Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99), M. Drmota (2000–2007) und J. Wallner (2008–2017).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@oemg.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Redaktion:

C. Fuchs (Univ. Salzburg, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
R. Tichy (TU Graz)
J. Wallner (TU Graz)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung:
IBAN AT83-1200-0229-1038-9200 bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzendruck, 8044 Weinitzen.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903
http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt,
Institut für Mathematik
Universitätsstraße 65-67
A-9020 Klagenfurt
email: *oemg@oemg.ac.at*

Vorstand des Vereinsjahres 2019:

B. Kaltenbacher (Univ. Klagenfurt): Vorsitzende
J. Wallner (TU Graz): Stellvertretender Vorsitzender
C. Fuchs (Univ. Salzburg): Herausgeber der IMN
M. Ludwig (TU Wien): Schriftführerin
M. Haltmeier (Univ. Innsbruck): Stellvertretender Schriftführer
B. Lamel (Univ. Wien): Kassier
P. Grohs (Univ. Wien): Stellvertretender Kassier
E. Buckwar (Univ. Linz): Beauftragte für Frauenförderung
C. Heuberger (Univ. Klagenfurt): Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
M. Drmota (TU Wien)
H. Edelsbrunner (ISTA)
H. Engl (Univ. Wien)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Kim (MathWorks)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
H. Niederreiter (ÖAW)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkultur)
W. Schachermayer (Univ. Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
R. Tichy (TU Graz)
H. Zeiler (Wien)

Vorsitzende von Sektionen und Kommissionen:

W. Woess (Graz)
H.-P. Schröcker (Innsbruck)
C. Pötzsche (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
S. Blatt (Salzburg)
I. Fischer (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)
W. Müller (Verantwortlicher für Entwicklungszusammenarbeit)

Die Landesvorsitzenden und der Vorsitzende der Didaktikkommission gehören statutengemäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT83-1200-0229-1038-9200

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 241 (73. Jahrgang) **August 2019**

Inhalt

Die Formel auf der Titelseite entstammt einem Überblicksartikel von Peter Scholze über seine neuen Ergebnisse aus der p-adischen Geometrie anlässlich seines ICM-Vortrags 2018 in Rio de Janeiro (siehe https://arxiv.org/pdf/1712.03708.pdf). Die Formel beantwortet eine Frage von Tate, nämlich, dass eine eindeutige Galois-äquivariante Zerlegung der aufliegenden Filtrierung existiert, die zu einem in der Formel angegebenen Galois-äquivariantem Isomorphismus führt. Dabei ist X der Basiswechsel eines eigentlichen glatten rigiden Raums, definiert über einem diskret bewerteten Raum $K \subset C$. Der angegebene Isomorphismus existiert jedoch nicht in Familien analog zur Hodge-Zerlegung über den komplexen Zahlen, die ebenfalls nicht holomorph in Familien variiert.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 241 (2019), 1–20

Karen Uhlenbeck and the Calculus of Variations

Simon Donaldson

Stony Brook University and Imperial College London

This article has appeared in the March 2019 issue of the Notices of the American Mathematical Society *("Karen Uhlenbeck and the Calculus of Variations" by Simon Donaldson, Notices of the American Mathematical Society, Volume 66-3, March 2019, 303-313 © American Mathematical Society). It is reprinted here with friendly permission by the author and the publisher.*

In this article we discuss the work of Karen Uhlenbeck, mainly from the 1980's, focused on variational problems in differential geometry.

The calculus of variations goes back to the 18th century. In the simplest setting we have a functional

$$\mathcal{F}(u) = \int \Phi(u,u')dx,$$

defined on functions u of one variable x. Then the condition that $\mathcal{F}$ is stationary with respect to compactly supported variations of u is a second order differential equation—the *Euler-Lagrange equation* associated to the functional. One writes

$$\delta\mathcal{F} = \int \delta u\, \tau(u)\, dx,$$

where

$$\tau(u) = \frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial u'}. \tag{1}$$

The Euler-Lagrange equation is $\tau(u) = 0$. Similarly for vector-valued functions of a variable $x \in \mathbb{R}^n$. Depending on the context, the functions would be required to satisfy suitable boundary conditions or, as in most of this article, might be defined on a compact manifold rather than a domain in $\mathbb{R}^n$, and u might not exactly be a function but a more complicated differential geometric object such as a map, metric or connection. One interprets $\tau(u)$, defined as in (1), as the derivative at u

of the functional $\mathcal{F}$ on a suitable infinite dimensional space $\mathcal{X}$ and the solutions of the Euler-Lagrange equation are *critical points* of $\mathcal{F}$.

A fundamental question is whether one can exploit the variational structure to establish the existence of solutions to Euler-Lagrange equations. This question came into focus at the beginning of the 20th century. Hilbert's 22nd problem from 1904 was:

Has not every regular variational problem a solution, provided certain assumptions regarding the given boundary conditions are satisfied?

If the functional $\mathcal{F}$ is bounded below one might hope to find a solution of the Euler-Lagrange equation which realises the minimum of $\mathcal{F}$ on $\mathcal{X}$. More generally, one might hope that if $\mathcal{X}$ has a complicated topology then this will force the existence of more critical points. For example, if Δ is a homotopy class of maps from the p-sphere S^p to $\mathcal{X}$ one can hope to find a critical point via a *minimax sequence*, minimising over maps $\phi \in \Delta$ the maximum of $\mathcal{F}(\phi(v))$ over points $v \in S^p$.

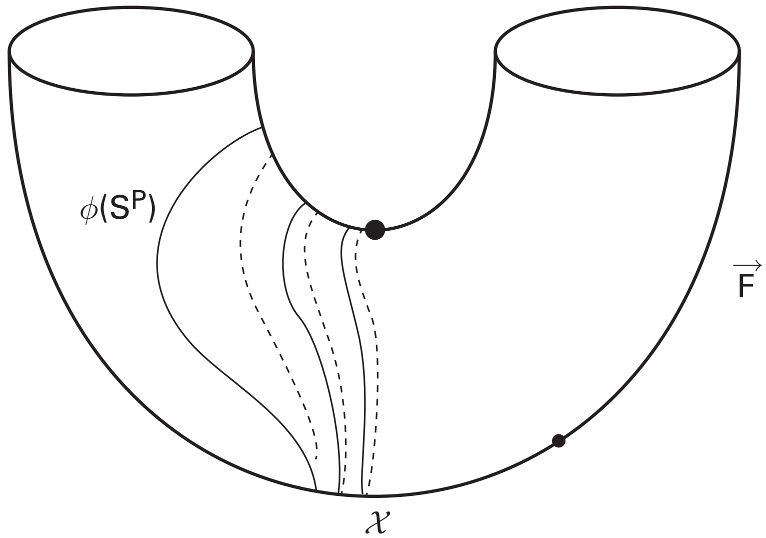


Figure 1. Finding a critical point with a minimax sequence.

In Hilbert's time the only systematic results were in the case of dimension $n = 1$ and for linear problems, such as the Dirichlet problem for the Laplace equation. The development of a nonlinear theory in higher dimensions has been the scene for huge advances over the past century and provides the setting for much of Karen Uhlenbeck's work.

1 Harmonic maps in dimension 2

We begin in dimension 1 where *geodesics* in a Riemannian manifold are classical examples of solutions to a variational problem. Here we take N to be a compact, connected, Riemannian manifold and fix two points p,q in N. We take $\mathcal{X}$ to be the space of smooth paths $\gamma: [0,1] \to N$ with $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ and the energy functional

$$\mathcal{F}(\gamma) = \int_0^1 |\nabla\gamma|^2,$$

where the norm of the "velocity vector" $\nabla\gamma$ is computed using the Riemannian metric on N. The Euler-Lagrange equation is the geodesic equation, in local coordinates,

$$\gamma_i'' - \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \gamma_j' \gamma_k' = 0,$$

where the "Christoffel symbols" Γ^i_{jk} are given by well-known formulae in terms of the metric tensor and its derivatives. In this case the variational picture works as well as one could possibly wish. There is a geodesic from p to q minimising the energy. More generally one can use minimax arguments and (at least if p and q are taken in general position) the *Morse theory* asserts that the homology of the path space $\mathcal{X}$ can be computed from a chain complex with generators corresponding to the geodesics from p to q. This can be used in both directions: facts from algebraic topology about the homology of the path space give existence results for geodesics and conversely knowledge of the geodesics can feed into algebraic topology, as in Bott's proof of his periodicity theorem.

The existence of a minimising geodesic between two points can be proved in an elementary way and the original approach of Morse avoided the infinite dimensional path space $\mathcal{X}$, working instead with finite dimensional approximations, but the infinite-dimensional picture gives the best starting point for the discussion to follow. The basic point is a compactness property: *any sequence* $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ *in* $\mathcal{X}$ *with bounded energy has a subsequence which converges in* C^0 *to some continuous path from* p *to* q. In fact for a path $\gamma \in \mathcal{X}$ and $0 \le t_1 < t_2 \le 1$ we have

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \le \int_{t_1}^{t_2} |\nabla\gamma| \le \mathcal{F}(\gamma)^{1/2} \, |t_1 - t_2|^{1/2},$$

where the last step uses the Cauchy-Schwartz inequality. Thus a bound on the energy gives a $\frac{1}{2}$-Hölder bound on γ and the compactness property follows from the Ascoli-Arzela theorem.

In the same vein as the compactness principle, one can extend the energy functional $\mathcal{F}$ to a completion $\overline{\mathcal{X}}$ of $\mathcal{X}$ which is an infinite dimensional Hilbert manifold, and elements of $\overline{\mathcal{X}}$ are still continuous (in fact $\frac{1}{2}$-Hölder continuous) paths in N. In this abstract setting, Palais and Smale introduced a general "Condition C" for functionals on Hilbert manifolds, which yields a straightforward variational theory. (This was extended to Banach manifolds in early work of Uhlenbeck [24].) The drawback is that, beyond the geodesic equations, most problems of interest in differential geometry do not satisfy this Palais-Smale condition, as illustrated by the case of harmonic maps.

The harmonic map equations were first studied systematically by Eells and Sampson [5]. We now take M, N to be a pair of Riemannian manifolds (say compact) and $\mathcal{X} = \mathrm{Maps}(M,N)$ the space of smooth maps. The energy of a map $u : M \to N$ is given by the same formula

$$\mathcal{F}(u) = \int_M |\nabla u|^2,$$

where at each point $x \in M$ the quantity $|\nabla u|$ is the standard norm defined by the metrics on TM_x and $TN_{u(x)}$. In local coordinates the Euler Lagrange equations have the form

$$\Delta_M u_i - \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \nabla u_j \nabla u_k = 0, \tag{2}$$

where Δ_M is the Laplacian on M. This is a quasi-linear elliptic system, with a nonlinear term which is quadratic in first derivatives. The equation is the natural common generalisation of the geodesic equation in N and the linear Laplace equation on M.

The key point now is that when dim $M > 1$ the energy functional does *not* have the same compactness property. This is bound up with *Sobolev inequalities* and, most fundamentally, with the *scaling behaviour* of the functional. To explain, in part, the latter consider varying the metric g_M on M by a conformal factor λ. So λ is a strictly positive function on M and we have a new metric $\tilde{g}_M = \lambda^2 g_M$. Then one finds that the energy $\tilde{F}$ defined by this new metric is

$$\tilde{\mathcal{F}}(u) = \int_M \lambda^{2-n} |\nabla u|^2,$$

where $n = \dim M$. In particular if $n = 2$ we have $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$. Now take $M = S^2$ with its standard round metric and $\phi : S^2 \to S^2$ a Möbius map. This is a conformal map and it follows from the above that for any $u : S^2 \to N$ we have $\mathcal{F}(u \circ \phi) = \mathcal{F}(u)$. Since the space of Möbius maps is not compact we can construct a sequence of maps $u \circ \phi_i$ with the same energy but with no convergent subsequence.

