines im Ursprung beginnenden Weges angeben, auf dem sämtliche Variablen bis auf eine ganz bestimmte unter den Invarianten (der Hauptinvarianten) konstant sind. Das heißt mit anderen Worten, daß für die Inhaltsbestimmung nur über den Koeffizienten des Differentials der Hauptinvarianten in der erweiterten Schläflischen Differentialformel von null bis zur entsprechenden für das betreffende Orthoschem charakteristischen Größe dieser Hauptinvarianten zu integrieren ist, wobei die übrigen Variablen als Konstante zu betrachten sind. Am Beispiel des fünfdimensionalen Orthoschems soll diese verallgemeinerte Coxetersche Methode genauer betrachtet werden.

V. van B o u c h o u t (Louvain): *Congruences rectilignes admettant comme enveloppe des plans médians une surface minima ou un point.*

La détermination des congruences rectilignes admettant comme enveloppe des plans médians une surface minima dépend d'une seule fonction de deux paramètres. Pour les congruences de normales cette fonction est harmonique. Par des opérations simples on peut construire une infinité de nouvelles solutions à partir d'une quelconque de ces congruences.

Toutes ces propriétés se conservent lorsque la surface minima est remplacée par un simple point (ex.: congruences de normales à une surface d'Appell).

I. B u c u r (Bukarest): *Sur les classes caractéristiques des variétés algébriques.*

On démontre quelques théorèmes qui permettent d'exprimer les classes de *Chern* (définies par *A. Grothendieck*) d'une variété algébrique projective V sur un corps algébriquement clos par des autres invariants géometriques de V. En particulier on obtient un théorème qui généralise et précise le théorème de *Hodge* sur la coïncidence homologique des classes de *Todd* et des classes caractéristiques d'une variété algébrique projective complexe.

E. T. D a v i e s (Southampton): *Areal Spaces.*

We are concerned with spaces of n-dimensions in which an m-fold integral is the fundamental invariant. The cases $m = 1$ and $m = n—1$ are well known as Finsler and Cartan spaces respectively. The case of arbitrary m with $1 < m < n—1$ has been extensively studied, especially by *Kawaguchi* and his collaborators in Japan, particularly for the submetric case in which a two index metric-tensor can be determined whenever m and n are relatively prime. For this case a connection can be defined such that (i) the coefficients of the connection satisfy the classical laws of transformation, (ii) length and angle are preserved in the corresponding parallel transport, (iii) the coefficients are symmetrical in their lower indices, (iv) extremal m-spaces are characterized by the vanishing of the mean curvature, (v) the expressions for the connection coefficients reduce to those obtained by Cartan when $m = 1$.

A. D e i c k e (Southampton): *Fast-symplektische Strukturen auf Sphären.*

Dies ist ein Bericht über Ergebnisse, die in Zusammenarbeit von *W. H. Cockcroft* und dem Sprecher erhalten wurden.

Unter einer fast-symplektischen Struktur auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension $4m + k$, $k = 0, 1, 2, 3$, verstehen wir eine Reduktion der Strukturgruppe $O(4m + k)$ des Tangentialbündels der Mannigfaltigkeit auf die symplektische Gruppe $Sp(m)$, welche in der üblichen Weise als Untergruppe in die orthogonale Gruppe $O(4m + k)$ eingebettet gedacht wird. Es wird gezeigt, daß für $k = 3$ die Sphären S^{4m+k} unendlich viele fast-symplektische Strukturen zulassen; für $k = 0,2$ und für $k = 1$ und gerades m sind keine solchen Strukturen möglich. Auf der 5-dimensionalen Sphäre existiert genau eine fast-symplektische Struktur, während für $k = 1$ und ungerades $m \neq 1$ die Frage noch offen ist.

Für 5-dimensionale Mannigfaltigkeiten ist es möglich, mit Hilfe der Hindernistheorie allgemeine Bedingungen für die Existenz fast-symplektischer Strukturen anzugeben.

Die Beweise benutzen die Resultate von *R. Bott* über die Homotopiegruppen der klassischen Gruppen sowie die von *G. F. Paechter* über die Homotopiegruppen der Stiefelmannigfaltigkeiten.

M. Decuyper (Lille): *Sur la surface de Slotnick d'un réseau conjugué.*

Un point M décrivant un réseau conjugué dans l'espace projectif à trois dimensions, on lui associe un point remarquable S, dit point de Slotnick, situé sur le premier axe. En général, S décrit une surface que nous étudions en fonction du réseau M; en particulier, il est intéressant de considérer les cas où la surface S dégénère en un point ou en une courbe; nous traitons ensuite divers problèmes relatifs au couple des réseaux M et S.

W. L. Edge (Edinburgh): *The group of the bitangents.*

This group, of order $36 \times 8!$, has a representation as the group of automorphisms of a *symmetric* quadratic form S_7 in 7 variables over $GF(2)$, and is thus related to a non-singular quadric Q in a finite projektive space [6]. Q consists of 63 points and contains 135 planes; of its 64 non-singular sections 36 contain planes while 28 do not; permutation representations of degrees 28, 36, 63, 135 are thereby displayed. Another, of degree 120, requires a more elaborate description.

S_7 is the sum of the 21 products of pairs of the variables; there are 288 simplexes in reference to which Q has the equation $S_7 = 0$. The matrices that impose the automorphisms are those whose columns are coordinate vectors of 7 points on Q no two of which are conjugate. Groups in 6 and 8 variables have exactly analogous definitions. That in 6 variables is the „cubic surface group" of order $72 \times 6!$. That in 8 variables has order $960 \times 9!$; it affords an application of Study's principle of triality which indicates an outer automorphism of period 3.

E. Ellers (Hamburg): *Involutorische Geometrien und ihre Darstellung durch Cliffordalgebren.*

Faßt man die Elemente $\alpha, \beta, \ldots$ einer Gruppe G, aus der eine beliebige Teilmenge D herausgegriffen ist, einerseits als Punkte (α) und andererseits als Hyperebenen $<\beta>$ auf mit der Inzidenzbedingung $\alpha\beta \in D$, so entsteht ein Gruppenraum $D(G)$. Wir nennen $D(G)$ eine involutorische Geometrie, wenn G den Exponenten 2 hat, (d. h. $x^2 = 1$ für alle $x \in G$). Wann ist nun eine involutorische Geometrie $D(G)$ ein projektiver Raum und welche Eigenschaften hat in diesem Fall $D(G)$? Als Dimensionen von $D(G)$ kommen nur die Zahlen 2^n-1 in Frage. Der zugehörige Koordinatenkörper ist kommutativ, hat die Charakteristik 2 und besitzt Nichtquadrate. Die Kollineationsgruppe von $D(G)$ besitzt eine zu G isomorphe Untergruppe G^*. Werden alle Kollineationen von G^* durch lineare Transformationen induziert, so nennen wir $D(G)$ einen linearen Gruppenraum. Es zeigt sich, daß alle linearen Gruppenräume durch Cliffordalgebren dargestellt werden können. Aus der Existenz solcher Cliffordalgebren ergibt sich noch, daß es auch zu jeder natürlichen Zahl n eine Gruppe G und eine Teilmenge D gibt, so daß $D(G)$ die Dimension 2^n-1 hat.

F. Fava (Torino): *Geometria delle varietà in uno spazio a connessione affine.*

Facendo ricorso ai noti procedimenti di derivazione di un vettore contravariante lungo una linea (procedimenti che vengono applicati ripetutamente a partire dal vettore tangente) si introduce in uno spazio A_n a connessione affine la nozione di *k-giacitura osculatrice* che risulta essere l'analogo (in A_n) dell'ordinario S_k osculatore ad una curva di uno spazio proiettivo S_n.

L'esistenza di k-giaciture osculatrici con $k > 2$ dà luogo a condizioni per la connessione di A_n; si prova infatti che A_n deve essere privo di torsione in corrispondenza a $k = 3$ ed euclideo per $k > 3$.

Le giaciture osculatrici alle curve di una varietà V_m $(2 \leqq m < n)$ uscenti da uno stesso punto consentono anzitutto di stabilire la nozione di *giacitura 2-osculatrice* a V_m e, quando A_n è privo di torsione, anche quella di *giacitura 3-osculatrice* ottenendo così gli enti che sono l'analogo degli ordinari spazi 2 e 3-osculatori ad una varietà di S_n; *giaciture k-osculatrici* con $k > 3$ si ottengono solo se A_n è euclideo.

I procedimenti usati vengono infine utilizzati per la caratterizzazione geometrica di classi di varietà V_m di A_n che sono soluzioni di particolari sistemi di equazioni differenziali: per $m = 2$, tra le V_2 considerate si hanno le analoghe delle classiche superficie della specie Φ di *C. Segre*.

W. Franz (Frankfurt/Main): *Über den Affintypus von Polyedern.* Vortragsauszug nicht eingelangt.

L. Godeaux (Liège): *Une propriété caractéristique des Congruences W.*

Soit (j) une congruence de droites et soient (x), $(\bar{x})$ ses nappes focales. Si les quadriques de *Lie* relatives aux nappes focales et correspondant aux foyers d'une même droite se rencontrent suivant les côtés d'une quadrilatère gauche, la congruence est W.

O. Herrmann (Heidelberg): *Über Eigenfunktionen auf geschlossenen Flächen negativer Krümmung und geschlossene geodätische Linien.*

Sei $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Fläche mit der konstanten negativen Krümmung -1. Die Eigenwerte des Operators $-\Delta$ bilden bekanntlich ein diskretes nicht-negatives Spektrum:

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

Es seien h_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ die Vielfachheiten der Eigenwerte und

$$\varphi_{\mu\nu}(P) \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 1, 2, \ldots, h_\mu \end{pmatrix}$$

die reell und orthogonal gewählten Eigenfunktionen. Dann sind die Funktionen

$$\psi_{\mu_0}(P) = \sum_{\nu=1}^{h\mu_0} \varphi^2_{\mu_0\nu}(P)$$

wieder nach den Eigenfunktionen entwickelbar:

$$\psi_{\mu_0}(P) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{h\mu} a_{\mu\nu}(\mu_0)\, \varphi_{\mu\nu}(P)\,.$$

Es zeigt sich nun, daß die Fouriekoeffizienten in bemerkenswerter Weise mit den von *Huber* untersuchten Längen $\mu(K)$ der kürzesten geschlossenen Wege in den einzelnen Homotopieklassen K verknüpft sind: Es gilt

$$a_{\mu\nu}(\mu_0) = \frac{\Gamma(s_{\mu 0}^{+} + 1/2\, s_{\mu}^{-})\, \Gamma(s_{\mu 0}^{+} - 1/2\, s_{\mu}^{-})}{\sqrt{\pi}\quad 2^{s_{\mu 0}}\quad \Gamma(s_{\mu 0}^{+} - s_{\mu 0}^{-})} \mathrm{Res}_{\,s = s^{+}_{\mu 0}} H\mu\nu(s),$$

wobei

$$H_{\mu\nu}(s) = \sum_{\varkappa} \varphi_{\mu\nu}^{*}(\varkappa)\, \nu(\varkappa)^{-1} (\mathfrak{Cof}\, \mu(\varkappa) - 1)^{-s}$$

und

$$\overset{\pm}{s_{\mu}} = 1/2\,(1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda\mu})$$

ist. Die Koeffizienten $\varphi_{\mu\nu}^{*}(\varkappa)/\nu(\varkappa)$ sind Mittelwerte der Funktionen $\varphi_{\mu\nu}(P)$ längs des kürzesten geschlossenen Weges der Homotopieklasse K. Der Beweis erfolgt durch Vergleich zweier Entwicklungen gewisser von *Huber* untersuchten automorphen Funktionen.

Literatur:

Huber, Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem der hyperbolischen Ebene. I. (Comm. math. Helv. **30** (1955))

Huber, Zur analytischen Theorie der hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen. (Math. Ann. **138** (1959))

G. Hoheisel (Köln): *Orthogonalität in normalen Räumen.* Vortragsauszug nicht eingelangt.

Th. Kaluza (Hannover): *Ordnen von Mengen als Prozeß.*

Wenn eine Menge in fremde Teilmengen zerlegt und das System dieser Teilmengen vollständig geordnet ist, sprechen wir von einem Ordnungsschritt. Jede wohlgeordnete Folge solcher Ordnungsschritte definiert eine (teilweise) Ordnung der Menge vermöge folgender Vereinbarung: Es soll „*a* vor *b*" genau dann gelten, wenn für die Folge der Ordnungsschritte schließlich folgendes richtig ist: *a* und *b* liegen in verschiedenen Teilmengen, und die *a* enthaltende Teilmenge liegt vor der, die *b* enthält. Wenn bei den späteren Ordnungsschritten stets nur die bei den früheren aufgetretenen Teilmengen weiterzerlegt werden, sprechen wir von einem Schachtelungsprozeß. Hauptergebnisse: Jedem Schachtelungsprozeß entspricht ein von einem Punkt aus gerichteter, zusammenhängender, kreisfreier Graph, wobei der Zusammenhang dadurch gewahrt bleibt, daß wohlgeordneten Kantenfolgen ohne letztes Element ein Endpunkt zugeordnet wird. Umgekehrt kann jeder solche Graph auf viele Arten als Schachtelungsprozeß aufgefaßt werden. Jede Menge läßt sich aus jedem Ordnungszustand durch mindestens einen Schachtelungsprozeß

in jeden anderen Ordnungszustand überführen. Es gibt Schachtelungsprozesse, bei denen sowohl jeder einzelne Schritt als auch der ganze Prozeß vom Typ ω_0 ist, die aber Ordnungstypen liefern, in denen der Typ ω_1 enthalten ist. Die Souslinschen Kontinua lassen sich durch solche Schachtelungsprozesse herstellen, daß eine der Souslinschen Vermutung äquivalente Aussage über gewisse transfinite Bäume (die die den Prozessen entsprechenden Graphen sind) gewonnen werden kann.

H. Karzel (Hamburg): *Gruppenräume von elliptischer Struktur.*

Einer Gruppe G läßt sich durch Auszeichnung einer Teilmenge D (in Verallgemeinerung eines Verfahrens von *R. Baer*) eine geometrische Struktur $D(G)$ wie folgt zuordnen: Jedes Element aus G repräsentiere einen Punkt und eine Hyperebene; ein Punkt (α) und eine Hyperebene $<\beta>$ heißen genau dann inzident, wenn $\alpha\beta \varepsilon D$ gilt. Erhält man auf diese Weise einen projektiven Raum, so heißt $D(G)$ ein Gruppenraum. Durch die zusätzlichen Voraussetzungen „Für jedes $x \varepsilon D$ gilt $x^2 = 1$, D ist invariant und enthält mindestens zwei Elemente a, b mit $(a\,b)^2 \neq 1$" wird eine Klasse von drei dimensionalen Gruppenräumen $D(G)$ gekennzeichnet. Jedem dieser Gruppenräume $D(G)$ entspricht umkehrbar eindeutig eine (als Bündel des Gruppenraumes $D(G)$ deutbare) verallgemeinerte ebene elliptische Geometrie, deren Bewegungsgruppe mit G isomorph ist. Gleichzeitig erhält man hiermit eine Kennzeichnung aller ternären orthogonalen Gruppen $O_3{}^{+}(K, Q)$ (falls K eine Charakteristik $\neq 2$ hat) bzw. $O_3(K, Q)$ (falls K die Charakteristik 2 hat) vom Index 0.

V. Klee (Washington): *Convexity of Chebyshev sets.*

A famous theorem of *Chebyshev* asserts that if C is the space of all continuous real functions on 0,1 and P_n is the subspace of C consisting of all polynomials of degree $= n$, then each member of C admits a unique best uniform approximation by a member of P_n. Accordingly, a subset S of a metric space M will be called a *Chebyshev set* provided each point of M admits a unique nearest point in S. We are concerned with the relationship between Chebyshev sets and convex sets in a Banach space. The topic has been thoroughly explored in the finite-dimensional case, but the infinite-dimensional situation is more delicate. It is known *(Motzkin, Jessen, Busemann,* and others) that a *Banach* space of finite dimension $\geqq 3$ is smooth if and only if every *Chebyshev* set in the space is convex. The basic infinite-dimensional problem, which remains unsolved, is whether a *Chebyshev* set in *Hilbert* space H must be convex. Three contributions to this problem have been published, one by the present author and two by *Efimiv* and *Steckin.* The three results have in common that they imply the convexity of a compact *Chebyshev* set in H, but fail to cover even the case of a weakly compact *Chebyshev* set. The present paper contains three more contributions, as follows:

1\. A method due to *Ficken,* utilizing inversion in spheres, is developed to show a very close connection between the above problem and a related unsolved problem involving farthest points: If a subset S of *Hilbert* space H

is such that each point of H admits a unique farthest point in S, must S consist of a single point? (For a *compact* subset of an arbitrary *Banach* space, the answer is affirmative.)

