Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99), M. Drmota (2000–2007) und J. Wallner (2008–2017).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@oemg.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Redaktion:

C. Fuchs (Univ. Salzburg, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
R. Tichy (TU Graz)
J. Wallner (TU Graz)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung:
IBAN AT83-1200-0229-1038-9200 bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzendruck, 8044 Weinitzen.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903
http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt,
Institut für Mathematik
Universitätsstraße 65-67
A-9020 Klagenfurt
email: *oemg@oemg.ac.at*

Vorstand des Vereinsjahres 2021:

B. Kaltenbacher (Univ. Klagenfurt): Vorsitzende
J. Wallner (TU Graz): Stellvertretender Vorsitzender
C. Fuchs (Univ. Salzburg): Herausgeber der IMN
M. Ludwig (TU Wien): Schriftführerin
M. Haltmeier (Univ. Innsbruck): Stellvertretender Schriftführer
B. Lamel (Univ. Wien): Kassier
P. Grohs (Univ. Wien): Stellvertretender Kassier
E. Resmerita (Univ. Klagenfurt): Beauftragte für Frauenförderung
C. Heuberger (Univ. Klagenfurt): Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
M. Drmota (TU Wien)
H. Edelsbrunner (ISTA)
H. Engl (Univ. Wien)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Kim (MathWorks)
M. Koth (Univ. Wien)
M. Kraker (Graz)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
H. Niederreiter (ÖAW)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkultur)
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck)
W. Schachermayer (Univ. Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
R. Tichy (TU Graz)
K. Unterkofler (FH Dornbirn)
H. Zeiler (Wien)

Vorsitzende von Sektionen und Kommissionen:

W. Woess (Graz)
H.-P. Schröcker (Innsbruck)
C. Heuberger (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
S. Blatt (Salzburg)
I. Fischer (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)
W. Müller (Verantwortlicher für Entwicklungszusammenarbeit)

Die Landesvorsitzenden und der Vorsitzende der Didaktikkommission gehören statutengemäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT83-1200-0229-1038-9200

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 245 (74. Jahrgang) **Dezember 2020**

Inhalt

Elisa Davoli: From nonlocal to local Cahn-Hilliard equations 1

Robert Tichy, Wolfgang Woess: Abel-Preis 2020 11

Christa Cuchiero, Josef Teichmann: On the occasion of Walter Schachermayer's 70th birthday: the mathematics of arbitrage 17

Buchbesprechungen 31

Women in Mathematics 41

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 45

Neue Mitglieder 53

Ausschreibung der Preise der ÖMG 55

Die Titelseite zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(9x) + \sin(10x)$ im Intervall $[-5, 5]$ geplottet mit Wolfram MATHEMATICA 12. Bekanntermaßen werden solche Kurven verwendet, um Wellen mathematisch zu beschreiben. 2020 ist das “International Year of Sound”, eine globale Initiative, um die Bedeutung des Schalls zu betonen. Mehr Informationen zu dieser Initiative findet man unter https://sound2020.org. Als Beispiel für mathematische Aspekte der Schallforschung sei an dieser Stelle auf den START-Preisträger von 2011 und jetzigen Direktor des Instituts für Schallforschung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Doz. Dr. Peter Balazs, verwiesen, der Zeit-Frequenz-Analyse, Gabor-Analysen, Numerik, Frame-Theorie, Signalverarbeitung, Akustik und Psychoakustik zu seinen Forschungsinteressen zählt, sowie auf den START-Preisträger von 2019, José Luis Romero von der Universität Wien, der zu den Themen Zeit-Frequenz-Analyse, Zufälligkeit und Abtastung forscht.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 245 (2020), 1–10

From nonlocal to local Cahn-Hilliard equations

Elisa Davoli
TU Wien

This expository work presents a brief description of some recent results obtained jointly with H. RANETBAUER, L. SCARPA, *and* L. TRUSSARDI, *and dealing with well-posedness and local asymptotics for a class of nonlocal Cahn-Hilliard equations. My work has been supported by the Austrian Science Fund (FWF) projects F 65, V 662 and I 4052, and from BMBWF through the OeAD-WTZ project CZ04/2019. The results presented here have formed the starting point for the FWF START project "Tunable Materials: geometry, nonlocality, chirality", which has been approved for funding in Summer 2020.*

1 The local and nonlocal Cahn-Hilliard equations

The Cahn-Hilliard equation was originally introduced in [13] in order to model "spinodal decomposition": an irreversible process occurring in multiple composites (such as alloys, glasses, gels, ceramics, liquid solutions, and polymer solutions), and determined by local fluctuations in the concentrations of mixture components which eventually lead to a decomposition of the material into stable states. Starting from the analysis in [13], this model has acquired fundamental importance in several diffuse-interface models in different fields, ranging from physics and engineering to biology and image reconstruction.

This nonlinear parabolic PDE exhibits a gradient-flow structure (in the H^{-1}-metric) in terms of the free energy functional given by, cf. [13],

$$E_{CH}(u) = \int_\Omega \Big(\frac{\tau^2}{2} |\nabla u(x)|^2 + F(u(x)) \Big)\, \mathrm{d}x, \tag{1}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^d$, $d = 2,3$, F is a double-well potential, and τ

ISSN 0020-7926

is a small positive parameter related to the thickness of the transition region. The corresponding evolution problem reads as follows

$$\begin{aligned}
\partial_t u + \operatorname{div} J_{CH} = 0,& \\
J_{CH} &= -m(u)\nabla\mu_{CH}, \\
\mu_{CH} &= \frac{\delta E_{CH}(u)}{\delta u} = -\tau^2\Delta u + F'(u),
\end{aligned} \tag{2}$$

complemented by suitable initial and boundary conditions. In the system above, μ_{CH} is the chemical potential associated to the energy E_{CH}, and the symbol $\operatorname{div}(\cdot)$ denotes the divergence operator. The function $m(\cdot)$ in (2) is known as mobility.

The mathematical literature on the classical Cahn-Hilliard equation has been widely developed in the last decades, in terms of well-posedness of the system with possibly degenerate potentials, viscosity terms and dynamic boundary conditions, but also in the direction of regularity, long-time behaviour of solutions, and optimal control problems. Among the extensive literature, we mention the works [14, 15, 16, 18, 19, 21, 40] dealing with existence-uniqueness of solutions, [20, 27, 41] for studies on the asymptotic behaviour of solutions, and [9, 49, 54] for analyses of the system incorporating possibly nonlinear viscosity terms. As far as optimal control problems are concerned, we point out the contributions [17, 22, 23, 28, 43].

In the early 90's in [39] G. Giacomin and J. Lebowitz considered the hydrodynamic limit of a microscopic model describing a d-dimensional lattice gas evolving via a Poisson nearest-neighbor process. In this seminal paper, the authors rigorously derived a nonlocal energy functional of the form

$$E_{NL}(u) = \frac{1}{4}\int_\Omega\int_\Omega K(x,y)(u(x)-u(y))^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Omega F(u(x))\mathrm{d}x, \tag{3}$$

where $K(x,y)$ is a positive and symmetric convolution kernel, and proposed the corresponding gradient flow as a model for binary alloys undergoing phase change.
The associated evolution problem, providing a nonlocal variant of the Cahn-Hilliard PDE, is given by the following system of equations:

$$\begin{aligned}
\partial_t u + \operatorname{div} J_{NL} = 0,& \\
J_{NL} &= -m(u)\nabla\mu_{NL}, \\
\mu_{NL} &= \frac{\delta E_{NL}(u)}{\delta u} = (K*1)u - K*u + F'(u),
\end{aligned} \tag{4}$$

where $(K*1)(x) := \int_\Omega K(x,y)\mathrm{d}y$ and $(K*u)(x) := \int_\Omega K(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$, for $x\in\Omega$.

The study of such nonlocal Cahn-Hilliard equations has recently been the subject of an intense research activity (see, e.g. [1, 5, 36, 38, 42] and the references therein). The interest in these nonlocal formulations is motivated by the fact that they exhibit a closer connection, compared to local models, to atomistic descriptions, and provide the ideal tool to describe pattern-formation phenomena. The main novelty with respect to the local models is the presence of the possible long-range interaction kernel K, taking into account also the interaction between particles at large scale. As a result, nonlocal Cahn-Hilliard equations find applications in multiple settings, ranging from the modeling of tumor growth to the mechanism describing phase transitions in polymer blends.

A crucial modeling choice in the study of Cahn-Hilliard systems is the regularity of the kernels K. All the aforementioned results dealing with nonlocal evolution of phase interfaces require the kernel K to be symmetric and of class $W^{1,1}$. This assumption amounts at analyzing the setting of long-range interaction kernels, possibly including the Riesz, Newtonian, and Bessel potentials.

The connection between nonlocal and local gradient flows can be seen by a formal computation: when the interaction kernel K is of the form $K(x,y) = K(|x-y|)$ and concentrates around the origin, then the behavior of the nonlocal interface evolution problems approaches that of the standard local Cahn-Hilliard equation.

This formal argument is enforced by the rigorous theory involving the variational convergence of nonlocal energies of the form (3) to local integral functionals as in (1). Building upon the seminal papers by J. Bourgain, H. Brezis, and P. Mironescu [10, 11], and of V. Mazy'a and T. Shaposhnikova [46, 47], a whole nonlocal-to-local framework has been developed for singular nonlocal kernels associated to fractional Sobolev spaces. This study has been complemented by the Γ-convergence analysis and Poincaré inequalities obtained by A. C. Ponce in [51, 52]. More specifically, considering the following family of convolution kernels, identified by a small positive parameter ε,

$$K_\varepsilon(x,y) = \frac{\rho_\varepsilon(|x-y|)}{|x-y|^2}, \tag{5}$$

where $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ is a suitable sequence of mollifiers, A. C. Ponce showed the variational convergence

$$\frac{1}{4}\int_\Omega\int_\Omega K_\varepsilon(x,y)(u(x)-u(y))^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \to \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

2 Local asymptotics: the case of periodic boundary conditions

In this section we focus on the case in which Ω is the d-dimensional flat torus. This choice of the set is classical in the literature and corresponds to imposing periodic boundary conditions. The results summarized in this section have been obtained jointly with H. RANETBAUER, L. SCARPA, and L. TRUSSARDI in [29].

The first positive result towards rendering the formal nonlocal-to-local convergence of the Cahn-Hilliard models rigorously has been achieved by my co-authors jointly with S. MELCHIONNA in [48], where the authors have focused on convergence of weak solutions of the nonlocal Cahn-Hilliard equation (4) to weak solutions of its local counterpart (2), as the convolution kernel K approximates a Dirac delta centered in the origin. In the aforementioned paper, the convergence is studied in the case of constant mobility, with a non-singular double-well potential satisfying a bounded-concavity assumption of the form

$$F'' \geq -B_1,$$

for a positive constant B_1 small enough, (see [48, Assumption **H3**]).

Due to the above-mentioned variational convergence result, kernels in the form (5) are the most natural choice in the study of nonlocal phase transition problems. However, in general it is not true that these kernels enjoy a $W^{1,1}$ regularity, so that the available existence results in the literature do *not* apply. This observation renders the analysis of this class of problems very delicate, and several nontrivial difficulties arise. For example, the definition and regularity of the chemical potential μ_{NL} in (4) relies on the properties of the linear unbounded operator $(B, D(\mathbf{B}))$, defined as

$$\begin{gathered} D(B) := \{v \in L^2(\Omega) : (K * 1)v - (K * v) \in L^2(\Omega)\}\,, \\ B(v) := (K * 1)v - (K * v)\,, \quad \forall v \in D(B)\,, \end{gathered}$$

whose domain $D(B)$ is, a priori, not explicitly characterizable and not even necessarily containing $H^1(\Omega)$.

The first step for studying local asymptotics for nonlocal Cahn-Hilliard equations with kernels as in (5) is the development of a suitable well-posedness theory.

In the analysis developed in [29] we removed the small-concavity assumption on the potential that was required in [48], and include possibly degenerate double-well potentials F defined on bounded domains. Indeed, while the classical choice for F is the fourth-order polynomial $F_{\mathrm{pol}}(r) := \frac{1}{4}(r^2 - 1)^2$, $r \in \mathbb{R}$, with minima in ± 1 (corresponding to the pure phases), it is well-known that, in view of the physical interpretation of the model, a more realistic description is given by the logarithmic double-well potential

$$F_{\log}(s) = \frac{\theta}{2}((1+s)\log(1+s) + (1-s)\log(1-s)) + \frac{\theta_c}{2} - cs^2$$

for $0 < \theta < \theta_c$ and $c > 0$, which by contrast is defined on the bounded domain $(-1,1)$ and possesses minima within the open interval $(-1,1)$. Another interesting example of F which is included in our treatment is the so-called double-obstacle potential (see [7, 50]), having the form

$$F_{\mathrm{ob}}(s) = I_{[-1,1]}(s) + \frac{1}{2}(1-s^2), \quad I_{[-1,1]}(s) := \begin{cases} 0 & \text{if } s \in [-1,1] \\ +\infty & \text{otherwise}. \end{cases}$$

In this latter case, the derivative F'_{ob} is not defined in the usual way, and has to be interpreted as the subdifferential ∂F_{ob} in the sense of convex analysis (see [4]). Analogously the equations defining the chemical potential must be read as a differential inclusion instead.

A further extension provided by our work is to consider a nonlocal Cahn-Hilliard equation augmented by a convection term in divergence form, i.e.

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div} J_{NL} + \operatorname{div}(\beta u) = 0, \\ J_{NL} &= -\nabla \mu_{NL}, \\ \mu_{NL} &= \frac{\delta E_{NL}(u)}{\delta u} = (K*1)u - K*u + F'(u). \end{aligned} \tag{6}$$

Here, $\beta = \beta(t,x)$ denotes the velocity field, depending on time and space, which may be acting on the particular system in consideration. As a common choice in the literature, we considered constant mobility equal to one.

The interest in additional convective contributions is connected with applications in mixing and stirring of fluids, as well as in biological realizations of thin films via Langmuir-Blodgett transfer [6, 45]. We mention in this direction the contributions [8, 26, 34, 55] on the local Cahn-Hilliard with convection, [32, 33, 53] dealing with the nonlocal Cahn-Hilliard with local convection, and [35, 44] on the nonlocal case with nonlocal convection. A nonlocal convective Cahn-Hilliard type system modelling phase-separation has been analyzed in [24, 25]. Relevant studies in coupling the Cahn-Hilliard equation with a further equation for the velocity field have been the subject of [2, 3, 12, 37].

From a mathematical viewpoint, the presence of convection terms (i.e. when $\beta \not\equiv 0$) destroys the gradient-flow structure of the equation, causing the analysis to be even more delicate. A simplified statement of our result (see [29, Theorems 1–4]) reads as follows.

Theorem 1. *Let $T > 0$. Let $\{K_\varepsilon\}$ be a sequence of kernels as defined in* (5)*, with $\{\rho_\varepsilon\}$ being a family of radial mollifiers on $\mathbb{R}$, satisfying the requirements in [51, 52]. Assume that the double-well potential F is the sum of a proper, convex, lower semicontinuous function and the primitive of a Lipschitz map. Finally, assume that the velocity field β and the initial data satisfy suitable regularity assumptions. Then, there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that for $\varepsilon < \varepsilon_0$ the system in* (6) *admits a unique (weak) solution, depending in a continuous way both on the initial data and on the velocity field. Additionally, as $\varepsilon \to 0$, this weak solution converges to the unique solution of the local counterpart to* (6).

3 Local asymptotics: the case of Neumann boundary conditions

I am summarizing here the findings obtained jointly with L. SCARPA and L. TRUSSARDI in [31, 30] and dealing with the scenario in which Ω is a generic bounded domain in $\mathbb{R}^d$, $d = 2,3$, and the nonlocal Cahn-Hilliard equation in (4) is complemented by Neumann boundary conditions on $\partial\Omega$. Neglecting the effects of further convective terms, the system we analyze reads as follows:

$$
\begin{aligned}
\partial_t u + \operatorname{div} J_{NL} &= 0,\\
J_{NL} &= -\nabla \mu_{NL},\\
\mu_{NL} &= \frac{\delta E_{NL}(u)}{\delta u} = (K * 1)u - K * u + F'(u) + \tau \partial_t u.\\
\partial_n \mu_{NL} &= 0 \text{ on } \partial\Omega.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

In the expression above, $\tau \geq 0$ denotes a viscosity parameter, whereas $\partial_n \mu_{NL}$ stands for the normal derivative of the chemical potential μ_{NL}.

To explain the role of the viscosity parameter τ, let us first focus on the case $\tau = 0$ and on the situation in which the interaction kernels are of the form described in (5). In this setting, the case of Neumann boundary conditions presents several additional difficulties when compared to the framework of periodic boundary conditions. The two main hurdles are the following. First, a loss of space regularity for solutions to (7) due to, roughly speaking, the impossibility of differentiating the term $K * u$. In the periodic setting, this had been solved by resorting to a suitable integration-by-parts formula that is not available, though, in the Neumann framework. Second, the nonlocal Cahn-Hilliard system is "of order 2" in space, thus requiring only one boundary condition for its well-posedness, whereas the classical local Cahn-Hilliard system is "of order 4" and is hence complemented by two further boundary conditions. A major point is therefore to understand how this further boundary condition emerges in the nonlocal-to-local asymptotics as the interaction kernel approaches a Dirac delta. We refer to the introduction of [31] for a further discussion of these points.