We now recall the Sobolev inequalities. Let f be a smooth real valued function on $\mathbb{R}^n$, supported in the unit ball. We take polar coordinates (r, θ) in $\mathbb{R}^n$, with $\theta \in S^{n-1}$. For any fixed θ we have

$$f(0) = \int_{r=0}^1 \frac{\partial f}{\partial r} dr.$$

So, integrating over the sphere,

$$f(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} \int_{r=0}^{1} \frac{\partial f}{\partial r} dr d\theta,$$

where ω_n is the volume of S^{n-1}. Since the Euclidean volume form is $d^n x = r^{n-1} dr d\theta$ we can write this as

$$f(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{B^n} |x|^{1-n} \frac{\partial f}{\partial r} \, d^n x.$$

The function $x \mapsto |x|^{1-n}$ is in L^q over the ball for any $q < n/n-1$. Let p be the conjugate exponent, with $p^{-1} + q^{-1} = 1$, so $p > n$. Then Hölders inequality gives

$$|f(0)| \leq C_p \|\nabla f\|_{L^p}$$

where C_p is ω_n^{-1} times the $L^q(B^n)$ norm of $x \mapsto |x|^{1-n}$. The upshot is that for $p > n$ there is a continuous embedding of the *Sobolev space* L_1^p—obtained by completing in the norm $\|\nabla f\|_{L^p}$—into the continuous functions on the ball. In a similar fashion, if $p < n$ there is a continuous embedding $L_1^p \to L^r$ for the exponent range $r \leq np/(n-p)$, which is bound up with the isoperimetric inequality in $\mathbb{R}^n$. The arithmetic relating the exponents and the dimension n reflects the scaling behaviour of the norms. If we define $f_\mu(x) = f(\mu x)$, for $\mu \geq 1$, then

$$\|f_\mu\|_{C^0} = \|f\|_{C^0} \ , \ \|f_\mu\|_{L^r} = \mu^{-n/r} \|f\|_{L^r} \ , \ \|f_\mu\|_{L_1^p} = \mu^{1-n/p} \|f\|_{L_1^p}.$$

It follows immediately that there can be no continuous embedding $L_1^p \to C^0$ for $p < n$ or $L_1^p \to L^r$ for $r > np/(n-p)$.

The salient part of this discussion for the harmonic map theory is that the embedding $L_1^p \to C^0$ *fails* at the critical exponent $p = n$. (To see this, consider the function $\log \log r^{-1}$.) Taking $n = 2$ this means that the energy of a map from a 2-manifold does not control the continuity of the map and the whole picture in the 1-dimensional case breaks down. This was the fundamental difficulty addressed in the landmark paper [12] of Sacks and Uhlenbeck which showed that, with a deeper analysis, variational arguments can still be used to give general existence results.

Rather than working directly with minimising sequences, Sacks and Uhlenbeck introduced perturbed functionals on $\mathcal{X} = \text{Maps}(M,N)$ (with M a compact 2-manifold):

$$\mathcal{F}_\alpha(u) = \int_M (1 + |\nabla u|^2)^\alpha.$$

For $\alpha > 1$ we are in the good Sobolev range, just as in the geodesic problem. Fix a connected component $\mathcal{X}_0$ of $\mathcal{X}$ (i.e. a homotopy class of maps from M to N).

For $\alpha > 1$ there is a smooth map u_α realising the minimum of $\mathcal{F}_\alpha$ on $\mathcal{X}_0$. This map u_α satisfies the corresponding Euler-Lagrange equation, which is an elliptic PDE given by a variant of (2). The strategy is to study the convergence of u_α as α tends to 1. The main result can be outlined as follows. To simplify notation, we understand that α runs over a suitable sequence decreasing to 1.

- There is a finite set $S \subset M$ such that the u_α converge in C^∞ over $M \setminus S$.

- The limit u of the maps u_α extends to a smooth harmonic map from M to N (which could be a constant map).

- If x is a point in S such that the u_α do *not* converge to u over a neighbourhood of x then there is a non-trivial harmonic map $v : S^2 \to N$ such that a suitable sequence of rescalings of the u_α near x converge to v.

In brief, the only way that the sequence u_α may fail to converge is by forming "bubbles", in which small discs in M are blown up into harmonic spheres in N. We illustrate the meaning of this bubbling through the example of *rational maps* of the 2-sphere. (See also the expository article [11].) For distinct points $z_1, \dots z_d$ in $\mathbb{C}$ and non-zero coefficients a_i consider the map

$$u(z) = \sum_{i=1}^{d} \frac{a_i}{z - z_i},$$

which extends to a degree d holomorphic map $u : S^2 \to S^2$ with $u(\infty) = 0$. These are in fact harmonic maps, with the same energy $8\pi d$. Take $z_1 = 0, a_1 = \varepsilon$. If we make ε tend to 0, with the other a_i fixed, then away from 0 the maps converge to the degree $(d-1)$ map $\sum_2^d a_i (z - z_i)^{-1}$. On the other hand if we rescale about 0 by setting

$$\tilde{u}(z) = u(\varepsilon z) = \frac{1}{z} + \sum_{i=2}^{d} \frac{a_i}{\varepsilon z - z_i}$$

the rescaled maps converge (on compact subsets of $\mathbb{C}$) to the degree 1 map

$$v(z) = \frac{1}{z} - c$$

with $c = \sum_2^d a_i / z_i$.

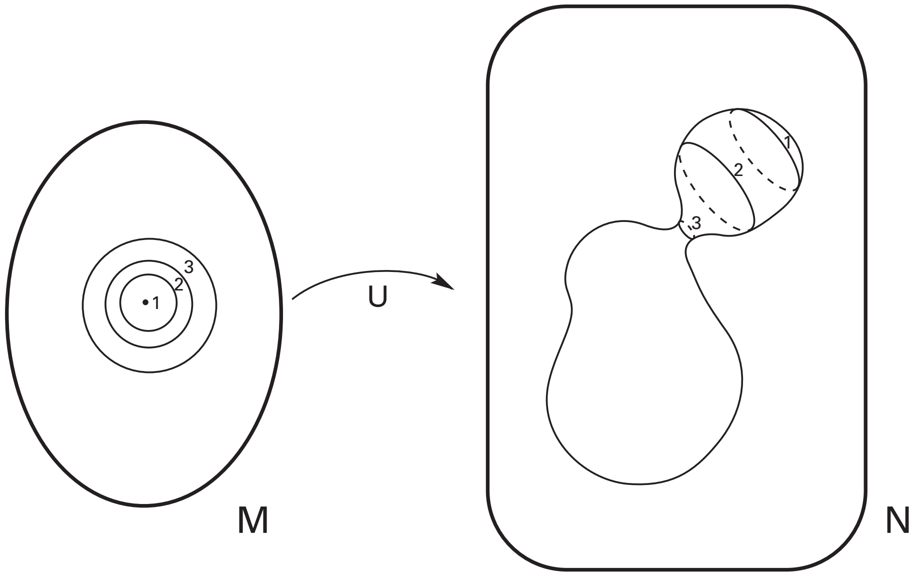


Figure 2. Schematic representation of "bubbling".

A key step in the Sacks and Uhlenbeck analysis is a "small energy" statement (related to earlier results of Morrey). This says that there is some $\varepsilon > 0$ such that if the energy of a map u_α on a small disc $D \subset N$ is less than ε then there are uniform estimates of all derivatives of u_α over the half-sized disc. The convergence result then follows from a covering argument. Roughly speaking, if the energy of the map on M is at most E then there can be at most a fixed number E/ε of small discs on which the map is not controlled. The crucial point is that ε does not depend on the size of the disc, due to the scale invariance of the energy. To sketch the proof of the small energy result, consider a simpler model equation

$$\Delta f = |\nabla f|^2, \tag{3}$$

for a function f on the unit disc in $\mathbb{C}$. Linear elliptic theory, applied to the Laplace operator, gives estimates of the schematic form

$$\|\nabla f\|_{L^q_1} \leq C \|\Delta f\|_{L^q} + \mathrm{LOT},$$

where LOT stands for "lower order terms" in which (for this sketch) we include the fact that one will have to restrict to an interior region. Take for example $q = 4/3$. Then substituting into the equation (3) we have

$$\|\nabla f\|_{L_1^{4/3}} \leq C \| |\nabla f|^2 \|_{L^{4/3}} + \mathrm{LOT} \leq C \|\nabla f\|^2_{L^{8/3}} + \mathrm{LOT}.$$

Now in dimension 2 we have a Sobolev embedding $L_1^{4/3} \to L^4$ which yields

$$\|\nabla f\|_{L^4} \leq C \|\nabla f\|^2_{L^{8/3}} + \mathrm{LOT}.$$

On the other hand, Hölders inequality gives the interpolation

$$\|\nabla f\|_{L^{8/3}} \leq \|\nabla f\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla f\|_{L^4}^{1/2}.$$

So, putting everything together, one has

$$\|\nabla f\|_{L^4} \leq C\|\nabla f\|_{L^4} \|\nabla f\|_{L^2} + \mathrm{LOT}.$$

If $\|\nabla f\|_{L^2} \leq 1/2C$ we can re-arrange this to get

$$\|\nabla f\|_{L^4} \leq \mathrm{LOT}.$$

In other words, in the small energy regime (with $\sqrt{\varepsilon} = 1/2C$) we can bootstrap using the equation to gain an estimate on a slightly stronger norm (L^4 rather than L^2) and one continues in similar fashion to get interior estimates on all higher derivatives.

This breakthrough work of Sacks and Uhlenbeck ties in with many other developments from the same era, some of which we discuss in the next section and some of which we mention briefly here.

- In *minimal submanifold theory*: when M is a 2-sphere the image of a harmonic map is a minimal surface in N (or more precisely a branched immersed submanifold). In this way, Sacks and Uhlenbeck obtained important existence result for minimal surfaces.

- In *symplectic topology* the pseudoholomorphic curves, introduced by Gromov in 1986, are examples of harmonic maps and a variant of the Sacks-Uhlenbeck theory is the foundation for all the ensuing developments (see, for example, [7]).

- In *PDE theory* other "critical exponent" variational problems, in which similar bubbling phenomena arise, were studied intensively (see for example the work of Brezis and Nirenberg [4]).

- In *Riemannian geometry* the Yamabe problem of finding a metric of constant scalar curvature in a given conformal class (on a manifold of dimension 3 or more) is a critical exponent variational problem for the Einstein-Hilbert functional (the integral of the scalar curvature), restricted to metrics of volume 1. Schoen proved the existence of a minimiser, completing the solution of the Yamabe problem, using a deep analysis to rule out the relevant bubbling [14].

A beautiful application of the Sacks-Uhlenbeck theory was obtained in 1988 by Micallef and Moore [8]. The argument is in the spirit of classical applications of geodesics in Riemannian geometry. Micallef and Moore considered a curvature condition on a compact Riemannian manifold N (of dimension at least 4) of having "positive curvature on isotropic 2-planes". They proved that if N satisfies this condition and is simply connected then it is a homotopy sphere (and thus, by the solution of the Poincaré conjecture, is homeomorphic to a sphere). The basic point is that a non-trivial homotopy class in $\pi_k(N)$ gives a non-trivial element of $\pi_{k-2}(\mathcal{X})$, where $\mathcal{X} = \mathrm{Maps}(S^2, N)$, which gives a starting point for a minimax argument. If N is not a homotopy sphere then by standard algebraic topology there is some k with $2 \leq k \leq \frac{1}{2}\dim N$ such that $\pi_k(N) \neq 0$, which implies that $\pi_{k-2}(\mathcal{X})$ is non-trivial. By developing mini-max arguments with the Sacks-Uhlenbeck theory, using the perturbed energy functional, Micallef and Moore were able to show that this leads to a non-trivial harmonic map $u : S^2 \to N$ of index at most $k-2$. (Here the index is the dimension of the space on which the second variation is strictly negative.) On the other hand the Levi-Civita connection of N defines a holomorphic structure on the pull-back $u^*(TN \otimes \mathbb{C})$ of the complexified tangent bundle. By combining results about holomorphic bundles over S^2 and a Weitzenbock formula, in which the curvature tensor of N enters, they show that the index must be at least $\frac{1}{2}\dim N - \frac{3}{2}$ and thus derive a contradiction.

If the sectional curvature of N is "$\frac{1}{4}$-pinched" (i.e. lies between $\frac{1}{4}$ and 1 everywhere) the N has positive curvature on isotropic 2-planes. Thus the Micallef and Moore result implies the classical sphere theorem of Berger and Klingenberg, whose proof was quite different. In turn, much more recently, Brendle and Schoen [3] proved that a (simply connected) manifold satisfying this isotropic curvature condition is in fact *diffeomorphic* to a sphere. Their proof was again quite different, using Ricci flow.

2 Gauge theory in dimension 4

From the late 1970's, mathematics was enriched by questions inspired by physics, involving *gauge fields* and the *Yang-Mills equations*. These developments were many-faceted and here we will focus on aspects related to variational theory. In this set-up one considers a fixed Riemannian manifold M and a G-bundle $P \to M$ where G is a compact Lie group. The distinctive feature, compared to most previous work in differential geometry, is that P is an auxiliary bundle not directly tied to the geometry of M. The basic objects of study are connections on P. In a local trivialisation σ of P a connection A is given by a $\mathrm{Lie}(G)$-valued 1-form A^τ. For simplicity we take G to be a matrix group, so A^τ is a matrix of 1-forms. The fundamental invariant of a connection is its curvature $F(A)$ which in the local trivialisation is given by the formula

$$F^\tau = dA^\tau + A^\tau \wedge A^\tau.$$

The Yang-Mills functional is

$$\mathcal{F}(A) = \int_M |F(A)|^2,$$

and the Euler-Lagrange equation is $d_A^* F = 0$ where d_A^* is an extension of the usual operator d^* from 2-forms to 1-forms, defined using A. This Yang-Mills equation is a nonlinear generalisation of Maxwell's equations of electromagnetism (which one obtains taking $G = U(1)$ and passing to Lorentzian signature).