2. This is merely a refinement and clarification of the author's earlier result, showing that in an arbitrary smooth reflexive Banach space, a *Chebyshev* set must be convex if the associated metric projection is both continuous and weakly continuous.

3. Our principal result provides the first characterization of closed convex subsets of *Hilbert* space in terms of the *Chebyshev* property. It is this —— If E is a *Banach* space which is both uniformly smooth and uniformly convex, then a subset of E is closed and convex if and only if it is a weakly closed *Chebyshev* set. The proof depends on a transfinite induction by means of which the role of compactness can be played instead by completeness in conjunction with a certain Lipschitzian condition.

E. Kunz (Heidelberg): *Differentialformen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten.*

Die Theorie der Differentialformen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten wurde bisher hauptsächlich für Mannigfaltigkeiten über vollkommenem Konstantenkörper entwickelt. Es kann jedoch gezeigt werden, daß sich die Begriffe (z. B. uniformisierende Parameter, Differentialformen 1. Gattung, Divisor einer Differentialform, geometrisches Geschlecht einer Varietät) und die bekannten Sätze dieser Theorie für Mannigfaltigkeiten über beliebigem Konstantenkörper k verallgemeinern lassen, wenn man vom „arithmetischen Konstantenkörper" k den „Differentialkonstantenkörper" k_0 unterscheidet, d. h. wenn man nicht mehr über k sondern über einem geeigneten $k_0 \leqq k$ differenziert. Dabei kann k_0 als Zwischenkörper von k^p und k gewählt werden, wo p den charakteristischen Exponenten von k bedeutet, so daß man im vollkommenen Fall zum Bekannten zurückkommt.

Für algebraische Funktionenkörper K einer Variablen über k ergibt sich insbesondere, daß die kanonische Klasse des Riemann-Rochschen Satzes mit der Klasse der Divisoren der Differentialformen höchster Stufe von K über k_0 übereinstimmt.

J. Molnár (Budapest): *Über Kreisunterdeckungen.*

Eine abgeschlossene Punktmenge auf der Sphäre, auf der euklidischen, oder auf der hyperbolischen Ebene wird ϱ-konvex genannt, wenn es zu jedem ihrer Randpunkte ein Stützzyklus vom Radius ϱ gibt. Es seien in ein ϱ-konvexes Gebiet G vom Inhalt T wenigstens zwei nicht überdeckende Kreise von n verschiedenen Größen eingelagert. Es wird für $\frac{t}{T}$ eine von n und ϱ abhängige Schranke angegeben, wo t den Flächeninhalt des von den Kreisen frei gelassenen Flächenteils von G bedeutet.

J. Naas (Berlin): *Ein vollständiges Invariantensystem für verallgemeinerte Kurven des R^n.*

Nach dem Hauptsatz der Kurventheorie des reellen euklidischen Raumes R^n ($n > 1$) besitzt eine stetige Kurve x mit einem offenen oder abgeschlossenen Definitionsintervall J, wenn x in J n-mal stetig differenzierbar ist und die ersten $n - 1$ Ableitungen $Dx, \ldots, D^{n-1}x$ linear unabhängig sind, eine erste Krümmung $k_1, \ldots$, eine $(n-1)$-te Krümmung k_{n-1} und eine Bogenlänge s; das System stetiger Funktionen $(k_1, \ldots, k_{n-1}, s)$ ist invariant für alle stetigen Kurven, die aus x durch eine Bewegung des R^n und deren Definitionsintervalle aus J durch Abbildung mittels einer unbeschränkt oft differenzierbaren Funktion φ mit $D\varphi \neq 0$ hervorgehen. Umgekehrt wird durch ein System stetiger Funktion $(k_1, \ldots, k_{n-1}, s)$ mit $Ds \neq 0$ eine stetige Kurve x bis auf Bewegung des R^n und bis auf Abbildung φ von J mit $D\varphi \neq 0$ bestimmt. Im letzten Dezennium sind eine Reihe von Arbeiten, insbesondere von *A. Wintner* [1], [2], *P. Hartmann* [3] und *K. Nomizu* [4] erschienen, die sich mit den Voraussetzungen des Hauptsatzes beschäftigen und dazu beitragen, den Bereich der stetigen Kurven des R^3, die ein vollständiges Invariantensystem besitzen, zu kennzeichnen und zu erweitern.

Man kann im R^n den Bereich der stetigen Kurven dadurch erweitern, daß man von Darstellungen

$$x = (x^1, \ldots, x^n)$$

ausgeht, wo $x^1, \ldots, x^n$ Distributionen sind, die auf einem offenen oder abgeschlossenen Intervall reeller Zahlen erklärt sind. Wir legen für x in weiteren ein offenes Intervall Δ sowie abgeschlossene Teilintervalle $Q \subset \Delta$ zugrunde. Für jede dieser verallgemeinerten Kurven werden wir ein sogenanntes Krümmungssystem konstruieren, das sich als ein vollständiges Invariantensystem entsprechend wie bei stetigen Kurven, die die Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllen, erweist.

Verallgemeinerte Kurven x des R^n mit dem offenen Definitionsintervall Δ lassen sich auch als distributionstheoretischer Limes einer konvergenten Folge stetiger Kurven oder auch als eine Gesamtheit von Paaren y_Q, $\mathfrak{p}_Q$ darstellen [5], wo y_Q eine stetige Kurve mit abgeschlossenem Definitionsintervall $Q \subset \Delta$ und $\mathfrak{p}_Q$ ein n-tupel nicht negativer ganzer Zahlen ist:

$$x = \{[y_Q, \mathfrak{p}_Q] : \text{jedes } Q \subset \Delta\} \tag{1}$$

Bei einer Bewegung des R^n oder bei einer Abbildung des Definitionsintervalls Δ mittels einer unbeschränkt oft differenzierbaren Funktion φ mit $D\varphi \neq 0$ auf Δ wird eine Folge stetiger Kurven, die im Sinne der Distributionstheorie konvergent ist, wieder in distributionstheoretisch konvergente Folgen überführt. Dies sind die verallgemeinerten Kurven, die aus der ursprünglichen durch Bewegung des R^n und durch Parametertransformation entstanden sind. So bedeutet z. B. $x + c$ die verallgemeinerte Kurve, die aus x durch eine Translation c mittels eines konstanten Vektors $c \varepsilon R^n$ hervorgeht.

Zur Definition eines Krümmungssystems von x betrachten wir die Paare in (1), bei denen $\mathfrak{p}_Q$ aus gleichen Zahlen $p \geqq 0$ gebildet ist; man kann (1) auch in der Gestalt

$$x = \{[y_Q, p] : \text{jedes } Q \subset \Delta\}$$

schreiben. Für eine verallgemeinerte Kurve x existiert immer eine ganze Zahl $p_0 \geqq 0$ derart, daß für jedes $p \geqq p_0$ und für jedes abgeschlossene Intervall $Q \subset \Delta$ zugehörige Paare y_Q, p vorkommen, deren stetige Kurven y_Q in Q die Voraussetzungen des klassischen Hauptsatzes der Kurventheorie erfüllen und infolgedessen Bogenlänge s, erste Krümmung $k_1 > 0, \ldots, (n-2)$-te Krümmung $k_{n-2} > 0$ und $(n-1)$-te Krümmung k_{n-1} besitzen, wobei die Vorzeichenwahl für $k_1, \ldots, k_{n-2}$ durch Orientierung des begleitenden n-Beines von y_Q bestimmt wird.

Wir nennen
$$\sigma(x, Q, p) = | k_1, \ldots, k_{n-1}, s, p |$$
ein *System der Fundamentalkrümmungen von x in* Q *für p* und die Gesamtheit dieser Systeme
$$\sigma(x, Q) = [\sigma(x, Q, p)]$$
die *Schar der Systeme der Fundamentalkrümmungen von x in* Q.

Diese Scharen lassen sich durch eine Äquivalenzrelation kennzeichnen. Mit $K_1, \ldots, K_{n-1}, S$ bezeichnen wir die Operatoren auf $\mathfrak{K}^0\Delta$, das der Raum aller stetigen Kurven des R^n mit dem Definitionsintervall Δ sei, erklärt für alle stetigen Kurven $y \in \mathfrak{K}^0\Delta$, für die 1) y im abgeschlossenen Intervall $Q \subset \Delta$ n mal stetig differenzierbar ist und 2) die ersten $(n-1)$ Ableitungen $Dy, \ldots, D^{n-1}y$ in Q linear unabhängig sind:
$$K_1 y = k_1 > 0, \ldots, K_{n-2} y = k_{n-2} > 0,\ K_{n-1} y = k_{n-1},\ Sy = s;$$
$k_1, \ldots, k_{n-1}$ sind die Krümmungen und s die Bogenlänge von y in Q.

In Q seien nun zwei Systeme von Fundamentalkrümmungen äquivalent,
$$| k_1, \ldots, k_{n-1}, s, q | \sim | \bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_{n-1}, \bar{s}, \bar{q} |,$$
wenn es zu einer stetigen Kurve $y \in \mathfrak{K}^0\Delta$ mit
$$K_1 y = k_1, \ldots, K_{n-1} y = k_{n-1},\ Sy = s$$
eine ganze Zahl q^* mit $q^* \geqq q$ und $q^* \geqq \bar{q}$ sowie stetige Kurven $\bar{y} \in \mathfrak{K}^0\Delta$, $y^* \in \mathfrak{K}^0\Delta$ derart gibt, daß
$$\mathfrak{K}_1 \bar{y} = \bar{k}_1, \ldots, K_{n-1}\bar{y} = \bar{k}_{n-1},\ S\bar{y} = \bar{s}$$
gilt und
$$D^{q^*-q} y^* - y \text{ sowie } D^{q^*-\bar{q}} y^* - \bar{y}$$
mit den üblichen Ableitungen existieren und für jede Koordinate ein Polynom vom Grade $< q$ resp. $< \bar{q}$ sind.

Zwei beliebige Systeme von Fundamentalkrümmungen einer Schar sind äquivalent und umgekehrt.

Eine weitere Äquivalenzrelation $\approx$ für Scharen von Systemen der Fundamentalkrümmungen führt unmittelbar zur Definition des Krümmungssystems einer verallgemeinerten Kurve. Diese gründet sich auf eine gemeinsame Eigenschaft verallgemeinerter Kurven x und z mit den offenen Definitonsintervallen Δ bzw. Δ_E.

Zwei Systeme der Fundamentalkrümmungen $\sigma(x, Q, p)$ und $\sigma(z, E, q)$ besitzen die Eigenschaft (C), wenn folgendes gilt:

für eine endliche ganze Zahl $m > 0$ existieren

m + 2 konstante Vektoren $c_h \in R^n$, $h = 1, \ldots, m + 2$,

m + 1 ganze Zahlen $p_i \geqq 0$ $(p_1 = p,\ p_{m+1} = q)$,

m verallgemeinerte Kurven y_j auf Δ_j, $j = 1, \ldots m$ (Δ_j offenes Intervall),

m unbeschränkt oft differenzierbare Funktionen φ_j mit $D\varphi_j \neq 0$ auf Δ_j

derart, daß folgende Gleichungen für Systeme von Fundamentalkrümmungen gelten:
$$\sigma(x + c_1, Q, p_1) = \sigma(y_1, Q, p_1)$$
$$\sigma(y_{\varkappa\varkappa+1} + c_{\varkappa+1}, Q_{\varkappa+1}, p_{\varkappa+1}) = \sigma(y_{\varkappa+1}, Q_{\varkappa+1}, p_{\varkappa+1}) \text{ für } \varkappa = 1, \ldots, m-1$$
$$\sigma(y_{m\,m+1} + c_{m+1}, E, p_{m+1}) = \sigma(z + c_{m+2}, E, p_{m+1});$$
dabei bildet φ_j das abgeschlossene Intervall Q_j auf Q_{j+1} $(Q_j \subset \Delta_j,\ Q_{j+1} \subset \Delta_{j+1})$ und y_j auf $y_{j\,j+1}$ ab $(Q = Q_1,\ E = Q_{m+1},\ \Delta = \Delta_1,\ \Delta_F = \Delta_{m+1})$.

Wir nennen nun zwei Scharen der Systeme der Fundamentalkrümmungen äquivalent,
$$\sigma(x, Q) \approx (z, E)$$
wenn jede dieser Scharen ein System der Fundamentalkrümmungen mit der Eigenschaft (C) enthält. Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch, und transitiv. *Die Klasse äquivalenter Scharen der Systeme der Fundamentalkrümmungen ist das Krümmungssystem von x in* Q:
$$\langle \sigma(x, Q) \rangle = \langle [\sigma(x, Q, p)] \rangle$$
Das Krümmungssystem von x in Δ ist
$$\langle \sigma(x, \Delta) \rangle = \{ \langle \sigma(x, Q) \rangle : \text{jedes } Q \subset \Delta \}$$

Jede verallgemeinerte Kurve x besitzt ein bestimmtes Krümmungssystem; es ist invariant bei Bewegungen im R^n und bei unbeschränkt oft differenzierbaren Transformationen φ des offenen oder abgeschlossenen Definitionsintervalls von x $(D\varphi \neq 0)$. Ist insbesondere x eine n mal stetig differenzierbare Kurve im R^n, deren erste $n-1$ Abteilungen linear unabhängig sind, dann gibt es eine eineindeutige Abbildung des aus der Bogenlänge s und den Krümmungen $k_1, \ldots, k_{n-1}$ von x bestehenden Systems $k_1, \ldots, k_{n-1}, s$ auf das Krümmungssystem $\langle \sigma(x, J) \rangle$ für jedes offene oder abgeschlossene Intervall J. Ferner ist durch ein Krümmungssystem eine verallgemeinerte Kurve bis auf Transformationen φ des Definitionsintervalls und Bewegungen im R^n eindeutig bestimmt; das Krümmungssystem dieser verallgemeinerten Kurven ist gleich dem ursprünglichen.

Literatur:

[1] *A. Wintner:* On the infinitesimal geometry of curves. Amer. Journal Math. 75, 1953

[2] : On Frenet equations. Amer. Journal Math. 78, 1956

[3] *P. Hartmann* and *A. Wintner:* On the fundamental equations of differential geometry. Amer. Journal Math. 72, 1950

[4] *K. Nomizu:* On Frenet equations for curves of class C^∞ Tohoku Mat. Journal 2. S., Vol. 11, Nr. 1, 1959

[5] *J Mikusinski* and *R. Sikorski:* The elementary theory of distributions (I). Pol. Ak. Nauk Inst. Mat. 1957

V. Niče (Zagreb): *Die Achsenkongruenz der Strahlenzylinder eines Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes.*

Die Strahlen des Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes bilden ∞^2 Zylinder 2. Grades, da dieser Komplex vom zweiten Grade ist. Die Achsen dieser Zylinder bilden eine Strahlenkongruenz, die in dem tetraedralen Strahlenkomplexe nicht enthalten ist. Mittels der bekannten Eigenschaften des Reyeschen tetraedralen Strahlenkomplexes und der Eigenschaften des Kurvenbüschels zweiten Grades können die Ordnung 3 und die Klasse 2 dieser Achsenkongruenz bestimmt werden, wenn dabei einige Regelflächen 5. Grades zu Hilfe genommen werden.