A crucial idea in [31] is to introduce a (possibly vanishing) viscosity term $\tau\partial_t u$ in (7) to compensate for the weaker regularity and compactness properties highlighted above, and to adopt a variational approach based on the Γ-convergence in [51] to deduce the limiting boundary condition. A complete nonlocal-to-local analysis in the Neumann case without further viscosity terms (i.e. $\tau = 0$) is performed in [30], where $W^{1,1}$-kernels are taken into account.

References

[1] Helmut Abels, Stefano Bosia, and Maurizio Grasselli, *Cahn-Hilliard equation with nonlocal singular free energies*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **194** (2015), no. 4, 1071–1106. MR 3357694

[2] Helmut Abels, Daniel Depner, and Harald Garcke, *On an incompressible Navier-Stokes/Cahn-Hilliard system with degenerate mobility*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **30** (2013), no. 6, 1175–1190. MR 3132421

[3] Helmut Abels and Matthias Röger, *Existence of weak solutions for a non-classical sharp interface model for a two-phase flow of viscous, incompressible fluids*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26** (2009), no. 6, 2403–2424. MR 2569901

[4] Viorel Barbu, *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010. MR 2582280 (2011d:34001)

[5] Peter W. Bates and Jianlong Han, *The Neumann boundary problem for a nonlocal Cahn-Hilliard equation*, J. Differential Equations **212** (2005), no. 2, 235–277. MR 2129092

[6] Katharine B. Blodgett, *Films built by depositing successive monomolecular layers on a solid surface*, Journal of the American Chemical Society **57** (1935), no. 6, 1007–1022.

[7] James F. Blowey and Charles M. Elliott, *The Cahn-Hilliard gradient theory for phase separation with nonsmooth free energy. I. Mathematical analysis*, European J. Appl. Math. **2** (1991), no. 3, 233–280. MR 1123143

[8] Marco Bonacini, Elisa Davoli, and Marco Morandotti, *Analysis of a perturbed Cahn-Hilliard model for Langmuir-Blodgett films*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **26** (2019), no. 5, Art. 36, 40. MR 4010651

[9] Elena Bonetti, Pierluigi Colli, Luca Scarpa, and Giuseppe Tomassetti, *A doubly nonlinear Cahn-Hilliard system with nonlinear viscosity*, Commun. Pure Appl. Anal. **17** (2018), no. 3, 1001–1022.

[10] Jean Bourgain, Haim Brezis, and Petru Mironescu, *Another look at Sobolev spaces*, Optimal control and partial differential equations, IOS, Amsterdam, 2001, pp. 439–455. MR 3586796

[11] Jean Bourgain, Haïm Brezis, and Petru Mironescu, *Limiting embedding theorems for $W^{s,p}$ when $s \uparrow 1$ and applications*, J. Anal. Math. **87** (2002), 77–101, Dedicated to the memory of Thomas H. Wolff. MR 1945278

[12] Franck Boyer, *Nonhomogeneous Cahn-Hilliard fluids*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **18** (2001), no. 2, 225–259. MR 1808030

[13] John W. Cahn and John E. Hilliard, *Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy*, J. Chem. Phys. **28** (1958), no. 2, 258–267.

[14] Laurence Cherfils, Stefania Gatti, and Alain Miranville, *A variational approach to a Cahn-Hilliard model in a domain with nonpermeable walls*, J. Math. Sci. (N.Y.) **189** (2013), no. 4, 604–636, Problems in mathematical analysis. No. 69. MR 3098333

[15] Laurence Cherfils, Alain Miranville, and Sergey Zelik, *The Cahn-Hilliard equation with logarithmic potentials*, Milan J. Math. **79** (2011), no. 2, 561–596. MR 2862028

[16] Laurence Cherfils and Madalina Petcu, *A numerical analysis of the Cahn-Hilliard equation with non-permeable walls*, Numer. Math. **128** (2014), no. 3, 517–549. MR 3268846

[17] Pierluigi Colli, M. Hassan Farshbaf-Shaker, Gianni Gilardi, and Jürgen Sprekels, *Optimal boundary control of a viscous Cahn-Hilliard system with dynamic boundary condition and double obstacle potentials*, SIAM J. Control Optim. **53** (2015), no. 4, 2696–2721. MR 3391144

[18] Pierluigi Colli and Takeshi Fukao, *Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions and mass constraint on the boundary*, J. Math. Anal. Appl. **429** (2015), no. 2, 1190–1213. MR 3342513

[19] ———, *Equation and dynamic boundary condition of Cahn-Hilliard type with singular potentials*, Nonlinear Anal. **127** (2015), 413–433. MR 3392376

[20] ———, *Nonlinear diffusion equations as asymptotic limits of Cahn-Hilliard systems*, J. Differential Equations **260** (2016), no. 9, 6930–6959. MR 3461090

[21] Pierluigi Colli, Gianni Gilardi, and Jürgen Sprekels, *On the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions and a dominating boundary potential*, J. Math. Anal. Appl. **419** (2014), no. 2, 972–994. MR 3225416

[22] ———, *A boundary control problem for the pure Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*, Adv. Nonlinear Anal. **4** (2015), no. 4, 311–325. MR 3420322

[23] ———, *A boundary control problem for the viscous Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*, Appl. Math. Optim. **73** (2016), no. 2, 195–225. MR 3472638

[24] Pierluigi Colli, Gianni Gilardi, and Jürgen Sprekels, *On an application of Tikhonov's fixed point theorem to a nonlocal Cahn-Hilliard type system modeling phase separation*, J. Differential Equations **260** (2016), no. 11, 7940–7964. MR 3479198

[25] ———, *Distributed optimal control of a nonstandard nonlocal phase field system with double obstacle potential*, Evol. Equ. Control Theory **6** (2017), no. 1, 35–58. MR 3603256

[26] ———, *On a Cahn-Hilliard system with convection and dynamic boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **197** (2018), no. 5, 1445–1475. MR 3848459

[27] Pierluigi Colli and Luca Scarpa, *From the viscous Cahn-Hilliard equation to a regularized forward-backward parabolic equation*, Asymptot. Anal. **99** (2016), no. 3-4, 183–205. MR 3549363

[28] Pierluigi Colli and Jürgen Sprekels, *Optimal boundary control of a nonstandard*

Cahn-Hilliard system with dynamic boundary condition and double obstacle inclusions, Solvability, regularity, and optimal control of boundary value problems for PDEs, Springer INdAM Ser., vol. 22, Springer, Cham, 2017, pp. 151–182. MR 3751641

[29] Elisa Davoli, Helene Ranetbauer, Luca Scarpa, and Lara Trussardi, *Degenerate nonlocal Cahn-Hilliard equations: well-posedness, regularity and local asymptotics*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **DOI:10.1016/j.anihpc.2019.10.002** (2019).

[30] Elisa Davoli, Luca Scarpa, and Lara Trussardi, *Local asymptotics for nonlocal convective Cahn-Hilliard equations with $W^{1,1}$ kernel and singular potential*, arXiv e-prints **1911.12770** (2019).

[31] ______, *Nonlocal-to-local convergence of Cahn-Hilliard equations: Neumann boundary conditions and viscosity terms*, arXiv e-prints **1908.00945** (2019).

[32] F. Della Porta and M. Grasselli, *Convective nonlocal Cahn-Hilliard equations with reaction terms*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **20** (2015), no. 5, 1529–1553.

[33] Francesco Della Porta and Maurizio Grasselli, *On the nonlocal Cahn-Hilliard-Brinkman and Cahn-Hilliard-Hele-Shaw systems*, Commun. Pure Appl. Anal. **15** (2016), no. 2, 299–317.

[34] Alp Eden, Varga K. Kalantarov, and Sergey V. Zelik, *Global solvability and blow up for the convective Cahn-Hilliard equations with concave potentials*, J. Math. Phys. **54** (2013), no. 4, 041502, 12.

[35] Shin-Ichiro Ei, *The effect of nonlocal convection on reaction-diffusion equations*, Hiroshima Math. J. **17** (1987), no. 2, 281–307.

[36] Ciprian G. Gal, Andrea Giorgini, and Maurizio Grasselli, *The nonlocal Cahn-Hilliard equation with singular potential: well-posedness, regularity and strict separation property*, J. Differential Equations **263** (2017), no. 9, 5253–5297. MR 3688414

[37] Ciprian G. Gal and Maurizio Grasselli, *Asymptotic behavior of a Cahn-Hilliard-Navier-Stokes system in 2D*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **27** (2010), no. 1, 401–436. MR 2580516

[38] ______, *Longtime behavior of nonlocal Cahn-Hilliard equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **34** (2014), no. 1, 145–179. MR 3072989

[39] Gianbattista Giacomin and Joel L. Lebowitz, *Phase segregation dynamics in particle systems with long range interactions. I. Macroscopic limits*, J. Stat. Phys **87** (1997), no. 1, 37–61.

[40] Gianni Gilardi, Alain Miranville, and Giulio Schimperna, *On the Cahn-Hilliard equation with irregular potentials and dynamic boundary conditions*, Commun. Pure Appl. Anal. **8** (2009), no. 3, 881–912. MR 2476663

[41] ______, *Long time behavior of the Cahn-Hilliard equation with irregular potentials and dynamic boundary conditions*, Chin. Ann. Math. Ser. B **31** (2010), no. 5, 679–712. MR 2726062

[42] Jianlong Han, *The Cauchy problem and steady state solutions for a nonlocal Cahn-Hilliard equation*, Electron. J. Differential Equations (2004), No. 113, 9. MR 2108884

[43] M. Hintermüller and D. Wegner, *Distributed optimal control of the Cahn-Hilliard*

system including the case of a double-obstacle homogeneous free energy density, SIAM J. Control Optim. **50** (2012), no. 1, 388–418. MR 2888271

[44] Liviu I. Ignat and Julio D. Rossi, *A nonlocal convection-diffusion equation*, J. Funct. Anal. **251** (2007), no. 2, 399–437.

[45] Irving Langmuir, *The constitution and fundamental properties of solids and liquids.*, Journal of the American Chemical Society **39** (1917), no. 9, 1848–1906.

[46] Vladimir Maz′ ya and Tatyana Shaposhnikova, *On the Bourgain, Brezis, and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional Sobolev spaces*, J. Funct. Anal. **195** (2002), no. 2, 230–238. MR 1940355

[47] Vladimir Maz'ya and Tatyana Shaposhnikova, *Erratum to: "On the Bourgain, Brezis and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional Sobolev spaces" [J. Funct. Anal.* **195** *(2002), no. 2, 230–238; MR1940355 (2003j:46051)]*, J. Funct. Anal. **201** (2003), no. 1, 298–300. MR 1986163

[48] Stefano Melchionna, Helene Ranetbauer, Luca Scarpa, and Lara Trussardi, *From nonlocal to local Cahn-Hilliard equation*, Adv. Math. Sci. Appl. **28** (2019), no. 2, 197–211.

[49] Alain Miranville and Giulio Schimperna, *On a doubly nonlinear Cahn-Hilliard-Gurtin system*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **14** (2010), no. 2, 675–697. MR 2660877

[50] Yoshitsugu Oono and Sanjay Puri, *Study of phase-separation dynamics by use of cell dynamical systems.*, Phys. Rev. A **38** (1988), 434–453.

[51] Augusto C. Ponce, *An estimate in the spirit of Poincaré's inequality*, Journal of the European Mathematical Society **6** (2004), no. 1, 1–15.

[52] ______, *A new approach to Sobolev spaces and connections to Γ-convergence*, Calc. Var. Partial Differential Equations **19** (2004), no. 3, 229–255. MR 2033060

[53] Elisabetta Rocca and Jürgen Sprekels, *Optimal distributed control of a nonlocal convective Cahn-Hilliard equation by the velocity in three dimensions*, SIAM J. Control Optim. **53** (2015), no. 3, 1654–1680.

[54] Luca Scarpa, *Existence and uniqueness of solutions to singular Cahn-Hilliard equations with nonlinear viscosity terms and dynamic boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. **469** (2019), no. 2, 730 – 764.

[55] Stephen J. Watson, Felix Otto, Boris Y. Rubinstein, and Stephen H. Davis, *Coarsening dynamics of the convective Cahn-Hilliard equation*, Phys. D **178** (2003), no. 3-4, 127–148.

Authors' address:
Institute of Analysis and Scientific Computing, TU Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10, A-1040 Vienna, Austria
email elisa.davoli@tuwien.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 245 (2020), 11–16

Abel-Preis 2020

Robert Tichy, Wolfgang Woess
TU Graz

Im Jahr 2020 erhielten Hillel Furstenberg und Grigoriĭ Margulis den Abelpreis für ihre fundamentalen Arbeiten in Wahrscheinlichkeits- und Ergodentheorie und ihre bahnbrechenden Anwendungen auf Zahlentheorie, Gruppentheorie, Geometrie und Kombinatorik ("for pioneering the use of methods from probability and dynamics in group theory, number theory and combinatorics").

Hillel Furstenberg, damals Harry Fürstenberg, wurde 1935 in Berlin geboren. 1939 emigrierte seine Familie in die USA, wo sie sich in der Nähe von New York ansiedelte. Als Undergraduate an der Yeshiva University publizierte er bereits wissenschaftliche Arbeiten, die im *American Mathematical Monthly* erschienen sind. Bemerkenswert ist "On the infinitude of primes" (1955), wo er einen topolgischen Beweis für den berühmten Satz von Euklid führt, dass es nämlich unendlich viele Primzahlen gibt. Sein Doktorat erwarb Furstenberg 1958 an der Princeton University unter der Anleitung von Salomon Bochner. Nach einer kurzen Tätigkeit am MIT wurde er Professor an der University of Minnesota, wo er bis 1965 blieb. Danach nahm er eine Professur am Einstein Institute der Hebrew University in Jerusalem an, die er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 2003 innehatte. In diesem Jahr gab es in Jerusalem und Beer-Sheva eine großartige und unglaublich stimulierende Konferenz ("Furstenfest") zu Ehren von Furstenberg mit Vorträgen zu allen seinen Interessensgebieten: Ergodentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Lie-Gruppen, Zahlentheorie, Kombinatorik. Für den ersten von uns beiden (R.T.) war diese Konferenz ein tolles Erlebnis mit Auswirkungen auf die eigene Arbeit: Es entwickelte sich eine intensive Zusammenarbeit mit Daniel Berend und Vitaly Bergelson, zwei Schülern von Furstenberg. Im Übrigen hat Furstenberg eine Reihe weiterer bedeutender Schüler und Schülerinnen hervorgebracht, darunter Alexander Lubotzky, Shahar Mozes, Yuval Peres, Amo Nevo und Tamar Ziegler, die gegenwärtig das Einstein Institut in Jerusalem leitet. Hillel Furstenberg erhielt eine Reihe hoher Auszeichnungen: Israel Prize (1993), Wolf Prize (2007), Abel Preis (2020) und er ist Mitglied mehrerer Akademien, u.a. in Israel und den USA.

ISSN 0020-7926

Seine wissenschaftlichen Arbeiten publizierte Furstenberg bis Ende der 1970er Jahre noch unter dem Namen Harry Furstenberg, bevor er den hebräischen Vornamen Hillel annahm. Im Jahr 1963 veröffentlichte er die grundlegende Arbeit "A Poisson formula for semi-simple Lie groups" und danach eine Reihe weiterer bedeutender Beiträge, die dem intrinsischen Zusammenhang von Gruppenstruktur und wahrscheinlichkeitstheoretischen Konzepten (Irrfahrten) gewidmet sind.

Für den ersten von uns beiden (R.T.) war die Arbeit "Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation" (1967) – nach der Monografie "Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory" (1981) seine meistzitierte Publikation – von großer Bedeutung. Es wird dort für die sogenannte Hardy-Littlewood-Folge gezeigt, dass die zugehörigen Orbits dicht sind. Diese Arbeit hat erstmalig aufgezeigt, wie tiefliegende algebraische Eigenschaften metrische und wahrscheinlichkeitstheoretische Phänomene beeinflussen. Die zitierte Monografie enthält auch einen ergodentheoretischen Beweis des berühmten Satzes von Szemerédi, wonach es in jeder Menge natürlicher Zahlen von positiver Dichte eine beliebig lange arithmetische Progression gibt. Damit hat Furstenberg eine völlig neue Richtung in additiver Zahlentheorie und Kombinatorik eröffnet.