In the early 1980's, Uhlenbeck proved fundamental analytical results which underpin most subsequent work in this area. The main case of interest is when the manifold M has dimension 4 and the problem is then of critical exponent type. In this dimension the Yang-Mills functional is conformally invariant and there are many analogies with the harmonic maps of surfaces discussed above. A new aspect involves gauge invariance, which does not have an analogy in the harmonic maps setting. That is, the infinite dimensional group $\mathcal{G}$ of automorphisms of the bundle P acts on the space $\mathcal{A}$ of connections, preserving the Yang-Mills functional, so the natural setting for the variational theory is the quotient space $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. Locally we are free to change a trivialisation τ_0 by the action of a G-valued function g, which will change the local representation of the connection to

$$A^{g\tau_0} = gd(g^{-1}) + gA^{\tau_0}g^{-1}.$$

While this action of the gauge group $\mathcal{G}$ may seem unusual, within the context of PDE, it represents a fundamental phenomenon in differential geometry. In studying Riemannian metrics, or any other kind of structure, on a manifold one has to take account of the action of the infinite-dimensional group of diffeomorphisms: for example the round metric on the sphere is only unique up to this action. Similarly, the explicit local representation of a metric depends on a choice of local coordinates. In fact diffeomorphism groups are much more complicated than the gauge group $\mathcal{G}$. In another direction one can have in mind the case of electromagnetism, where the connection 1-form A^τ is equivalent to the classical electric and magnetic potentials on space-time. The $\mathcal{G}$-action corresponds to the fact that these potentials are not unique.

Two papers of Uhlenbeck [25], [26] addressed both of these aspects (critical exponent and gauge choice). The paper [25] bears on the choice of an "optimal" local trivialisation τ of the bundle over a ball $B \subset M$ given a connection A. The criterion that Uhlenbeck considers is the Coulomb gauge fixing condition: $d^*A^\tau = 0$, supplemented with the boundary condition that the pairing of A^τ with the normal vector vanishes. Taking $\tau = g\tau_0$, for some arbitrary trivialisation τ_0, this becomes an equation for the G-valued function g which is a variant of the harmonic map equation, with Neumann boundary conditions. In fact the equation is the Euler-Lagrange equation associated to the functional $\|A^\tau\|_{L^2}$, on local trivialisations τ. The Yang-Mills equations in such a Coulomb gauge form an elliptic system. (Following the remarks in the previous paragraph; an analogous discussion for Riemannian metrics involves harmonic local coordinates, in which the Einstein equations, for example, form an elliptic system.)

The result proved by Uhlenbeck in [25] is of "small energy" type. Specialising to dimension 4 for simplicity, she shows that there is an $\varepsilon > 0$ and a constant C such that if $\|F\|_{L^2(B)} < \varepsilon$ there is a Coulomb gauge τ over B in which

$$\|\nabla A^\tau\|_{L^2} + \|A^\tau\|_{L^4} \leq C\|F\|_{L^2}.$$

The strategy of proof uses the continuity method applied to the family of connections given by restricting to smaller balls with the same centre and the key point is to obtain *a priori* estimates in this family. The PDE arguments deriving these estimates have some similarity with those sketched in Section 1 above. An important subtlety arises from the critical nature of the Sobolev exponents involved. If $\tau = g\tau_0$ then an L^2 bound on ∇A^τ gives an L^2 bound on the second derivative of g but in dimension 4 this is the borderline exponent where we do not get control over the continuity of g. That makes the nonlinear operations such as $g \mapsto g^{-1}$ problematic. Uhlenbeck overcomes this problem by working with L^p for $p > 2$ and using a limiting argument.

In the companion paper [26], Uhlenbeck proves a renowned "removal of singularities" result. The statement is that a solution A of the Yang-Mills equations over the punctured ball $B^4 \setminus \{0\}$ with finite energy (i.e. with curvature $F(A)$ in L^2) extends smoothly over 0 in a suitable local trivialisation. One important application of this is that finite-energy Yang-Mills connections over $\mathbb{R}^4$ extend to the conformal compactification S^4. We will only attempt to give the flavour of the proof. Given our finite-energy solution A over the punctured ball let

$$f(r) = \int_{|x|<r} |F(A)|^2,$$

for $r < 1$. Then the derivative is

$$\frac{df}{dr} = \int_{|x|=r} |F(A)|^2.$$

The strategy is to express $f(r)$ also as a boundary integral, plus lower order terms. To give a hint of this, consider the case of an abelian group $G = U(1)$, so the connection form A^τ is an ordinary 1-form, the curvature is simply $F = dA^\tau$ and the Yang-Mills equation is $d^*F = 0$. Fix small $\varepsilon < r$ and work on the annular region W where $\varepsilon < |x| < r$. We can integrate by parts to write

$$\int_W |F|^2 = \int_W \langle dA^\tau, F\rangle = \int_W \langle A^\tau, d^*F\rangle + \int_{\partial W} A^\tau \wedge *F.$$

Since $d^*F = 0$ the first term on the right hand side vanishes. If one can show that the contribution from the inner boundary $|x| = \varepsilon$ tends to 0 with ε then one concludes that

$$f(r) = \int_{|x|=r} A^\tau \wedge *F.$$

In the nonabelian case the same discussion applies up to the addition of lower-order terms, involving $A^\tau \wedge A^\tau$. The strategy is then to obtain a differential inequality of the shape

$$f(r) \leq \tfrac{1}{4} r \frac{df}{dr} + \mathrm{LOT}, \tag{4}$$

by comparing the boundary terms over the 3-sphere. This differential inequality integrates to give $f(r) \leq Cr^4$ and from there it is relatively straightforward to obtain an L^∞ bound on the curvature and to see that the connection can be extended over 0. The factor $\frac{1}{4}$ in (4) is obtained from an inequality over the 3-sphere. That is, any closed 2-form ω on S^3 can be expressed as $\omega = da$ where

$$\|a\|^2_{L^2(S^3)} \leq \tfrac{1}{4} \|\omega\|^2_{L^2(S^3)}.$$

The main work in implementing this strategy is to construct suitable gauges over annuli in which the lower order, nonlinear, terms $A^\tau \wedge A^\tau$ are controlled.

These results of Uhlenbeck lead to a Yang-Mills analogue of the Sacks-Uhlenbeck picture discussed in the previous section. This was not developed explicitly in Uhlenbeck's 1983 papers [25], [26] but results along those lines were obtained by her doctoral student S. Sedlacek [16]. Let c be the infimum of the Yang-Mills functional on connections on $P \to X$, where X is a compact 4-manifold. Let A_i be a minimising sequence. Then there is a (possibly different) G-bundle $\tilde{P} \to X$, a Yang-Mills connection A_∞ on $\tilde{P}$ and a finite set $S \subset X$ such that, after perhaps passing to a subsequence i', the $A_{i'}$ converge to A_∞ over $X \setminus S$. (More precisely, this convergence is in $L^2_{1,\mathrm{loc}}$ and implicitly involves a sequence of bundle isomorphisms of P and $\tilde{P}$ over $X \setminus S$.) If x is a point in S such that the $A_{i'}$ do *not* converge to A_∞ over a neighbourhood of x then one obtains a non-trivial solution to the Yang-Mills equations over S^4 by a rescaling procedure similar to that in the harmonic map case. Similar statements apply to sequences of solutions to the Yang-Mills equations over X and in particular to sequences of Yang-Mills "instantons". These special solutions solve the first order equation $F = \pm * F$ and are closely analogous to the pseudoholomorphic curves in the harmonic map setting. Uhlenbeck's analytical results underpinned the applications of instanton moduli spaces to 4-manifold topology which were developed vigorously throughout the 1980's and 1990's—just as for pseudoholomorphic curves and symplectic topology. But we will concentrate here on the variational aspects.

For simplicity fix the group $G = SU(2)$; the $SU(2)$-bundles P over X are classified by an integer $k = c_2(P)$ and for each k we have a moduli space $\mathcal{M}_k$ (possibly empty) of instantons (where the sign in $F = \pm * F$ depends on the sign of k). Recall that the natural domain for the Yang-Mills functional is the infinite-dimensional quotient space $\mathcal{X}_k = \mathcal{A}_k / \mathcal{G}_k$ of connections modulo equivalence. The moduli space $\mathcal{M}_k$ is a subset of $\mathcal{X}_k$ and (if non-empty) realises the absolute minimum of the Yang-Mills functional on $\mathcal{X}_k$. In this general setting one could, optimistically, hope for a variational theory which would relate:

1. The topology of the ambient space $\mathcal{X}_k$,
2. The topology of $\mathcal{M}_k$,
3. The non-minimal critical points: i.e. the solutions of the Yang-Mills equation which are not instantons.

A serious technical complication here is that the group $\mathcal{G}_k$ does not usually act freely on $\mathcal{A}_k$, so the quotient space is not a manifold. But we will not go into that further here and just say that there are suitable homology groups $H_i(\mathcal{X}_k)$, which can be studied by standard algebraic topology techniques and which have a rich and interesting structure.

Much of the work in this area in the late 1980's was driven by two specific questions.

- The *Atiyah-Jones conjecture* [1]. They considered the manifold $M = S^4$ where (roughly speaking) the space $\mathcal{X}_k$ has the homotopy type of the degree k mapping space $\mathrm{Maps}_k(S^3, S^3)$, which is in fact independent of k. The conjecture was that the inclusion $\mathcal{M}_k \to \mathcal{X}_k$ induces an isomorphism on homology groups H_i for i in a range $i \leq i(k)$, where $i(k)$ tends to infinity with k. One motivation for this idea came from results of Segal in the analogous case of rational maps [17].
- Again focusing on $M = S^4$: are there *any* non-minimal solutions of the Yang-Mills equations?

A series of papers of Taubes [20], [22] developed a variational approach to the Atiyah-Jones conjecture (and generalisations to other 4-manifolds). In [20] Taubes established a lower bound on the index of any non-minimal solution over the 4-sphere. If the problem satisfied the Palais-Smale condition this index bound would imply the Atiyah-Jones conjecture (with $i(k)$ roughly $2k$) but the whole point is that this condition is not satisfied, due to the bubbling phenomenon for mini-max sequences. Nevertheless, Taubes was able to obtain many partial results through a detailed analysis of this bubbling. The Atiyah-Jones conjecture was confirmed in 1993 by Boyer, Hurtubise, Mann and Milgram [2] but their proof worked with geometric constructions of the instanton moduli spaces, rather than variational arguments.

The second question was answered, using variational methods, by Sibner, Sibner, and Uhlenbeck in 1989 [18], showing that indeed such solutions do exist. In their proof they considered a standard S^1 action on S^4 with fixed point set a 2-sphere, an S^1-equivariant bundle P over S^4 and S^1-invariant connections on P. This invariance forces the "bubbling points" arising in variational arguments to lie on the 2-sphere $S^2 \subset S^4$ and there is a dimensional reduction of the problem to "monopoles" in 3-dimensions which has independent interest.

A connection over $\mathbb{R}^4$ which is invariant under the action of translations in one direction can be encoded as a pair (A, ϕ) of a connection A over $\mathbb{R}^3$ and an additional *Higgs field* ϕ which is a section of the adjoint vector bundle ad$P$ whose fibres are copies of Lie(G). The Yang-Mills functional induces a Yang-Mills-Higgs functional

$$\mathcal{F}(A, \phi) = \int_{\mathbb{R}^3} |F(A)|^2 + |\nabla_A \phi|^2$$

on these pairs over $\mathbb{R}^3$. One also fixes an asymptotic condition that $|\phi|$ tends to 1 at ∞ in $\mathbb{R}^3$. In 3 dimensions we are below the critical dimension for the functional, but the noncompactness of $\mathbb{R}^3$ prevents a straightforward verification of the Palais-Smale condition. Nonetheless, in a series of papers [19], [21] Taubes developed a far-reaching variational theory in this setting. By a detailed analysis, Taubes showed that, roughly speaking, a minimax sequence can always be chosen to have energy density concentrated in a fixed large ball in $\mathbb{R}^3$ and thus obtained the necessary convergence results. In particular, using this analysis, Taubes established the existence of non-minimal critical points for the functional $\mathcal{F}(A, \phi)$.