J. C. C. Nitsche (University of Minnesota): *Ein Eindeutigkeitssatz für zweifach zusammenhängende Minimalflächen.*

Der folgende Satz — ein gewisses Analogon zum Bernsteinschen Satz — wird bewiesen: „Es sei S eine zweifach zusammenhängende Minimalfläche mit der Darstellung $x = r(z, \psi) \cos\psi$, $y = r(z, \psi) \sin\psi$. Die Funktion $r(z, \psi)$ sei für alle Werte von z und ψ erklärt, zweimal stetig differenzierbar, positiv und periodisch: $r(z, \psi + 2\pi) = r(z, \psi)$. Dann muß S ein Katenoid mit einer zur z-Achse parallelen Achse sein." Unter der weiteren Voraussetzung, daß alle Schnittkurven S_c der Fläche mit den Ebenen $z = c$ konvex sind, war dasselbe Resultat schon früher bewiesen worden (J. Rat. Mech. Anal. **6**, 1957). Es handelt sich daher jetzt darum, zu zeigen, daß die Konvexität der Kurven S_c schon aus den oben formulierten Annahmen folgt.

J. Novák (Prag): *Über den Fundamentalquader, in dem die Topologie durch die Koordinatenkonvergenz definiert ist.*

Unter dem Fundamentalquader der Dimension $\mathfrak{a}$ versteht man das kartesische Produkt $Q = X\{X_a : a \varepsilon A\}$, wo $X_a = \langle 0, 1 \rangle$ für alle $a \varepsilon A$ und die Mächtigkeit der Menge A gleich $\mathfrak{a}$ ist. Die Topologie τ in Q ist mit Hilfe der Koordinatenkonvergenz definiert. Es ist bekannt, daß für $\mathfrak{a} \geqq 2^{\mathfrak{a}_0}$ ($\mathfrak{a}_0$ = Alef—null) Abschließungen in Q existieren, die nicht τ-abgeschlossen sind. Der Fundamentalquader hat folgende Eigenschaft:

(*) Zu jedem Punkt $z_0 \varepsilon Q$ und jeder Folge der Punkte $z_n \varepsilon Q$, die nicht gegen z_0 konvergiert, gibt es eine stetige (im Sinne der Konvergenz) reelle Funktion $f(z)$, $z \varepsilon Q$, derart, daß die Zahlenfolge $f(z_n)$ nicht gegen $f(z)$ konvergiert. Es gilt folgender Einbettungssatz: Jeder Raum L, in dem die Topologie mit Hilfe der Konvergenz definiert ist, ist homöomorph einer Teilmenge $Q(L) < Q$ dann und nur dann, wenn L die Eigenschaft (*) hat.

Die Vereinigungsmenge $\bigcup_{\xi \in \Omega} \tau^\xi Q(L)$ der sukzessiven Abschließungen der Menge $Q(L)$ in Q ist die kleinste $Q(L)$ enthaltende und τ-abgeschlossene Menge in Q. Sie hat einige ähnliche Eigenschaften wie die Stone-Čechsche bikompakte Hülle.

M. Pinl (Köln): *Die Äquivalenz konstanter und verschwindender Christoffelklammern zweiter Art.*

Sind $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = C^\lambda_{\alpha\beta}\, n^3$ im Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_n$ konstante Komponenten einer *allgemeinen linearen Übertragung,* so reduziert sich der zu dieser Übertragung gehörige Krümmungstensor mit den Komponenten $K^\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ auf die Konstanten

$$K^\lambda_{\alpha\beta\gamma} = C^\varrho_{\alpha\gamma}\, C^\lambda_{\varrho\beta} = C^\varrho_{\alpha\beta}\, C^\lambda_{\varrho\gamma}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \varrho = 1, 2, \ldots, n$$

und man kann die Konstanten $C^\lambda_{\alpha\beta}$ so wählen, daß alle $K^\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ verschwinden, aber auch so, daß nicht alle $K^\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ verschwinden. Es gibt also zwei Klassen linearer Übertragungen mit Komponenten $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$, die in einem geeigneten Koordinatensystem insgesamt konstant ausfallen. Im *Riemannschen* Raum sind die Komponenten der Übertragung $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ durch die Christoffelklammern zweier Art $\{{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta\}$ gegeben, welche mit dem metrischen Zusammenhang $g_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n)$ des Raumes durch die Differentialgleichungen

$$(*) \qquad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho} = g_{\lambda\alpha}\{{}_\varrho{}^\lambda{}_\beta\} + g_{\lambda\beta}\{{}_\varrho{}^\lambda{}_\alpha\} \qquad \alpha, \beta, \lambda, \varrho, = 1, 2, \ldots, n$$

zusammenhängen. Schreibt man $\{{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta\}$ als Konstantensysteme $C_\alpha{}^\lambda{}_\beta$ vor, und stellt die Integrabilitäts- und Anfangsbedingungen für das so modifizierte System (*), so ergibt sich für den Riemann-Christoffelschen Krümmungstensor $R^\lambda_{\alpha\beta\varrho}$ der Übertragung $R^\lambda_{\alpha\beta\varrho} = 0$, $\quad \alpha, \beta, \varrho, \lambda = 1, 2, \ldots, n.$ Geht man umgekehrt auf Grund von $R^\lambda_{\alpha\beta\gamma} = 0$ von einem Koordinatensystem mit lauter verschwindenden Christoffelklammern $\{{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta\} = 0$ aus, so kann man immer auf ein System $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ transformieren, in welchem die Christoffelklammern durch konstante, nicht insgesamt verschwindende Komponenten $\bar{c}_i{}^s{}_k$ gegeben sind, da die entsprechenden Transformationsformeln für die Christoffelklammern auf Integrabilitätsbedingungen führen, die nach Voraussetzung $(\bar{R}^s{}_{ikl} = 0)$ erfüllt sind.

Im Gegensatz zu allgemeinen linearen Übertragungen handelt es sich also bei Riemannschen Übertragungen mit konstanten Christoffelklammern zweiter Art immer um *euklidische* Räume. Das Ergebnis gilt auch noch in *reduzibel-singulären* Riemannschen Räumen, wenn man den Tensorkalkül auf Gruppen beschränkt, deren Transformationen „reduzierende" Koordinatensysteme (in welchen die Maßbestimmung von kanonischer Gestalt wird) wieder in reduzierende Koordinatensysteme überführen, und die Christoffelklammern geeignet definiert.

W. R a a b (Innsbruck): *Über Krümmungstensoren höherer Stufe.*

Während bei alternierenden Differentialformen mit *skalaren* Koeffizienten nach dem Satz von *Poincaré* keine höheren *äußeren* Ableitungen als erste vorkommen, erlauben alternierende Differentialformen, deren Koeffizienten *Tensoren* in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit sind, die Bildung von äußeren Differentialen beliebig hoher Ordnung, wenn die partiellen Ableitungen durch *kovariante* ersetzt werden. Der Prozeß der äußeren Ableitung von *geradzahliger* Differentiationsstufe, angewandt auf eine (nicht skalare) tensorielle Differentialform, hat die Wirkung einer linearen homogenen Transformation, deren Koeffizienten Tensorkomponenten sind: im Falle der Differentiationsstufe 2 die Komponenten des gewöhnlichen Riemannschen Krümmungstensors, im Falle höherer (geradzahliger) Differentiationsstufen Komponenten von „*Krümmungstensoren höherer Stufe*" mit ähnlichen Symmetrie- und Erhaltungseigenschaften (verallgemeinerten *Bianchi*schen Identitäten) wie die des Riemannschen Krümmungstensors.

H. R e i c h a r d t (Berlin): *Eine Aufspaltung von Windung und Krümmung in affin zusammenhängenden Räumen.*

In jedem Punkt einer m-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ eines affin zusammenhängenden Raumes $\mathfrak{A}$ der Dimension n sei eine direkte Zerlegung des n-dimensionalen lokalen Vektorraumes von $\mathfrak{A}$ gegeben. Zu jedem der Summanden gehört dann je ein Krümmungs- und ein Windungstensor, und die Beziehungen, die zwischen diesen Tensoren und gewissen durch die Zerlegung hervorgerufenen linearen Abbildungen einerseits und der Krümmung und Windung von $\mathfrak{A}$ andererseits bestehen, haben eine Gestalt, die sie als Verallgemeinerungen des Theorema egregium, der Formeln von *Codazzi* und der Identitäten von *Bianchi* erscheinen lassen. Diese Betrachtungen bilden eine einheitliche und durchsichtige Grundlage für die Theorie der höheren Krümmungen in den Teilräumen Riemannscher Räume und für die affine Differentialgeometrie.

W. R o e l c k e (Münster): *Invariante Zerlegungen der Eins in lokalkompakten Räumen mit diskontinuierlichen Gruppen.*

Es sei X ein lokal-kompakter Raum, Γ eine diskontinuierliche Gruppe topologischer Selbstabbildungen von X, der Quotientenraum X/Γ sei parakompakt. Dann gilt: X ist parakompakt, zu jeder (offenen) Überdeckung W von X gibt es eine (bei Γ) invariante Überdeckung A von X vom endlichen Typ, die sich W in gewisser Weise unterordnet, und A besitzt eine invariante Schrumpfung B. A heißt invariant, da die Transformationen aus Γ die Mengen von A nur permutieren. Zu A, B gibt es eine stetige invariante

Zerlegung Z der Eins. Z heißt invariant, da die Summanden von Z durch die Transformationen aus Γ nur permutiert werden. — Mit Hilfe invarianter Zerlegungen der Eins kann man z. B. n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Topologie und diskontinuierlicher Gruppe Γ invariante Maßbestimmungen aufprägen, so daß vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten entstehen und, falls $n \geqq 2$, ein vorgegebenes Volumenelement eingehalten wird.

Kilambi S r i n i v a s a c h a r y u l u (Paris): *Sur certaines variétés complexes et presque-complexes.*

1. On démontre les théorèmes suivants:
   a) Il esiste une seule structure presque-complexe homogène (et sa conjuguée) sur S_6.
   b) L'espace projectif complexe $P_n(C)$ admet seulement deux structures complexes homogènes, $n \geqq 1$.
   c) Il n'existe aucune structure presque-complexe sur l'espace projectif $P_n(K)$ sur les quaternions, pour $n \geqq 1$.
2. Soit G un groupe de Lie abélien complexe; soit P un espace fibré principal différentiable de groupe G, ayant pour base une variété complexe B. On démontre:
   a) L'espace des structures complexes sur P, compatibles avec la fibration, est connexe.
   b) Si G est un tore et B une variété kählérienne, l'espace des métriques kählériennes sur P, compatibles avec la fibration, est connexe.

P. S z á s z (Budapest): *Einfache Herstellung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene auf Grund der Hilbertschen Endenrechnung.*

Eine Gerade mit den Enden ξ, η werde mit (ξ, η), der Schnittpunkt der Geraden $(0, \infty)$ und $(-1, 1)$ mit $\mathfrak{O}$ bezeichnet. Ein Ende $\xi \neq \infty$ sei als Funktion des Winkels $\tau = \sphericalangle \infty \mathfrak{O} \xi$ aufgefaßt $\xi = f(\tau)$. Es wird gezeigt, daß $f(\tau)$ der Funktionalgleichung

$$f(\tau + \sigma) = \frac{f(\tau) f(\sigma) - 1}{f(\tau) + f(\sigma)} \tag{1}$$

genügt. Die üblichen Winkelfunktionen werden durch die Festsetzungen

$$\sin \tau = \frac{2f(\tau)}{f(\tau)^2 + 1}, \quad \cos \tau = \frac{f(\tau)^2 - 1}{f(\tau)^2 + 1} \tag{2}$$

und $\sin 2k\pi = 0$, $\cos 2k\pi = 1$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ eingeführt, wobei π den gestreckten Winkel bedeuten soll. Aus (1) und (2) folgen die gewohnten goniometrischen Formeln.

Errichtet man in einem Punkte von der Abszisse t der nach ∞ gerichteten Geraden $(0, \infty)$ das Lot, so werde das positive Ende dieses Lotes als die

Streckenfunktion $\mathfrak{E}(t)$ erklärt. Sie erfüllt gemäß der Definition der Multiplikation von Enden die Funktionalgleichung.

$$\mathfrak{E}(t_1)\ \mathfrak{E}(t_2) = \mathfrak{E}(t_1 + t_2). \tag{3}$$

Die weiteren Streckenfunktionen $\mathfrak{S}(t)$, $\mathfrak{C}(t)$, $\mathfrak{T}(t)$ werden mit Hilfe dieser $\mathfrak{E}(t)$, die ein Analogon der Exponentialfunktion ist, als Analoga der Hyperbelfunktionen definiert. Für den Parallelwinkel τ, der zur Paralleldistanz t gehört, gelten infolge (2) und (3) die Formeln

$$\sin\tau = 1/\mathfrak{C}(t),\ \cos\tau = \mathfrak{T}(t),\ \operatorname{ctg}\tau = \mathfrak{S}(t).$$

Es folgt sodann nach einer bekannten Methode von *K. Fladt*, mutatis mutandis die Herleitung der beiden Grundformeln

$$\mathfrak{S}(a) = \mathfrak{S}(c)\sin\lambda,\ \mathfrak{C}(c) = \operatorname{ctg}\lambda \operatorname{ctg}\mu$$

für das rechtwinklige Dreieck, dessen Bestimmungsstücke in üblicher Weise bezeichnet werden.

H. G. Tillmann (Heidelberg): *Approximationssätze für Halbgruppen von Operatoren in topologischen Vektorräumen.*

Sei X ein vollständiger lokalkonvexer Raum, $E(X)$ die Algebra der stetigen linearen Abbildungen von X in sich, versehen mit der Topologie der einfachen Konvergenz.

$\gamma = \{T(t)\}_{t>0}$ sei eine einparametrige, stetige Halbgruppe in $E(X)$:

1) $T(s+t) = T(s)\,T(t)$ für $s, t\ \varepsilon\ (0, \infty)$

2) $T(t_0)\,x = \lim\limits_{t\to t_0} T(t)\,x$ für jedes $x\ \varepsilon\ X$.

Der infinitesimale Operator A_0 einer solchen Halbgruppe ist gegeben durch $A_0 x = \lim\limits_{t\to 0} t^{-1}(T(t) - I)\,x$, sein Definitionsbereich D_{A_0} besteht aus allen x, für die dieser Limes im Sinne der Topologie τ von X existiert.

In Anlehnung an die Terminologie von Hille ([2] s. 320—322) heiße die Halbgruppe γ von der Klasse $(0, C_1)$ wenn noch gilt:

3) $\int\limits_0^1 P(T(s)\,x)ds < \infty$ für jede der die Topologie von X definierenden Halbnormen $\mathfrak{p}$. ($\int\limits_0^1 \|T(s)\,x\|\,ds < \infty$ für (B)-Räume).

4) a) $C(s) = s^{-1}\int\limits_0^s T(s)\,x ds\ \varepsilon\ E(X)$ und b) $\lim\limits_{s\to 0} C(s)\,x = x$ für alle $x \varepsilon X$.

(4a folgt aus 3), falls X tonneliert ist).

Für solche Halbgruppen werden in [3] einige Approximationssätze bewiesen, welche Resultate von Hille und Butzer ([2], Th. 10.7.2. und 10.5.4.)

und Butzer-Tillmann [1] verschärfen und für lokalkonvexe Räume verallgemeinern. U. a. gilt mit $B_t^k x = k!/t^k\,(T(t)\,x - \sum\limits_{j=0}^{k-l} t^j/j!\,A_0^j x)$ für $x\ \varepsilon\ D_{A_0^{K-1}}$

Ist $x\ \varepsilon\ D_{A_0^{K-1}}$, so ist für $x\ \varepsilon\ D_{A_0^K}$ notwendig, daß $\lim\limits_{t\to 0} B_t^k x\ (= A_0^k x)$ im Sinne der Topologie τ von X existiert.

Hinreichend ist bereits, daß $B_t^k x$ für $x \to 0$ einen schwachen Häufungspunkt besitzt.

Literatur:

[1] *Butzer-Tillmann:* Approximation theorems for semi-groups of bounded linear transformations. Math. Ann. **140** (1960)

[2] *Hille-Phillips:* Functional Analysis and Semi-groups. New York, 1957 (A. M. S. Coll. Publ. **31**, Revised ed.)

[3] *Tillmann:* Approximationssätze für Halbgruppen von Operatoren in topologischen Vektorräumen. Arch. d. Math. **11** (1960)

R. Wagner (Karlsruhe): *Bewegungsgruppen auf n-dimensionalen Quadriken.*

Untergruppen der projektiven Gruppe in n Dimensionen, die geeignete Richtelemente im kleinen genau frei beweglich machen, sind in einer früheren Arbeit (Math. Ann. 134) als allgemeine projektive Bewegungsgruppen bezeichnet worden. Sie können charakterisiert werden durch die Invarianz eines vollständigen Polarsystems, das seinerseits durch Erweiterung des Begriffes einer nichtausgearteten Polarität entsteht.