Für den zweiten von uns beiden (W.W.) waren und sind hingegen die oben genannte Arbeit "A Poisson formula..." und vielleicht noch mehr das 63 Seiten lange "Random walks and discrete subgroups of Lie groups" (1971) sowie das 37seitige "Boundary theory and stochastic processes on homogenous spaces" (1973) geradezu unerschöpfliche Quellen. Da werden vielfältigste Ideen vorgestellt, oft anhand von konkreten Fällen, über die sie meilenweit hinausreichen und neue Wege aufzeigen. Für mich kann ich den obigen Satz von R.T. auch sinngemäß umkehren: Die Arbeiten haben aufgezeigt, wie tiefliegende wahrscheinlichkeitstheoretische Eigenschaften geometrische und algebraische Phänomene beeinflussen.

Ausgangspunkt dieser Reihe von Arbeiten ist die Poissonsche Darstellung für beschränkte harmonische Funktionen auf der offenen Einheitskreisscheibe D,

$$h(z) = \int_{\partial D} f(\xi) \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2} d\xi, \quad z \in D,$$

wo f eine beschränkte Funktion und $d\xi$ das normierte Lebesgue-Maß auf dem Einheitskreis ∂D sind. Man kann D auch mit der hyperbolischen (Poincaré-)Metrik versehen, sodass ∂D der hyperbolische Rand im Unendlichen ist; die harmonischen Funktionen – nunmehr bezüglich dem Laplace-Beltrami-Operator – bleiben die gleichen, und es ist Invarianz bezüglich der Gruppe der Möbius-Transformationen von D gegeben. Das obige Integral ist jenes von f bezüglich dem Limes-Maß der hyperbolischen Brownschen Bewegung, wenn diese in z startet.

Anstelle von D kann man nun eine Lie-Gruppe oder eine abzählbare diskrete Gruppe G setzen (oder allgemeiner eine lokalkompakte Gruppe), auf der ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ gegeben ist. (Im Obigen würde man D mit $G = PSL(2,\mathbb{R})$ identifizieren, und μ wäre die Verteilung der hyperbolischen Brownschen Bewegung zum Zeitpunkt 1, bei Start im Nullpunkt.) Die zugeordneten μ-harmonischen Funktionen auf g sind durch die Mittelwerteigenschaft $h(g) = \int_G h(gh)\,d\mu(h)$ gegeben. Die von Furstenberg (Arbeit von 1963) erstmals in dieser Allgemeinheit behandelte Fragestellung ist dann, ob es in Analogie zum Einheitskreis einen *Rand B* der Gruppe im "Unendlichen" gibt, sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf B, sodass jede beschränkte μ-harmonische Funktion eine eindeutige Integraldarstellung

$$h(g) = \int_B f\,d(g\nu)$$

hat, wobei f eine beschränkte Funktion auf B ist. Hierbei muss B ein *G-Raum* sein, also ein topologischer Raum, auf dem G durch Homöomorphismen agiert, und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf B; es ist dann $g\nu$ durch die Aktion gegeben, d.h. $g\nu(A) = \nu(g^{-1}A)$. In diesem Fall heißt der Wahrscheinlichkeitsraum (B,ν) der *Poisson-Rand* des Paares (G,μ).

Dem Paar (G,μ) ist in Analogie zur Brownschen Bewegung, aber mit diskreter Zeit, ein Zufallsprozess zugeordnet, die von μ induzierte Irrfahrt auf G. Man nimmt eine Folge (X_n) unabhängiger, G-wertiger Zufallsvariablen, die identisch gemäß μ verteilt sind, und bildet das Gruppenprodukt $X_1 \cdots X_n$. Im kommutativen Fall entspricht dies der klassischen Summe identisch verteilter, unabhängiger Zufallsvariablen. In seiner Reihe von Arbeiten 1963–1973 hat Furstenberg in ingeniöser Weise wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden mit der Gruppenstruktur verbunden, um den Poisson-Rand für Lie-Gruppen zu konstruieren und somit auch seine Existenz zu beweisen. Die Arbeiten zeigen auch den Weg auf, um dies für Irrfahrten auf diskreten, abzählbaren Gruppen zu erreichen. Für Letztere wurde dies später von Kaimanovich und Vershik (1979, bzw. 1983) zum "glorreichen" Abschluss gebracht.

Hier habe ich mich also auf das "Frühwerk" von Furstenberg bezogen; dieses ist aber in keiner Weise überholt oder ausgeschöpft – wie gesagt, sind die genannten Arbeiten nach wie vor eine Fundgrube an bemerkenswerten Ideen. Bemerkenswert ist auch der humane Stil, in dem der Autor – mitten in der Hochblüte des trockenen Bourbaki-Formalismus – sie geschrieben hat. Die beiden langen Arbeiten von 1972 und 1973 haben durchaus Überschneidungen, aber es ist wert, beide ganz zu lesen, um alle "Perlen" wahrzunehmen. Furstenberg war bei zwei von mir (W.W.) co-organisierten Tagungen 1997 in Cortona und 2001 in Graz ein Hauptredner, geradezu ein Vortragsmagier, der komplexeste Sachverhalte so elegant erklären konnte, dass alle Zuhörer und Zuhörerinnen zumindest vorübergehend meinten, alles verstehen zu können.

Grigoriĭ Alexandrowitsch Margulis wurde 1946 in Moskau geboren. Er studierte an der Lomonossow Universität in Moskau und arbeitete dort mit Jakov Sinai über Ergodentheorie. 1970 promovierte er und wechselte dann an das Institut für Informationsübertragung, wo er bis in die 1980er Jahre blieb und 1986 leitender Wissenschaftler wurde. 1991 nahm er eine Professur an der Yale University (New Haven, Connecticut, USA) an, wo er bis heute blieb. Er wurde 1978 mit der Fields Medaille ausgezeichnet und erhielt auch viele weitere hohe Auszeichnungen, wie mehrere Akademie-Mitgliedschaften, den Wolf Preis und 2020 den Abel Preis. Zu seinen Schülern gehören Hee Oh, Anders Karlsson und Emmanuel Breuillard.

In seinen ersten Arbeiten widmet er sich sogenannten Starrheitssätzen in der Theorie der Lie-Gruppen. Hier bestehen enge Berührungspunkte zu Ideen von Furstenberg. Eine hervorragende Darstellung dieser Entwicklungen findet man im Buch “Discrete subgroups of semisimple Lie groups”, das Margulis im Jahr 1991 publiziert hat. Es gibt Antworten auf Probleme, die im klassischen Werk von Raghunathan, “Discrete subgroups of Lie groups” (1972), noch nicht vollständig gelöst und verstanden wurden. Diese Fragestellungen gehen auf Minkowski, Siegel, Harish-Chandra u.a. zurück und beschäftigen sich mit arithmetischen Untergruppen von Lie-Gruppen, also insbesondere mit strukturellen Kennzeichnungen von Gittern. In diesem Zusammenhang sei auf eine frühere gemeinsame Arbeit von Margulis mit D. Kazdhan verwiesen. Die beiden Autoren haben Vermutungen von Siegel und Selberg bewiesen. Ein Resultat besagt, dass für eine reelle halb-einfache Liegruppe G mit fixiertem Haarmaß μ eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass das Co-Volumen (bezüglich μ) jedes Gitters in G mindestens c beträgt. Margulis hat dieses Gebiet auch wesentlich durch seine Resultate über Super-Starrheit und S-arithmetische Gitter beeinflusst Hier erweisen sich die früheren Beiträge von Hillel Furstenberg als wichtiges Werkzeug.

Mit dem Namen Margulis verbunden sind das “Lemma von Margulis” und die “Margulis-Zahlen”. Das Lemma von Margulis beschreibt die Topologie des “dünnen Teils” einer (geeignet normierten) negativ gekrümmten, n-dimensionalen Riemanschen Mannigfaltigkeit. Demzufolge muss für beliebiges $\varepsilon < \varepsilon_n$ die zum sogenannten ε-dünnen Teil gehörige Fundamentalgruppe eine fast nilpotente Struktur besitzen. Dabei ist ε_n eine nur von der Dimension n abhängige, universelle Konstante, Margulis-Zahl genannt. Dieses Lemma besitzt auch eine gruppentheoretische Formulierung und zeigt eindrucksvoll den intrinsischen Zusammenhang von algebraischen und geometrischen Eigenschaften von Lie-Gruppen. Besonderes Aufsehen erregte Ende der 1980er Jahre Grigoriĭ Margulis’ Beweis der Oppenheim-Vermutung. Diese Arbeit in der ersten Kurzfassung “Formes quadratriques indéfinies et flots unipotents sur les espaces homogénes” (1987) und dann der Langfassung “Discrete subgroups and ergodic theory” (1989) gilt seither als klassische Anwendung der Ergodentheorie in der Zahlentheorie.

Die Vermutung wurde von Alexander Oppenheim “Values of quadratic forms, II” 1953 (in schwächerer Form schon früher) aufgestellt und von Grigoriĭ Margulis bewiesen: Sei $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 3)$ eine indefinite quadratische Form, die kein Vielfaches einer Form mit rationalem Koeffizienten ist. Dann liegt $Q(\mathbb{Z}^n)$ in $\mathbb{R}$ dicht, d.h. jede reelle Zahl kann beliebig genau durch Werte von Q an ganzzahligen Punkten approximiert werden.

Für $n \geq 21$ wurde die Vermutung mit Methoden der klassischen analytischen Zahlentheorie (Kreismethode von Hardy-Littlewood) früher von Birch, Davenport und Ridout bewiesen. Der schwierigste Fall ist allerdings $n = 3$, und Margulis konnte eine äquivalente gruppentheoretische Umformulierung von Raghunathan beweisen. Dies führte zu weitreichenden Entwicklungen, nämlich zum Satz von Ratner bis hin zu den beeindruckenden Arbeiten von Maryam Mirzakhani, der ersten Frau, die mit der Fields Medaille ausgezeichnet wurde.

Immer wieder hat sich Margulis mit Anwendungen der Ergodentheorie auf die Diophantische Approximation beschäftigt, also mit einem Teilgebiet der Zahlentheorie, bei dem es um die Approximation reeller Zahlen durch rationale geht. Ein beeindruckender Beitrag in diese Richtung ist die gemeinsame Arbeit [Ann. Math, 1998] mit seinem Schüler D. Kleinbock. In dieser Arbeit werden Vermutungen von Baker und Sprindzhuk über Diophantische Approximation auf Mannigfaltigkeiten bewiesen. Dabei heißt $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ sehr gut approximierbar (kurz SGA), falls für ein $\varepsilon > 0$ unendlich viele $q \in \mathbb{Z}$ und $\underline{p} \in \mathbb{Z}^n$ existieren, sodass

$$\|q\underline{x} + \underline{p}\|^n \leq | q |^{-1-\varepsilon}$$

gilt. (Dabei ist $\|.\|$ die Maximumnorm im $\mathbb{R}^n$.) Es ist wohlbekannt, dass (im Sinne des Lebesguemaßes) fast alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ nicht SGA sind. Die Frage wird bedeutend schwieriger, wenn man die Punkte x aus einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ nimmt. Mahler vermutete 1930, dass ein anologes Resultat für Kurven $(t, t^2, \ldots, t^n)$ gilt, was von Sprindzhuk (1964) bewiesen werden konnte. Später formulierten Sprindzhuk und Baker Vermutungen, die sich auf allgemeine Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ beziehen. Für Dimension $n = 2$ und $n = 3$ konnte die Vermutung von W.M. Schmidt (1964) bzw. von Beresnevich und Bernik (1996) gezeigt werden. Kleinbock und Margulis entwickelten eine ergodentheoretische Methode, mit der eine stärkere Vermutung im allgemeinen Fall erledigt werden konnte. Dies ist ein bahnbrechender Beitrag zur Metrischen Diophantischen Approximation – ein Gebiet, das auch von österreichischen Mathematikern intensiv gepflegt wird. Hier möchte ich auf die Forschungsgruppe an der TU Graz verweisen, aber insbesondere auf Arbeiten vom von der Universität Wien kommenden Kollegen Manfred Einsiedler (ETH Zürich), der auch gemeinsam mit Grigoriĭ Margulis publiziert hat. Eine Arbeit Einsiedler–Margulis–Mohammadi–Venkatesh ist die Neueste in der aktuellen Liste der Publikationen von Margulis in MathSciNet.

Gewisse Berührungspunkte mit G. Margulis hat auch der zweite von uns (W.W.). Am Anfang stand da das Studium der allerersten Arbeit des noch jungen Margulis über positive harmonische Funktionen auf nilpotenten Gruppen und später seine Arbeiten über Expandergraphen sowie die Arbeit "Explicit constructions of graphs without short cycles and low density codes" (1982), die das Interesse meines damaligen Chefs Wilfried Imrich erweckte, der eine Verbesserung publizierte. Bei einem von mir co-organisierten Semester am Schrödinger-Institut in Wien 2001 war Margulis ein prominenter Gast, aber aufgrund eines familiären Trauerfalls dürfte es damals keine Begegnung gegeben haben. Dafür habe ich mit seinem Schüler Anders Karlsson kooperiert und für eine meiner "größeren" Publikationen aus dem Jahr 2008 kam zündende Inspiration aus der Lektüre der ersten Seiten der oben genannten Monografie über "Discrete subgroups of semisimple Lie groups".

Bezeichnend sind die berühmten Namen, die man im MathSciNet bei Eingabe der "collaboration distance" von Margulis zu Furstenberg findet. Die Distanz ist 3, und es gibt da die folgenden "Wege": Grigoriĭ Margulis – Anatloy Vershik – Harry Kesten – Hillel Furstenberg, aber auch, mit Österreich-Bezug, Grigoriĭ Margulis – Manfred Einsiedler – Vitali Bergelson – Hillel Furstenberg.

Adresse der Autoren:
Technische Universität Graz, Steyrergasse 30, A-8010 Graz
email tichy@tugraz.at,woess@tugraz.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 245 (2020), 17–29

On the occasion of Walter Schachermayer's 70th birthday: the mathematics of arbitrage

Christa Cuchiero, Josef Teichmann
Universität Wien, ETH Zürich

1 Introduction

Born on July 24, 1950 Walter Schachermayer lived his childhood in Linz, Austria. He attended the Akademisches Gymnasium in Linz, where also Ludwig Boltzmann learned Latin, Greek, Physics and Mathematics about 100 years before him. Walter studied Mathematics, Economics and Computer Science in Vienna and completed his PhD under Johann Cigler's supervision on "Cylindrical measures and the Radon-Nikodym-property of Banach spaces" in 1976. He chose this PhD topic inspired by Johann Cigler's unique lectures, in particular his presentation of the theory of distributions. This experience opened his eyes for the true nature of mathematics, as Walter describes it himself, and stimulated him to study a year in Paris where he attended the Séminaire Maurey-Schwartz. After finishing his PhD he continued his career in Clermont-Ferrand, Mexico City, Linz, Vienna and Paris and is now Professor Emeritus of Mathematics at the University of Vienna.

Walter has received many prizes, among which the prestigious Wittgenstein Award from the Austrian Science Foundation in 1998 and an advanced ERC grant 2009 are outstanding. He received honorary doctorates from the Université Paris-Dauphine in 2011 and Universidad de Murcia in 2018. He is member of the Leopoldina and Academia Europaea. In 2016 he was awarded the prize for Natural Sciences of the city of Vienna. He has supervised and mentored a great number of students and post-docs in Vienna, including the authors of this article. For many of them the years spent in Walter's group had a lasting influence to pursue

ISSN 0020-7926

a scientific career, which was often crowned by professorships in distinguished universities worldwide.

Several ground-breaking results in mathematical finance are inseparably connected with his name. They paved the way towards today's mathematical understanding of arbitrage [24, 9, 10, 11, 12, 1], utility optimization [19, 20], transactions costs [25, 14, 6] or martingale optimal transport [2], to name only a few.

In his mathematical reasoning abstract functional analysis and stochastic analysis meet in a unique way with questions from finance and Viennese charm. Unforgettable are talks at conferences where he illustrates most abstract functional analytic results with the simplest possible example. He is also known as a smiling advocat of mathematical rigor in every detail, which is the only way to create results which are still true tomorrow.

Walter is also famous for eloquent, sharp and clear contributions to public discussions in Austria: he demonstrated impressively the salient difference between "possible" and "likely" on the example of the (probabilistically) pointless rerun of the last presidential election. He also contributed to discussions on public debts of European countries by pointing to the fact that every debitor has to have a creditor as counterpart, thus presenting questions about goverment's debts in the proper light.

To exemplifiy Walter's approach to mathematical problems we shall focus on a preeminent contribution, a joint work with Freddy Delbaen in Mathematische Annalen, 1994, see [9]. Needless to say that our guided tour through this impressive work would also qualify as a laudatio for Freddy Delbaen. In this article they solved an open problem in the foundations of mathematical finance, namely how to characterize the absence of arbitrage in an economically convincing way and how to fully establish its workable probabilistic counterpart. The result itself requires, although clearly rooted in financial practice, a deep understanding of stochastic and functional analysis, which brought the theory of semimartingales as well as geometry of Banach spaces in the arena of finance: an instance of the maxim "there is nothing more practical than a good theory".