The critical points of the Yang-Mills-Higgs functional on $\mathbb{R}^3$ yield Yang-Mills solutions over $\mathbb{R}^4$, but these do not have finite energy. However the same ideas can be applied to the S^1-action. The quotient of $S^4 \setminus S^2$ by the S^1-action can naturally be identified with the hyperbolic 3-space H^3, and S^1-invariant connections correspond to pairs (A, ϕ) over H^3. There is a crucial parameter L in the theory which from one point of view is the weight of the S^1 action on the fibres of P over S^2. From another point of view the curvature of the hyperbolic space, after suitable normalisation, is $-L^{-2}$. The fixed set S^2 can be identified with the sphere at infinity of hyperbolic space and bubbling of connections over a point in $S^2 \subset S^4$ corresponds, in the Yang-Mills-Higgs picture, to some contribution to the energy density of (A, ϕ) moving off to the corresponding point at infinity.

The key idea of Sibner, Sibner, and Uhlenbeck was to make the parameter L very large. This means that the curvature of the hyperbolic space is very small and, on sets of fixed diameter, the hyperbolic space is well-approximated by $\mathbb{R}^3$. Then they show that Taubes' arguments on $\mathbb{R}^3$ go over to this setting and are able to produce the desired non-minimal solution of the Yang-Mills equations over S^4. Later, imposing more symmetry, other solutions were found using comparatively elementary arguments [13], but the approach of Taubes, Sibner, Sibner, and Uhlenbeck is a paradigm of the way that variational arguments can be used "beyond

Palais-Smale", via a delicate analysis of the behaviour of minimax sequences.

We conclude this section with a short digression from the main theme of this article. This brings in other relations between harmonic mappings of surfaces and 4-dimensional gauge theory, and touches on another very important line of work by Karen Uhlenbeck, represented by papers such as [27], [28]. In this setting the target space N is a symmetric space and the emphasis is on explicit solutions and connections with integrable systems. There is a huge literature on this subject, stretching back to work of Calabi and Chern in the 1960's, and distantly connected with the Weierstrass representation of minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$. From around 1980 there were many contributions from theoretical physicists and any kind of proper treatment would require a separate article, so we just include a few remarks here.

As we outlined above, the dimension reduction of Yang-Mills theory on $\mathbb{R}^4$ obtained by imposing translation-invariance in one variable leads to equations for a pair (A,ϕ) on $\mathbb{R}^3$. Now reduce further by imposing translation-invariance in two directions. More precisely, write $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2_1 \times \mathbb{R}^2_2$, fix a simply-connected domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2_1$ and consider connections on a bundle over $\Omega \times \mathbb{R}^2_2$ which are invariant under translations in $\mathbb{R}^2_2$. These correspond to pairs (A,Φ) where A is a connection on a bundle P over Ω and Φ can be viewed as a 1-form on Ω with values in the bundle ad$P$. Now $A+i\Phi$ is a connection over Ω for a bundle with structure group the complexification G^c: for example if $G=U(r)$ the complexified group is $G^c = GL(r,\mathbb{C})$. The Yang-Mills instanton equations on $\mathbb{R}^4$ imply that $A+i\Phi$ is a *flat* connection. By the fundamental property of curvature, since Ω is simply-connected, this flat connection can be trivialised. The original data (A,Φ) is encoded in the reduction of the trivial G^c-bundle to the subgroup G, which amounts to a map u from Ω to the non-compact symmetric space G^c/G. For example, when $G=U(r)$ the extra data needed to recover (A,Φ) is a Hermitian metric on the fibres of the complex vector bundle, and $GL(r,\mathbb{C})/U(r)$ is the space of Hermitian metrics on $\mathbb{C}^r$. The remaining part of the instanton equations in four dimensions is precisely the harmonic map equation for u. This is one starting point for Hitchin's theory of "stable pairs" over compact Riemann surfaces [6].

One is more interested in harmonic maps to compact symmetric spaces and, as Uhlenbeck explained in [28], this can be achieved by a modification of the set-up above. She takes $\mathbb{R}^4$ with an indefinite quadratic form of signature $(2,2)$ and a splitting $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2_1 \times \mathbb{R}^2_2$ into positive and negative subspaces. Then the invariant instantons correspond to harmonic maps from Ω to the compact Lie group G. Other symmetric spaces can be realised as totally geodesic submanifolds in the Lie group, for example complex Grassmann manifolds in $U(r)$, and the theory can be specialised to suit. This builds a bridge between the "integrable" nature of the 2-dimensional harmonic map equations and the Penrose-Ward twistor description of Yang-Mills instantons over $\mathbb{R}^4$, although as we have indicated above much of the work on the former predates twistor theory. In her highly influential paper [28], Uhlenbeck found an action of the loop group on the space of harmonic maps from

Ω to G, introduced an integer invariant "uniton number" and obtained a complete description of all harmonic maps from the Riemann sphere to G.

3 Higher dimensions

In a variational theory with a critical dimension ν certain characteristic features appear when studying questions in dimensions greater than ν. In the harmonic mapping theory, for maps $u : M \to N$, the dimension in question is $n = \dim M$ and, as we saw above, the critical dimension is $\nu = 2$. A breakthrough in the higher dimensional theory was obtained by Schoen and Uhlenbeck in [12]. Suppose for simplicity that N is isometrically embedded in some Euclidean space $\mathbb{R}^k$ and define $L^2_1(M,N)$ to be the set of L^2_1 functions on M with values in the vector space $\mathbb{R}^k$ which map to N almost everywhere on M. The energy functional $\mathcal{F}$ is defined on $L^2_1(M,N)$ and Schoen and Uhlenbeck considered an energy minimising map $u \in L^2_1(M,N)$. The main points of the theory are:

- u is smooth outside a singular set $\Sigma \subset M$ which has Hausdorff dimension at most $n-3$;
- at each point x in the singular set Σ there is a *tangent map* to u.

The second item means that there is a sequence of real numbers $\sigma_i \to 0$ such that the rescaled maps

$$u_i(\xi) = u(\exp_x(\sigma_i \xi))$$

converge to a map $v : \mathbb{R}^n \to N$ which is radially invariant, and hence corresponds to a map from the sphere S^{n-1} to N. (Here $\exp_x$ is the Riemannian exponential map and we have chosen a frame to identify TM_x with $\mathbb{R}^n$.)

To relate this to the case $n = 2$ discussed above, the general picture is that a $\mathcal{F}$-minimising sequence in $\mathrm{Maps}(M,N)$ can be taken to converge outside a *bubbling set* of dimension at most $n-2$ and the limit extends smoothly over the $(n-2)$-dimensional part of the bubbling set. The new feature in higher dimensions is that the limit can have a singular set of codimension 3 or more.

Two fundamental facts which underpin these results are *energy monotonicity* and ε-*regularity*. To explain the first, consider a smooth harmonic map $U : B^n \to N$, where B^n is the unit ball in $\mathbb{R}^n$. For $r < 1$ set

$$E(r) = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{|x|<r} |\nabla U|^2.$$

Then one has an identity, for $r_1 < r_2$:

$$E(r_2) - E(r_1) = 2 \int_{r_1<|x|<r_2} |x|^{2-n} |\nabla_r U|^2, \tag{5}$$

where ∇_r is the radial component of the derivative. In particular, E is an increasing function of r. The point of this is that $E(r)$ is a scale-invariant quantity. If we define $U_r(x) = U(rx)$ then $E(r)$ is the energy of the map U_r on the unit ball. The monotonicity property means that U "looks better" on a small scale, in the sense of this rescaled energy. The identity (5) follows from a very general argument, applying the stationary condition to the infinitesimal variation of U given by radial dilation. (One way of expressing this is through the theory of the stress-energy tensor.) Note that equality $E(r_2) = E(r_1)$ holds if and only if U is radially-invariant in the corresponding annulus. This is what ultimately leads to the existence of radially-invariant tangent maps.

The monotonicity identity is a feature of maps from $\mathbb{R}^n$, but a similar result holds for small balls in a general Riemannian n-manifold M. For $x \in M$ and small $r > 0$ we define

$$E_x(r) = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B_x(r)} |\nabla U|^2,$$

where $B_x(r)$ is the r-ball about x. Then if U is a smooth harmonic map and x is fixed the function $E_x(r)$ is increasing in r, up to harmless lower-order terms.

The ε-regularity theorem of Schoen and Uhlenbeck states that there is an $\varepsilon > 0$ such that if u is an energy minimiser then u is smooth in a neighbourhood of x if and only if $E_x(r) < \varepsilon$ for some r. An easier, related, result is that if u is known to be smooth then once $E_x(r) < \varepsilon$ one has *a priori* estimates (depending on r) on all derivatives in the interior ball $B_x(r/2)$. The extension to general minimising maps is one of the main technical difficulties overcome by Schoen and Uhlenbeck.

We turn now to corresponding developments in gauge theory, where the critical dimension ν is 4. A prominent achievement of Uhlenbeck in this direction is her work with Yau on the existence of Hermitian-Yang-Mills connections [29]. The setting here involves a rank r holomorphic vector bundle E over a compact complex manifold M with a Kähler metric. Any choice of Hermitian metric h on the fibres of E defines a principle $U(r)$ bundle of orthonormal frames in E and a basic lemma in complex differential geometry asserts that there is a preferred connection on this bundle, compatible with the holomorphic structure. The curvature $F = F(h)$ of this connection is a bundle-valued 2-form of type $(1,1)$ with respect to the complex structure and we write ΛF for the inner product with the $(1,1)$ form defined by the Kähler metric. Then ΛF is a section of the bundle of endomorphisms of E. The *Hermitian-Yang-Mills equation* is that is a constant multiple of the identify:

$$\Lambda F = \kappa 1_E$$

(where the constant κ is determined by topology). As the name suggests, these are special solutions of the Yang-Mills equations. The result proved by Uhlenbeck and Yau is that a "stable" holomorphic vector bundle admits such a Hermitian-Yang-Mills connection. Here stability is a numerical condition on holomorphic sub-bundles, or more generally sub-sheaves, of E which was introduced by algebraic geometers studying moduli theory of holomorphic bundles. The result of Uhlenbeck and Yau confirmed conjectures made a few years before by Kobayashi and Hitchin. These extend older results of Narasimhan and Seshadri, for bundles over Riemann surfaces, and fit into a large development over the past 40 years, connecting various stability conditions in algebraic geometry with differential geometry. We will not say more about this background here but focus on the proof of Uhlenbeck and Yau.

The problem is to solve the equation $\Lambda F(h) = \kappa 1_E$ for a Hermitian metric h on E. This boils down to a second order, nonlinear, partial differential equation for h. While this problem does not fit directly into the variational framework we have emphasised in this article the same compactness considerations apply. Uhlenbeck and Yau use a continuity method, extending to a 1-parameter family of equations for $t \in [0,1]$ which we write schematically as $\Lambda F(h_t) = K_t$, where K_t is prescribed and $K_1 = \kappa 1_E$. They set this up so that there is a solution h_0 for $t = 0$ and the set $T \subset [0,1]$ for which a solution h_t exists is open, by an application of the implicit function theorem. The essential problem is to prove that if E is a stable holomorphic bundle then T is closed, hence equal to the whole of $[0,1]$ and in particular there is a Hermitian-Yang-Mills connection h_1.

The paper of Uhlenbeck and Yau gave two independent treatments of the core problem, one emphasising complex analysis and the other gauge theory. We will concentrate here on the latter. For a sequence $t(i) \in T$ we have connections A_i defined by the hermitian metrics $h_{t(i)}$ and the question is whether one can take a limit of the A_i. The deformation of the equations by the term K_t is rather harmless here so the situation is essentially the same as if the A_i were Yang-Mills connections. In addition, an integral identity using Chern-Weil theory shows that the Yang-Mills energy $\|F(A_i)\|_{L^2}^2$ is bounded. Then Uhlenbeck and Yau introduced a small energy result, for connections over a ball $B_x(r) \subset M$. Since the critical dimension ν is 4, the relevant normalised energy in this Yang-Mills setting is

$$E_x(r) = \frac{1}{r^{n-4}} \int_{B_x(r)} |F|^2,$$

where n is the real dimension of M. If $E_x(r)$ is below a suitable threshold there are interior bounds on all derivatives of the connection, in a suitable gauge. Then the global energy bound implies that after perhaps taking a subsequence, the A_i converge outside a closed set $S \subset M$ of Hausdorff codimension at least 4. Uhlenbeck and Yau show that if the metrics $h_{t(i)}$ do *not* converge then a suitable rescaled limit produces a holomorphic subbundle of E over $M \setminus S$. A key technical step is to show that this subbundle corresponds locally to a meromorphic map to a Grassmann manifold, which implies that the subbundle extends as a coherent sheaf over all of M. The differential geometric representation of the first Chern class of this subsheaf, via curvature, shows that it violates the stability hypothesis.