Das analoge Problem innerhalb der *MOEBIUS*gruppe führt vermöge stereographischer Projektion auf die Frage nach Bewegungsgruppen innerhalb der projektiven Gruppe einer Sphäre oder — allgemeiner — irgendeiner regulären n-dimensionalen Quadrik. Die Forderung wohlbestimmter, im kleinen freier Beweglichkeit von orthogonalen Tangenten-n-beinen befriedigen die Gruppen mit einem universellen Fixpunkt im Raume, und nur diese.

Die Einbettung einer Projektivität der Quadrik in eine solche des projektiven Raumes wird bereits durch die Erhaltung der komplanaren Lage von Punkten der Quadrik gewährleistet.

T. J. Willmore (Liverpool): *The cohomology of certain differential operators.*

An n-dimensional differentiable manifold M_n is such that it admits a complete system of disjoint distributions $\{T_a\}$, $a = 1, 2, \ldots, m$. It is shown that this system determines a vector-valued l-form h and hence a differentiation d_h of degree l over the graduated ring of scalar-valued forms defined over M_n. It is proved that the system of distributions is integrable if and only if the differentiation has zero square i. e. if $d_h^2 = 0$.

When this condition is satisfied, the differential operator d_h determines a cohomology structure over M_n. The operator d_h then satisfies a *Poincaré* lemma, and hence the cohomology determined by d_h is isomorphic to the *de Rham* cohomology associated with the exterior derivative operator d.

W. Wunderlich (Wien): *Axiale Ebenenverwandtschaften.*

Eine *„axiale Ebenenverwandtschaft"* im Sinne von *L. Eckhart* ist eine räumliche Ebenentransformation T, bei welcher entsprechende Ebenen τ, τ^* jeweils einen Normalstrahl einer festen Achse z gemeinsam haben, während ihre Winkel v, v^* gegen z durch eine gegebene Relation $f(v, v^*) = 0$ verknüpft sind. Eine solche Verwandtschaft ist invariant gegenüber jener dreigliedrigen *Ähnlichkeitsgruppe* G_3, welche die Achse z festläßt, die im folgenden stets lotrecht zu denken ist. Den waagrechten, zu z windschiefen Geraden g^* entsprechen in T untereinander ähnliche *Horizontalzylinder* Γ, die zur Festlegung der Verwandtschaft geeignet sind. Böschungstorsen gehen wieder in Böschungstorsen über, insbesondere *Böschungskegel* (Drehkegel mit lotrechter Achse) in ebensolche Kegel.

Bemerkenswert sind die einem *Ebenenbündel* mit nicht auf z liegendem Scheitel F^* entsprechenden *Flächen* Φ. Dieselben sind erzeugbar als Hüllgebilde von ∞^1 ähnlichen Horizontalzylindern Γ oder von ∞^1 Böschungskegeln Δ. Die Erzeugenden l^* eines dem Bündel F^* angehörenden Böschungskegels Δ^* führen auf ∞^1 untereinander ähnliche, Φ umschriebene *Torsen* Λ, und zwar gibt es sogar ∞^2 derartige Ähnlichkeitsscharen. Es zeigt sich nämlich, daß Φ im wesentlichen bereits durch Angabe des dem Bündelstrahl $g_0^* \perp F^*z$ zugeordneten Zylinders Γ_0 bestimmt ist, während die Achse z noch Parallelverschiebungen erfahren darf. Die Flächen Φ sind überdies durch *ebene Fallinien* ausgezeichnet; deren Grundrisse lassen sich als *zyklographische Bilder* des in der Symmetrieebene F^*z gelegenen Profils c_0 von Γ_0 für verschiedene Öffnungswinkel der Projektionskegel deuten, während die Schichtenlinien der Flächen zyklographische Bilder einer zu c_0 dualen Kurve sind. Damit erscheinen die Eigenschaften der *Eckhart*schen Fläche 4. Ordnung mit Kegelschnitten als Fall- und Schichtenlinien, die sich für $f(v, v^*) \equiv tg(v/2) \cdot (v^*/2) - k = 0$ einstellt, weitgehend verallgemeinert und erheblich erweitert.

SEKTION IV:

Angewandte Mathematik

E. J. Akutowicz (Montpellier): *Sur l'approximation par rapport a certaines normes quadratiques.*

On considère l'espace Hilbertien H_f des fonctions complexes définies sur la droite réelle avec le *produit* scalaire (ψ_1, ψ_2) donne par l'intégral de $\psi_1(x)\,\overline{\psi_2(x)}\,f(x)$, $f(x)$ étant une fonction positive dans L dont la reciproque est "à croissance lente": $\sup\,(f(x)(1+x^2)^k)^{-1} < \infty$. On désigne par k le plus petit entier tel que cette condition tient. Soit E un ensemble compact sur la droite.

On étudie l'approximation dans H_f d'une transformée de Fourier d'une mesure sur la droite par les transformées de Fourier des mesures dont les supports se trouvent dans E. On démontre que l'espace H_f est isomorphe à un espace W des distributions temperées d'énergie, finie, l'intégral d'énergie étant donnée par le noyau F = transformée de Fourier de la fonction f.

PROPOSITION 1. *Chaque élément de la fermeture dans W de l'ensemble des mesures dont les supports sont contenus dans E est le $k-1^{\text{ieme}}$ derivé d'une mesure m dont le support est contenu dans E.*

Nous avons l'analogue suivant d'un fait bien connu dans la théorie classique du potentiel.

PROPOSITION 2. *Soit $f(x)$ la reciproque d'un polynome. Soit W_E le sousespace de W dont les éléments ont leurs supports dans E. Alors la projection n_E d'une mesure n sur la droite dans W_E coïncide avec n à l'intérieur de E.*

PROPOSITION 3. *La fonction la plus proche à $\exp(itx)$, t pas en $[a, b]$, appartenant à la fermeture dans H_f de l'ensemble des transformées de Fourier des mesures dont les supports sont contenus dans $[a, b]$ est de la forme*

$$Q_1(x)\,exp\,(iax) + Q_2(x)\,exp\,(ibx)\,,$$

$Q_1(x)$ *et* $Q_2(x)$ *étant des polynomes de degré* $\leq k-1$.

Ces resultats ont des applications à la théorie de la prévision des processus aleatoires stationnaires.

O. B a i e r (München): *Die Kinematik des NSU-Wankel-Motors.*

Trochoiden entstehen als Bahnkurven sowohl von zwei verbundenen Kurbeln, als auch von aneinander abrollenden Kreisen auf je zweifache Weise. Für Dreh- und Kreiskolbenmaschinen sind gewisse Trochoidenformen geeignet, wobei die Querschnitte der Arbeitsräume durch die Trochoiden und ihre Hüllkurven bei bestimmter gegenseitiger Drehbewegung gebildet werden. Die Maschinen besitzen lediglich rotierende Teile. Läufer und Gegenläufer können mittels einer kinematischen Vorrichtung auf einfache Weise gefertigt werden.

H. J. B r e m e r m a n n (Berkeley): *Über lernende cybernetische Systeme.*

Es werden cybernetische Systeme betrachtet, die ein permanentes „Modell" ihrer Umwelt enthalten. „Modell" ist dabei mit Hilfe eines Homomorphismus der Umwelt auf eine Menge definiert, bei dem gewisse Strukturen erhalten bleiben. Bei der „zweckvollen" Reaktion auf die „Umwelt" bedient sich das cybernetische System des „Modells" und „verbessert" sein Reaktionsvermögen (lernt), indem es das Modell der Umwelt spontan verfeinert. Es wird ein möglicher Prozeß zur spontanen Verfeinerung des Modells beschrieben.

H. D i n g e s (Göttingen): *Brown'scher Prozeß und barometrische Höhenformel.*

Sei $x(t, \omega)$ die separable Version eines Brownschen Prozesses mit Trend; d. h. sei $x(t_2) - x(t_1)$ gaußisch mit Erwartungswert $a \,.\, (t_2 - t_1)$ und Varianz $s^2 \,.\, (t_2 - t_1)$ für $t_2 > t_1$ und $x(0) = 0$, also $Pr\{x(t_2) - x(t_1) \leqq x\} =$

$$= \operatorname{erfc}\left(\frac{-a \,.\, (t_2 - t_1) + x}{s \,.\, (t_2 - t_1)^{1/2}}\right)$$

Wir definieren die Zufallsvariablen

$$M(t, \omega) = \sup_{\tau \leqq t} x(\tau, \omega) \text{ und } Y(t, \omega) = M(t, \omega) - x(t, \omega)$$

Es gilt das folgende Spiegelungsprinzip für $0 < b \geqq x$

$$Pr\{x(t) \leqq x,\ M(t) \leqq b\} = \operatorname{erfc}\left(\frac{-at + x}{s \,.\, t^{1/2}}\right) -$$

$$- \exp\left(\frac{2ab}{s^2}\right) \,.\, \operatorname{erfc}\left(\frac{-at + x - 2b}{s \,.\, t^{1/2}}\right)$$

in Worten: ein absorbierender Rand in der Höhe b hat dieselbe Wirkung wie eine Gegenquelle der Stärke $-\exp\left(\frac{2ab}{s^2}\right)$ im Punkte $t = 0$, $x = 2b$.

Aus diesem Spiegelungsprinzip berechnet man

$$Pr\{M(t) \geqq p,\ Y(t) \geqq q\} = \exp\left(\frac{+2ab}{s^2}\right) \,.\, \operatorname{erfc}\left(\frac{-at - p - q}{s \,.\, t^{1/2}}\right) +$$

$$+ \exp\left(\frac{-2ab}{s^2}\right) \,.\, \operatorname{erfc}\left(\frac{+at - p - q}{s \,.\, t^{1/2}}\right) \,.\, p, q > 0$$

Ist $a = -c < 0$, dann ist $Y(t)$ ein Markoffscher Prozeß mit der stationären Verteilung $Pr\{Y(t) \geqq y\} = \exp\left(\frac{-2cy}{s^2}\right)$, und einem leicht zu berechnenden Kern. Diesen Prozeß könnte man als barometrischen Prozeß bezeichnen; denn er beschreibt das Verhalten der Brownschen Bewegung mit linearem Trend am reflektierenden Rand. Seine stationäre Verteilung ist die barometrische Höhenformel.

W. E b e r l (Wien): *Bemerkungen zu einer Formel für additive Mengenfunktionen.*

Es wird eine Formel für additive Mengenfunktionen hergeleitet, die als Sonderfälle das verallgemeinerte Additionstheorem der Wahrscheinlichkeitstheorie und den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines n-dimensionalen Intervalls durch die zugehörige Verteilungsfunktion enthält.

R. F i n n (Stanford University): *On a Perturbation Problem for the Navier-Stokes Equations.*

Time independent solutions $\mathfrak{w}(\underline{x})$ of the Navier-Stokes equations

(1) $\qquad \mu \Delta \mathfrak{w} - \varrho w \,.\, \nabla \mathfrak{w} - \nabla p = 0, \qquad \nabla \,.\, \mathfrak{w} = 0$

are considered, which are defined in the exterior ε of a closed surface Σ in three-dimensional Euclidean space $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Here μ is the viscosity coefficient of the fluid, ϱ the density (assumed constant), and p is the pressure. The velocity field $\mathfrak{w}(\underline{x})$ is assumed to take on prescribed data $\mathfrak{w}^*$ on Σ and to tend to a limit $\mathfrak{w}_0$ at infinity, and is studied as a function of ϱ as parameter. The perturbation, as $\varrho \to 0$, to the solution $\mathfrak{W}(\underline{x})$ of the linear equations

(2) $\qquad \mu \nabla \mathfrak{w} - \nabla p = 0, \qquad \nabla \,.\, \mathfrak{w} = 0$

is known to be singular in the infinite region. It is shown in the present work that uniformly in $\varepsilon + \Sigma$, $|\mathfrak{w}(\underline{x}) - \mathfrak{W}(x)| < C(\varrho^{1/2} r^{-1} + \varrho)$, where r denotes distance measured from a point interior to Σ, and C depends only on $\mathfrak{w}^*$, on $\mathfrak{w}_0$, and on Σ. Similar estimates are obtained for the derivatives of $\mathfrak{w}(\underline{x})$ and for the pressure. As an application, it is shown that the error resulting from use of the classical Stokes formula for the resistance of a sphere moving in a viscous fluid tends to zero as $O(p^{1/2})$.

The method is applied also to show that solutions of (1) in a bounded region depend continuously on the boundary data for small values of ϱ. In particular, it is shown that the solution is unique for all $\varrho < \varrho_0$, where ϱ_0 depends only on the boundary data and not, as in the known theorems, on a knowledge of one solution throughout the region.

J. Fuka (Prag): *Das zweite Problem der ebenen Elastizitätstheorie für den Fall des inkompressiblen Materials.*

In der Arbeit ist das zweite Problem der Elastizitätstheorie (am Rande sind Verschiebungen gegeben) für den Fall des inkompressiblen Materials ($\sigma = 1/2$, σ ist die Poissonsche Materialkonstante) formuliert. Es ist gezeigt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der Lösung dieses Problems lautet: die am Rande gegebenen Verschiebungen sind so beschaffen, daß sich der Flächeninhalt des Körpers nach der Deformation nicht ändert. Die Verschiebungen sind dann im ganzen Körper eindeutig bestimmt im Gegensatz zum Spannungstensor, dessen Komponente X_y eindeutig, die übrigen Komponenten X_x, Y_y nur bis auf dieselbe Konstante bestimmt sind. Physikalisch bedeutet diese Konstante die Belastung vom hydrostatischen Druck, die den Flächeninhalt eines inkompressiblen Körpers nicht ändern kann. Weiter ist mit Hilfe der Michlinschen Integralgleichung für glatte Randbedingung bewiesen, daß man diese Konstante so bestimmen kann, daß sich für $\sigma \to 1/2$ die Komponenten des Spannungstensors für $\sigma < 1/2$ (die bekanntlich eindeutig bestimmt sind) den Komponenten des Spannungstensors für $\sigma = 1/2$ nähern.

Als Anwendung dieser Theorie ist das zweite Problem der Elastizitätstheorie im exzentrischen Ringe mit Hilfe der homographischen Abbildung auf den Kreisring gelöst und die obenbesprochene Konstante bestimmt, ohne daß man das zweite Elastizitätsproblem für $\sigma < 1/2$ lösen müßte.

K. W. Gaede (München): *Lösung von Integralgleichungen unter Verwendung eines elektronischen Analogrechners.*

Zu Grunde gelegt sei ein elektronischer Analogrechner, der folgende Rechenelemente enthält: Addier-, Multiplizier-, Integrierelemente und Funktionsgeber. Alle Integrierelemente können nur nach der einzigen im Analogrechner zur Verfügung stehenden unabhängigen Variablen integrieren.

Deshalb lassen sich die Lösungen von Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art

$$\varphi(s) = f(s) + \int_0^a K(s,t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (1)$$

mit einem derartigen Analogrechner nur für eine gewisse Klasse von Kernen $K(s,t)$ als Funktionen der unabhängigen Variablen s kontinuierlich erzeugen.

Es gilt: Die Lösung $\psi(s)$ einer Fredholmschen Integralgleichung läßt sich mittels eines elektronischen Analogrechners genau dann kontinuierlich erzeugen, wenn die Integralgleichung von der Form ist

$$\psi(s) = f(s) + \int_0^a H(s,t)\,\psi(t)\,dt$$

wobei $f(s)$ in $[0, a]$ stückweise stetig ist und der Kern im Quadrat $\mathfrak{Q} := \{(s,t) \mid 0 \leqq s, t \leqq a\}$ folgendermaßen darstellbar ist: $\mathfrak{Q}$ sei zerlegt in einfach zusammenhängende Gebiete $\mathfrak{Q}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ mit stückweise glatten Rändern. Die $\mathfrak{Q}_\mu$ haben nur Randpunkte gemeinsam. Dann ist

$$H(s,t) = \sum_{\nu_\mu=1}^{n_\mu} k_{\nu_\mu}(s)\, l_{\nu_\mu}(t) \quad \text{für} \quad (s,t)\,\varepsilon\,\mathfrak{Q}_\mu \text{ und } n_\mu \geqq 0, \text{ ganz.}$$

Die $k_{\nu_\mu}(s)$ und $l_{\nu_\mu}(t)$ seien stetige Funktionen in Q_μ und 1 sei kein Eigenwert von $H(s,t)$. Wenn eine Integralgleichung dieser Art vorliegt, heiße sie „schaltbar“. Es läßt sich zeigen, daß die Lösung einer schaltbaren linearen Integralgleichung stets auf die Lösung eines Systems gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zurückführbar ist, und dafür ist ein elektronischer Analogrechner gut geeignet.