Let us first state the result in non-formal terms. The question which models are adequate to describe prices in financial markets has many layers of answers. Should models be deterministic or stochastic, chosen by methods from partial differential equations, statistics, econometrics or economics, should they be analytically tractable, or rather robust? Within all these categories profound answers can be formulated, but the most far reaching answer, solving the problem in utmost generality, can be given when prices are modeled by *continuous time* stochastic processes. This is the *Fundamental Theorem of Asset Pricing* (FTAP).

To illustrate the key idea in a simple setup, imagine a *discrete time* model for the next time instant in a financial market with d assets. This is a model, which has known prices $S_0 \in \mathbb{R}^d$ and random prices S_1 in the next time step. If we want to compare prices, we should quote them in discounted terms, that is relative to some riskfree, i.e. non-defaultable quantity (for instance an Austrian bond). An investment is just a choice $\phi \in \mathbb{R}^d$, where each component of the investment vector ϕ corresponds to the number of shares held in the respective asset. Apparently the value of this investment now is $\langle \phi, S_0 \rangle$, in the next instant $\langle \phi, S_1 \rangle$, its change (by virtue of being discounted) is just $\langle \phi, S_1 - S_0 \rangle$. Such an investment should not produce a riskless gain, a reasonable economic assumption called *Absence of Arbitrage*. A riskless gain or arbitrage just means that with probability 1, we do not loose anything and with positive probability we gain something. *Absence of Arbitrage* can therefore be formulated as follows: there does not exist $\phi \in \mathbb{R}^d$ such that

$$0 \neq \langle \phi, S_1 - S_0 \rangle \geq 0$$

almost surely. Turning to mathematics, this implies that S_0 must lie in the relative interior of the convex hull of the support of the law of S_1. Indeed, otherwise 0 would not lie in the relative interior of the convex hull of the support of the law of $S_1 - S_0$, whence a separating hyperplane provides us with a vector ϕ, an arbitrage.

Recall now the non-trivial result that the expectation of a random variable X with values in $\mathbb{R}^d$ actually lies in the relative interior of the convex hull of the support of its law (sharpening the easy result that it lies in the closed convex hull) and that every point in the relative interior of the convex hull of the support of the law is an expectation of X with respect to some equivalent measure. This together with the *Absence of Arbitrage condition* then implies the existence of a *martingale measure*, i.e. $Q \sim P$ such that $E_Q[S_1] = S_0$. The simpler converse direction then yields equivalence between these two properties. Note that for this and the subsequent analysis the set of nullsets is always fixed but not necessarily the measure P. Relaxing this assumption led to an important strand of research, *robust finance*, to which Walter contributed with several co-authors. We refer in particular to a model-free version of the FTAP, see [1], with Beatrice Acciaio, Mathias Beiglböck and Friedrich Penkner.

Going from the one period case towards a dynamic picture, namely making S_0 a random variable itself measurable with respect to today's information (modeled by a σ-algebra), is a bit delicate. Either one goes for a conditional version of the previous argument, which of course exists, or one brings in a new aspect: *duality*. This also reveals the actual nature of the measure Q. Consider the set of outcomes of investments C_0 at zero initial wealth, i.e. the set of all $f = \langle \phi, S_1 - S_0 \rangle - g$ where ϕ is now a random variable measurable with respect to the initial information and $g \geq 0$ corresponds to consumption. Then, clearly, every martingale measure Q yields $E_Q[f] \leq 0$ with the understanding that $0 \leq E_Q[g] \leq \infty$. Absence of arbitrage just means that

$$C_0 \cap L^0_{\geq 0} = \{0\} \, ,$$

where L^0 denotes the space of (equivalence classes of) all random variables. If C_0 is appropriately closed, then Q can just be understood as a strictly positive element of the dual cone of C_0. Of course C_0 is closed in probability, which actually is enough to guarantee the existence of a strictly positive dual element. This now constitutes on a one period level the assertion of the fundamental theorem of asset pricing. The question is whether there is a continuous time version of this argument.

When we see these arguments, several problems in view of a fully time-continuous theorem become apparent:

- Since we do not want to impose artificial moment conditions on discounted prices, we have to work in L^0 with respect to convergence in probability. Even though being a topological vector space, L^0 in general is not locally convex and generically its dual space is just $\{0\}$. This points towards some problems when speaking about polar cones and duality, to say the least.

- Even if we are able to work with an appropriate duality, the polar cone will generically *not* be generated a single measure Q but have multiple dimensions. This means when passing from a one period level to continuous time one has to concatenate not-uniquely given measures Q, which are conditionally dual elements. This points towards the use of measurable selection theorems, which is often delicate and cumbersome, and a road which has not been taken by Freddy Delbaen and Walter Schachermayer.

- They rather first revealed the nature of discounted price processes, namely that they have to be semimartingales. This in turn led to intricate questions in stochastic analysis, precisely how to define and analyze spaces of terminal values of stochastic integrals.

It is the goal of this article to present Walter's and Freddy's solution to *all* the above problems. Before doing so, let us put their result, which can be seen as the single most important result of mathematical finance, in a historical context.

2 Some historical remarks on the FTAP

Today's most cited FTAP version proved by Freddy and Walter establishes in continuous time under a fairly weak assumption on a set $\mathcal{X}$ of admissible portfolio wealth processes for self-financing, discounted portfolios, a property called *No Free Lunch with Vanishing Risk* (NFLVR), the existence of an *equivalent separating measure $Q \sim P$*. This rather technical sounding assertion is the correct and sharp mathematical formulation of the vague "meta-theorem" stating that no arbitrage is *essentially* equivalent to the existence of an equivalent martingale measure (as sketched in the one period model above) and has thus tremendous consequences: first, models can be easily characterized to satisfy (NFLVR) by simply checking whether such a separating measure $Q \sim P$ exists. Second, the statement of FTAP is, mathematically speaking, the characterization of typical elements of a polar cone, which in turn allows to look at optimization problems from a dual point of view. Third, by simple economic arguments, separating measures $Q \sim P$ lead to pricing structures for general payoffs.

The long history of FTAP is widely ramified, as can be seen from the excellent overview article [26] by Walter Schachermayer or the monograph "The Mathematics of Arbitrage" [12] by Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. Let us here only briefly state the main milestones up to 1998. For further developments after 1998 we refer to [5] and the references therein. The subsequent presentation is also based to a large extent on this article.

The history of FTAP traces back to the work of Fisher Black and Myron Samuel Scholes [4] as well as Robert Merton in 1973. Indeed, their formula was the starting point for an investigation between the relation of pricing by no arbitrage considerations and pricing by taking "risk neutral" expectations (with respect to a martingale measure). In the late 1970s and early 1980s major advances in establishing a precise mathematical connection between those notions and proving first versions of FTAP in different settings were achieved by Stephen Ross [23], Michael Harrison, David Kreps and Stan Pliska [15, 16, 21]. These seminal papers have been generalized and further developed in many directions, in particular a first complete proof of FTAP in finite discrete time was given by Robert Dalang, Andrew Morton and Walter Willinger [7] extending the Harrison-Pliska result [16]. In continuous time, Christophe Stricker [27] combined the result of David Kreps with a theorem by Jia-An Yan [28], which is now known under the name Kreps-Yan theorem and which states the equivalence between *No free lunch* (NFL) and the existence of an equivalent separating measure (see Theorem 2).

The remaining major challenge was to replace the strong condition of (NFL) (involving closures in the weak-$*$-topology in L^∞) by an economically convincing concept which only slightly strengthens the intuitive notion of absence of arbitrage. It turns out that the concept of (NFLVR) introduced by Freddy Delbaen and Walter Schachermayer in [9] is precisely the right minimal and economically meaningful requirement which still allows to conclude the existence of an equivalent separating measure. Also the concept of *No Free Lunch with Bounded Risk*, as applied by Walter Schachermayer in [24] in the discrete infinite time horizon case, would serve this purpose, however, (NFLVR) is even weaker. Freddy and Walter consider as *set of admissible portfolio wealth processes* $\mathcal{X}$ stochastic integrals $(\phi \bullet S)$, for admissible integrands ϕ with respect to a one dimensional locally bounded semimartingale S. Their beautiful and impressive proof builds on deep insights and is in some parts quite tricky. It was taken up by Youri Kabanov who introduced, inspired also by [8], in a sharply focused paper [17], an abstract setting of admissible portfolio wealth processes (see Remark 1 below) allowing for convexity constraints and unbounded jumps: Youri Kabanov's insight was that the proof of [9] transfers almost literally to this novel setup. This is another illustration of the statement, that Freddy Delbaen and Walter Schachermayer have chosen the simplest setting which contains all aspects and the complete proof of the most general finite dimensional case. While cleverly working in a one dimensional setting for this general version of the FTAP, Walter considered more or less at the same time with his first PhD student Irene Klein the setting of large financial markets [18], which substantially differs from the finite dimensional case. Finally in [11], Freddy and Walter considered the extension to unbounded continuous time stochastic processes, where the relation between a separating measure and a (generalized) martingale measure is more subtle, which has independently been proved in [17], too.

3 The setting of the proof of FTAP

Cumulative gains and loss processes, which are ubiquitous in finance, appear as discretizations of integrals. Hence it is completely natural to assume that discounted price processes are actually *good integrators*, i.e. stochastic processes where cumulative gains and loss processes satisfy a certain continuity property. It is a deep result, the Bichteler-Dellacherie theorem, that good integrators are actually semimartingales, i.e. the sum of a local martingale and an adapted process of finite total variation. Walter Schachermayer also contributed to this topic by providing rather recently together with Mathias Beiglböck and Bezirgen Veliyev another elementary proof of this important result under an even weaker and financially inspired assumption (see [3]).

Let now $\mathbb{S}$ be the space of such good integrators, i.e. semimartingales X defined on a finite interval $[0,1]$ and starting from zero. The space $\mathbb{S}$ is equipped with the Emery topology, named after Michel Emery and defined by the metric

$$d_E(X_1,X_2) := \sup_{K \in b\mathcal{E},\, \|K\|_\infty \leq 1} E\left[|(K \bullet (X_1 - X_2))|_1^* \wedge 1\right],$$

where $|X|_1^* = \sup_{t \leq 1} |X_t|$, $b\mathcal{E}$ denotes the set of simple predictable strategies, that is, K is of the form

$$K = \sum_{i=0}^{n} K_i 1_{]\tau_i, \tau_{i+1}]},$$

with $n \in \mathbb{N}$, stopping times $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n \leq \tau_{n+1} = 1$ and K_i are $\mathcal{F}_{\tau_i}$-measurable random variables.

The space of semimartingales is a complete topological vector space with the Emery topology, which follows essentially from the Bichteler-Dellacherie Theorem, see [13].

Beside convergence in the Emery topology, pathwise uniform convergence in probability plays an essential role. This type of convergence is metrized by

$$E[|X-Y|_1^* \wedge 1] = d(X,Y)\,,$$

which makes the space of càdlàg processes a complete topological vector space. Obviously uniform convergence in probability is a weaker topology than the Emery topology.

Let now S be a one dimensional semimartingale. Then the set $\mathcal{X}$ of all stochastic integrals $(\phi \bullet S)$, where ϕ is S-integrable such that there exists a uniform bound from below $(\phi \bullet S) \geq -\lambda$, for some $\lambda \geq 0$, is a set of admissible wealth processes generated by

$$\mathcal{X}_1 := \big\{ (\phi \bullet S) \,|\, \phi \text{ is } S\text{-integrable and} \, (\phi \bullet S) \geq -1 \big\} \tag{8}$$

in the sense that $\mathcal{X} = \cup_{\lambda>0} \lambda \mathcal{X}_1$.

Remark 1. *Youri Kabanov suggests in [17] to work in the following more general setting: we are just given a convex set $\mathcal{X}_1 \subset \mathbb{S}$ of semimartingales, which is supposed to satisfy the following axiomatic properties*

- *starting at* 0,
- *bounded from below by* -1,
- *being closed in the Emery topology, and*
- *the* concatenation property*: for all bounded, predictable strategies $H,G \geq 0$, $X,Y \in \mathcal{X}_1$ with $HG = 0$ and $Z = (H \bullet X) + (G \bullet Y) \geq -1$, it holds that $Z \in \mathcal{X}_1$.*

Note that the set (8) satisfies precisely the properties stated in Remark 1. Convexity and the concatenation property are both just facts of stochastic integration theory, while the most crucial property namely closedness in the Emery topology is a consequence of Jean Mémin's theorem (see [22]).

We denote by $\mathcal{X}$ the set $\mathcal{X} = \cup_{\lambda>0} \lambda \mathcal{X}_1$ and call its elements *admissible portfolio wealth processes*. The elements of $\mathcal{X}_1$ are called 1-admissible wealth processes. We denote by K_0, respectively K_0^1 the evaluations of elements of $\mathcal{X}$, respectively $\mathcal{X}_1$, at terminal time $T = 1$.

Let us introduce several notions of absence of arbitrage, for which we define the following convex cones:

$$C_0 := K_0 - L^0_{\geq 0}, \quad C := (K_0 - L^0_{\geq 0}) \cap L^\infty. \tag{9}$$

(NA) The set $\mathcal{X}$ is said to satisfy *No Arbitrage*, if

$$(K_0 - L^0_{\geq 0}) \cap L^0_{\geq 0} = C_0 \cap L^0_{\geq 0} = \{0\},$$

which can be easily shown to be equivalent to

$$((K_0 - L^0_{\geq 0}) \cap L^\infty) \cap L^\infty_{\geq 0} = C \cap L^\infty_{\geq 0} = \{0\}.$$

(NFLVR) The set $\mathcal{X}$ is said to satisfy *No Free Lunch with Vanishing Risk*, if

$$\overline{C} \cap L^\infty_{\geq 0} = \{0\},$$

where $\overline{C}$ denotes the norm closure in L^∞.

(NFL) The set $\mathcal{X}$ is said to satisfy *No Free Lunch*, if

$$\overline{C}^* \cap L^\infty_{\geq 0} = \{0\},$$

where $\overline{C}^*$ denotes the weak-$*$-closure in L^∞.

(NUPBR) The set $\mathcal{X}_1$ is said to satisfy *No Unbounded Profit with Bounded Risk*, if K_0^1 is a bounded subset of L^0.

Remark 2. *1. (NFLVR) can be proved to be equivalent to (NA) and (NUPBR), i.e., (NFLVR) $\Leftrightarrow$ (NA) + (NUPBR) (see [9, Corollary 3.8]). This is an essential insight.*

2. (NFLVR) or even (NUPBR) are economically convincing minimal requirement for models, but only (NFL) allows to conclude relatively directly the existence of an equivalent separating measure, defined below.

Definition 1. *The set $\mathcal{X}$ satisfies the (ESM) (equivalent separating measure) property, if there exists an equivalent measure $Q \sim P$ such that $\mathbb{E}_Q[X_1] \leq 0$ for all $X \in \mathcal{X}$.*

Under (NFL), the (ESM) property is a consequence of the Kreps-Yan Theorem, which in turn follows directly from Hahn-Banach's Theorem. For convenience we provide a proof here following [17]:

Theorem 2. *Fix $p \in [1,\infty]$ and set q conjugate to p. Suppose $C \subseteq L^p$ is a convex cone with $C \supseteq -L^p_{\geq 0}$ and $C \cap L^p_{\geq 0} = \{0\}$. If C is closed in $\sigma(L^p, L^q)$, then there exists $Q \sim P$ with $\frac{dQ}{dP} \in L^q(P)$ and $\mathbb{E}_Q[Y] \leq 0$ for all $Y \in C$.*

Proof. Any $x \in L^p_{\geq 0} \backslash \{0\}$ is disjoint from C, so we can apply the Hahn-Banach-theorem to strictly separate x from C by some $z_x \in L^q$. The cone property gives us $\mathbb{E}[z_x Y] \leq 0$, for all $Y \in C$ and $C \supset -L^p_{\geq 0}$ gives $z_x \geq 0$. Strict separation implies $z_x \neq 0$, so that we can normalize to $\mathbb{E}[z_x] = 1$.
We next form the family of sets $\{\Gamma_x := \{z_x > 0\} | x \in L^p_{\geq 0} \backslash \{0\}\}$. Then one can find a countable subfamily $(\Gamma_{x_i})_{i \in \mathbb{N}}$ with $P[\cup_i \Gamma_{x_i}] = 1$. For suitably chosen weights $\gamma_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$, one gets that $Z := \sum_{i=1}^\infty \gamma_i z_{x_i}$ is $Z > 0$ almost surely with respect to P, $Z \in L^q$ and $\mathbb{E}[ZY] \leq 0$, for all $Y \in C$. Through normalization we get to $\mathbb{E}[Z] = 1$, then $dQ := ZdP$ does the job. $\square$

Apparently we have

$$(\mathrm{NFL}) \Longrightarrow (\mathrm{NFLVR}) \Longrightarrow (\mathrm{NA}),$$

but it is an astonishing and deep insight of Walter Schachermayer and Freddy Delbaen that under (NFLVR) it holds that $C = \overline{C}^*$, i.e. the cone C is already weak-$*$-closed and (NFL) holds.