The higher-dimensional discussion in Yang-Mills theory follows the pattern of that for harmonic maps above. The corresponding monotonicity formula was proved by Price [10] and a treatment of the small energy result was given by Nakajima [9]. Some years later, the theory was developed much further by Tian [23], including the existence of "tangent cones" at singular points.

This whole circle of ideas and techniques involving the dimension of singular sets, monotonicity, "small energy" results, tangent cones etc. has had a wide-ranging impact in many branches of differential geometry over the past few decades and forms the focus of much current research activity. Apart from the cases of harmonic maps and Yang-Mills fields discussed above prominent examples are minimal submanifold theory, where many of the ideas appeared first, and the convergence theory of Riemannian metrics with Ricci curvature bounds.

References

[1] M. Atiyah and J. Jones, *Topological aspects of Yang-Mills theory*, Comm. Math. Phys. **61** (1978), 97–118.

[2] C. Boyer, J. Hurtubise, B. Mann and R. Milgram, *The topology of instanton moduli spaces. I. The Atiyah-Jones conjecture*, Ann. of Math. **137** (1993), 561–609.

[3] S. Brendle and R. Schoen, *Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 287–307.

[4] H. Brézis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437–477.

[5] J. Eells and J. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.

[6] N. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, Proc. Lond. Math. Soc. **55** (1987), 59–126.

[7] D. McDuff and D. Salamon, *J-holomorphic curves and symplectic topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 52 (2004).

[8] M. Micallef and J. Moore, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Annals of Math. **127** (1988), 199–227.

[9] H. Nakajima, *Compactness of the moduli space of Yang-Mills connections in higher dimensions*, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), 383–392.

[10] P. Price, *A monotonicity formula for Yang-Mills fields*, Manuscripta Math. **43** (1983), 131–166.

[11] T. Parker, *What is.... a bubble tree?*, Notices of the Amer. Math. Soc. **50** (2003), 666–667.

[12] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Annals of Math. **113** (1981), 1–24.

[13] L. Sadun and J. Segert, *Non-self-dual Yang-Mills connections with nonzero Chern number*, Bull. Amer. Math. Soc. **24** (1991), 163–170.

[14] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geom. **20** (1984), 479–495.
[15] R. Schoen and K. Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps*, J. Differential Geometry **17** (1982), 307–335.
[16] S. Sedlacek, *A direct method for minimizing the Yang-Mills functional over 4-manifolds*, Comm. Math. Phys. **86** (1982), 515–527.
[17] G. Segal, *The topology of spaces of rational functions*, Acta Math. **143** (1979), 39–72.
[18] L. Sibner, R. Sibner and K. Uhlenbeck, *Solutions to Yang-Mills equations that are not self-dual*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **86** (1989), 8610–8613.
[19] C. Taubes, *The existence of a nonminimal solution to the $SU(2)$ Yang-Mills-Higgs equations on $\mathbb{R}^3$*, I. Comm. Math. Phys. **86** (1982), 257–298.
[20] C. Taubes, *Stability in Yang-Mills theories*, Comm. Math. Phys. **91** (1983), 235–263.
[21] C. Taubes, *Min-max theory for the Yang-Mills-Higgs equations*, Comm. Math. Phys. **97** (1985), 473–540.
[22] C. Taubes, *The stable topology of self-dual moduli spaces*, J. Differential Geom. **29** (1989), 163–230.
[23] G. Tian, *Gauge theory and calibrated geometry*, Annals of Math. **151** (2000), 193–268.
[24] K. Uhlenbeck, *Morse theory on Banach manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 105–106.
[25] K. Uhlenbeck, *Connections with L^p bounds on curvature*, Commun. Math. Phys **83** (1982), 31–42.
[26] K. Uhlenbeck, *Removable singularities in Yang-Mills fields*, Commun. Math. Phys **83** (1982), 11–29.
[27] K. Uhlenbeck, *Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model)* J. Differential Geometry **30** (1989), 1–50.
[28] K. Uhlenbeck, *On the connection between harmonic maps and the self-dual Yang-Mills and the sine-Gordon equations* J. Geometry and Physics **8** (1992), 283–316.
[29] K. Uhlenbeck and S.T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles* Commun. Pure Appl. Math. Vol. XXXIX (1986), S257–S293.

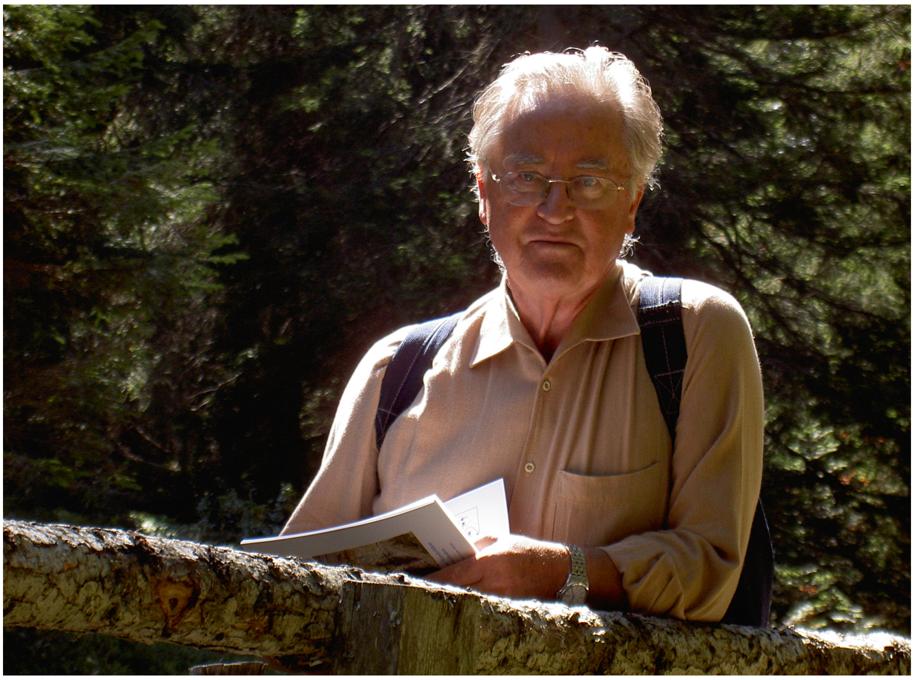
Author's address:
Room 674, Huxley Building,
Department of Mathematics,
Imperial College,
Queen's Gate, London SW7 2AZ, GREAT BRITIAN
email s.donaldson@imperial.ac.uk

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 241 (2019), 21–28

Gilbert Helmberg 1928–2019

Michael Oberguggenberger
Universität Innsbruck

Am 18. Februar 2019 ist Gilbert Helmberg, em.o. Professor an der Universität Innsbruck, im 91. Lebensjahr verstorben. Seit 1992 war er korrespondierendes Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, in den Jahren 1994–1997 Vorsitzender der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft und seit 2000 deren Ehrenmitglied.



Gilbert Helmberg im August 2005 bei einer Wanderung in Südtirol (Foto: Arno Helmberg)

In diesem Nachruf würdige ich unseren Freund und Kollegen, em.o. Univ.-Prof. Dr. Gilbert Helmberg, der nicht nur eine außergewöhnliche Lehrer- und Forscherpersönlichkeit war, sondern auch die österreichische Mathematik über viele Jahrzehnte entscheidend mitgestaltet hat.

ISSN 0020-7926

Geboren im Jahr 1928 in Wien, verbrachte er die Kindheits- und Jugendjahre in Waidhofen an der Ybbs. Das anschließende Studium der Mathematik und Darstellenden Geometrie an der Universität Wien schloss er 1950 mit der Lehramtsprüfung ab. Auf die von ihm selbst stets betonte Begeisterung für die Lehre und seine Affinität zur Geometrie soll weiter unten ausführlich eingegangen werden.

Nicht unerwähnt soll bleiben, dass Gilbert Helmberg 1949 die Staatsprüfung Klavier in Wien ablegte.

Gilbert Helmberg schloss zunächst das Doktoratsstudium der Mathematik an der Universität Wien bei Edmund Hlawka an, mit der Dissertation „Der Kroneckersche Approximationssatz in Gruppen von endlicher Ordnung“ und den Rigorosen aus Mathematik, Astronomie und Philosophie im Jahr 1951 und der Promotion sub auspiciis praesidentis 1953.

In der Zwischenzeit hatte er bereits eine Stelle als Lehrer in Innsbruck am renommierten Bundesrealgymnasium Stainerstraße angetreten, welche er aber 1956 zugunsten eines Fulbright-Reisestipendiums aufgab. Er verbrachte dann die Jahre 1956 bis 1958 an der University of Washington in Seattle bei Edwin Hewitt. Als fruchtbare Folge dieses Aufenthalts entstand seine weit beachtete Monographie „Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space“ (North-Holland, 1969), nachgedruckt bei Dover 2008.

Nach Assistentenstellen an der Tulane University (New Orleans) und der Universität Mainz bis 1963 (mit einer einsemestrigen Unterbrechung als Assistent bei Wolfgang Gröbner in Innsbruck 1961) zog es ihn 1963 in die Niederlande, zunächst nach Amsterdam. Schließlich wurde er im Jahr 1966 ordentlicher Universitätsprofessor an der Universität Eindhoven. Die Einflüsse des Niederländischen wirkten sich auch auf seine späteren Assistenten in Innsbruck aus und auch auf mich, der seine Laufbahn 1975 bis 1979 mit einer Stelle als Studienassistent bei Gilbert Helmberg begann – doch davon später. Zunächst ist hervorzuheben, dass Gilbert Helmberg seine Forschungsgebiete (Zahlentheorie, Gleichverteilung, reelle Analysis) in den Niederlanden um die Ergodentheorie erweiterte. In dieser Zeit entwickelte sich auch eine enge Freundschaft mit Edsger W. Dijkstra.

Im Jahr 1971 wurde Gilbert Helmberg als ordentlicher Professor auf die Lehrkanzel „Mathematik 1“ an der Fakultät für Bauingenieurwesen und Architktur der Universität Innsbruck berufen, kurz darauf auch als Honorarprofessor an der Naturwissenschaftlichen Fakultät, welche Stellen er bis zu seiner Emeritierung 1996 innehatte. Über sein außergewöhnliches Engagement in der Lehre und für die österreichische Mathematik nach seiner Emeritierung bis kurz vor seinem Lebensende wird noch zu berichten sein.

In den Jahren 1974/75 und 1985 bis 1987 war Gilbert Helmberg Dekan seiner Fakultät. Im Jahr 1992 wurde er zum korrespondierenden Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften ernannt. Von 1994 bis 1997 hatte er den Vorsitz der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft inne. Nebenbei möge sein Engagement bei den Tiroler Pfadfindern erwähnt werden, deren Präsident er von 1989 bis 1993 war.

Wie aus diesem kurzen Abriss der Stationen seines Lebenswegs ersichtlich wird, hatte Gilbert Helmberg eine vielfältige und interessante Laufbahn als Wissenschaftler. Auf die wichtigsten drei Facetten – Forschung, Lehre und Engagement für die österreichische Mathematik – möchte ich nun näher eingehen.

Wie schon erwähnt, begann Gilbert Helmberg seine Forschungstätigkeit im Bereich der Zahlentheorie, besonders der Theorie der gleichverteilten Folgen, später mündend in die Ergodentheorie, die Theorie diskreter dynamischer Systeme sowie Themen der klassischen reellen Analysis. In den 1990er-Jahren wandte er sich mehr der Fourieranalysis zu, mit einem besonderen Interesse für das Gibbssche Phänomen, und schließlich den Fraktalen. Zu letzterem Gebiet verfasste er ein vergnüglich lesbares Einführungswerk, „Getting aquainted with fractals“ (de Gruyter, 2007). In seinen letzten Lebensjahren kehrte er wieder zur Zahlentheorie zurück. Seine bei de Gruyter im Jahr 2018 erschienene Monographie „Analytische Zahlentheorie: Rund um den Primzahlsatz“ kann als Vermächtnis seines steten Interesses an diesem Gebiet betrachtet werden. In seiner Zeit als Ordinarius organisierte er zahlreiche Gastvorträge am Institut, die seinen jungen Mitarbeitern die Gelegenheit gaben, österreichische und internationale Mathematikerpersönlichkeiten kennenzulernen. Er rief um 1980 die Preprintserie „Institutsnotizen“ ins Leben, in der jeder Mitarbeiter seine vorläufigen Ergebnisse zugänglich machen konnte.