Um auch die Lösung einer nicht schaltbaren Integralgleichung (1) zu erhalten, approximiert man sie durch eine schaltbare Integralgleichung und löst diese mit dem Analogrechner. Ist $|H(s,t) - K(s,t)| \leqq r$ bekannt, so läßt sich daraus eine mit Hilfe des Analogrechners praktisch berechenbare obere Schranke für $|\varphi(s) - \psi(s)|$ angeben.

Lösungsverfahren und Fehlerabschätzung lassen sich auf den Fall übertragen, daß auf der linken Seite von (1) ein linearer Differentialausdruck in $\varphi(s)$ steht.

V. Hlavatý (Indiana University): *Theory of Motion in a Riemann Space and Electromagnetism.*

Let V be a Riemann space of n dimensions, G the group space of N dimensions of its full rotation group ($N = n(n-1)/2$) and A the cartesian product of V and G. V will be called regular if the space spanned by the generating tensors of its holonomy group H intersects the null cone of V in a non-degenerate cone. Only regular V will be considered.

A Killing vector and its covariant derivative are represented in A by a controvariant vector K (of $n + N$ components). The complete (infinite) set of integrability conditions of the Killing equations E is equivalent to a finite algebraic linear system S of homogeneous equations for K. The structure and rank of S depends on H. Every solution of S leads to a solution of E. The set of all these solutions constitutes a group, the number of parameters of which depends on H. If $n = 4$ and the index of inertia of V is 2 then every solution of S (of E) satisfies Maxwell equations for the electromagnetic tensor field. In the case of "empty" space (i. e. when the contracted curvature tensor is equal to zero) we have a pure radiation.

L. Holzer (Rostock): *Herleitung des Heaviside-Kalküls ohne Laplace-Transformation und Hakenintegrale.*

Der Vortrag zeigt, daß die Heaviside-Formel sich auf ganz einfachem Wege durch elementare-analytische Methoden beweisen läßt. Dabei ergibt sich auch, daß die manchmal vorkommende Einschränkung, daß alle charakteristischen Wurzeln nichtnegative Realteile haben müssen, überflüssig ist.

W. Knödel (Wien): *Kürzeste Wege in einem Streckennetz.*

R. Bellman hat ein Verfahren zur Errechnung der kürzesten Wege in einem Streckennetz angegeben, wenn die Längen der einzelnen Strecken bekannt sind. Offensichtlich unabhängig davon hat eine andere Gruppe von Autoren, an ihrer Spitze L. R. Ford und E. W. Dijkstra, das Problem gleichfalls behandelt. Es wird eine Abänderung des erstgenannten Verfahrens zur Diskussion gestellt, die — ursprünglich ohne Kenntnis der Methode Bellmans entwickelt und praktisch erprobt — im allgemeinen mit geringerem Arbeitsaufwand zum Ziel führen dürfte.

Pentti Laasonen (Helsinki): *Die Größenordnung des Fehlers beim Differenzenverfahren elliptischer Gleichungen.*

Wird zur angenäherten Lösung eines Problems, das eine elliptische Differentialgleichung in einem ebenen Bereich sowie sachgemäße Randbedingungen enthält, der stetige Variablenbereich durch ein Netz mit endlich vielen Gitterpunkten und der Differentialoperator durch irgendeinen entsprechenden algebraischen Differenzenoperator ersetzt, so wird der hierdurch veranlaßte Fehler an der Erfüllung der elliptischen Gleichung üblicherweise durch eine zugehörige Potenz h^m der Maschenweite h bemessen. Es ist doch meistens irreführend zu schließen, daß diese Potenz auch die Größenordnung des Annäherungsfehlers der erhaltenen Lösung wiedergibt. Die durch die Näherungsordnung des Differenzenoperators bestimmte Potenz ist nämlich auch bei sachgemäßer Beachtung der Randbedingungen im allgemeinen maßgebend nur in den Fällen, wo sowohl die Berandung des Bereiches als auch die Randwerte einheitlich analytisch sind. In den praktisch überaus wichtigsten Fällen, wo die Berandung sowie die Randwerte nur stückweise analytisch sind, spielen die Winkelgrößen der Ecken eine entscheidende Rolle, und zwar in dem Sinne, daß je größer die Winkel, desto kleiner $\varkappa$ in dem asymptotischen Potenzausdruck $h^{\varkappa}$ des Fehlers ist. Gewisse explizite Regeln betreffend den Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und der Winkelgröße sind theoretisch begründet und von durchgerechneten Beispielen empirisch bestätigt worden. Sie ergeben das im ersten Augenblick überraschende Resultat, daß die Größenordnung des Fehlers überall in dem Bereich nur von der Winkelgröße einer einzigen (gewöhnlich der größten) Ecke abhängt. Diese Sachlage ruft die Möglichkeit gewisser praktischer Maßnahmen zur Vermeidung einer unnötig schlechten Genauigkeit hervor.

P. Lesky (Innsbruck): *Die Übersetzung der klassischen orthogonalen Polynome in die Differenzenrechnung.*

Die klassischen orthogonalen Polynome können mit der Formel von Rodrigues von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus betrachtet werden. So beweist *Tricomi* (Vorlesungen über Orthogonalreihen, Springer-Verlag) den Satz:

Die Funktion

$$y_n(x) = \frac{1}{C_n p(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{p(x)\,[X(x)]^n\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gebildet mit

$$X(x) = \begin{cases} (x-a)\,(b-x) & \text{für } |a| < \infty, |b| < \infty \\ x-a & \text{für } |a| < \infty, \ b = \infty \\ 1 & \text{für } -a = b = \infty \end{cases}$$

und einer Gewichtsfunktion $p(x)$ im Intervall (a, b), ist dann und nur dann ein Polynom vom Grad n in x, wenn $p(x)$, abgesehen von multiplikativen Konstanten oder einfachen Abszissentransformationen, gegeben ist durch

$$p(x) = \begin{cases} (x-a)^{\beta}\,(b-x)^{\alpha} & \text{mit } \alpha > -1, \beta > -1 \text{ für } |a| < \infty, |b| < \infty \\ e^{-x}\,(x-a)^{\alpha} & \text{mit } \alpha > -1, \qquad \text{für } |a| < \infty, \ b = \infty \\ e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{für } -a = b = \infty. \end{cases}$$

Ist dies der Fall, so sind die Polynome $y_n(x)$ bezüglich der Gewichtsfunktion $p(x)$ orthogonal. Legt man die Konstante C_n auf folgende Art fest:

$$C_n = \begin{cases} (-2)^n\, n! \\ n! \\ (-1)^n, \end{cases}$$

dann handelt es sich in dieser Reihenfolge um die *Jakobischen, Laguerreschen* und *Hermiteschen* Polynome.

Die Übersetzung dieses Satzes in die Differenzenrechnung lautet:

Der Ausdruck

$$y_{\nu n} = \frac{1}{C_\nu p_n} \Delta^{\nu} \{p_n X_n X_{n-1} \ldots X_{n-\nu+1}\}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$n = A, A+1, \ldots, B-1, B,$$

gebildet mit

$$X_n = \begin{cases} (n-A)\,(B-n+\alpha+1) & \text{für } |A| < \infty, |B| < \infty, \ B-A \text{ ganz} \\ n-A & \text{für } |A| < \infty, B = \infty \\ n-A & \text{für } |A| < \infty, B = \infty \end{cases}$$

und einer Gewichtsfunktion p_n im Intervall (A, B), ist dann und nur dann ein Polynom vom Grade ν in n, wenn p_n gegeben ist durch

$$p_n = \begin{cases} \binom{n-A+\beta}{n-A}\binom{B-n+\alpha}{B-n} & \text{mit } \alpha, \beta \neq -1, -2, \ldots \quad \text{für } |A| < \infty, |B| < \infty \\ e^{-n}\binom{n-A+\alpha}{n-A} & \text{mit } \alpha \neq -1, -2, \ldots \quad \text{für } |A| < \infty,\ B = \infty \\ \dfrac{a^{-n}}{(n-A)!} & \text{mit } a > 0 \quad \text{für } |A| < \infty,\ B = \infty. \end{cases}$$

Ist dies der Fall, dann sind die Polynome $y_{\nu n}$ bezüglich der Gewichtsfunktion p_n orthogonal. Legt man die Konstante C_ν auf folgende Art fest:

$$C_\nu = \begin{cases} (-1)^\nu\ (\alpha + 1; 1; \nu)\ (\beta + 1; 1; \nu) \\ (\alpha + 1; 1; \nu) \\ \nu!, \end{cases}$$

dann handelt es sich in dieser Reihenfolge um die *verallgemeinerten Tschebyschewschen Interpolationspolynome*, die *Elemente der Laguerreschen Matrizen* und die *Polynome von Charlier*.

Der Vortragende zeigt, daß man zu diesen klassischen und übersetzten Polynomen einfach mit Hilfe eines Variationsprinzipes gelangt, das auf einem Satz von *Gröbner* beruht. Eine anschließende Diskussion der Formel von *Rodrigues* erlaubt dann den Beweis dieses in die Differenzenrechnung übersetzten Satzes.

M. Malet (Paris): *Sur la conservation de forme des équations de la mécanique dans un changement de système de référence.*

Etant donné un système d'équations (*M*), si l'on procède à un changement de système de référence en appliquant une transformation $T\ (x'y'z't'/xyzt)$ il peut arriver que les nouvelles équations (*M'*) aient même forme que les relations (*M*). Toutefois, cette conservation de forme peut être parfaite (fonctions inaltérées) ou exiger l'intervention de *formules de passage* pour les grandeurs mécaniques ou physiques.

Cas des équations de la mécanique avec application du groupe du mouvement relatif de Newton. Conservation imparfaite des relations de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Application aux équations de Maxwell:

1° Solution de *Lorentz* avec la formule

$$H' = H - 1 / c\ [\mu, E]$$

et avec son groupe de transformation.

2° Solution avec $H' = H$ et le groupe de Galileé au cas du mouvement relatif uniforme et d'un mouvement de translation quelconque.

Pham Mauquan (Paris): *Sur la dynamique analytique du point en relativité restreinte.*

L'espace temps V_4 de *Minkowski* étant rapporté à des coordonnées curvilignes quelconques x^α. Soit $ds^2 = g\alpha\beta\ dx^\alpha\ dx^\beta$ sa métrique.

Dans un domaine où règne un champ de forces Φ^α dérivant d'un potentiel scalaire V, on donne aux équations du mouvement du point la nouvelle forme:

$$(1) \qquad (E-V)\ \nabla\ u^\alpha / ds = -\partial_p V\ (g^{p\alpha} - u^p u^\alpha) \quad \left(\partial_p = \frac{\partial}{\partial xp}\right)$$

où E est l'énergie propre du point, $u^\alpha = dx^\alpha / ds$ le vecteur vitesse unitaire, ∇ l'opérateur de differentiation covariante.

Les équations (1) redonnent tous les résultats classiques, aux conections relativistes près. Elles servent du point de départ pour formuler la dynamique analytique du point en relativité restreinte sous une forme invariante et intrinsèque adaptée à l'étude et à l'extension relativiste des propriétés des équations du mouvement. On en déduit en particulier un énoncé généralisant le principe d'action maupertuisienne

$$S = \int^{x1}_{x0} L\ du = \int^{x1}_{x0} (E-V)\ \sqrt{g\alpha\beta\ dx^\alpha\ dx^\beta})$$

l'invariant intégral relatif des équations du mouvement et l'expression de la fonction hamiltonienne

$$H = \pm \sqrt{g^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta} - (E-V) \quad \left(\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial X^\alpha}\right),\ X = dx / dt$$

permet d'étendre la théorie de *Hamilton-Jacobi* en dynamique relativiste du point.

H. Niemeyer (New York): *Über elektromagnetische Eigenschwingungen in Hohlräumen.*

Asymptotische Aussagen über Eigenfunktionen sind zum ersten Male 1934 von *T. Carleman* für die Schwingungsgleichung abgeleitet worden. *A. G. Avakumovic* bewies 1952, daß das Fehlerglied in diesen asymptotischen Beziehungen verschärft werden kann. Entsprechende Aussagen über elektromagnetische Eigenschwingungen waren bisher nicht bekannt.

Es soll gezeigt werden, daß analoge verschärfte asymptotische Beziehungen auch für elektromagnetische Eigenschwingungen gelten. Diese Aussagen betreffen vor allem das Verhalten der Partialsummen der Bilinearentwicklungen der Eigenschwingungen. Als wichtiges Hilfsmittel wird ein Tauberscher Satz für die Laplacetransformation benutzt, der von *A. E. Ingham* 1934 bewiesen worden ist.

A. Pignedoli (Bologna): *Über die Lagrangeschen Gleichungen der Mechanik eines raschen Teilchens. Sulle equazioni Lagrangiane della meccanica di una particella di alta energia.*

Nel presente lavoro si considera in generale la impostazione lagrangiana della dinamica relativistica di una particella materiale assimilabile ad un punto, nell'ambito dello schema deterministico, cioè non quantistico. A fondamento della meccanica della particella di alta energia considerata si può assumere un principio variazionale della forma:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{L}_p + \mathfrak{L}_i)\, dt = 0,$$

dove $\mathfrak{L}_p$ la "funzione lagrangiana della particella" ed $\mathfrak{L}_i$ la "funzione lagrangiana di inter-azione".

Se ne deducono alcune proposizioni che estendono quelle della meccanica analitica classica, in particolare l'integrale generalizzato della forze vive e, nel caso della ignorabilità di una coordinata, per fissare le idee q_1, il corrispondente integrale relativistico del momento cinetico.

Si studia il caso in cui le forze generalizzate siano funzioni lineari delle accelerazioni e quadratiche delle velocità lagrangiane, cioè il caso in cui la funzione lagrangiana sia della forma, molto generale:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_p + \mathfrak{L}_i =$$

$$\mathfrak{L}_p (q, \dot{q}, t) + U + \Sigma_s U_s \dot{q}_s + 1/2\, \Sigma_{st}\, U_{st}\, \dot{q}_s\, \dot{q}_t, \ (U_{st} = U_{ts}),$$

$$U = U (q, t),\ U_s = U_s (q, t),\ U_{st} = U_{st} (q, t),\ p = dq/dt\ ;$$

dove con q si intende indicare il complesso di tutte le coordinate lagrangiane q_1, q_2, q_3 e con $\dot{q}$ quello delle velocità lagrangiane $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$. Nel caso in cui si abbia la ignorabilità di una coordinata, sussiste in corrispondenza l'integrale primo relativistico del momento cinetico e si hanno inoltre due equazioni lagrangiane scritte in funzione di una "lagrangiana ridotta". Se inoltre il tempo non figura esplicitamente in quest'ultima, sussiste ancora per le equazioni sopradette l'integrale dell'energia, che assume la forma:

$$\sum_{j=2}^{3} \left(\frac{\delta \mathfrak{L} p}{\delta \dot{q}_j}\, \dot{q}_j + U_j\, \dot{q}_j\right) + \sum_{j=2}^{3} \sum_{s=1}^{3} U_{sj}\, \dot{q}_s\, \dot{q}_j - \mathfrak{L}_p - U -$$

$$- \sum_{s=1}^{3} U_s\, \dot{q}_s - 1/2 \sum_{st\ 1}^{3} U_{st}\, \dot{q}_s\, \dot{q}_t + a_1\, \dot{q}_1 = \text{costante.}$$

Si rivolge particolare attenzione a due problemi. Il primo è quello del moto, con riferimento ad un sistema di coordinate cilindriche r, φ, z, di una particella elettrizzata veloce in un campo elettrico ed in un campo magnetico sovrapposti, nel caso in cui il potenziale scalare V e le componenti del potenziale vettore, A_1, A_2, A_3, siano funzioni tutte indipendenti, oltre che dal tempo, anche dalla coordinata φ o dalla coordinata z. Sussistono allora l'integrale generalizzato relativistico dell'energia ed un integrale relativistico del momento cinetico corrispondente alla coordinata ciclica. Tale integrale contiene in particolare quelli classici già stabiliti da *Agostinelli* e successivamente estesi da *Boggio*.