The fundamental theorem of asset pricing then reads as follows:

Theorem 3. *Under (NFLVR) the cone C is weak $*$-closed, hence (NFL) holds, which is equivalent to (ESM). In other words: (NVLVR) $\Leftrightarrow$ (ESM).*

4 A guided tour through the proof of FTAP

In this section we comment on the main steps of the proof of FTAP as presented in [9]. The proof actually splits into two parts: First a series of conclusions are presented, which can be easily motivated with financial (trading) arguments. Secondly five lemmas follow, whose content is more technical and which are considerably harder to prove.

The first series of conclusions is the following:

1. The convex cone C defined in (9) is closed with respect to the weak-$*$-topology, if and only if C_0 is Fatou-closed, i.e. for any sequence (f_n) in C_0 uniformly bounded from below and converging almost surely to f it holds that $f \in C_0$, see [9, Theorem 2.1] essentially tracing back to A. Grothendieck. Notice that this step, whose core is the Krein-Smulian theorem, reduces the calculation of the weak-$*$-closure to a calculation with sequences.

2. Take now $-1 \leq f_n \in C_0$ converging almost surely to f. Then we can find $f_n \leq g_n = Y_1^n$ with $Y^n \in \mathcal{X}$.

3. By (NA) it follows that each $Y^n \in \mathcal{X}_1$ by a simple trading argument.

4. By (NUPBR) it follows that there are forward-convex combinations $\widetilde{Y^n} \in \mathrm{conv}(Y^n, Y^{n+1}, \dots)$ such that $\widetilde{Y_1^n} \to \widetilde{h_0} \geq f$ almost surely. This is another appearance of Komlos lemma, which is a crucial tool in the proof.

5. This implies that the set $\widehat{K_0^1} \cap \{g \in L_0 \,|\, g \geq f\}$, where $\widehat{K_0^1}$ denotes the closure of K_0^1 in L^0, is non-empty. Since it is also bounded by (NUPBR) and closed, a maximal element h_0 exists (see [9, Lemma 4.3]). Since $h_0 \in \widehat{K_0^1}$, we can find a sequence of semimartingales $X^n \in \mathcal{X}_1$ such that $X_1^n \to h_0$ almost surely and h_0 is maximal above f with this property.

6. The previously constructed "maximal" sequence of semimartingales $X^n \in \mathcal{X}_1$ converges pathwise uniformly in probability, i.e. $|X^n - X|_1^* \to 0$ in probability, to some càdlàg process X (see [9, Lemma 4.5]). This is again a beautiful trading argument, where financial intuition meets topology.

Even though the processes X^n are just semimartingales, they behave in several respects like martingales, in particular when convergence of terminal values leads to uniform convergence in probability. This phenomenon is of course not true for finite variation processes. At this point one could conjecture that a sort of martingality with respect to an equivalent measure could hold, but it is not at all clear how to even formulate this.

Since it is of crucial importance we devote a proper definition to maximality as given before Lemma 4.3 in [9]:

Definition 2. *An element $h_0 \in \widehat{K}_0^1$ (where $\widehat{K}_0^1$ denotes the closure of elements of K_0^1 which dominate f) is called maximal, if it is maximal with respect to the pointwise (partial) ordering in L^0.*

It is now the goal to show that the sequence (X^n) constructed in 6. above converges to X in the Emery topology, an apparently much stronger statement. From this it follows that $h_0 = \lim_{n\to\infty} X_1^n = X_1 \in K_0^1$, since $\mathcal{X}_1$ *is closed in the Emery topology*. This in turn implies that $f \in C_0$, which finishes the proof by step (i) above.

Convergence in the Emery topology can be shown with respect to any equivalent measure $Q \sim P$, since this notion of convergence only depends on the equivalence class of probability measures. By the basic convergence result 6. we know that $\xi := \sup_n |X^n|_1^* \in L^0$ (after passing to a subsequence). We can therefore find a measure $Q \sim P$ (take, e.g., $dQ/dP = c\exp(-\xi)$) such that $X^n \in L^2(Q)$, hence we can continue the analysis with L^2-methods, in order to prove Emery convergence with respect to Q. This is an old trick, which works due to Bichteler-Dellacherie or Girsanov-Meyer for semimartingales.

Now the series of more technical lemmas starts: assume (NUPBR), take a sequence of (special thanks to an appropriate change of measure) semimartingales $X^n = A^n + M^n$ whose sup-processes $|X^n|_1^*$ are uniformly bounded in $L^2(Q)$.

1. First key lemma: the sequence $|M^n|_1^*$ is bounded in L^0 (see [9, Lemma 4.7]). Several trading arguments take place here. In general it is difficult to estimate the martingale part when just knowing that a sum with some total variation process converges uniformly in probability.

2. Second key lemma: define $\tau_c^n := \inf\{t \mid |M^n|_t^* > c\}$ for some $c > 0$, $X_c^n := (1_{[\tau_c^n,\infty[} \bullet X^n)$, then for every $\varepsilon > 0$ there is $c_0 > 0$ such that for all

$$\widetilde{X} \in \cup_{c \geq c_0} \operatorname{conv}(X_c^1, \ldots, X_c^n, \ldots)$$

it holds that $Q[|\widetilde{M}|_1^* > \varepsilon] \leq \varepsilon$ (see [9, Lemma 4.8]). If $|M^n|^*$ is getting large, not much of the martingale part is left anymore.

3. Third key lemma: for every $\delta > 0$ there is $c_0 > 0$ such that for all $\widetilde{X} \in \cup_{c \geq c_0} \operatorname{conv}(X_c^1, \ldots, X_c^n, \ldots)$ it holds that $d_E(\widetilde{M}, 0) \leq \delta$ (see [9, Lemma 4.9]). Here the previous statement is sharpened: even the Emery metric of the above martingale part is small.

4. Fourth key lemma: there exists $\widetilde{X}^n \in \operatorname{conv}(X_n, \ldots)$ such that $\widetilde{M}^n$ converges in the Emery topology (see Lemma 4.10 in [9]). Forward convex combinations then lead to a sequence of semimartingales, still with the same limit of terminal values such that the martingales parts converge in the Emery topology: if $|M_t^n|^*$ stays small, we can conclude by Burkholder-Davis-Gundy inequality, and when it gets large by the previous considerations. It converges to 0 in the Emery topology anyway.

Proposition 1. *Let $\mathcal{X}_1$ satisfy (NUPBR). Let $\widetilde{X}^n = \widetilde{M}^n + \widetilde{A}^n \in \mathcal{X}_1$ be a sequence of special semimartingales, whose terminal values X_1^n converge to a maximal element h_0 in probability such that $\widetilde{M}^n$ converges in the Emery topology. Then $\widetilde{A}^n$ converges in the Emery topology as well.*

Proof. See [9, Lemma 4.11]. This is again a beautiful trading argument, where the still unclear Emery convergence of the finite variation part is proved. Here the concatenation property is used in full strength, in particular we need it for all predictable dynamic trades. $\square$

As already argued above, this proposition together with the key Lemma (iv) implies that $f \in C_0$ yielding that C is in fact weak $*$-closed by step (i) above. Hence the assumptions of the Kreps-Yan Theorem 2 are satisfied and we can conclude (ESM), i.e. the existence of a separating measure.

If the proof was a movie, it would win an Oscar for maintaining tension up to the end, which turns out to be a happy one, since the desired Emery convergence can finally indeed be achieved.

References

[1] B. Acciaio, M. Beiglböck, F. Penkner, and W. Schachermayer. A model-free version of the fundamental theorem of asset pricing and the super-replication theorem. *Mathematical Finance*, 26(2):233–251, 2016.

[2] M. Beiglböck, C. Léonard, and W. Schachermayer. A general duality theorem for the Monge–Kantorovich transport problem. *Studia Math.*, 209:151–167, 2012.

[3] M. Beiglböck, W. Schachermayer, B. Veliyev. A direct proof of the Bichteler–Dellacherie theorem and connections to arbitrage. *The Annals of Probability*, 39(6):2424–2440, 2011.

[4] F. Black and M. S. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–54, 1973.

[5] C. Cuchiero and J. Teichmann. A convergence result for the Emery topology and a variant of the proof of the fundamental theorem of asset pricing. *Finance and Stochastics*, 19(4):743–761, 2015.

[6] C. Czichowsky and W. Schachermayer. Duality theory for portfolio optimisation under transaction costs. *The Annals of Applied Probability*, 26(3):1888–1941, 2016.

[7] R. C. Dalang, A. Morton, and W. Willinger. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. *Stochastics Stochastics Rep.*, 29(2):185–201, 1990.

[8] F. Delbaen. Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded. *Math. Finance*, 2(2):107–130, 1992.

[9] F. Delbaen and W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann.*, 300(3):463–520, 1994.

[10] F. Delbaen and W. Schachermayer. The no-arbitrage property under a change of numéraire. *Stochastics Stochastics Rep.*, 53(3-4):213–226, 1995.

[11] F. Delbaen and W. Schachermayer. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Math. Ann.*, 312(2):215–250, 1998.

[12] F. Delbaen and W. Schachermayer. *The mathematics of arbitrage*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[13] M. Emery. Une topologie sur l'espace des semimartingales. In *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 260–280. Springer, Berlin, 1979.

[14] P. Guasoni, M. Rásonyi, W. Schachermayer, et al. Consistent price systems and face-lifting pricing under transaction costs. *The Annals of Applied Probability*, 18(2):491–520, 2008.

[15] J. M. Harrison and D. M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *J. Econom. Theory*, 20(3):381–408, 1979.

[16] J. M. Harrison and S. R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Process. Appl.*, 11(3):215–260, 1981.

[17] Y. M. Kabanov. On the FTAP of Kreps-Delbaen-Schachermayer. In *Statistics and control of stochastic processes (Moscow, 1995/1996)*, pages 191–203. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.

[18] I. Klein and W. Schachermayer. Asymptotic arbitrage in non-complete large financial markets. *Theory Prob. Appl.*, pages 927–934, 1996.

[19] D. Kramkov and W. Schachermayer. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. *Annals of Applied Probability*, pages 904–950, 1999.

[20] D. Kramkov and W. Schachermayer. Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets. *Annals of Applied Probability*, pages 1504–1516, 2003.

[21] D. M. Kreps. Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many com-

modities. *J. Math. Econom.*, 8(1):15–35, 1981.

[22] J. Mémin. Espaces de semi martingales et changements de probabilité. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, 52:9–39, 1980.

[23] S. A. Ross. A simple approach to the valuation of risky streams. *The Journal of Business*, 51(3):453–75, 1978.

[24] W. Schachermayer. Martingale measures for discrete-time processes with infinite horizon. *Math. Finance*, 4(1):25–55, 1994.

[25] W. Schachermayer. The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 14(1):19–48, 2004.

[26] W. Schachermayer. Fundamental theorem of asset pricing. In *Encyclopedia of Quantitative Finance*. John Wiley & Sons, Ltd, 2010.

[27] C. Stricker. Arbitrage et lois de martingale. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 26(3):451–460, 1990.

[28] J.-A. Yan. Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1. In *Seminar on Probability, XIV (Paris, 1978/1979) (French)*, volume 784 of *Lecture Notes in Math.*, pages 220–222. Springer, Berlin, 1980.

Authors' addresses:

Christa Cuchiero
Department of Statistics and Operations Research
University of Vienna
Kolingasse 14-16
A-1090 Wien, Austria
email christa.cuchiero@univie.ac.at

Josef Teichmann
Department of Mathematics
ETH Zürich, Rämistrasse 101
CH-8092 Zürich, Switzerland
email jteichma@math.ethz.ch

Buchbesprechungen

H. Cohen, F. Strömberg: Modular Forms (C. ELSHOLTZ) 32
P. Pollack: A Conversational Introduction to Algebraic Number Theory (C. ELSHOLTZ) 32
M. Raussen, C. Skau (eds.): Interviews with the Abel Prize Laureates 2003-2016 (C. ELSHOLTZ) 32
P. R. Turner, T. Arildsen, K. Kavanagh: Applied Scientific Computing (L. HOLZLEITNER) 33
R. Taschner: Vom Kontinuum zum Integral (C. FUCHS) 33
M. V. Markin: Real Analysis (L. HOLZLEITNER) 34
D. P. Feldman: Chaos and Dynamical Systems (J. HERRET) 35
A. Wigderson: Mathematics and Computation (C. ELSHOLTZ) 36
C. Carstensen-Opitz, B. Fine, A. Moldenhauer, G. Rosenberger: Abstract Algebra (C. FUCHS) 36
A. Simis: Commutative Algebra (C. FUCHS) 37
D. Koukoulopoulos: The Distribution of Prime Numbers (C. ELSHOLTZ) 38
E. S. Egge: An Introduction to Symmetric Functions and Their Combinatorics (M. J. SCHLOSSER) 38
A. Borel: Introduction to Arithmetic Groups (J. SCHWERMER) 39

H. Cohen, F. Strömberg: Modular Forms. A Classical Approach. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 179.) American Mathematical Society, Providence (USA), 2017, 700 S. ISBN 978-0-8218-4947-7 H/b \$ 94.

Dieser Überblick über modulare Formen ist eine auf den aktuellen Stand gebrachte und mit aktuellen Themen ergänzte Version von Vorlesungen, die H. Cohen 1976 und 1986 hielt, ergänzt durch Vorlesungsunterlagen von F. Strömberg. Es ist schön, dass diese umfangreichen Unterlagen nun einem breiten Leserkreis zur Verfügung stehen.

Die Autoren berichten, dass man zur Lektüre nichts außer den üblichen Kenntnissen der Funktionentheorie und Interesse an Zahlentheorie benötigt. Das Buch enthält zahlreiche Übungsaufgaben. Die Leser werden auch ermutigt, die Formeln und Identitäten in einem Computer-Algebra-System zu implementieren.

C. Elsholtz (Graz)

P. Pollack: A Conversational Introduction to Algebraic Number Theory. Arithmetic Beyond $\mathbb{Z}$. (Student Mathematical Library, Vol. 84.) American Mathematical Society, Providence (USA), 2017, 312 S. ISBN 978-1-4704-3653-7 P/b \$ 52.

Dies ist eine sehr schöne Einführung in die algebraische Zahlentheorie. Das Buch ist, im Vergleich zu anderen Einführungen in dieses Gebiet, recht ausführlich und konkret. Zahlreiche Beispiele werden im Detail behandelt, zahlreiche weitere Übungsaufgaben regen zum Selbststudium an. Es geht dem Autor nicht um maximale Allgemeinheit, sondern um ein sicheres Verständnis des behandelten Stoffes.

C. Elsholtz (Graz)

M. Raussen, C. Skau (eds.): Interviews with the Abel Prize Laureates 2003-2016. European Mathematical Society, Zürich, 2017, 302 S. ISBN 978-3-03719-177-4 P/b € 24.

Dies ist eine interessante Reihe von Interviews, die mit den Abelpreisträgern geführt wurden. Die Liste der Preisträger: Serre, Atiyah und Singer, Lax, Carleson, Varadhan, Thompson und Tits, Gromov, Tate, Milnor, Szemerédi, Deligne, Sinai, Nash und Nirenberg. Die Interviews sind ca. 15-20 Seiten lang. Einerseits enthalten sie einige biografische Informationen und Anekdoten, andererseits verstehen es aber die Interviewer, da sie selber Mathematiker sind, durch geeignete Fragen eine Plattform zu schaffen, auf der die Preisträger in eigenen Worten über die Ergebnisse, Methoden und Hintergründe ihrer Arbeit berichten können. Diese Zusammenschau von vielen Preisträgern enthält für jeden etwas Interessantes!

C. Elsholtz (Graz)

P. R. Turner, T. Arildsen, K. Kavanagh: Applied Scientific Computing. With Python. (Texts in Computer Science.) Springer International Publishing, Cham, 2018, 272 S. ISBN 978-3-319-89574-1 H/b € 48,14.

Das in diesem Buch behandelte Thema *Applied Scientific Computing* bringt es schon fast zwangsläufig mit sich, eine Computersprache zumindest mitzubehandeln. Nun gestaltet sich das Erlernen von C etwas aufwendig und Fortran hat zweifellos gewisse Schwächen beim grafischen User Interface (GUI) und der Visualisierung. Aus diesem Grund wurde in den letzten Jahren Python immer beliebter, eine Programmiersprache, die ähnlich leicht zu erlernen ist wie seinerzeit BASIC, die sich aber durch Zusatzmodule an die moderne GUI-Umgebung anpassen lässt. Genau diese Lücke füllt nun dieses Buch. Es handelt sich allerdings nicht um ein Buch über Python, die Grundkenntnisse von Python sowie der Module NumPy, SciPy und Matplotlib werden bereits vorausgesetzt. Vielmehr handelt es sich um ein Buch, das den Standardlehrstoff der Numerik behandelt, nur eben mithilfe von Python als Programmiersprache anstelle wie sonst üblich C oder Fortran.