An der Universität Innsbruck war Gilbert Helmberg für die Lehre aus Mathematik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für Bauingenieure zuständig, er hielt aber auch regelmäßig Vorlesungen für das Mathematikstudium an der Naturwissenschaftlichen Fakultät, vornehmlich über Zahlentheorie, Ergodentheorie, topologische und maßtheoretische Dynamik und Themen der reellen Analysis. Ich erinnere mich an seine Vorlesung über Zahlentheorie, mit der er mich in meinem ersten Studiensemester 1971/72 in den Bann zog. Gilbert Helmberg war ein begnadeter akademischer Lehrer, der sowohl die Studierenden der Bauingenieurwissenschaften und Architektur als auch der Mathematik begeisterte. Seine Vorlesungen zeichneten sich durch Klarheit und Lebendigkeit aus. Im Bereich des Bauingenieurwesens hatte dies zur Folge, dass seine Vorlesungen in allen Jahren überlaufen waren, obwohl er für den Einführungszyklus eigentlich nur alle zwei Jahre verantwortlich war. Dabei war es ihm ein großes Anliegen, jeden Studenten und jede Studentin im Rahmen von einstündigen mündlichen Prüfungen persönlich kennenzulernen, ein großer Aufwand, der gelegentlich auch zu Wartezeiten bei den Prüfungsterminen führte, was aber die Studierenden gern in Kauf nahmen. Bis in die frühen 90er-Jahre waren die Fächer „Mathematik für Architekten“ und „Statistik für Architekten“ Teil des Studienplans Architektur an der Universität Innsbruck, und ich erinnere mich, dass Gilbert Helmberg auch diese Fächer mit großer Liebe unterrichtet hat.

Nicht zuletzt aufgrund seiner Erfahrungen als Gymnasiallehrer in Mathematik und Darstellender Geometrie hielt Gilbert Helmberg seine Vorlesungen stets an der Tafel – mit einem schwungvollen Tafelbild und gestochen scharfen Skizzen. Skripten zu den Vorlesungen gab es nicht – uns damalige Übungsbetreuer (die Assistenten Peter Kaps, Norbert Ortner, Bernhard Roider, Peter Wagner und die Studienassistenten Walther Janous sowie mich) verwies er auf die „holländischen Skripten“, die er aus seiner Zeit in Eindhoven mitbrachte – womit wir immerhin lernten, „Wiskunde“ auf holländisch zu lesen.

Eine bemerkens- und bewundernswerte Phase seines akademischen Lehrens setzte nach seiner Emeritierung ein: Mit wenigen Ausnahmen hielt Gilbert Helmberg jedes Semester zwischen 1997 und 2016 je eine zweistündige Spezialvorlesung und ein zweistündiges Seminar für das Mathematikstudium ab. Ich habe eine Liste von 37 derartigen Lehrveranstaltungen vor mir. Die ausgewählten Themen waren zum Beispiel Spektraltheorie im Hilbertraum, Fourieranalysis, spezielle Funktionen, Wavelets, Integrationstheorie, Zahlentheorie, Fraktale, topologische Gruppen, Ergodentheorie – also ein breites Spektrum aus Gilbert Helmbergs Erfahrungsschatz. Er konnte bis in die letzten Jahre regelmäßig eine Gruppe von fünf bis über zehn Studierende um sich scharen. Dazu gehörte auch das allseits geschätzte Ritual, dass die Studierenden in der Pause mit Tee und Kuchen am Institut gelabt wurden.

Ich wende mich abschließend den Verdiensten Gilbert Helmbergs um die österreichische Mathematik zu. Sein Engagement in der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft als Vorsitzender 1994 bis 1997 wurde schon erwähnt. Er unterstützte über alle Jahre die Aktivitäten der Gesellschaft, seien es Tagungen, Vorträge oder Preisverleihungen. Im Jahr 1981 war er einer der maßgeblichen Organisatoren des 10. Internationalen Österreichischen Mathematikerkongresses in Innsbruck. Er erwirkte dabei, dass die Österreichische Post aus diesem Anlass eine Briefmarke herausgab mit dem bekannten Motiv von M.C. Escher eines unmöglichen Würfels. Mit der Ehrenmitgliedschaft würdigte die Österreichische Mathematische Gesellschaft 2000 seine Verdienste. Als Emeritus war Gilbert Helmberg eines der engagiertesten Mitglieder des Beirats. Ein besonderes Anliegen war es ihm, die Wirkung und Sichtbarkeit der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft beim Nachwuchs, also in den AHS und BHS, zu erhöhen. Es war seine Idee, den Mathe-Brief ins Leben zu rufen. Der Mathe-Brief erscheint seit 2010 unter einem engagierten Redaktionskomitee monatlich und wendet sich an Schülerinnen und Lehrer mit interessanten Zusatzthemen, unterhaltsamen Kuriosa und Einblicke auf die Anwendungen der Mathematik. Der Brief hat nunmehr eine regelmäßige Leserschaft von mehreren Hundert Personen. Gilbert Helmberg regte auch an, den Schüler- und Schülerinnenpreis der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft zu reaktivieren. In Form eines Preises für die besten vorwissenschaftlichen Arbeiten wird dieser nun seit zehn Jahren jährlich erfolgreich vergeben.

Was das Persönliche betrifft, war Gilbert Helmberg seiner Familie stets zugewandt. Seine geliebte Frau Dr. Thea Helmberg ist auch uns Kollegen und Mitarbeitern bei Zusammentreffen und Einladungen mit größter Herzlichkeit entgegengetreten. Seine vier Kinder Arno, Wolfgang, Christoph und Monika haben ihm neun Enkel und Enkelinnen geschenkt.

In seinen letzten beiden Lebensjahren musste Gilbert Helmberg die Vorlesungstätigkeit wegen gesundheitlicher Probleme einstellen, kam jedoch immer wieder aufs Institut zu Besuch. Es war uns Mitgliedern seines Instituts eine Freude, dass wir ihn aus Anlass seines neunzigsten Geburtstags im Juni 2018 mit einer Festveranstaltung ehren konnten, mit Vorträgen von Klaus Schmidt und seinen Schülern und ehemaligen Mitarbeitern Maximilian Thaler und Walther Janous. Gilbert Helmberg konnte dort zu seiner und unserer Freude sein druckfrisch erschienenes Buch über analytische Zahlentheorie vorstellen.

Mit Gilbert Helmberg geht eine wichtige Mathematikerpersönlichkeit von uns und eine Ära zu Ende. Gilbert, wir danken dir für alles. Wir werden dich vermissen.

Schriftenverzeichnis

[1] G. Helmberg, *Strukturbeziehungen zwischen endlicher Gruppe, Gruppenring und irreduziblen Darstellungen*, Monatsh. Math. **58** (1954), 241–257.

[2] G. Helmberg, *A theorem on equidistribution on compact groups*, Pacific J. Math. **8** (1958), 227–241.

[3] G. Helmberg, *Uniform convergence of nets of functions*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **62** = Indag. Math. **21** (1959) 419–427; corrigendum, **63** = Indag. Math. **22** (1960), 106.

[4] G. Helmberg, *Ein Satz über Gleichverteilung in kompakten Gruppen. II*, Monatsh. Math. **63** (1959), 368–377.

[5] G. Helmberg, *Generating sets of elements in compact groups*, Pacific J. Math. **9** (1959), 1083–1096.

[6] J. Cigler und G.Helmberg, *Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung*, Jber. Deutsch. Math. Verein. **64** (1961), 1–50.

[7] G. Helmberg, *Zerlegungen des Mittelwertes fastperiodischer Funktionen. I*, J. Reine Angew. Math. **207** (1961), 31–52.

[8] G. Helmberg, *Zerlegungen des Mittelwertes fastperiodischer Funktionen. II*, J. Reine Angew. Math. **208** (1961), 1–21.

[9] G. Helmberg, *Topologische Untergruppenräume*, J. Reine Angew. Math. **208** (1961), 164–180.

[10] G. Helmberg, *On convergence classes of sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 918–921.

[11] G. Helmberg, *Eine Familie von Gleichverteilungskriterien in kompakten Gruppen*, Monatsh. Math. **66** (1962), 417–423.

[12] G. Helmberg, *Topologische Untergruppenräume*, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Sympos., Prague, 1961), pp. 196–198, Academic Press, New York, Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague, 1962.

[13] G. Helmberg, *Ein Zusammenhang zwischen Fourier-Reihen und Werteverteilungen fastperiodischer Funktionen*, Math. Z. **81** (1963), 300–307.
[14] G. Gröbner und G. Helmberg, *Ein Regularitätskriterium für Stellenringe*, J. Reine Angew. Math. **213** (1963/1964), 39–42.
[15] G. Helmberg, *Über die Nichtexistenz „stetiger" Borel-Maße*, Math. Z. **83** (1964), 261–266.
[16] P. Flor und G. Helmberg, *Zur Definition der Verteilungsfunktion einer reellwertigen Funktion*, J. Reine Angew. Math. **214/215** (1964), 261–267.
[17] G. Helmberg, *Almost periodic functions and Dini's theorem*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **67** = Indag. Math. **26** (1964), 173–177.
[18] G. Helmberg, *On a convolution of sequences in a compact group*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **67** = Indag. Math. **26** (1964), 266–274.
[19] G. Helmberg, *Über eine Zerlegung des Haarschen Maßes auf kompakten Gruppen*, Monatsh. Math. **68** (1964), 218–223.
[20] G. Helmberg, A. Paalman-de Miranda, *Almost no sequence is well distributed*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **67** = Indag. Math. **26** (1964), 488–492.
[21] G. Helmberg, *Gleichverteilte Folgen in lokal kompakten Räumen*, Math. Z. **86** (1964), 157–189.
[22] G. Helmberg, *A class of criteria concerning uniform distribution in compact groups*, Compositio Math. **16** (1964), 196–203.
[23] G. Helmberg, *Abstract theory of uniform distribution*, Compositio Math. **16** (1964), 72–82.
[24] G. Helmberg, *Gleichverteilte Folgen in lokal kompakten Räumen*, Math. Centrum Amsterdam Afd. Zuivere Wisk., 1964.
[25] G. Helmberg, *Über die Zerlegung einer messbaren Transformation in konservative und dissipative Bestandteile*, Math. Z. **88** (1965), 358–367.
[26] P. C. Baayen und G. Helmberg, *On families of equi-uniformly distributed sequences in compact spaces*, Math. Ann. **161** (1965), 255–278.
[27] G. Helmberg, *Mathematical foundations of the mixing of cocktails and the kneading of dough*, Math. Centrum Amsterdam Afd. Zuivere Wisk., 1965.
[28] G. Helmberg, *Über rein dissipative Transformationen*, Math. Z. **90** (1965), 41–53.
[29] G. Helmberg, *On some transformations related to shift transformations in infinite dyadic product spaces*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **68** = Indag. Math. **27** (1965), 803–812.
[30] G. Helmberg, *Über endliche invariante Maße auf Untermengen*, Monatsh. Math. **70** (1966), 229–232.
[31] G. Helmberg, *Über konservative Transformationen*, Math. Ann. **165** (1966), 44–61.
[32] G. Helmberg and F. H. Simons, *A dualization of Kac's recurrence theorem*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **69** = Indag. Math. **28** (1966), 608–615.
[33] G. Helmberg, *Introduction to spectral theory in Hilbert space*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 6, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; Wiley Interscience Division John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
[34] G. Helmberg and F. H. Simons, *On the conservative parts of the Markov processes induced by a measureable transformation*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw.