Il secondo problema è quello del moto di un elettrone veloce in presenza di un altro elettrone, qualora si assuma come schema di inter-azione elettrodinamica fra le due particelle quello fornito dalla formula di *Weber*. In materia va osservato che, per quanto la formula di *Weber* non fornisca la

reale inter-azione fra le due particelle, nel presente lavoro si fa vedere come tale formula consenta la deduzione di relazioni numeriche che si traducono nel seguente notevole risultato; *solo se la distanza r fra i due elettroni è dell'ordine di* 10^{-12} *cm. è possibile l'esistenza di moti oscillatori.*

R. Reißig (Berlin): *Über die asymptotische Stabilität im Ganzen bei der Duffingschen Gleichung.*

Einfache Schwingungsaufgaben der Mechanik führen auf die als Duffingsche Gleichung bekannte nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung, bei der eine überlineare Kennlinie des Rückstellgliedes vorausgesetzt wird. Im autonomen Falle sind die Stabilitätsverhältnisse vollständig klar und lassen sich mittels Ljapunowscher Funktionen leicht nachprüfen. Anders ist es im nichtautomatischen Falle, z. B. bei periodischer Fremderregung. Ist dann ein Dämpfungsglied vorhanden, so nimmt man bei praktischen Berechnungen an, daß eine asymptotisch stabile Lösung existiert. Um die asymptotische Stabilität im Ganzen exakt nachzuweisen, verfährt man folgendermaßen. Man zeigt erst nach einer Methode, die sich aus der Ljapunowschen Stabilitätstheorie ergibt, daß alle Lösungen in Zukunft gleich beschränkt sind, und berechnet die Schranken. Dann konstruiert man eine Ljapunowsche Funktion, die innerhalb von diesen einem verallgemeinerten Satz über asymptotische Stabilität genügt. Dabei findet man Bedingungen für die in der Duffingschen Gleichung enthaltenen Koeffizienten; diese Bedingungen, die numerisch ausgewertet werden können, hängen von der Wahl der verwendeten Ljapunowschen Funktionen ab.

Alfréd Rényi (Budapest): *Über verschiedene Maßzahlen von Entropie und Informationsgewinn.*

Zuerst wird eine neue axiomatische Charakterisierung der Entropie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben. Dabei werden auch unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Betracht gezogen. Eine unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Verteilung einer verallgemeinerten Zufallsveränderlichen, d. h. einer auf einem meßbaren Teil des zugrundegelegten Wahrscheinlichkeitsfeldes definierten meßbaren Funktion. So eine verallgemeinerte Zufallsveränderliche kann als das Resultat eines solchen, vom Zufall abhängenden Experimentes interpretiert werden, welches nicht immer, sondern nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit beobachtet werden kann. Eine endliche diskrete unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist einfach ein System $\{p_k\} = P$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ von positiven Zahlen mit $\Theta < \Sigma_k\, p_k \leqq 1$. Die Shannonsche Entropie einer solchen Verteilung ist

(1) $$H_1 (P) = (\Sigma_k\, p_k \log_2 p_k^{-1}) : \Sigma_k\, p_k$$

Neben (1) werden auch andere Maßzahlen der Entropie betrachtet, nämlich die Größen

(2) $$H\alpha\, (P) = (1 - \alpha)^{-1} \log_2 [\Sigma_k\, p_k^{\alpha} : \Sigma_k\, p_k],$$

die Entropien der Ordnung $\alpha > 0$ der verallgemeinerten Verteilung $\{p_k\} = P$.

Für $\alpha \to 1$ strebt $H_\alpha(P)$ gegen $H_1(P)$. Die Entropien der Ordnung α werden auch durch gewisse Axiome charakterisiert. Eine analoge axiomatische Charakterisierung wird für den Informationsgewinn beim Übergang von der Verteilung $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ zur Verteilung $Q = (q_1, q_2, \ldots q_n)$ gegeben. Die Maßzahl α-ter Ordnung dieses Informationsgewinns ist (falls die Verteilung P und Q beide vollständig sind, d. h. $\Sigma_k p_k = \Sigma_k q_k = 1$ ist) für $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

$$I\alpha (Q \mid P) = (\alpha - 1)^{-1} \log_2 (\Sigma_k q_k^\alpha p_k^{1-\alpha}) \tag{3}$$

Für $\alpha \to 1$ strebt $I_\alpha (Q \mid P)$ gegen $I_1 (Q \mid P)$, wobei

$$I_1 (Q \mid P) = \Sigma_k q_k \log_2 (q_k : p_k) \tag{4}$$

der Shannonsche Informationsgewinn beim Übergang von der Verteilung $P = \{p_k\}$ zur Verteilung $Q = \{q_k\}$ ist. Es wird gezeigt, daß die Maßzahlen α-ter Ordnung der Entropie bzw. des Informationsgewinnes analog Eigenschaften zu den entsprechenden Shannonschen Größen besitzen. Es wird ferner gezeigt, welche Eigenschaften die Shannonschen Größen auszeichnen.

R. Sauer (München): *Numerische Experimente in der Gasdynamik.*

Es wird über Ergebnisse berichtet, die mit Hilfe der programmgesteuerten elektronischen Rechenanlage in München (PERM) erzielt wurden. Herr *G. Seegmüller* untersuchte die Fehlerfortpflanzung bei nichtlinearen Anfangswertproblemen partieller hyperbolischer Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus und gelangte dabei zu sehr genauen praktischen Fehlerabschätzungen. Herr *W. Werner* bestätigte durch numerische Experimente die Instabilität stationärer stoßfreier Profilströmungen vom gemischten Typus.

D. Suschowk (München): *Klassifikation der Ausstrahlungslösungen der Wellengleichung bei beliebiger Raumdimension.*

Ausgehend von einer Identität für Ausstrahlungsintegrale (*AI*) vom Faltungstypus des radial-zeitlichen Anteils des Wellenoperators gelangt man zu einem hypergeometrischen Differentialausdruck, dem die Kerne der *AI* zu genügen haben. Bei gerader (Ortsraum-) Dimension führt eine der beiden (einparametrigen) Lösungsscharen aus dem Fundamentalsystem des Differentialausdrucks zu Lösungen des homogenen Ausstrahlungsproblems (*AP*), während mittels der zweiten Schar Lösungen eines inhomogenen *AP* konstruiert werden können. Bei ungerader Dimension kann das homogene *AP* ebenfalls stets durch *AI* vom Faltungstypus gelöst werden, während *AI* für das inhomogene AP allein im dreidimensionalen Fall existieren. Für die auftretenden *AI* werden explizite Umkehrformeln angegeben.

L. Vietoris (Innsbruck): *Ein mit Hilfe seines Schattens gelenkter Integraph.*

Der in der ZAMM **24**, S. 43—44, beschriebene Grundintegraph wird vorgeführt und eine an ihm angebrachte Einrichtung zur Kompensation der in der Zeitschrift für Instrumentenkunde **64**, S. 123—129, behandelten Fehlerquelle gezeigt.

P. Werner (Aachen): *Mathematische Behandlung akustischer Beugungsprobleme.*

Die Untersuchung stationärer akustischer Wellenfelder in einem flüssigen oder gasförmigen Medium mit der Dichteverteilung $\varrho\ (\mathfrak{x})$ und der Schallgeschwindigkeitsverteilung $c\ (\mathfrak{x})$ führt auf die Gleichung

$$\varrho \nabla (1/\varrho \nabla U) + \varkappa^2 U = O \quad (\varkappa = \omega/c), \tag{1}$$

aus deren Lösungen sich die Geschwindigkeitsverteilung $\mathfrak{v}\ (\mathfrak{x}, t)$ und die Druckverteilung $p\ (\mathfrak{x}, t)$ durch $\mathfrak{v} = 1/\varrho \nabla \Phi$ und $p - p_0 = -\partial\Phi/\partial t$ mit $\Phi = Re\ \{U\ (\mathfrak{x})\ e^{-i\omega t}\}$ berechnen (p_0 = Druck im Ruhestand). Wir setzen voraus, daß ϱ und $\varkappa$ im Äußeren einer genügend großen Kugel $|\mathfrak{x}| = R$ konstant sind. Für $|\mathfrak{x}| > R$ geht dann (1) in die Helmholtzsche Schwingungsgleichung über, so daß die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung zur Charakterisierung der physikalisch realisierbaren Lösungen von (1) übernommen werden kann.

Ein stationäres akustisches Wellenfeld kann durch einen in das Medium M eingebetteten festen Körper K erzeugt werden, der elastische Schwingungen mit der Frequenz ω vollführt. Die Berechnung des durch K erzeugten Wellenfeldes führt auf folgende Aufgabe: Es ist eine Funktion U zu bestimmen, die im Äußeren von K die Gleichung (1) und die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllt und deren Normalableitung auf der Randfläche F von K vorgegebene stetige Randwerte besitzt (Neumannsches Außenraumproblem). Es wird gezeigt, daß diese Aufgabe unter naheliegenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für ϱ, $\varkappa$ und F genau eine Lösung besitzt, die durch Auflösung Fredholmscher Integralgleichungen gewonnen werden kann.

K.-H. Wolff (Wien): *Über spezielle stochastische Prozesse.*

In der kollektiven Risikotheorie der Versicherungsmathematik tritt folgendes Problem auf: Im Zeitpunkt t_0 beginnt eine Versicherungsgesellschaft ihre Geschäftsabwicklung mit dem Kapital $K\ (t_0)$. Im weiteren Verlauf erhält die Gesellschaft Prämieneinnahmen und muß Schadenszahlungen leisten. Diese Einnahmen und Ausgaben sind zufällige Größen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Kapital der Gesellschaft $K\ (t)$ in irgendeinem Zeitpunkt t aus einem Zeitintervall $(t_0, t_1]$ negativ wird.

Anders formuliert lautet das Problem folgendermaßen: es ist ein zufälliger Prozeß $x\ (t)$ gegeben. Setzt man

$$\inf_{t_0 < t \leqq t_1} x(t) = I(t_0, t_1),$$

dann ist die Wahrscheinlichkeit

$$W\{I(t_0, t_1) < a \mid x(t_0) = x_0\}$$

gesucht, also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $x(t) < a$ für irgendein $t \varepsilon (t_0, t_1]$ gilt, unter der Voraussetzung $x(t_0) = x_0$. Dabei ist a ein beliebiger Parameter.

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält man unter bestimmten wenig einschränkenden Voraussetzungen über den stochastischen Prozeß eine Lebesque-Stieltjessche Integrodifferentialgleichung mit eindeutiger Lösung.

S. K. Zaremba (Wales): *Eine Verallgemeinerung des Wilcoxonschen Testes.*

Wenn Stichproben zweier unabhängigen zufälligen Veränderlichen mit Verteilungsfunktionen F und G vorhanden sind, erlaubt der Wilcoxonsche Test bekanntlich nur eine Wahl zwischen den Hypothesen: „F ist immer gleich G" und „F ist immer größer (bzw. kleiner) als G". Man muß also eine ziemlich weitgehende Annahme im Voraus machen, um den Test anzuwenden.

Es wird vorgeschlagen, den Test so zu verallgemeinern, daß es ohne jede a priori Annahme über die beiden Verteilungsfunktionen möglich wird, die folgende Frage im Sinne der statistischen Entscheidungstheorie zu beantworten: Ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Veränderliche einen größeren Wert als die andere annimmt, gleich oder größer (bzw. kleiner) als 1/2? Den vorgeschlagenen Test kann man auch zur Untersuchung nichtmetrischer Preferenzen anwenden.

Die Testgröße enthält gewisse Kovarianzen, die beim ursprünglichen Test unter der Nullhypothese bekannt waren, jetzt aber eingeschätzt werden müssen. Jedoch gibt es für sie untere und obere Schranken, die voneinander nicht sehr entfernt sind und in manchen Fällen ohne Schätzung der Kovarianzen eine Entscheidung ermöglichen.

SEKTION V:

Philosophie und Geschichte der Mathematik

P. Kriezis (Athen): *Über die Definition der Wahrscheinlichkeit.*

Ist M ein Merkmalraum, so soll jede Mengenfunktion $P(.)$, welche den Wahrscheinlichkeitsaxiomen genügt, ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf M heißen. Die relative Häufigkeit $R(.) = N(.)/N$ in einer Menge E von N Elementen ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Es wird die Definition vorgeschlagen: „Wahrscheinlichkeiten $W(.)$ sind Schätzwerte relativer Häufigkeiten in einer Menge E einer gewissen Klasse, welche Wahrscheinlichkeitsmaße sind."

Man kann zeigen, daß alle bisher vorgeschlagenen Wahrscheinlichkeitsdefinitionen Spezialfälle dieser allgemeinen Definition sind, und kann sie nach der Schätzungsmethode und der Klasse, der E angehört, einteilen. $W(.)$ heißt objektiv, wenn die Klasse und die Schätzungsmethode objektiv sind. Sonst heißt $W(.)$ subjektiv.

Exakte $W(.)$ sind exakte Schätzwerte in einer gegebenen Menge E. *Asymptotische* $W(.)$ in unendlichen Folgen endlicher Mengen E_n sind die Schätzwerte $W(.) = \lim_{n \to \infty} R_n(.)$, falls sie existieren. *Folgenwahrscheinlichkeiten* sind asymptotische $W(.)$ in den Anfangsabschnitten einer Elementenfolge. *Klassische* $W(.)$ sind Schätzwerte in Mengen mit einer gegebenen Symmetrie. *Likelihoods* sind klassische $W(.)$ in Mengen von Stichproben aus einer gegebenen Menge. *Statistische* $W(.)$ sind Schätzwerte in Stichproben oder auf Grund von Stichproben. *Naturwissenschaftliche* $W(.)$ sind Schätzwerte in Mengen oder Folgen physikalischer Objekte.

Logische $W(.)$ sind exakte $W(.)$ in logischen Klassen von Sätzen. *Intuitive (psychologische)* $W(.)$ sind Schätzwerte in Mengen von Sätzen (Ereignissen), die subjektiv als „gleichwahrscheinlich" betrachtet werden. *Persönliche* $W(.)$ sind persönliche Schätzwerte von relativen Häufigkeiten in objektiven Mengen.

A. Oberschelp (Hannover): *Eine Modifikation des Kalküls des natürlichen Schließens.*

Der Quinesche Kalkül des natürlichen Schließens hat nicht die Eigenschaft, daß stets wieder ein Beweis entsteht, wenn man zwei Beweise hintereinander schreibt, weil die Bedingungen an die markierten Variablen verletzt sein

können. Das hat die unangenehme Auswirkung, daß man im Verlauf einer Ableitung einen bereits bewiesenen Hilfssatz u. U. erst mit einem passend geänderten Beweis übernehmen kann.
Es wird gezeigt, wie man den Kalkül so ändern kann, daß diese Unzuträglichkeit verschwindet. Dazu wird eine neue Sorte von Beweiszeilen (sog. *bewiesene Zeilen)* und eine weitere Regel zur Einführung dieser Zeilen *(Beweisregel)* hinzugenommen. Die alten Regeln werden so modifiziert, daß sie nur auf Zeilen anwendbar sind, die bewiesen sind oder die nicht bewiesen sind und auf die keine spätere bewiesene Zeile folgt *(Hilfszeilen)*. Die Beweisregel entspricht der alten Bedingung an die markierten Variablen, jedoch nur in bezug auf die Hilfszeilen, und erlaubt die Umwandlung der letzten Zeile in eine bewiesene Zeile.