Nach einer Einführung in die digitale Zahlenrepräsentation und der damit verbundenen Arithmetik sowie in die Rundungs- und Kürzungsfehlerthematik kommen Kapitel über numerisches Differenzieren und Integrieren, direkte und iterative Lösungsmethoden linearer Gleichungssysteme sowie Approximationen und Eigenwertberechnungen. Es schließt sich ein Kapitel über iterative Lösungen nichtlinearer Gleichungen mit Fixpunktiteration, Newton-Methode, Sekantenmethode, etc. an. Anschließend werden Interpolationen behandelt und zu guter Letzt noch ein Kapitel über Lösung von Differentialgleichungen mithilfe der Euler-Methode, Runge-Kutta-Methode und Mehrschrittverfahren. Auch Differentialgleichungssysteme und Randwertprobleme werden kurz angeschnitten. Jedes Kapitel wird unterlegt mit Beispielen und Lösungen mithilfe des Moduls NumPy.

Insgesamt ein gutes Buch, zu empfehlen für alle, die gerne mehr über numerisches Programmieren erfahren wollen, denen das Erlernen von C zu aufwendig ist und die nicht auf eine einfache grafische Visualisierung der Ergebnisse verzichten wollen.

L. Holzleitner (Karlsruhe)

R. Taschner: Vom Kontinuum zum Integral. Eine Einführung in die intuitionistische Mathematik. Springer Spektrum, Berlin, 2018, 216 S. ISBN 978-3-658-23379-2 P/b € 27,99.

Das lesenswerte Buch beginnt mit der neuen Grundlagenkrise der Mathematik, welche die Kritik von H. Weyl am formalistischen (mittlerweile konventionellen) Aufbau der Mathematik nach G. Cantor, R. Dedekind und D. Hilbert ausgelöst hat. Den Ideen von L.E.J. Brouwer folgend, zeigt der Autor, wie die Analysis intuitionistisch auf konstruktive Art aufgebaut werden kann. Dabei werden beispielsweise die natürlichen Zahlen oder der Folgenbegriff als intuitiv klar vorausgesetzt. Nach der Einführung werden zunächst die reellen Größen definiert. Darunter werden Folgen $([\alpha]_n)_n$ mit $[\alpha]_n$ eine Dezimalzahl mit genau n Nachkommastellen verstanden, für welche $|[\alpha]_n - [\alpha]_m| \leq^1 0^{-n} + 10^{-m}$ für alle n, m gilt. Im Anschluss wird das Kontinuum inklusive der algebraischen und ordnungstheoretischen Operationen und Eigenschaften ausführlich erläutert. Darauf aufbauend, wird die Stetigkeit von Funktionen sowie schließlich der Integralbegriff behandelt. Eine Funktion ist dabei *ein Verfahren f, das bei einem mit u symbolisierten Input einen mit $v = f(u)$ bezeichneten Output liefert* und das zusätzlich extensional ist (d.h. aus $f(u') = v', f(u'') = v''$ und $v' \neq v''$ folgt stets $u' \neq u''$). Hier zeigt sich die intuitionistische Sichtweise, welche angelegt wird. Besonders eindrucksvolle Ergebnisse der konstruktiven Mathematik, die hier beispielhaft erwähnt werden sollen, sind dann die Folgenden. Der Satz von Weyl und Brouwer: *Es bezeichnen S und T zwei vollständige metrische Räume. Über dem Teilraum X von S sei eine Funktion f definiert, und es bezeichne ξ einen inneren Punkt von X. Dann ist die Funktion f an der Stelle ξ stetig.* Der Satz von Weierstraß und Brouwer: *Es bezeichne S einen kompakten metrischen Raum und T einen vollständig metrischen Raum. Dann ist jede Funktion $f : S \to T$ über S gleichmäßig stetig.* Sowie der Satz von Dini und Brouwer: *Es bezeichne S einen kompakten metrischen Raum, es bezeichne T einen vollständigen metrischen Raum und es bezeichne $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ eine punktweise konvergente Folge von über S definierten Funktionen f_n mit Werten in T. Dann ist F bereits gleichmäßig konvergent.* In diesen Sätzen werden die Unterschiede zum formalistischen Aufbau besonders deutlich. Das Buch kann allein mit Schulkenntnissen gelesen werden, ist wortgewaltig formuliert, konzise aufgebaut und liefert in nicht-konventioneller Weise die wesentlichen Ergebnisse der Analysis.

C. Fuchs (Salzburg)

M. V. Markin: Real Analysis. Measure and Integration. (De Gruyter Textbook.) De Gruyter, 2019, 339 S. ISBN 978-3-11-060097-1 P/b € 64,95.

Der Titel des Buches *Real Analysis* ist etwas irreführend, der Zusatztitel *Measure and Integration* trifft es schon eher. Es handelt sich um ein Buch, das den üblichen klassischen Linien der Maßtheorie folgt, mit einer Ausnahme: Der Autor, offenbar aus russischer Schule stammend, baut die gesamte Maßtheorie auf rein mengentheoretischen Grundlagen auf, über den Grundraum werden keinerlei Voraussetzungen als allgemeine Eigenschaften (z.B. Kompaktheit, Vollständigkeit, Metrischer Raum, etc.) gemacht. Konsequenterweise enthält es einen Anhang über das Auswahlaxiom, auf welches man bei tieferen mengentheoretischen Studien unweigerlich trifft. Aufgrund dieses rein mengentheoretischen Ansatzes werden auch das Differenzieren und das Integral erst relativ spät in Kapitel 8 (über $\mathbb{R}$) eingeführt.

Dem mengentheoretischen Ansatzes geschuldet, beginnt es mit zwei ausführlichen Kapiteln über mengentheoretische Voraussetzungen, dann schließen sich Kapitel über Maße sowie deren Erweiterung an. Im nächsten Kapitel werden messbare Funktionen behandelt, dann das Lebesgue-Integral und ein Kapitel über L_p Räume. Auch Bezüge zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Maßtheorie werden hergestellt. Erst dann werden Differenzial und Integral eingeführt; den Abschluss bildet ein Kapitel über signierte Maße.

Obwohl das Werk in sich geschlossen ist (entsprechend kurz fällt die Literaturliste aus), stellt es Voraussetzungen an das Abstraktionsvermögen des Lesers sowie Wissen über mathematische Terminologie, die an Schulen üblicherweise nicht vermittelt werden. Es ist daher kein Lehrbuch für Anfänger, sondern sollte von Bachelorstudenten nur unter fachkundiger Anleitung und zum Selbststudium erst ab dem Masterstudium verwendet werden. Vor allem wegen seines interessanten, abstrakten Ansatzes und da es kaum Zusatzliteratur benötigt, kann es auch dem erfahrenen Mathematiker noch einiges bieten. Man darf sich aber auch nicht zu viel erwarten: Es beschränkt sich auf den üblichen Lehrstoff und stellt keine Ansprüche auf weiterführende Studien.

L. Holzleitner (Karlsruhe)

D. P. Feldman: Chaos and Dynamical Systems. Princeton University Press, 2019, 264 S. ISBN 978-069-1189-39-0 P/b \$ 35.

Mit dem Buch *Chaos and Dynamical Systems* ist David P. Feldmann eine Einführung in die Welt der chaotischen dynamischen Systeme gelungen, die ihresgleichen sucht. Mit seiner klaren und bewundernswert einfachen Sprache schafft es Feldman, einen tiefen und spannenden Einblick in dynamische Systeme und Chaostheorie für Interessierte ohne jeglichen mathematischen Hintergrund und gleichermaßen für Expert*innen auf diesem Gebiet zu geben.

Feldman beginnt in den ersten beiden Kapiteln mit einer ausführlichen Betrachtung iterierter Funktionensysteme und Differentialgleichungen. Anhand der Wassertemperatur in seiner Trinkflasche erklärt Feldman in fast eleganter Weise diese beiden Begriffe. Was für viele Mathematiker*innen auf den ersten Blick zu einfach und trivial scheint, ist auf den zweiten Blick unglaublich wertvoll, da Feldman aufzeigt, wie komplexe Themen in einfachster Form dargestellt werden können. Das dritte Kapitel bildet eine nähere philosophische Auseinandersetzung mit Newtons mechanistischem Weltbild. Den Hauptteil des Buchs stellt allerdings das vierte Kapitel dar. In diesem wird die logistische Gleichung eingeführt und der Schmetterlingseffekt als Sensibilität gegenüber Anfangsbedingungen definiert. Damit geht er nahtlos ins nächste Kapitel über, in dem er aufzeigt, dass deterministische Systeme sowohl unvorhersehbare wie auch zufällige Ergebnisse hervorbringen können. Im sechsten Kapitel wird die logistische Differentialgleichung verwendet, um Bifurkationen, Tipping-Points und Hysterese zu veranschaulichen. Die dazugehörigen Bifurkationsdiagramme werden mit ihrem periodenverdoppelnden Weg ins Chaos und einer Definition der Feigenbaum-Konstante im siebten Kapitel untersucht.

Am Ende eines jeden Kapitels wird mit einer langen Liste auf weiterführende Literatur verwiesen; das Buch enthält somit auch eine kompakte Sammlung an Literatur. Der Autor schafft es, ein tiefes Verständnis über Konzepte von dynamischen Systemen für ein breites Publikum bereitzustellen, indem er alle wesentlichen Aspekte anhand von Beispielen aus dem Alltag erklärt. Dabei gelingt es dem Autor, auch Brücken zu anderen Fachgebieten, wie zum Beispiel der Philosophie zu schlagen. Feldman erreicht dies, ohne ein tiefes mathematisches Vorwissen vorauszusetzen.

J. Herret (Wien)

A. Wigderson: Mathematics and Computation. (A Theory Revolutionizing Technology and Science). Princeton University Press, 2019, 440 S. ISBN 978-0-691-18913-0 P/b £ 42.

Dieses Buch ist anders als die meisten Mathematikbücher. Es führt den Leser im unterhaltsamen Konversationsstil zu den zentralen Fragen und Antworten der Theoretischen Informatik bzw. Komplexitätstheorie. Es geht dem Autor darum, die Ideen und Lösungen gut zu erklären; er ist souverän genug, dafür mühselige Details wegzulassen bzw. auf weitergehende Referenzen zu verweisen.

Dies Buch ist daher für einen weiten Leserkreis sehr gut geeignet und gibt einen sehr breiten Überblick über das Fach. Der Autor ist eine führende Kapazität der theoretischen Informatik und seine Sicht auf das Fach hat die Entwicklung des Fachs jahrzehntelang mitgeprägt.

C. Elsholtz (Graz)

C. Carstensen-Opitz, B. Fine, A. Moldenhauer, G. Rosenberger: Abstract Algebra. Applications to Galois Theory, Algebraic Geometry, Representation Theory and Cryptography. 2nd rev. and ext. Edition. (De Gruyter Textbook.) De Gruyter, 2019, 407 S. ISBN 978-3-11-060393-4 P/b € 49,95.

This book gives a concise introduction to modern abstract algebra. It is well-written and follows the usual definition-theorem-proof style. New material is explained by examples, which often stem from number theory. Each new chapter first gives a historical account that motivates the theory to follow and puts it into context. The chapters end with exercises for the reader to deepen the understanding. A rather unique feature is that quite often important concepts or results are used before they are thoroughly discussed; this gives the reader a cliff-hanging impression of a developing theory. The book starts with rings and fields only quickly touching groups. Then it proceeds with maximal and prime ideals, prime elements and UFDs, polynomials and polynomial rings, field extensions and their role in compass and straightedge constructions, Kronecker's theorem and algebraic closures, splitting fields and normal extensions. Then it goes back to group theory covering subgroups, normal subgroups, factor groups, direct products, symmetric and alternating groups, solvable groups, group actions and the Sylow theorems, free groups and group representations. Then everything is prepared to prove the fundamental theorem of finite Galois theory which is the centerpiece of this and every book on abstract algebra. The authors proceed by looking into separable field extensions and applications of Galois theory (solvability, constructibility, and the fundamental theory of algebra). The next chapters are addressing algebraic number theory and algebraic geometry. First the theory of modules is handled followed by the classification of finitely generated abelian groups as a special case. Then integral and transcendental extensions (including the transcendence of e and π) and the Hilbert basis theorem and the Nullstellensatz are discussed. The last two chapters of the book cover algebras and group representations as well as algebraic and group-based cryptography. In comparison to the first edition the chapter on algebras and group representations and material on skew fields extensions of the complex numbers and Frobenius's theorem has been newly included. Also various typos were cleaned-up. This is a nice book that can be recommended to everyone interested in abstract algebra, in particular lecturers who look for a ready-to-use text book and/or students who want to have a readable text book introducing them into this beautiful subject with an eye on applications.

C. Fuchs (Salzburg)

A. Simis: Commutative Algebra. De Gryuter, 2020, 240 S. ISBN 978-3-11-061697-2 P/b € 51,95.

Commutative algebra has become an important subject because of its use in algebraic number theory and algebraic geometry. This well-written book gives an account of this subject that has become rather large in the course of time. It is divided into two parts. Part I is more elementary and aims to newcomers in the field. It starts with a basic introduction (commutative rings, ideals, algebras) and then moves on to the main tools (rings of fractions, integral ring extensions, Krull dimension and Noether normalization, Nullstellensatz, dimension theory, primary decomposition, Hilbert characteristic function). As intermediate material an overview of module theory and an account on deviations, differentials and Jacobian ideals is given. Part II covers a selection of more advanced material. It starts with the basic advanced theory on dimension and associated primes and the primary decomposition and then moves to depth and to Cohen-Macaulay modules. After that homological methods (regular local rings, homological tools for Noetherian rings, the method of the Koszul complex and variations on it) and finally graded structures (including symmetric algebras, Rees algebras, Hilbert function of modules) are discussed. The book very nicely reflects the author's class-room style and experience in giving short historic notes right away and mentioning and/or using a result before it has been rigorously introduced when it helps. The proofs are carefully worked out and the text is pleasant to read. Each chapter ends with a more elaborated historic note and with a list of exercises often aiming to solve concrete problems. The book, which assumes basic knowledge of algebra, can be recommended as a first introduction to commutative algebra but also as source to learn or revise more advanced topics in this field.

C. Fuchs (Salzburg)

D. Koukoulopoulos: The Distribution of Prime Numbers. (Graduate Studies in Mathematics Vol. 203). American Mathematical Society, 2019, 356 S. ISBN 978-1-4704-4754-0 P/b \$ 85.

Dies Buch behandelt in 30 kurzen Kapiteln einerseits das klassische Material der Theorie, wie es auch schon bei Davenport (Multiplicative number theory) steht, setzt aber eine Reihe neuer Akzente, die erst in der jüngsten Vergangenheit entwickelt wurden. Hier wird der Satz von Linnik, basierend auf Ideen der pretentious multiplicative functions (nach Granville und Soundararajan), bewiesen. Die neuen Ergebnisse der letzten Jahre (nach Zhang, Maynard und Tao und nach Ford, Green, Konyagin, Maynard und Tao) zu kurzen und langen Lücken zwischen Primzahlen werden hier erstmals in einem Lehrbuch aufgenommen.

Dieses Buch ist eine sehr willkommene Ergänzung der Literatur.

C. Elsholtz (Graz)

E. S. Egge: An Introduction to Symmetric Functions and Their Combinatorics. (Student Mathematical Library Vol. 91). American Mathematical Society, 2019, 342 S. ISBN 978-1-4704-4899-8 P/b \$ 55.

This book, aimed at a graduate student audience and published by the American Mathematical Society in the *Student Mathematical Library* series, gives an excellent introduction to Symmetric Functions and their connection to Combinatorics. The ten chapters and three appendices are well-organized and are each devoted to specific core topics. Typically, in each chapter some motivation is given for the introduction of new important concepts and objects, together with corresponding results. Then many light examples are given which help the reader to digest the material. The examples are actually formulated as problems which students are encouraged to solve by themselves before looking at the solutions (which are given in great detail). Further, each chapter contains a problem section with no solutions provided. These problems are much harder than the examples and often even concern key results of the theory (which could have been discussed in detail in the book but were left out for space limitations). The main aim of the problem section is to give the reader an idea about further important aspects of the theory that are only touched on in the book. Finally, most chapters contain an extra section on notes. Useful references are given there, as well as recommendations of adjacent areas worthy to be studied.

The material covered by the book consists not only of classical topics (which are never missing in any book on Symmetric Functions, such Schur functions and the

Hall inner product) but also of topics that were developed more recently. I particularly enjoyed seeing stable Grothendieck polynomials and also the chromatic symmetric functions covered in the book. In this sense, the book is quite modern and I regard it a very welcome addition to the exisiting literature. For reasons of space, some important topics are only mentioned but not dealt with. In particular, given that the book is on the combinatorics of symmetric functions, I find it unfortunate that the famous hook-length formula (for the number of standard Young tableaux of a given shape) is not proved in this volume (but this could change in a future edition). It is worth mentioning that the publisher, the American Mathematical Society, has reserved a website for additional information and updates on the book: `www.ams.org/bookpages/stml-91`

M. J. Schlosser (Wien)

A. Borel: Introduction to Arithmetic Groups. (University Lecture Series Vol. 73). American Mathematical Society, 2019, 118 S. ISBN 978-1-4704-5231-5 P/b $ 50.