Gebiete **11** (1969), 165–180.
[35] G. Helmberg and F. H. Simons, *Aperiodic transformations*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **13** (1969), 180–190.
[36] G. Helmberg, *Über mittlere Rückkehrzeit unter einer maßtreuen Strömung*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **13** (1969), 165–179.
[37] G. Helmberg, *Einige Diskrepanzabschätzungen für Punktfolgen im* $\mathbf{R}^s$, Monatsh. Math. **75** (1971), 223–238.
[38] G. Helmberg, *On the converse of Hopf's ergodic theorem*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **21** (1972), 77–80.
[39] G. Helmberg, *Über Transformationen ohne invariante Wahrscheinlichkeit (Ergänzung zu einer Arbeit von Krengel)*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **39** (1977), no. 4, 269–276.
[40] G. Helmberg, *Some remarks on* ε*-independence of partitions and on topological Rochlin sets*, Ergodic theory (Proc. Conf., Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1978), pp. 58–65, Lecture Notes in Math., 729, Springer, Berlin, 1979.
[41] G. Helmberg, *Die Entropie einer linear gebrochenen Funktion*, Monatsh. Math. **94** (1982), no. 3, 213–248.
[42] G. Helmberg, *Itineraries under unimodal maps*, Iteration theory and its functional equations (Lochau, 1984), 95–100, Lecture Notes in Math., 1163, Springer, Berlin, 1985.
[43] G. Helmberg, *Zur Abschätzung der Fourier-Koeffizienten einer Funktion mit beschränkter Schwankung*, Monatsh. Math. **102** (1986), no. 4, 267–271.
[44] G. Helmberg, *On subsequences of normal sequences*, Proceedings of the conference on ergodic theory and related topics, II (Georgenthal, 1986), 70–71, Teubner-Texte Math., 94, Teubner, Leipzig, 1987.
[45] L. C. Sun and G. Helmberg, *Maximal words connected with unimodal maps*, Order **4** (1988), no. 4, 351–380.
[46] G. Helmberg, P. Wagner and G. Veltkamp, *On Faddeev-Leverrier's methods for the computation of the characteristic polynomial of a matrix and of eigenvectors*, Linear Algebra Appl. **185** (1993), 219–233.
[47] G. Helmberg, *The Gibbs phenomenon for Fourier interpolation*, J. Approx. Theory **78** (1994), no. 1, 41–63.
[48] G. Helmberg, *A limit function for equidistant Fourier interpolation*, J. Approx. Theory **81** (1995), no. 3, 389–396.
[49] G. Helmberg and K. Sigmund, *Nestor of mathematicians: Leopold Vietoris turns 105*, Math. Intelligencer **18** (1996), no. 4, 47–50.
[50] G. Helmberg and P. Wagner, *Manipulating Gibbs' phenomenon for Fourier interpolation*, J. Approx. Theory **89** (1997), no. 3, 308–320.
[51] G. Helmberg, *Estimating the sum of alternating series with a convexity property*, Nieuw Arch. Wisk. (4) **15** (1997), no. 1–2, 7–14.
[52] G. Helmberg, *A corner point Gibbs phenomenon for Fourier series in two dimensions*, J. Approx. Theory **100** (1999), no. 1, 1–43.
[53] G. Helmberg, *How to recognize functions in* $L_p(\mathbf{R}) + L_q(\mathbf{R})$, Nieuw Arch. Wiskd. (5) **1** (2000), no. 2, 152.
[54] G. Helmberg, *Localization of a corner-point Gibbs phenomenon for Fourier series*

in two dimensions, J. Fourier Anal. Appl. **8** (2002), no. 1, 29–41.

[55] G. Helmberg and G. Kirchner, *On the boundary behaviour of Poisson integrals of finite measures in $(n+1)$-dimensional half space*, Complex Var. Theory Appl. **47** (2002), no. 9, 769–785.

[56] G. Helmberg, *An edge point Gibbs phenomenon for Fourier series in two dimensions*, Monatsh. Math. **139** (2003), no. 3, 221–225.

[57] G. Helmberg, *A construction concerning $(l_p)' \subset l_q$*, Amer. Math. Monthly **111** (2004), no. 6, 518–520.

[58] G. Helmberg, *Curiosities concerning weak topology in Hilbert space*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), no. 5, 447–452.

[59] G. Helmberg, *A Landau-type construction concerning $(L_p)' \subset L_q$*, Indag. Math. (N.S.) **17** (2006), no. 2, 243–249.

[60] G. Helmberg, *An absolutely continuous function in $L_1(\mathbb{R})\backslash W^{1,1}(\mathbb{R})$*, Amer. Math. Monthly **114** (2007), no. 4, 356–357.

[61] G. Helmberg, *Getting acquainted with fractals*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2007.

[62] G. Helmberg, *The crab: a connected fractile of infinite connectivity*, Fractals **19** (2011), no. 3, 367–377.

[63] G. Helmberg, *On the Eisenstein packing of the complex plane*, Math. Intelligencer **37** (2015), no. 2, 27–33.

[64] G. Helmberg, *Analytische Zahlentheorie: Rund um den Primzahlsatz*, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2018.

Adresse des Autors:
Universität Innsbruck
Arbeitsbereich für Technische Mathematik
Technikerstraße 13
A-6020 Innsbruck
email michael.oberguggenberger@uibk.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 241 (2019), 29–37

Gerd Baron 1940–2019

Michael Drmota, Clemens Heuberger, Peter Kirschenhofer
TU Wien, Universität Klagenfurt, Montanuniversität Leoben

Gerd Baron hat uns am 30. Mai 2019 im 79. Lebensjahr nach kurzer Krankheit für immer verlassen. Neben seiner Professur an der TU Wien hat er die Österreichische Mathematik-Olympiade jahrzehntelang wissenschaftlich betreut und durch sein außerordentliches Engagement nachhaltig geprägt.

Foto: Baron

1 Biographie

Gerd Baron wurde im September 1940 in Wien geboren. Nach dem Besuch der Volksschule in Mailberg (NÖ) ging er in die Beethoven-Realschule in Wien XIX,

ISSN 0020-7926

Krottenbachstraße 11. Nach der Matura ebendort studierte er an der Universität Wien Mathematik und Astronomie und schloss 1964 ein Doktorat der Philosophie mit einer Dissertation im (Haupt-)Fach Mathematik mit dem Titel „Sätze über die Existenz und die Nicht-Existenz von Graphen mit vorgegebener expliziter Automorphismengruppe“ unter Betreuung durch Herbert Izbicki ab. Ab 1964 war er Hochschulassistent bzw. später Hochschuloberassistent am 3. Institut für Mathematik der (damaligen) Technischen Hochschule Wien bei Rudolf Inzinger. Er habilitierte sich 1972 für Mathematik mit einer Habilitationsschrift „Über asymmetrische Graphen“. 1974 wurde er zum Außerordentlichen Universitätsprofessor ernannt, leitete in der Folge den Arbeitsbereich Mathematik für Technische Physiker, Informatiker und Versicherungsmathematiker am selben Institut und übernahm nach dem Tod von Rudolf Inzinger die Leitung des 3. Instituts für Mathematik. Nach verschiedenen Umorganisationen der Institute war er Leiter der Abteilung für Diskrete Mathematik am Institut für Algebra und Diskrete Mathematik sowie zeitweilig auch Vorstand dieses Instituts sowie danach (ab 1998 als Universitätsprofessor) am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie. Im Laufe seiner Tätigkeit an der TU Wien war er auch Sprecher der Professorenkurie der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät und später der Fakultät für Technische Naturwissenschaften und Informatik. Mit 1. Oktober 2005 wurde er in den Ruhestand versetzt.

Er war viele Jahre Mitglied des Vorstands der ÖMG.

2 Wissenschaftliche Tätigkeit

Gerd Baron hat vielseitig wissenschaftlich gearbeitet, vor allem in Graphentheorie und Kombinatorik, aber auch in der Zahlentheorie und vereinzelt in anderen Gebieten wie in der Algebra oder Theoretischen Informatik. Hervorzuheben ist auch seine Affinität zu Problemen aus dem Bereich der Geometrie.

In den ersten Jahren nach seiner Dissertation konzentrierten sich seine Arbeiten auf verschiedene graphentheoretische Probleme [3–7, 9, 11] sowie auf gruppenaxiomatische Fragestellungen [1, 2] und auf Transzendenztheorie [8, 10, 12]. So behandelt er etwa in der Arbeit *On the maximal distance of spanning trees* [4], gemeinsam mit Wilfried Imrich, ein Problem von Ore über den Abstand von Spannbäumen. Insbesondere wird gezeigt, dass dieser Abstand im Wesentlichen gleich der Zyklomatischen Zahl des Graphen ist.

Erwähnenswert ist eine (etwas später erschienene) Arbeit mit den berühmten polnischen Zahlentheoretiker A. Schinzel *An extension of Wilson's theorem* [13], in der eine polynomielle Version des Satzes von Wilson[1] bewiesen wird. Dies bestä-

[1] Der Satz von Wilson besagt, dass eine Zahl n genau dann eine Primzahl ist, wenn $1+(n-1)!$ durch n teilbar ist.

tigt eine Vermutung von W. Snyder und hat interessante Anwendungen in Ringen der Charakteristik p.

Ab etwa 1980 sind seine Arbeiten mehrheitlich verschiedenen kombinatorischen Fragestellungen zuzuordnen [15, 16, 18–20, 24, 25, 27], zwei Arbeiten der theoretischen Informatik [17, 22] und verschiedenen anderen Gebieten [14, 22, 23, 26].

Gemeinsam mit P. Kirschenhofer befasste er sich in einer Serie von drei Arbeiten [15, 16, 18] mit der Verallgemeinerung des Rota-Kalküls für Folgen von polynomiellen Familien auf formale Potenzreihen. Dabei spielen sogenannte binomiale Systeme mit nichtkommutativen Variablen eine große Rolle, und es konnten beispielsweise Verallgemeinerungen der Rodrigues-Formel sowie der Sätze von Lagrange und Good gefunden werden.

Ein weiterer Schwerpunkt waren Abzählungsfragen von Unterstrukturen auf speziellen Graphen [19, 20, 24, 25, 27] (mit verschiedenen Koautoren), wo Gerd Baron unter anderem mithilfe erzeugender Funktionen und geschicktem Gebrauch der Lagrangeschen Inversionsformel verschiedene Abzählprobleme auf Bäumen lösen konnte.

Barons wissenschaftliche Beiträge zeichnen sich durch hohen mathematischen Einfallsreichtum und eine geschickte technische Umsetzung aus. Er war ein prototypischer Problemlöser, der (leider) in vielen Fällen seine Ergebnisse nicht publiziert hat. So löste er beispielsweise ein Problem von Wladyslaw Narkiewicz über die Iteration von polynomiellen Abbildungen. Dieses Ergebnis wird von Narkiewicz in seinem Buch *Polynomial Mappings* (Lecture Notes in Mathematics 1600, Springer 1995) besprochen.

Neben seinen wissenschaftlichen Arbeiten hat Gerd Baron gemeinsam mit Peter Kirschenhofer ein dreibändiges Lehrbuch für Mathematik für Informatiker [28] verfasst und die vier Aufgaben- und Lösungssammlungen der Österreichischen Mathematik-Olympiade mitherausgegeben [29–32].

3 Mathematik-Olympiade

Gerd Baron hat mehr als 40 Jahre lang die Österreichische Mathematik-Olympiade wie kein anderer geprägt.

Seit Beginn der Österreichischen Mathematik-Olympiade im Jahr 1969 war er Mitglied der entsprechenden Arbeitsgruppe im Ministerium und leitete auch Vorbereitungskurse für Schülerinnen und Schüler.

Bis 2014 war er wissenschaftlicher Leiter der Österreichischen Mathematik-Olympiade und als solcher allein für die Erstellung fast aller Wettbewerbsaufgaben zuständig, was auch die Vorschläge für den damaligen Österreichisch-Polnischen Mathematik-Wettbewerb und die heutige Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade beinhaltete.

Er war für die inhaltliche Konzeption des jährlichen Seminars für Kursleiter/innen sowie des Vorbereitungskurses für den Bundeswettbewerb verantwortlich. Weiters leitete er in all den Jahren die Jury des Bundeswettbewerbs und war österreichischer Delegationsleiter bei allen 29 Österreichisch-Polnischen Mathematik-Wettbewerben und sieben Mal bei der Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade. Schließlich war er Mitherausgeber aller vier Bände der Aufgabensammlung der Österreichischen Mathematik-Olympiade.

Als besondere Höhepunkte sind die internationalen Olympiaden in Österreich hervorzuheben. Im Jahr 1976 war er Vorsitzender der Jury der Internationalen Mathematik-Olympiade, die damals das einzige Mal in ihrer 60-jährigen Geschichte in Österreich stattfand, und im Jahr 2007 Jury-Vorsitzender der erstmals veranstalteten Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade.

Gerade die Erstellung der Wettbewerbsaufgaben erfordert sehr viel Kreativität und gleichzeitig Überblick über die Aufgaben anderer Länder, was viel Zeit und Arbeit in Anspruch nimmt. Gerd Baron hat den Großteil dieser Leistungen ehrenamtlich neben seiner Tätigkeit an der TU Wien bzw. auch noch zehn Jahre über seinen Übertritt in den Ruhestand hinaus erbracht.

Für sein Engagement für die Mathematik-Olympiade wurde er 2017 mit dem Großen Ehrenzeichen für Verdienste um die Republik Österreich ausgezeichnet.