L. Rieger (Prag): *Die axiomatische dyadische Arithmetik und ihre Modelle.*

In der mathematischen Logik hat man seit mehr als zwei Jahrzehnten (nach dem Vorbild von *Skolem* und von *Gödel*) sogenannte nichtnormale (non-standard) Modelle der *Peano*schen Arithmetik der natürlichen Zahlen betrachtet. Sie blieben aber bisher fast ohne Interesse der Zahlentheoretiker. Einerseits nämlich liefert die *Peano*sche Arithmetik (mit ihren unendlich vielen Axiomen) keineswegs eine mathematisch befriedigende implizite Definition des Begriffes „natürliche Zahl" (etwa analog der impliziten Definition des Punkt- und Geradenbegriffes einer axiomatischen ebenen Geometrie). Anderseits sind die bisherigen nichtnormalen Modelle der Arithmetik wesentlich metamathematisch definiert; sie sind also nicht etwa von der Bestimmungsart des bekannten *Poincaré*schen Modells der nichteuklidischen *(Lobatschewski*schen) ebenen Geometrie (als durch Mittel der euklidischen Ebene konstruiert). So werden die „nichtnormalen natürlichen Zahlen" der mathematischen Logik meistens als etwas nicht genug mathematisch gesichertes empfunden und jedenfalls nicht als ein Gegenstand der eigentlichen Zahlentheorie anerkannt. Die überwiegende Mehrheit der Zahlentheoretiker (aber auch der Logiker) sieht die natürliche Zahlenreihe 1, 2, 3 ... (oder vielleicht besser /, //, /// ...) absolut — intuitiv an, mit klarer Evidenz, was die drei Punkte eigentlich heißen.

In meinem Vortrag möchte ich gerne eine axiomatische und der intuitiven gegengesetzte Einsicht in die Grundlagen der Zahlentheorie darlegen, die vielleicht für den Zahlentheoretiker nicht ohne Interesse sein wird, da man hier keine Metamathematik braucht.

Es wird nämlich ein gut übersehbares System von 19 elementaren Axiomen für die intuitiv wohlbekannten *ganzen Henselschen dyadischen Zahlen* (= ganzen p — adischen Zahlen für $p = 2$) angegeben, mit *drei* einzigen Grundbegriffen, d. h. *Grundoperationen:* der *Addition*, der *Multiplikation* und der *Potenzierung von 2;* dieses Axiomensystem der sog. *dyadischen Arithmetik* ist folgenderweise beschaffen:

1. Außer den gewöhnlichen Rechengesetzen läßt sich auf Grund der Axiome der Begriff der *„endlichen" ganzen dyadischen Zahl* abstrakt erklären und für ihn ein starkes Induktionsprinzip beweisen; somit alles was sich in der elementaren Zahlentheorie beweisen läßt, läßt sich ebenso beweisen für jede Art der „endlichen" ganzen dyadischen Zahlen; (es könnte aber für die letztgenannten auch mehr gelten).

2. Es lassen sich im Rahmen der axiomatischen Mengentheorie von *Bernays* und *Gödel* für diese axiomatische dyadische Arithmetik ohne jede metamathematische Hilfsmittel verschiedene Modelle konstruieren, sogar solche, welche einen beliebig vorgeschriebenen Abschnitt der Klasse der transfiniten Ordinalzahlen unter den „endlichen" ganzen dyadischen Zahlen enthält.

3. Es werden unter Benützung der Methoden der allgemeinen *Krull*schen Bewertungstheorie der algebraischen Körper, bzw. Integritätsbereiche, einige strukturelle Grundeigenschaften dieser nichtnormalen Modelle der axiomatischen dyadischen Arithmetik gezeigt und die Verschiedenartigkeit dieser Modelle (d. h. gewisser Integritätsbereiche mit dem Potenzieren von 2 durch die Elemente des Bereiches) erläutert.

4. Es wird schließlich die Frage diskutiert, ob man in solchen Modellen bisher offene klassische elementare Zahlenhypothesen verifizieren, oder ev. auch falsifizieren könnte, in einer rohen Analogie zu der Paralellenhypothese der Geometrie.

Th. Skolem (Oslo): *Einige Untersuchungen über das Komprehensionsaxiom.*

In der Arbeit „Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom" in Zeitsch. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., Bd. 3, S. 1—17 (1957) zeigte Skolem, daß Widersprüche der ursprünglichen Mengenlehre wie die Russellsche Antinomie verschwinden, falls eine unendlich vielwertige Logik von Lukasiewicz zugrunde gelegt wird. Es wurde nämlich in jener Arbeit bewiesen, daß das Komprehensionsaxiom und ein Axiom der Extensionalität erfüllbar sind, wenn nur definierende Aussagen ohne Quantoren zugelassen werden. In einer anderen Arbeit, die in Math. Scand. erscheinen wird, wurde später bewiesen, daß dasselbe schon in einer gewissen 3wertigen Logik gilt. Kommt die Negation nicht in den definierenden Aussagen vor, so bleibt das noch gültig in der gewöhnlichen 2wertigen Logik. Für die letzte Tatsache soll auf dem V. Österreichischen Kongreß ein kurzer Beweis gegeben werden mit Bemerkungen darüber, wie die Sache geändert wird, wenn auch die Negation zugelassen wird. — Hoffentlich wird es später möglich werden, diese Untersuchung auf den allgemeinen Fall auszudehnen, daß in den definierenden Aussagen auch Quantoren vorkommen.

V. Vučković (Belgrad): *Rekursive Wortarithmetik.*

Auf der Menge $\Omega(A)$ aller Wörter über einem Alphabet $A = \{S_0, \ldots, S_{n-1}\}$ wird eine rekursive Arithmetik als ein reiner Gleichungskalkül entwickelt und ihre Anwendungsmöglichkeiten diskutiert.
Die Arbeit erscheint in Publ. Math. Belgrade.

TEILNEHMER-VERZEICHNIS

Aczél János, Prof. Univ. Debrecen, Ungarn
Adam Adolf, Doz. Univ. Wien, Österreich
Akutowicz Edwin J., Prof. Univ. Montpellier, Frankreich
Albrecht Rudolf, Doz. T. H. München, Deutschland
Antosiewicz H. A., Prof. Univ. South. Calif., Los Angeles, U. S. A.; Mrs. Rose T. Antosiewicz
Al-Katifi Wafica, B. Sc. M. Sc., London
Apéry Roger, Prof. Faculté des Sciences, Caen, Frankreich
Avakumović Vojislav, Gastprof. Univ. Gießen, Deutschland

Bachmann Karl-Heinz, Akad. d. Wiss., Berlin-Weißensee, Deutschland; Frau Irene Bachmann
Baglin Henri, Ing. Comm. Energie Atom., Sceaux/Seine, Frankreich
Baier Othmar, Prof. T. H. München, Deutschland; Frau Baier
Bárász Judith, Adjunkt Agrarwiss. Univ. Budapest, Ungarn
Barner Martin, Prof. T. H. Karlsruhe, Deutschland
Barton Magda, Agrarwiss. Univ. Budapest, Ungarn
Batt Jürgen, Ass. T. H. Aachen, Deutschland
Bauer Friedrich-Wilhelm, Doz. Univ. Frankfurt am Main, Deutschland; Frau Ilse Bauer
Bauer Heinz, Doz. Univ. Hamburg, Deutschland; Frau Irene Bauer
Baur Karl, Dr. Ing., Ulm, Deutschland
Becken Sigrid, Ass. Univ. Hamburg, Deutschland
Beckert Herbert, Prof. Univ. Leipzig, Deutschland
Bereis Rudolf, Prof. T. H. Dresden, Deutschland
Berger Robert, Ass. Univ. Heidelberg, Deutschland
Bernstein Leon, Doz. Univ. Tel-Aviv, Israel
Berz Edgar, Ass. Univ. Gießen, Deutschland
Betsch Gerhard, Ass. Univ. Tübingen, Deutschland
Biermann Kurt-R., wiss. Mitarbeiter Dt. Akad. d. Wiss. Berlin, Deutschland
Bihari Edith, Ass. T. H. Budapest, Ungarn
Bihari Imre, Adjunkt T. H. Budapest, Ungarn
Bilinski Stanko, Prof. Univ. Zagreb, Jugoslawien
Blanuša Danilo, Prof. Univ. Zagreb, Jugoslawien
Blaschke Wilhelm, Prof. emer. Univ. Hamburg, Deutschland
Boerner Hermann, Prof. Univ. Gießen, Deutschland; Frau Boerner

Böhm Johannes, Ass. Univ. Jena, Deutschland
Bolder Harm, Koninklijke Shell-Lab. Amsterdam, Niederlande
Boll Ludwig, Lektor, Berlin, Deutschland
Bompiani Enrico, Prof. Univ. Rom, Italien
Bomze Josef, Ass. T. H. Wien, Österreich
van Bouchout Vincent, Prof. Univ. Löwen, Belgien
Brands Joseph, J. A. M., Delft, Niederlande
Brelot M. E., Prof. Sorbonne Paris, Frankreich; Mme. Brelot
Bremermann Hans, Prof. Univ. of California, U. S. A.; Frau Maria Isabel Bremermann
Breuer Manfred, Ass. Univ. Bonn, Deutschland
Bruins E. M., Prof. Univ. Amsterdam, Niederlande
Bucur Ion, wiss. Sekr. Univ. Bukarest, Rumänien
Budach Lothar, Dipl. Math., Berlin, Deutschland
Bueckner Hans, Prof. Univ. of Wisconsin, U. S. A.
Bukovics Erich, Prof. T. H. Wien, Österreich; Frau Brigitte Bukovics
Burau Werner, Prof. Univ. Hamburg, Deutschland
Bureau Florent-J., Prof. Univ. Liège, Belgien
Butzer Paul L., Prof. T. H. Aachen, Deutschland

Cap Ferdinand, Prof. Univ. Innsbruck, Österreich
Cigler Johann, Ass. Univ. Mainz, Deutschland
Collatz Lothar, Prof. Univ. Hamburg, Deutschland; Frau Collatz
Colautti Maria Pia, Ass. Univ. Triest, Italien
Cremer Hubert, Prof. T. H. Aachen, Deutschland
Crowe Donald W., Lecturer Univ. College Ibadan, Nigeria

Dallmann Herbert, Prof. Univ. Halle/Saale, Deutschland
Dankert N. E., Mailand, Italien
Davies Evan Tom, Prof. Univ. Southampton, Großbritannien
Decuypper Marcel, Prof. Univ. Lille, Frankreich; Mme. Claire Decuypper
Deicke Arno, Doz. Univ. Southampton, Großbritannien
Delange Hubert, Prof. Sorbonne Paris, Frankreich
de Vito Luciano, Doz. Univ. Rom, Italien
Dieter Ulrich, Ass. Univ. Kiel, Deutschland
Dinges Hermann, Ass. Univ. Göttingen, Deutschland
Dinghas Alexander, Prof. Freie Univ. Berlin, Deutschland
Docquier Ferdinand, Ass. T.H. Aachen, Deutschland; Frl. Ilse Kucharzik
Dolinsky Rostislaw, Studienrat, Grevenbroich-Elsen, Deutschland

Eberl Walther, Doz. T. H. Wien, Österreich
Edge William Leonard, Reader Univ. Edinburgh, Großbritannien
Ehlich Hartmut, Ass. Univ. Tübingen, Deutschland
Eichhorn Wolfgang, Ass. Univ. Würzburg, Deutschland
Einsele-Birkhäuser Carl, Verleger, Basel, Schweiz
Ellers Erich, Ass. Univ. Hamburg, Deutschland
Elster Karl-Heinz, Doz. T. H. Leuna-Merseburg, Deutschland
Epheser Helmut, Prof. T. H. Hannover, Deutschland; Frl. Ilse Epheser
Erdös Paul, Prof. Univ. of Melbourne, Australien
Erwe Friedhelm, Ass. Univ. Bonn, Deutschland

Fages France, C. N. R. S. Paris, Frankreich
Faure Robert, Prof. Univ. Dakar, Senegal; Mme. Françoise Faure
Fava Franco, Prof. Politecnico Turin, Italien; Signora Grazia Fava
Fichera Gaetano, Prof. Univ. Rom, Italien; Signora Matelda Fichera
Fiedler Heinz, Gießen/Lahn, Deutschland
Finn Robert, Prof. Univ. Stanford, Calif., U. S. A.; Mrs. Margaret Finn
Flor Peter, Ass. Univ. Heidelberg, Deutschland
Franz Wolfgang, Prof. Univ. Frankfurt a. Main, Deutschland; Frau Ruth Franz
Fuka Jaroslav, wiss. Arb. a. d. Tschech. Akad. d. Wiss., Prag, C. S. R.
Fullerton Robert E., Prof. Univ. of Maryland, U. S. A.

Gádor Piroska, Doz. Päd. Inst. Budapest, Ungarn
Gaede Karl-Walter, Ass. T. H. München, Deutschland
Giering Oswald, Ass. T. H. Stuttgart, Deutschland
Gloden Albert, Prof. à l'Athénée Luxemburg, Luxemburg; Mme. Yvonne Gloden
Godeaux Lucien, Prof. Univ. Liège, Belgien; Mme. L. Godeaux
Gottschling Erhard, Ass. Freie Univ. Berlin, Deutschland
Görmar Karl, Doz. Ingenieurschule Saarbrücken, Deutschland
Grabow Ulrich, Ass., Hildesheim, Deutschland
Grad Arthur, Nat. Science Foundation Washington, U. S. A.
Gröbner Wolfgang, Prof. Univ. Innsbruck, Österreich
Grotemeyer Karl Peter, Prof. Freie Univ. Berlin, Deutschland; Frau Sigrid Grotemeyer
Grunsky Helmut, Prof. Univ. Würzburg, Deutschland; Frau Grunsky

Haack Wolfgang, Prof. T. U. Berlin, Deutschland; Frau Dr. Marianne Haack

Haacke Wolfhart, Baurat, Dortmund, Deutschland;
Frau Waltraut Haacke

Habetha Klaus, Ass. T. U. Berlin, Deutschland

Hannich Marie, Prof., Triest, Italien

Harzheim Egbert, Ass. Univ. Köln, Deutschland

Hasse Helmut, Prof. Univ. Hamburg, Deutschland; Frau Clara Hasse

Hasse Maria, Prof. T. H. Dresden, Deutschland; Frau Charlotte Hasse

Heinemann Hannelore, Göttingen, Deutschland

Heinrich Helmut, Prof. T. H. Dresden, Deutschland;
Frau Lieselotte Heinrich

Heinrich Irma, Ministerialrat, München, Deutschland

Heisig Herbert, Dr.-Ing., Stuttgart, Deutschland

Hellwig Günter, Prof. T. U. Berlin, Deutschland

Helmberg Gilbert, Doz. Univ. Mainz, Deutschland;
Frau Dr. Thea Helmberg

Henze E., Forschungsinstitut Telefunken, Ulm, Deutschland

Herrmann Oskar, Ass. Univ. Heidelberg, Deutschland

Hewitt Edwin, Prof. Univ. Washington. U. S. A.

Hlavaty Vaclav, Prof. Univ. Indiana, U. S. A.

Hlawka Edmund, Prof. Univ. Wien, Österreich

Hofreiter Nikolaus, Prof. Univ. Wien, Österreich
Frau Dr. Margarete Hofreiter

Hoheisel Guido, Prof. Univ. Köln, Deutschland; Frau Hoheisel

Hohenberg Fritz, Prof. T. H. Graz, Österreich

Hölder Ernst, Prof. Univ. Mainz, Deutschland; Frau Ragna Hölder

Holzer Ludwig, Prof. Univ. Rostock, Deutschland; Frau Steffi Holzer

Hornich Hans, Prof. T. H. Wien, Österreich

Horninger Heinz, Prof. Univ. Istanbul, Türkei

Iglisch Rudolf, Prof. T. H. Braunschweig, Deutschland;
Frau Irma Iglisch, Eckehard Iglisch

Ilieff Ljubomir, Prof. Univ. Sofia, Bulgarien; Frau Maria Iliewa

Inzinger Rudolf, Prof. T. H. Wien, Österreich

Izbicki Herbert, Wien, Österreich

Jaenicke Joachim, Ass. T. U. Berlin, Deutschland; Frau Edith Jaenicke

Jansen Kurt, Dipl. Math. Battelle-Institut Frankfurt a. Main, Deutschland

Jurkat Wolfgang, Prof. Univ. Syracuse, U. S. A.