Arithmetic groups are naturally viewed as discrete subgroups of Lie groups, originating via some arithmetic conditions as subgroups of algebraic groups defined over number fields. Historically such groups arose in the study of arithmetic properties of quadratic forms. The concept of reduction, as developed by Gauss, Hermite and Minkowski among others, provided a powerful way to select, from the infinitely many forms which are integrally equivalent to a given form, one which is intrinsically characterized by suitable conditions for the entries. Minkowski, following a suggestion made by Gauss in 1831, created a new form of reduction theory by working with lattices as geometric objects. His works, especially his geometric point of view, served as substantial stimuli for Siegel's studies of quadratic, symplectic or Hermitian forms and discontinuous groups in the context of classical groups.

Nowadays, as subsequently unfolded by Chevalley, Borel, Serre, Harder, and Raghunathan, arithmetic groups are essentially situated within the realm of the theory of algebraic groups defined over k or an algebraic function field, that is, over a global field. An arithmetic group acts on a homogenous space which is defined by the ambient Lie group, thus, a very distinctive geometric flavor is even more so inherent in the investigations of these groups. Arithmetic groups play an important role in various contexts, ranging from the theory of locally symmetric spaces, topology, geometric group theory, over to number theory and arithmetic algebraic geometry, to the theory of automorphic forms over global fields, and even lately quantum computing.

The book under review is an English translation of the classical source "Introduction aux Groupes Arithmétiques" by Armand Borel, published in 1969. (The interested reader finds a comprehensive review by Jim Humphreys in *Mathematical Reviews* as MR0244260.) Fortunately, the numbering of theorems, formulas, etc. in the text of the original has been kept. However, the bibliography has been changed because now it includes the works Borel inserted in the text. Moreover, numerous new footnotes are added to the text to help the reader. The treatment of fundamental domains in the ambient Lie group $G_{\mathbb{R}}$, with respect to an arithmetic group in the algebraic group G, given in this text is still a basic reference source for current work.

J. Schwermer (Wien)

Women in Mathematics

Die “European Women in Mathematics” (EWM) Gesellschaft hat einen offenen Brief bezüglich der “Coronakrise: Auswirkungen auf die Karriere der Junior-Mathematiker und der Mathematikerinnen” ausgegeben. Bisher haben mehr als 800 Personen und einige mathematische Gesellschaften weltweit, einschließlich die ÖMG, den Brief unterschrieben bzw. befürwortet. Weitere Unterstützungen sind willkommen:

https://www.europeanwomeninmaths.org/
ewm-open-letter-on-the-covid-19-pandemic/

(Elena Resmerita)

Corona Crisis: Impact on Junior and Women Mathematicians

An open letter from the EWM

Dear Colleagues,

The Covid-19 pandemic and ensuing full and partial lockdowns that this year swept across Europe and the world are unprecedented. Not all of the aftereffects are negative: As a group we have broadened our skills and horizons in digital teaching and online seminars. But the net impact on research and training in academia has been disastrous: Conferences were cancelled and collaborations stood still. Time slated for research splintered among the competing demands of home-schooling, eldercare, and quarantines. Networking and mentorship stalled. Common but often unaddressed mental health issues mushroomed – at a time when getting help was harder than ever.

Let us be clear about one fact:

We did not experience the crisis equally.

Untenured faculty lost more. Women lost more. Caregivers lost more. The more vulnerable the population, the greater the disadvantage.

No one chooses a pandemic, but now we can choose how to respond. We are writing to *advocate a proactive policy to support current employees in temporary positions and future job applicants* in Mathematics in light of the Corona Crisis.

We focus on:

- *Untenured mathematicians*, because the loss of travel and training opportunities, the slow-down in research productivity, and the uncertainty of the job market is most likely to have a long-term impact on their careers.
- *Women*, because statistically, women shoulder more of the burden of caregiving (for children and the elderly) and domestic tasks (for which help and other supports recently disappeared).
- *Parents*, because the shuttering of daycares and schools left them stranded. Suddenly and unexpectedly, parents had to provide constant care for young children and home-schooling for older children.

A proactive policy should not be gender-blind:

While acknowledging the role that some men play in caregiving, we recognize that statistically, women play a significantly larger role. Hence we are concerned that *we may lose talented women mathematicians during and following this crisis*. Women may choose to leave their profession or reduce their hours. Women in temporary positions may choose security and "settle" for lesser positions. Young women may opt not to pursue careers in science. The Covid-19 pandemic has exacerbated existing gender inequities in mathematics and other sciences. *And gender-blind measures do not correct gender inequity.*

To those who say we should relax and trust the system, we remark that the system has not produced a gender-balanced representation in the sciences to date and *it would be naive to expect an automatic correction in the face of enormous burdens*.

To those who say that parents should take unpaid leave if childcare has been disruptive during the pandemic, we remark there is a difference between facing challenges and being unable to satisfy one's job requirements. The vast majority of scientists work tirelessly – far beyond their contractual obligations – to achieve their goals. *The accomplishments of parents* during the pandemic – for both the workplace and the home – *should be recognized, not penalized*.

We advocate the following *proactive measures*:

- We encourage universities, governments, and funding agencies to invest in *extending the contracts* of researchers in temporary positions to offset the loss of productivity during the crisis. We advocate that these extensions give *particular consideration to women*. Perhaps savings due to cancelled travel and workshops can be redirected for this purpose.

- We encourage universities and funding agencies to award *release from teaching or teaching reductions* to untenured mathematicians who lost significant research time to digital teaching and caregiver responsibilities, again giving particular consideration to women. In case such measures are not possible, we advocate for allocating additional support via student assistants or other resources to reduce the teaching demands on junior colleagues.

- Evaluators on Hiring, Tenure, Prize, Grant, and other committees should be reminded that the crisis has impacted individuals very differently. It should be not the years past PhD but an *academic age, corrected for parental and other leaves*, that is the standard quantifier measured by committee members. Women with dependent children should be automatically eligible (although not required) *to subtract up to 12 months from their academic age* – for the purpose of hiring, grant eligibility, tenure deadlines, etc – due to disruptions from the Covid-19 pandemic. Men with minor children or researchers involved in eldercare during the crisis will be eligible if they can demonstrate that they were responsible for caregiving.

- *We advocate flexibility in deadlines and meeting times* especially for women with dependent children. The disruptions of the crisis may mean that it takes longer to review an article, finish a grant application, or return galley proofs. An early afternoon meeting might not be possible. Circumstances vary and allowing open conversations about needs and constraints is a necessary condition for a healthy workplace.

These are anxious times. The lockdowns may return. Europe needs more women in the sciences. Europe believes in the rights of dual-career families. Our response to the pandemic – whether swift and supportive or slow and cynical – will have broad and lasting impact. Let us shape smart policy to recruit and retain a diverse group of talented young scientists.

Authors (in alphabetical order)

Sílvia Barbeiro, University of Coémbra
Francien Bossema, CWI
Jop Briët, CWI
Michela Ceria, University of Milan
Svetlana Dubinkina, CWI
Chiara de Fabritiis, Università Politecnica delle Marche
Colette Guillopé, Université Paris-Est Créteil
Charlotte Kestner, Imperial College London
Nadia Larsen, University of Oslo
Diane Maclagan, University of Warwick

Elisabetta Strickland, Universitá degli Studi di Roma “Tor Vergata”
Rebecca Waldecker, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Maria G. Westdickenberg, RWTH Aachen University

EWM Convenors

Andrea Walther, Humboldt-Universität zu Berlin
Kaie Kubjas, Aalto University

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Neue Kolumne “Women in Mathematics”

Dieses Heft enthält den neuen Abschnitt “Women in Mathematics”, der von der Frauenbeauftragten der ÖMG, Elena Resmerita, vorgeschlagen und – in Absprache mit der Vorsitzenden sowie der Redaktion der IMN – betreut wird. Die Redation wünscht gutes Gelingen!

Ottmar Loos 1939–2020

Am 17. Mai 2020 ist Ottmar Loos, Univ. Prof. i.R. der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck und Honorarprofessor der Fernuniversität Hagen, im 81. Lebensjahr verstorben. Ottmar Loos wurde 1978 nach Innsbruck berufen, wo er bis zu seiner Pensionierung 2003 tätig war. Darüber hinaus war er viele Jahrzehnte eng mit der Fernuniversität Hagen verbunden, die im 2008 eine Honorarprofessur verlieh und wo er bis zuletzt lebte und arbeitete. Ottmar Loos beschäftigte sich vor allem mit der Theorie der Jordan-Strukturen. Er war seit 1993 Mitglied der ÖMG.

Brigitte Bukovics 1924–2020

Am 12. August 2020 ist Brigitte Bukovics im 97. Lebensjahr verstorben. Brigitte Bukovics, Tochter von Johann Radon, war selbst promovierte Mathematikerin und seit 1949 – und bis zuletzt interessiertes – Mitglied der ÖMG. Erinnert sei an dieser Stelle an ihren Beitrag in den IMN mit dem Titel *Lebensgeschichte von Johann Radon, geschrieben von seiner Tochter Brigitte Bukovics* im April-Heft Nr. 162, veröffentlicht 1993 (47. Jahrgang).

Nachtrag zu “Roman Schnabl zum 80. Geburstag”

Sehr geehrte Autorinnen und Autoren, sehr geehrte Redaktion!

Ihr Beitrag in IMN Nr. 244 veranlasst mich zu folgender Zuschrift:

Ich hatte Glück, großes Glück. Es war mir nämlich vergönnt, Prof. Schnabl gleich zu Beginn meines Studiums als Lehrer zu haben (Analysis 1 bis 3). Nicht nur das: Es war meine allererste Vorlesung Anfang Oktober 1979, als Prof. Schnabl mit akademischer Pünktlichkeit (c.t.) den Lehrsaal betrat, kurz um sich blickte, die rund 30 Anwesenden (nicht ganz die Hälfte davon Lehramtsstudenten) freundlich begrüßte, zur Tafel schritt und sofort mit der mathematischen Triniät Definition-Satz-Beweis begann. Obwohl völliger Neuling, erschreckte mich dies nicht, sondern zog mich sofort in den Bann – das ist also Mathematik? Natürlich wurde diese Faszination vor allem vom Vortragenden hervorgerufen, der völlig frei und während der gesamten drei Semester beinahe ohne Stolperer vortrug. Obwohl er konsequent in mathematischer Strenge vorging, hat er seine Hörer geistig nicht verloren und vieles (wohl nicht alles) ergab sich wie selbstverständlich. Auch wenn mehrere Tage zwischen den einzelnen Vorlesungen lagen, setzte er immer punktgenau dort fort, wo er zuletzt geendet hatte – ohne jegliche Aufzeichnungen. Chapeau!

Ich hatte also von Anfang an die allerbesten Voraussetzungen. Nicht unerwähnt möchte ich lassen, dass die von "Elektrikermeister" Hörtlehner geleiteten Übungen zur Analysis ebenfalls wesentlich zum erfolgreichen Studienstart beigetragen haben.

Es ist daher nicht verwunderlich, dass ich auch im weiteren Verlauf meines Studiums die Nähe von Prof. Schnabl suchte und ein Proseminar und ein Seminar bei ihm absolvierte. Letzten Endes bewarb ich mich bei ihm um eine Diplomarbeit. Das kam so: Ich suchte ihn eines Tages in seinem Zimmer auf und trug ihm mein Anliegen vor. Er, seine geliebte Pfeife in der Hand, musterte mich kurz und bat mich, Platz zu nehmen. In der Folge erläuterte er mir sein aktuelles Forschungsgebiet Approximationstherorie und drückte mir die Druckfahne eines von ihm verfassten Artikels in die Hand, die er gerade vom Verlag erhalten hatte. Ich warf einen Blick darauf und verstand nichts. Offenbar zielte Prof. Schnabl aber gar nicht auf das dort behandelte Thema ab, sondern meinte, es gäbe da etwas ganz Neues, nämlich eine Arbeit eines britischen Mathematikers zu konvergenten Dreiecksschemata und Delphischen Halbgruppen. Ich solle mich in meiner Diplomarbeit damit beschäftigen und nähere Untersuchungen dazu anstellen. Jetzt war ich mir nicht mehr ganz so sicher, ob dies eine gute Idee war, mir bei Prof. Schnabl eine Diplomarbeit abzuholen. Trotzdem sagte ich zu in der Hoffnung, dass sich in der Literatur dazu wohl einiges finden lasse. (Diese Hoffnung hat sich nicht erfüllt.)

Die Betreuung von Prof. Schnabl als Diplomvater war großartig. Er hat immer gerade so viel (oder so wenig) anregende Unterstützung geliefert, die es mir ermöglichte, die Diplomarbeit zu Delphischen Halbgruppen erfolgreich abzuschließen. Genauso in Erinnerung geblieben sind mir seine Erzählungen über seine durchaus anspruchsvollen Wanderungen, die die Diplomarbeitsbesprechungen auflockerten.

Das Leben ist voller Zufälle, und ich begann (wohl aus Neugier) eine Berufslaufbahn fernab der Mathematik. Ich habe keine Ahnung, ob Delphische Halbgruppen in der Mathematik jemals eine Bedeutung erlangt haben, aber das ist für mich nicht wichtig. Wichtig ist, dass meine Liebe zur Mathematik bis heute erhalten geblieben ist. Prof. Schnabl hat einen Grundstein dazu gelegt. Dafür bin ich Prof. Schnabl sehr dankbar und wünsche ihm alles Gute zu seinem 80. Geburtstag! Ad multos annos!

Dipl.-Ing. Michael Vertneg
Schnabl-Jahrgang 79
Wien, am 13.09.2020

Laudatio aus Anlass der Verleihung des Förderungspreises 2020

Dear Professor Kaltenbacher, dear Julian, dear Colleagues,

it is a great pleasure to present the scientific achievements of my outstanding young colleague, Julian Fischer, on the occasion of receiving the Förderungspreis of the Austrian Mathematical Society in 2020.

Julian completed his PhD in 2013 in Erlangen with Professor Günther Grün and after a few postdoc years in Zürich and Max Planck Institute in Leipzig, he became the youngest tenure track assistant professor at IST Austria at the age of 27. This year he received an ERC Starting Grant, the most prestigious and competitive research grant in Europe.

Julian is an extraordinary talent working in partial differential equations (PDEs). Within a few years after his PhD he has become an international leader in the analysis of PDEs arising in continuum mechanics. He has solved three major open problems that have been attempted in vain by many senior top mathematicians. More remarkably, these breakthroughs mark quite different areas of partial differential equations, underlining his remarkable breadth and technical mastery. Let me briefly comment on these three particular instances of his works but let me stress that his contributions are by no means limited to these three areas of PDE theory; they were chosen to represent the breadth and versatility of his works.

The first topic is the *thin film equation* where Julian made a remarkable discovery in his PhD thesis which he finished within just two years. It is a highly nonlinear fourth order PDE with free boundary, describing the evolution of the height of a viscous thin liquid film on a flat surface. Imagine a droplet of coffee falling on the table; the key question is its expansion as time goes on, i.e. the motion of the boundary of the support of the droplet. Many groups of top authors have analyzed the qualitative behavior of solutions of the thin film equation, nevertheless, the central problem remained completely open: no rigorous lower bounds on the propagation of the free boundary were known. The obvious observation from everyday life, that a droplet extends, lacked any proof! In solving this conundrum, Julian built around a rare accomplishment: he discovered a new monotone quantity for the thin film equation. He proved that a carefully chosen weighted moment of the droplet with a power law decaying weight cannot decrease too quickly. This enabled him for the first time to derive estimates *from below* on the propagation of the free boundary. Monotone quantities for non-linear PDEs are always game-changers but finding them is a tremendously difficult enterprise, in particular for well-studied equations like the thin film equation. Well-deserved, this idea has led to several single-author publications in top journals.

After joining the MPI Leipzig as a postdoc in Felix Otto's group, Julian quickly established himself as a key player in the field of *stochastic homogenization.* The goal of this area is to describe the large scale behavior of elliptic and parabolic equations with random coefficients via simpler effective equations. While the basic idea is simple and ubiquitously used in the physics literature, its rigorous mathematical verification is notoriously hard. This field requires a mastery not only in PDE's but also in probability theory. While the linear theory has been relatively well understood over several decades by the works of Kozlov, Papanicolaou, Varadhan, Avellanada, Lin in the 1970's-80's and more recently by Otto, Armstrong and Gloria, the quantitative analysis of the nonlinear equations have remained an almost uncharted territory until very recently when Fischer, with S. Neukamm[1] proved optimal homogenization rates for random *nonlinear* elliptic PDEs, achieving the same rates of convergence as Gloria and Otto in the linear elliptic case.

Fischer, however, brought yet another aspect into the homogenization game: the *very practical goal to compute* the homogenized effective coefficients from observed real life data. In a recent single-authored article[2], Fischer analyzed a scheme for the numerical computation suggested by a group around the outstanding applied mathematician Le Bris[3]. This scheme basically asserted that it is advantageous to perform the computation of effective properties not on a random material sample, but to pre-select a material sample that reproduces certain statistical properties of the medium exceptionally well. The mainstream opinion in stochastic homogenization was that this method would anyway introduce uncontrollable errors and a mathematical justification is hopeless. Fischer proved the mainstream opinion wrong, providing *"a spectacular theoretical foundation"* (quoted from Mourrat et al[4]) for the method by Le Bris and coworkers.

For the third direction, just recently, Julian – together with his first PhD student Sebastian Hensel and two collaborators – achieved a breakthrough in the analy-

[1] J. Fischer, S. Neukamm, arXiv:1908.02273

[2] J. Fischer, Arch. Ration. Mech. Anal., 234 (2019), 635-726

[3] C. Le Bris, F. Legoll, W. Minvielle, Monte Carlo Methods Appl. 22 (2016), 25-54; see also X. Blanc, C. Le Bris, F. Legoll, Philos. Trans. A 374 (2016), 20150168

[4] A. Hannukainen, J.-C. Mourrat, H. Stoppels, arXiv:1905.06751

sis of *mean curvature flow*[5]. This is a fundamental equation describing, among others, the evolution of interfaces along the gradient flow minimizing the surface area: it was shown that the weak (bounded variation) solution to planar multiphase mean curvature flow is unique prior to the first topological change. *Fischer's result marks a rare progress on uniqueness properties of weak solution concepts for mean curvature flow since the seminal works of Chen–Giga–Goto and Evans–Spruck on viscosity solutions in 1991.* Since 1991 no progress in the case of multiple phases could be made at all and hence the attention of the community slowly turned to strong solution concepts[6]. Julian's result has revived a research area where almost everybody else has basically given up!

Julian's productivity is outstanding both in quality and quantity. Including preprints, he has written 30 articles, most of them in leading journals. His trajectory is clearly upwards: just last year he submitted eight articles. It is not only the sheer number of publications that stands out, but also the amount of scientific material produced: Four of his recent works exceed 80 pages in length! This high productivity notwithstanding, his real strength is the true innovations in his research.

I would like to congratulate Julian, an extraordinary young mathematician with stellar accomplishments and lots of further potential, to the well deserved Prize!

(László Erdős)

Protokoll der Generalversammlung der ÖMG am 25.09.2020, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Zeit: Freitag, 25. September 2020, 16:30 – 17:15 Uhr
Ort: Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Universitätsstraße 65–67, HS 4 bzw. Videokonferenz über https://classroom.aau.at/b/bka-g58-7eb-wew

Tagesordnung:

1. Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit
2. Berichte der Vorsitzenden, des Kassiers und weiterer Vorstandsmitglieder
3. Bericht der Rechnungsprüfer und ggf. Entlastung des Vorstands
4. Berichte aus den Landessektionen und den Kommissionen
5. Veranstaltungen und Fördermaßnahmen der ÖMG
6. Wahlen: Landessektionsvorsitzende 2021–2022 und Beiratsmitglieder, ggf. Nachnominierung Didaktikkommission
7. Allfälliges

[5] J. Fischer, S. Hensel, T. Laux, T. Simon, arXiv:2003.05478

[6] see for example L. Bronsard, F. Reitich, Arch. Rational Mech. Anal. 124 (1993), 355–379, C. Mantegazza, M. Novaga, V. Tortorelli, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. 3 (2004), 235–324, T. Ilmanen, A. Neves, F. Schulze, J. Differential Geom. 111 (2019), 39–89, C. Mantegazza, M. Novaga, A. Pluda, F. Schulze, arXiv:1611.08254

TOP 1.

Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit

Die Vorsitzende Barbara Kaltenbacher begrüßt die Anwesenden und stellt die Beschlussfähigkeit fest.

TOP 2.

Berichte der Vorsitzenden, des Kassiers und weiterer Vorstandsmitglieder

Die Vorsitzende berichtet vom Schüler*innenpreis der ÖMG. Es gab neun Einreichungen, vier von Schülerinnen und fünf von Schülern. Wie bisher bestand die Kommission aus Gabriela Schranz-Kirlinger (TU Wien), Gert Kadunz (Uni Klagenfurt) und Maria Koth (Uni Wien). Die Preisträger sind dieses Jahr Maximilian Spitaler (betreut von Mag. Harald Groetz), Lorenz Hübel und Lea Magdalena Ehrenthal (beide betreut von Mag. Bernhard Klimbacher). Der Studienpreis wurde an Dipl.-Ing. Michael Missethan für seine Diplomarbeit über Asymptotic properties of random outerplanar graphs (betreut von Mihyun Kang, TU Graz) verliehen. Der Förderungspreis ging an Dr. Julian Fischer (IST); die Laudatio wurde von László Erdős gehalten.

Weiter berichtet die Vorsitzende vom Mitgliederstand. Es gibt derzeit 409 Mitglieder, davon 356 im Inland und 53 im Ausland. Verstorben sind in diesem Jahr Dr. Brigitte Bukovics (12.8.2020) und Prof. Dr. Ottmar Loos (17.5.2020).

Der Kassier konnte an der Sitzung nicht teilnehmen. Die Vorsitzende berichtet, dass es im Jahr 2019 ein leichtes Minus gab, der Vermögensstand entwickelt sich weiterhin stabil. Von den IMN berichtet Clemens Fuchs, dass die Hefte 243 und 244 versandt worden sind. Er dankt Hannes Wallner für den Versand und ihm und auch Robert Tichy und Hans Humenberger für die Mitarbeit in der Redaktion. Bei den Buchbesprechungen ist es wegen Covid-19 zu Verzögerungen gekommen, aber inzwischen werden wieder Bücher angefordert. Er dankt Volker Ziegler für seine Hilfe bei den Buchbesprechungen und allen Autoren und Autorinnen der Beiträge. Das Heft 245 wird im Dezember erscheinen. Clemens Fuchs bittet um Beiträge und auch um Vorschläge zu Beiträgen.

TOP 3.

Bericht der Rechnungsprüfer und ggf. Entlastung des Vorstands

Der Bericht des Rechnungsprüfers kann nicht stattfinden, da die Prüfung erst im November erfolgen wird. Christian Krattenthaler beantragt, einer Teilentlastung des Kassiers und des Vorstands (ohne Berücksichtigung eventueller Beanstandungen des Rechnungsprüfers) zuzustimmen. Dieser Antrag wird einstimmig angenommen.

TOP 4.

Berichte aus den Landessektionen und den Kommissionen

Aus der Steiermark berichtet Wolfgang Woess, dass es keine besonderen Vorkommnisse gab. [Ergänzungen aus der Redaktion: An der TU Graz ist eine § 99(4) Professur mit Christoph Aistleitner besetzt worden, zudem haben Christopher Frei (Zahlentheorie) und Olga Diamanti (Angewandte Geometrie) Laufbahnstellen angetreten. An der Karl-Franzens-Universität Graz gibt es einen Besetzungsvorschlag in der Nachfolge Kunisch, und in Leoben wurde am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik eine Senior Lecturer-Stelle besetzt. Robert Tichy hat den Jean-Morlet Chair in Luminy im Wintersemester 2020/21 inne.]

Aus Klagenfurt berichtet Clemens Heuberger, dass Gregor Kastner mit 1. Oktober 2020 seine Stelle als Professor für Statistik angetreten hat.

Aus Linz berichtet Friedrich Pillichshammer, dass der Naboj-Schüler*innenwettbewerb erst verschoben und dann abgesagt wurde. Es ist eine Professur für Mathematik in den Life Sciences ausgeschrieben. Die Professoren Ulrich Langer und Walter Zulehner sind in Pension gegangen, und für die Nachfolge von Langer gab es Hearings.

Aus Tirol berichtet Hans-Peter Schröcker, dass die Berufungsverhandlungen für die § 98 Professuren für Variationsmethoden und PDE sowie für Optimierung laufen. Die § 99(4) Professur für Mathematical Data Science ist besetzt worden. Das Berufungsverfahren der Professur für Ingenieurmathematik läuft, für nächste Woche sind Hearings angesetzt.

Aus Wien berichtet Ilse Fischer, dass an der TU zwei Laufbahnstellen besetzt wurden: eine für Diskrete Mathematik mit Benedikt Stufler und eine für Geometrie mit Mohammad Ivaki. An der Uni Wien haben Matthias Aschenbrenner die Professur für Mathematische Logik, Oliver Hahn die Professur für Data Science in Astrophysics und Jörg Menche die Professur für Quantitative Modelling of Biological Networks angetreten. Weiter wurden drei Tenure Track-Stellen besetzt. Die Vienna School of Mathematics hat im September eine Sommerschule am Weißensee durchgeführt.

Aus Salzburg berichtet Simon Blatt, dass der Mathe-Cup auf nächstes Jahr verschoben wurde; er wird entweder hybrid oder online stattfinden.

Die Gleichstellungsbeauftragte Elena Resmerita berichtet, dass eine Mailing-Liste für Mathematikerinnen in Österreich erstellt wurde, und dass das erste E-Mail versendet wurde. Mathematikerinnen sollen auf diversen Karrierestufen angesprochen werden: Studentinnen sollen ermutigt werden, Postdocs über Karriemöglichkeiten informiert werden, und die Sichtbarkeit von Professorinnen soll durch Nominierung für Preise und als Hauptvortragende bei Konferenzen erhöht werden.

Weiter berichtet sie über einen Open Letter der EWM über die Schwierigkeiten der Mathematikerinnen während der Coronakrise; speziell wird gefordert, bei der Verlängerung von befristeten Verträgen auf die Situation während des Lockdowns bzgl. der Kinderbetreuung Rücksicht zu nehmen. Elena Resmerita bittet um weitere Anregungen zu Fragen, die die Gleichbehandlung betreffen.

Hans-Peter Schröcker berichtet von der Mailing-Liste für den Mathe-Brief; es gibt jetzt ungefähr 300 Abonnenten.

TOP 5.

Veranstaltungen und Fördermaßnahmen der ÖMG

Die gemeinsame Jahrestagung der ÖMG und der DMV findet 2021 in Passau statt. Der European Congress of Mathematics (ECM) ist verschoben worden und findet nun 2021 in Portorož statt. Der International Congress of Mathematics (ICM) findet 2022 in St. Petersburg statt.

Das Vernetzungstreffen für den Early-Student-Award ist auf Juli 2021 verschoben worden. Das Vernetzungstreffen für dieses Studienjahr wird dann im September stattfinden.

TOP 6.

Wahlen: Landessektionsvorsitzende 2021–2022 und Beiratsmitglieder, ggf. Nachnominierung Didaktikkommission

Die Vorsitzende berichtet, dass alle Landessektionsvorsitzende bis auf Christian Pötzsche aus Klagenfurt, sich bereit erklärt haben, weiterzumachen. Sie dankt Christian Pötzsche für seine Arbeit und schlägt Clemens Heuberger als seinen Nachfolger vor.

Als Rechnungsprüfer werden, wie bisher, Monika Dörfler (Uni Wien) und Peter Szmolyan (TU Wien) vorgeschlagen.

Für den Beirat werden zwei neue Mitglieder vorgeschlagen: Karl Unterkofler von der FH Dornbirn, der die letzte ÖMG-Tagung organisierte, sowie Michaela Kraker von der Bildungsdirektion Steiermark.

Alle Wahlvorschläge werden einstimmig angenommen.

Die Vorsitzende dankt allen Personen, die sich bereit erklärt haben, ihre Funktionen fortzuführen.

TOP 7.

Allfälliges

Es gab keine weiteren Berichtspunkte.

Vorsitzende: Barbara Kaltenbacher *Schriftführerin:* Monika Ludwig

Neue Mitglieder

Fuchs Martin, Mag. – Sankt Corona am Schöpfl 85, 2572 Sankt Corona am Schöpfl. geb. 1993. Diplomstudium Lehramt an der Universität Wien für Mathematik und Geschichte. email *Martin.Fuchs1993@gmail.com*

Missethan Michael, Dipl.-Ing. – Neugasse 69, 8200 Gleisdorf. geb. 1994. Studienpreisträger 2020. email *missethan@math.tugraz.at*

Spitaler Maximilian – Adolf-Lehr Straße 4C, 2070 Retz. geb. 2001. Schüler am Erzbischöflichen Gymnasium Hollabrunn. Schülerpreis 2020. email *spitaler.maximilian@gmx.at*

Ehrenthal Lea – Cumberlandstraße 8A, 1140 Wien. geb. 2001. Schülerinnenpreis 2020. email *lea.ehrenthal@gmail.com*

Volko Claus, Dipl.-Ing. Dr. – Hungereckstr. 60/2, 1230 Wien. geb. 1983. Bachelor in Medical Informatics an der TU Wien im Jahr 2008, Master in Computational Intelligence ebendort im Jahr 2013, Doktor der Medizin an der MedUni Wien ebenfalls 2013. Zudem langjährige Erfahrung in Software Engineering. email *cdvolko@gmail.com* http://www.cdvolko.net

Schindler Helmut – Favoritenstr. 126/26, 1100 Wien. geb. 1960. Schriftsetzer und Mitglied der Mensa Austria seit 2001. email *helmut.schindler@chello.at*

Fischer Vera, Privatdoz. PhD – Kolingasse 14-16, 1090 Wien. geb. 1977. Studium an der Universität Tübingen, Doktorat an der York University in Canada sowie Habilitation an der Universität Wien. FWF START-Preis 2017 für das Projekt "Infinite Combinatorics and Definability" im Jahr 2017. ÖMG Förderungspreis 2018. email *vera.fischer@univie.ac.at*

Ausschreibung der Preise der ÖMG

Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2021

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2021 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematikerinnen oder Mathematiker, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind und welche einen wesentlichen Teil ihrer Arbeiten in Österreich erbracht haben. Dabei soll die Promotion mindestens zwei bis maximal zehn Jahre zurückliegen. (Überschreitungen sind möglich bei Kindererziehungszeiten und bei nachweislichen Präsenz- oder Zivildienstzeiten.)

Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten habilitierten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen. Der Vorschlag muss in elektronischer Form *bis spätestens 14. März 2021* bei der Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung; 2. Publikationsliste; 3. Wissenschaftlicher Lebenslauf.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine Begutachtungskommission den Preisträger oder die Preisträgerin aus. Der Preis ist mit 1.000 € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird der Preisträger oder die Preisträgerin eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er oder sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Barbara Kaltenbacher, Universität Klagenfurt. email *barbara.kaltenbacher@uni-klu.ac.at*.

Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2021

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2021 wieder bis zu zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2019 oder 2020 eine Diplom- oder Masterarbeit (im Folgenden als Masterarbeit bezeichnet) bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Masterarbeiten ist ein Abschluss eines Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Doktoratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlossenen Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss in elektronischer Form *bis spätestens 14. März 2021* bei der Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Ein Exemplar der als besonders hochqualifiziert bewerteten mathematischen Masterarbeit bzw. Dissertation; 2. Zwei begründete Bewertungen dieser Arbeit; 3. Einen Lebenslauf des Kandidaten bzw. der Kandidatin einschließlich einer kurzen Beschreibung des Studienablaufs.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachtungskommission die Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500 € dotiert. Jeder Preisträger erhält eine Urkunde. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er bzw. sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Barbara Kaltenbacher, Universität Klagenfurt. email *barbara.kaltenbacher@uni-klu.ac.at*.

Ausschreibung der Schülerinnen- und Schülerpreise der ÖMG 2021

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft zeichnet herausragende vorwissenschaftliche Arbeiten, die im Schuljahr 2020/21 an österreichischen Schulen entstanden sind und die einen starken Bezug zu Mathematik oder Darstellender Geometrie aufweisen, mit Preisen aus. Diese Arbeiten müssen in elektronischer Form, als PDF-Datei, *bis 10. Juli 2021* bei der ÖMG einlangen und werden von einer Jury begutachtet.

Die Verfasserinnen und Verfasser jener Arbeiten, die im Zuge dieser Begutachtung durch die Jury ausgewählt werden, werden zu einem Kurzvortrag eingeladen, in dem sie ihre Arbeit präsentieren können. Anschließend erfolgt die Preisverleihung. Die Präsentationen und die Preisverleihung der prämierten Arbeiten finden im Herbst 2021 zu einem noch festzusetzenden Termin statt.

Die ÖMG bittet alle ihre Mitglieder sowie die Leserinnen und Leser der IMN, potenziell Interessierte von dieser Einladung zu informieren und Schulen zur Teilnahme zu ermuntern.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Barbara Kaltenbacher, Universität Klagenfurt. email *barbara.kaltenbacher@uni-klu.ac.at*.