Kaerkes Rolf, Ass. T. H. Aachen, Deutschland

Kaluza Theodor, Prof. T. H. Hannover, Deutschland; Frau Kaluza

Kamke Erich, Prof. Univ. Tübingen, Deutschland

Kanold Hans-Joachim, Prof. T. H. Braunschweig, Deutschland

Kappos Demetrios A., Prof. Univ. Athen, Griechenland

Karzel Helmut, Doz. Univ. Hamburg, Deutschland;
Frau Marianne Karzel, Frl. Christa Dahlmann

Kasch Friedrich, Doz. Univ. Heidelberg, Deutschland

Kaufhold Günter, Köln-Mühlheim, Deutschland

Keller Ott-Heinrich, Prof. Univ. Halle/Saale, Deutschland;
Frau Hanna Keller

Klee Viktor, Prof. Univ. Seattle, Washington, U. S. A.;
Mrs. Elizabeth Klee, Miss Wendy Klee, Miss Barbara Klee, Miss Susan Klee

Kleinfeld Erwin, Prof. Ohio State Univ., Ohio, U. S. A.;
Mrs. Ruth Kleinfeld

Klingen Helmut, Doz. Univ. Göttingen, Deutschland

Klingenberg Wilhelm, Prof. Univ. Göttingen, Deutschland

Klötzler Rolf, Doz. Univ. Leipzig, Deutschland; Frau Helga Klötzler

Kneser Martin, Prof. T. H. München, Deutschland; Frau Jutta Kneser

Knödel Walter, Prof. T. H. Wien, Österreich

Koch Alois, Prof. Mont. H. Leoben, Österreich

Kolberg Franz, wiss. Mitarbeiter T. H. Aachen, Deutschland

König Heinz, Prof. T. H. Aachen, Deutschland; Frau Helga König

Körner Otto, Dipl. Math., Wagenfeld, Deutschland

Koschmieder Lothar, Prof. emer. Univ. Tübingen, Deutschland;
Frau Luise Koschmieder, Frl. Gerda Koschmieder

Kowalsky H. J., Prof. Univ. Erlangen, Deutschland

Kreyszig Erwin, Prof. T. H. Graz, Österreich

Kriezis Peter, Prof. T. H. Athen, Griechenland

Kruppa Erwin, Prof. emer. T. H. Wien, Österreich

Kuipers L., Prof. T. H. Delft, Niederlande

Kultze Rolf, Ass. Univ. Heidelberg, Deutschland

Kuntze Karlheinz, Studienrat Akad. f. Bautechnik München, Deutschland;
Frau Kuntze

Kunz Ernst, Ass. Univ. Heidelberg, Deutschland

Laasonen Pentti, Prof. T. H. Helsinki, Finnland

Lamprecht Erich, Doz. Univ. Würzburg, Deutschland

Legatos Gerassimos, Ass. Univ. Athen, Griechenland; Mme. Legatos

Lehmann N. Joachim, Prof. T. H. Dresden, Deutschland;
Frau Dr. Dolly W. Lehmann

Lehnigk Siegfried H., Section Chief, Huntsville, Alabama, U. S. A.

Leis Rolf, Ass. T. H. Aachen, Deutschland

L e l o n g Pierre, Prof. Sorbonne Paris, Frankreich
L e n s e Josef, Prof. T. H. München, Deutschland; Frau Dr. Eugenie Lense
L e p t i n Horst, Oberass. Univ. Hamburg, Deutschland
L e s k y Peter, Doz. Univ. Innsbruck, Österreich
van L i n t Jacobus H., Prof. T. H. Eindhoven, Niederlande
L o c h s Gustav, Prof. Univ. Innsbruck, Österreich; Frau Herta Lochs
L ö s c h Friedrich, Prof. T. H. Stuttgart, Deutschland; Frau Else Lösch
L y n d o n Roger C., Prof. Univ. of Michigan, Princeton, N. J., U. S. A.; Mrs. Lyndon

M a a k Wilhelm, Prof. Univ. Göttingen, Deutschland; Frau Trude Maak
M a a ß Dieter, Ass. T. H. Karlsruhe, Deutschland
M a i e r Wilhelm, Prof. Univ. Jena, Deutschland; Frau Alice Maier
M a l e t Henri, Ing. Ponts et Chaussées, Paris, Frankreich; Mme. Michéle Malet, Christian Malet
M a l l i o s Anastassios, Ass. Univ. Athen, Griechenland
M a n d l Georg, Amsterdam, Niederlande
M a r u h n Karl, Prof. Univ. Gießen, Deutschland
M a t z k e Horst, Prof., Weimar, Deutschland; Frau Maria Matzke
M a u r i n Krzystof, Doz. Univ. Warschau, Polen
M a z z a r o l i Innocente, Ass. Univ. Triest, Italien
M e i s Theodor, Ass. Univ. Münster/Westfalen, Deutschland
M e i s t e r Erhard, Doz. Univ. Saarbrücken, Deutschland
M i c h a l o p o u l o s Nicolaus, Prof. Cons. de l'Educ., Athen, Griechenland; Frau Anastasia Michalopoulos
M o g k Eberhard, Gießen, Deutschland
M o l n á r Josef, Adjunkt, Univ. Budapest, Ungarn
M o n t e i r o T h e m u d o Marilia Alda, Prof. Porto, Portugal; Frl. Maria Helena Monteiro Themudo
M ü l l e r Claus, Prof. T. H. Aachen, Deutschland
M ü l l e r P. Heinz, Prof. T. H. Dresden, Deutschland

N a a s Josef, Prof. Akad. d. Wiss. Berlin, Deutschland
N a s t o l d Hans-Joachim, Ass. Univ. Heidelberg, Deutschland
N e u b a u e r Gerhard, Ass. Univ. Heidelberg, Deutschland
N e u b u s s e r Joachim, Ass. Univ. Kiel, Deutschland
N i č e Vilko, Prof. Univ. Zagreb, Jugoslawien
N i e m e y e r Horst, Ass. Univ. New York, U. S. A.
N i t s c h e Johannes C. C., Prof. Univ. Minnesota, Minneapolis, U. S. A.
N ö b a u e r Wilfried, Doz. Univ. Wien, Österreich
N o r g u e t François, Chef de Travaux, Sorbonne Paris, Frankreich
N o v á k Josef, Prof. Univ. Prag, C. S. R.

O b e r s c h e l p Arnold, Ass. T. H. Hannover, Deutschland
O b e r s c h e l p Walter, wiss. Ass. Univ. Münster, Deutschland
O e r t e l Lothar, Ulm, Deutschland
d' O r g e v a l Bernard, Prof. Univ. Dijon, Frankreich; Mlle. Bugette

P a n n w i t z Erika, Schriftl. Zentralblatt f. Math., Berlin, Deutschland
P a n t e l i d i s Georg, Ass. Univ. Heidelberg, Deutschland
P á s z t o r István, Adjunkt Univ. Budapest, Ungarn
P e n n i n g Jan Christian, wiss. Mitarbeiter T. H. Delft, Niederlande
P e r e m a n s Wouter, Prof. T. H. Eindhoven, Niederlande; Frau Peremans
P e s c h l Ernst, Prof. Univ. Bonn, Deutschland, Frau Dr. Maria Peschl
P e t e r s s o n Hans, Prof. Univ. Münster/Westfalen, Deutschland; Frau Margarethe Petersson
P e y e r i m h o f f Alexander, Prof. Univ. Gießen, Deutschland; Frau Dr. Isolde Peyerimhoff
P e y o v i t c h Tadija, Prof. Univ. Belgrad, Jugoslawien; Mme. Ljubiza Peyovitch
P h a m Mau-Quan, Prof. Univ. Besançon, Frankreich; Mme. Pham, Mlle. Iréne, Ngoe Yên Pham
P h a m Tan-Hoang, C. N. R. S. Paris, Frankreich
P i c c a r d Sophie, Prof. Univ. Neuchâtel, Schweiz
P i e h l e r Joachim, Merseburg, Deutschland
P i g n e d o l i Antonio, Prof. Univ. Bologna, Italien
P i n l Maximilian, Prof. Univ. Köln, Deutschland; Frau Johanna Pinl
P o g o r z e l s k i Witold, Prof. Univ. Warschau, Polen
P o p o v Blagoj, Prof. Univ. Skopje, Jugoslawien
P ö s c h l Klaus, Doz. T. H. München, Deutschland
P r a c h a r Karl, Prof. Univ. Wien, Österreich

R a a b Werner, Ass. Univ. Innsbruck, Österreich
R a d b r u c h Knut, Ass. Univ. Tübingen, Deutschland
R a s a j s k i Borivoj, Prof. Univ. Belgrad, Jugoslawien
R e i c h a r d t Hans, Prof. Univ. Berlin, Deutschland; Frau Wally Reichardt
R e i ß i g Rolf, Prof. Univ. Berlin, Deutschland
R e i t e r Hans, Lecturer Univ. Newcastle upon Tyne, Großbritannien
R e j t ö Magda, Doz. Univ. Budapest, Ungarn
R e m m e r t Reinhold, Prof. Univ. Erlangen, Deutschland; Frau Renate Remmert
R é n y i Alfréd, Prof. Univ. Budapest, Ungarn; Herr Béla Takács, Frau Marianna Takács
R é n y i Katalin, Ass. Univ. Budapest, Ungarn

Richert Hans-Egon, Doz. Univ. Göttingen, Deutschland
Rieger Ladislav, wiss. Arb., Prag, C. S. R.
Rigby F. D., Office of Nav. Res., Washington, U. S. A.
Ringel Gerhard, Prof. Univ. Bonn, Deutschland; Frau Isolde Ringel
Rinow Willi, Prof. Univ. Greifswald, Deutschland; Frau Ruth Rinow
Röhrl Helmut, Prof. Univ. Minnesota, U. S. A.
Roelcke Walter, Doz. Univ. Münster/Westfalen, Deutschland
Roumieu Charles, Prof. Univ. Montpellier, Frankreich; Mme. Roumieu
Roquette Peter, Prof. Univ. Tübingen, Deutschland; Frau Roquette
Rühs Fritz, Prof. Bergakad. Freiberg, Deutschland; Frau Christia Rühs
Runck Paul Otto, Ass. Univ. Würzburg, Deutschland
Rüßmann Helmut, Ass. Freie Univ. Berlin, Deutschland

Sachs Horst, Ass. Univ. Halle/Saale, Deutschland; Frau Barbara Sachs
Sauer Robert, Prof. T. H. München, Deutschland
Schaal Hermann, Ass. T. H. Stuttgart, Deutschland
Schatz Heinrich, Prof. Univ. Innsbruck, Österreich; Frau Dr. Eleonore Schatz
Schiffels Gerhard, Koblenz, Deutschland
Schlagbauer Hartmut, Ass. T. H. Braunschweig, Deutschland; Frau Schlagbauer
Schmidt Hermann, Prof. Univ. Würzburg, Deutschland
Scholl Inge, Ass. Freie Univ. Berlin, Deutschland
Schottlaender Stefan, Doz. T. H. Hannover, Deutschland; Frau Ruth Schottlaender
Schubert Hans, Prof. Univ. Halle/Saale, Deutschland; Frau Dr. Schubert
Schuder Werner, Verleger, Berlin, Deutschland
Schütte Kurt, Prof. Univ. Marburg/Lahn, Deutschland
Schwarz Friedrich, wiss. Hilfskr. Univ. Würzburg, Deutschland
Schwarz Wolfgang, Ass. Univ. Freiburg i. Br., Deutschland
Sedmak Viktor, Doz. Univ. Zagreb, Jugoslawien
Seebach Karl, Prof. T. H. München, Deutschland; Frau Wilma Seebach
Seip Ulrich, München, Deutschland
Shapiro Harold S., Prof. Univ. New York, U. S. A.
Skolem Thoralf, Prof. emer. Univ. Oslo, Norwegen; Frau Edith Skolem, Frl. Elisabeth Skolem
Sommer Friedrich, Prof. Univ. Würzburg, Deutschland
Sperner Emanuel, Prof. Univ. Hamburg, Deutschland; Frau Antonie Sperner
Springer T. A., Prof. Univ. Utrecht, Niederlande; Frau T. Springer

Srinivasacharyulu Kilambi, Paris, Frankreich
Stein Elise, Prof. Chelsea Polytechnic London, Großbritannien
Stein Karl, Prof. Univ. München, Deutschland; Frau Dora Stein
Stoilow Simion, Prof. Univ. Bukarest, Rumänien; Mme. Paula Stoilow
Stojaković Mirko, Prof. Univ. Novi Sad, Jugoslawien
Stoll Wilhelm, Doz. Univ. Tübingen, Deutschland
Strubecker Karl, Prof. T. H. Karlsruhe, Deutschland; Frau Hildegard Strubecker
Styrman Gunnel, Göteborg, Schweden
Suschowk Dietrich, Doz. T. H. München, Deutschland
Szász Paul, Prof. Univ. Budapest, Ungarn; Frau Dr. Nora Szász
Szép Jenö, Prof. Univ. Budapest, Ungarn; Frau Szép

Tamaschke Olaf, Ass. Univ. Tübingen, Deutschland
Taussky-Todd Olga, Inst. of Techn. Pasadena, Calif., U. S. A.
Thedy Armin, Dipl. Math., Garmisch, Deutschland
Thellier Jean Pierre, Clermond Ferrand, Frankreich
Tietz Horst, Doz. Univ. Münster, Deutschland
Tillmann Heinz G., Ass. Univ. Heidelberg, Deutschland
Tirkschleit Lothar, Dipl. Math. Battelle-Inst. Frankfurt/Main, Deutschland
Todd John, Prof. Inst. of Techn. Pasadena, Calif., U. S. A.
Trost Ernst, Prof. Techn. Winterthur, Schweiz
Turán Paul, Prof. Univ. Budapest, Ungarn
Tutschke Wolfgang, Ass. Akad. d. Wiss. Berlin, Deutschland

Vietoris Leopold, Prof. Univ. Innsbruck, Österreich; Frau Maria Vietoris
Vučkovič Vladeta, Prof. Serb. Akad. d. Wiss. Belgrad, Jugoslawien

Wagner Richard, Doz. T. H. Karlsruhe, Deutschland
Walter Wolfgang, Doz. T. H. Karlsruhe, Deutschland; Frau Irmgard Walter
Weier Joseph, Freiburg, Deutschland
Weissinger Johannes, Prof. T. H. Karlsruhe, Deutschland; Frau Weissinger
Werner Helmut, Frankfurt/Main, Deutschland
Werner Peter, Ass. T. H. Aachen, Deutschland
Weyrich Rudolf, Prof. Univ. Istanbul, Türkei
Willmore Thomas J., Sen. Lecturer Univ. Liverpool, Großbritannien
Wittich Hans, Prof. T. H. Karlsruhe, Deutschland
Wloka Josef, wiss. Ass., Heidelberg, Deutschland

W o l f f Georg, Oberstudiendir. Düsseldorf, Deutschland; Frau Wolff
W o l f f Karl-Heinz, Doz. T. H. Wien, Österreich
W u n d e r l i c h Walter, Prof. T. H. Wien, Österreich;
Frau Hanni Wunderlich

Z a r e m b a S. K., Lecturer Univ. Wales, Großbritannien

ÖSTERREICHISCHE MATHEMATISCHE GESELLSCHAFT

Gegründet 1903

SEKRETARIAT: WIEN IV, KARLSPLATZ 13 (TECHNISCHE HOCHSCHULE)
TELEPHON 65-76-41 — POSTSPARKASSENKONTO 82.395

Vorstand für das Vereinsjahr 1960/61

Vorsitzender:	Prof. Dr. H. H o r n i c h (T. H. Wien)
Stellvertreter:	Prof. Dr. N. H o f r e i t e r (Univ. Wien)
Herausgeber der IMN:	Prof. Dr. W. W u n d e r l i c h (T. H. Wien)
Schriftführer:	Prof. Dr. E. B u k o v i c s (T. H. Wien)
Kassier:	Doz. Dr. A. F l o r i a n (T. H. Wien)
Beiräte:	Prof. Dr. W. G r ö b n e r (Univ. Innsbruck)
	Prof. Dr. F. H o h e n b e r g (T. H. Graz)
	Prof. Dr. J. K r a m e s (T. H. Wien)
	Prof. Dr. K. P r a c h a r (Univ. Wien)
	LSI. Hofrat F. P r o w a z n i k (Stadtschulrat Wien)

Jahresbeitrag für in- und ausländische Mitglieder: S 25.— (1 US-Dollar)