4 Persönliche Erinnerungen

Mein, Peter Kirschenhofers, erstes Zusammentreffen mit Gerd Baron fand im September 1970 statt. Ich war damals Schüler der 5. Klasse einer AHS und erhielt die Information, dass interessierte Schüler an einem (Anfänger-)Kurs im Rahmen der Österreichischen Mathematik-Olympiade teilnehmen könnten. Die Kurse fanden an einigen wenigen Standorten in Wien statt; ich begab mich also in das damalige Mädchengymnasium in der Rahlgasse im 6. Bezirk, wo ich gemeinsam mit etwa 25 anderen Teilnehmern/innen von einem damals gerade 30-jährigen Assistenten der Technischen Hochschule Wien, es war Gerd Baron, begrüßt wurde, der nach wenigen einleitenden Worten sehr rasch auf die wichtigsten Grundregeln der Teilbarkeit und auf Beweise mit Vollständiger Induktion zu sprechen kam. Mit zunehmendem Fortgang der 90-minütigen Kurseinheit stieg bei manchen Teilnehmern in den hinteren Reihen, die sich vielleicht eher einen Nachhilfekurs zum Schulstoff erwartet hatten, die Unruhe. Nach einigen ermahnenden Blicken ist Gerd Baron schließlich in seiner unnachahmlichen Art mit erhobener Stimme „eingeschritten“. Ab der zweiten Kurseinheit waren wir dann nur mehr ca. 10 Teilnehmer, die aber bis zum Kurswettbewerb im Frühjahr durchhielten. Wir alle waren bald von Gerd Barons Fähigkeit in den Bann gezogen, anhand „elementarer“ Gebiete die Schönheit mathematischer Beweise und vor allem des Auffindens verschiedenster Zugänge zur Lösung eines Problems zu demonstrieren. Er war ein begeisterter Problemlöser und ein sehr begabter noch dazu. Die besten von uns Kursteilnehmern durften dann (mit der Mariazellerbahn) zum Gebietswettbewerb (es gab noch keine Landeswettbewerbe) nach Mariazell fahren. Nach unserer Ankunft beim Bundesschullandheim stellte sich heraus, dass wir zu früh erschienen waren. Gerd Baron meinte, dass da noch genug Zeit für eine kleine Wanderung sei und brach in seinem unverwechselbaren Tempo mit uns zu einer herausfordernden Runde in die Umgebung auf. Nach den Wettbewerben wäre eigentlich das Ende des Olympiadekurses erreicht gewesen. Gerd Baron eröffnete uns aber, dass er den Interessierten unter uns gerne noch in einigen Extraeinheiten ein interessantes Teilgebiet der Mathematik nahebringen würde: Es folgte eine kurze Einführung in die wichtigsten Begriffe und Sätze der Graphentheorie, durchaus auf dem Niveau einer universitären Vorlesung. Im darauffolgenden Schuljahr hat Gerd Baron den im Gymnasium Stubenbastei laufenden Fortgeschrittenen-Olympiadekurs von Walter Kranzer, der erkrankt war, übernommen und auch im Folgejahr weitergeführt. Ich habe in meiner 7. Klasse (nach einem Zwischenspiel bei Herbert Vohla in der 6.) also Gerd wieder als Kursleiter erleben dürfen. Er hat uns nicht nur die vorgesehenen Wettbewerbsgebiete nahegebracht, sondern Fragen interessierter Kursteilnehmer zum Anlass genommen, Kurzeinführungen in andere Gebiete zu geben. So hat Gerd einmal auf die Frage nach dem Dimensionsbegriff bei Vektoren in einem 30-minütigen Crashkurs die Grundtatsachen der Linearen Algebra dargelegt, wie sie etwa im ersten Monat der entsprechenden Einführungsvorlesung an der Universität behandelt werden. Wir waren beeindruckt. Am Ende des Olympiadekurses folgte diesmal eine Kombinatorik-Einführungsvorlesung für die Interessierten unter uns.

Nach meiner Matura habe ich Gerd Baron für einige Zeit aus den Augen verloren, da ich an der Universität Wien studiert habe. Ich sah ihn das erstemal nach einigen Jahren wieder, als Rolf Nevanlinna im Mai 1977 bei einem Kolloquium aus Anlass der Emeritierung von Hans Hornich an der TU Wien einen vielbeachteten Vortrag hielt. Nach der Fertigstellung meiner Dissertation über eine Verallgemeinerung von Gian-Carlo Rotas Theorie des Umbralkalküls unter der Anleitung von Johann Cigler an der Universität Wien 1979 suchte ich Gerd Baron auf, um ihm ein Exemplar zu überreichen. Zu meiner Überraschung meinte er nach kurzer Lektüre: „Aha, die Rota-Theorie. Wir suchen zwei halbbeschäftigte Vertreter für einen Assistenten, der auf ein halbes Jahr nach Kanada geht. Hätten Sie Interesse an einer der Stellen?“. Natürlich habe ich begeistert zugestimmt. Projektstellen gab es damals noch keine, sodass Vertretungen meist die einzige Möglichkeit zum Eintritt in eine akademische Verwendung darstellten. Gerd Baron und ich haben dann auch bald an einem gemeinsamen Forschungsvorhaben zum Operatorkalkül über freien Monoiden zu arbeiten begonnen, das in eine dreiteilige Arbeit in den Monatsheften mündete. Johann Cigler stellte damals den Kontakt mit Dominique Foata in Strasbourg her, der Gerd und mich wenig später einlud, beim Seminaire Lotharingien de Combinatoire und in Oberwolfach vorzutragen. Inzwischen hatte ich eine reguläre Assistentenstelle an dem nach Rudolf Inzingers Emeritierung von Gerd Baron geleiteten 3. Institut für Mathematik an der TU Wien erlangen können. Nach der Neuorganisation der Mathematik-Institute folgte ich Gerd an die von ihm geleitete Abteilung für Diskrete Mathematik des neugebildeten Instituts für Algebra und Diskrete Mathematik der TU Wien. Der oben erwähnte Kontakt mit Dominique Foata hatte sich inzwischen so vertieft, dass Gerd Baron und mir die Organisation der ersten beiden Treffen des Seminaire Lotharingien de Combinatoire in Österreich übertragen wurde. Im Übrigen ließ mir Gerd alle Freiheit in Forschungsfragen. Auch wenn er die Ausrichtung meiner Forschung nur am Rande beeinflusst hat, so hat er immer wieder gern über einzelne Fragen und Resultate diskutiert und hatte nicht selten Ideen, die zu wesentlichen Vereinfachungen führen konnten.

In der Lehre hatte Gerd regelmäßig große Pflichtvorlesungen für die Studienrichtungen Informatik, Technische Physik und Versicherungsmathematik zu halten. Aus der Ausarbeitung der schließlich auf die Informatiker fokussierten Vorlesungen (es gab in jedem Studienjahr viele Hundert Anfänger in diesem Bereich) ist dann ein gemeinsam verfasstes dreibändiges Lehrbuch beim Springer-Verlag entstanden. Bei seinen Prüfungen war Gerds Credo, dass man nicht nur fördern, sondern auch fordern müsse, um zu entsprechenden Leistungen zu motivieren. Uns damaligen Assistenten, wie auch den Prüflingen, wird wohl in Erinnerung bleiben, wie er viele Hundert Prüflinge in Dreiergruppen zur mündlichen Prüfung in seinem Zimmer empfangen hat, in dem er alsbald aufgrund dichter Rauchschwaden von der Tür aus nur mehr mit Mühe zu erkennen war. Gegen ungerechtfertigte Angriffe vonseiten einzelner Studierender hat er uns immer verteidigt. Gern erzählt wurde die Episode, bei der noch zu Zeiten der Regierung des letzten Shahs des Iran ein persischer Student einen von Gerds Assistenten aufsuchte und diesem schließlich mit den Möglichkeiten seines Vaters drohte, der angeblich Chef der Geheimpolizei im Iran war. Der Kollege reichte den Studenten zu einem durchaus emotionalen Vieraugengespräch zu Gerd weiter, an dessen Ende der Studierende sich angeblich für sein „nicht genügend“ bei Gerd bedankte und fortan nicht mehr auffiel.

Von 1982 bis 1996 habe ich am Vorbereitungskurs in Raach für diejenigen Schüler/innen mitgewirkt, die sich für den Bundeswettbewerb der Österreichischen Mathematik-Olympiade qualifiziert hatten, und war auch Mitglied der Jury beim Bundeswettbewerb. Es war faszinierend, Gerd Barons Fähigkeit zu beobachten, die oft sehr lückenhaft schriftlich wiedergegebenen Lösungsideen der Schüler auf ihren Wert hin zu beurteilen: Gerd konnte in wenigen Minuten genauso Gegenbeispiele zu durchaus komplexen (Schein-)Argumenten hervorzaubern, wie für viele von uns undurchsichtige Beweisskizzen (mit oft wenigen fehlenden Zusätzen) als interessante Beweisideen auf unvorhergesehenen Pfaden identifizieren. Nach meiner Berufung nach Leoben habe ich an einer Reihe von Seminaren für Olympiadekursleiter mitgewirkt, die Gerd organisiert hat. Auch bei diesen Gelegenheiten hat sich Gerds oben geschilderte Fähigkeit immer wieder bewiesen. Dass ihm die Republik für seine Leistungen mit dem Großen Ehrenzeichen dankte, hat Gerd sehr gefreut.

Wir verneigen uns vor einer Persönlichkeit, die für uns und viele andere ganz entscheidend zur Weckung und Förderung des besonderen Interesses an der Mathematik beigetragen hat und vielen den Weg zu einer akademischen Laufbahn in der Mathematik gewiesen hat.

Anmerkungen (Robert Tichy). Die außergewöhnliche Persönlichkeit Gerd Barons hat auch mich am Beginn meiner mathematischen Laufbahn erheblich beeinflusst. Es war im Rahmen des Vorbereitungskurses in Raach für den Bundeswettbewerb der Mathematik-Olympiade im Jahr 1975, wo ich ihn als Vortragenden kennenlernte. Er hatte sich stets Zeit für uns Kursteilnehmer genommen, und die Gespräche mit ihm waren sehr anregend. Sie haben mich auch beeinflusst, Mathematik (und nicht Physik) im Hauptfach zu studieren. Gerd Baron ist mir später wieder begegnet, als ich als Assistent von Edmund Hlawka an der TU Wien für die Organisation eines Forschungsseminars („Zahlentheoretische Analysis") mitverantwortlich war. Er hat sich regelmäßig daran beteiligt; auch eine Publikation ist daraus hervorgegangen [21]. Gerd Baron war stets ein scharfsinniger Diskussionspartner, in der Mathematik genauso wie im Alltäglichen. „Schärfe" war ihm übrigens nicht nur im Denken und in Formulierungen ein Anliegen, auch bei Nahrungsmitteln war ihm das wichtig. So trug er oft in seinem Sakko eine Chili mit, um Speisen bei Bedarf nachwürzen zu können.

Schriftenverzeichnis

[1] G. Baron, *Eine Bemerkung zur Gruppenaxiomatik*, Monatsh. Math. **69** (1965), 289–293.

[2] G. Baron und W. Imrich, *Charakterisierung von Gruppenklassen mit Hilfe der inversen Operation*, Monatsh. Math. **70** (1966), 289–298.

[3] G. Baron, *Bestimmung der Automorphismengruppe spezieller Klassen von Graphen*, Computing (Arch. Elektron. Rechnen) **2** (1967), 332–335.

[4] G. Baron und W. Imrich, *On the maximal distance of spanning trees*, J. Combinatorial Theory **5** (1968), 378–385.

[5] G. Baron, *Über den Baumgraphen eines endlichen ungerichteten Graphen*, Arch. Math. (Basel) **19** (1968), 668–672 (1969).

[6] G. Baron und W. Imrich, *Asymmetrische reguläre Graphen*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **20** (1969), 135–142.

[7] G. Baron, *Charakterisierung der Graphen, deren spannende Bäume Distanzbäume resp. normale Bäume sind*, Arch. Math. (Basel) **20** (1969), 668–672.

[8] G. Baron und E. Braune, *Zur Transzendenz von Lückenreihen mit ganzalgebraischen Koeffizienten und algebraischem Argument*, Compositio Math. **22** (1970), 1–6.

[9] G. Baron, *Über asymmetrische Graphen*, Math. Nachr. **46** (1970), 25–46.
[10] G. Baron, *Über Verallgemeinerungen des Langford'schen Problems*, (1970), 81–92.
[11] G. Baron, *Asymmetrische reguläre Graphen. II*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **22** (1971/72), 1–4.
[12] G. Baron und E. Braune, *Zur Transzendenz von Fourierreihen mit rationalen Koeffizienten und algebraischem Argument*, Arch. Math. (Basel) **22** (1971), 379–384.
[13] G. Baron und A. Schinzel, *An extension of Wilson's theorem*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **1** (1978/79), no. 2, 115–118.
[14] G. Baron, *Lineare Gleichungssysteme und Graphen*, Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz (1978), no. 100-105, Ber. No. 100, 34, 10. Steiermärkisches Mathematisches Symposium (Stift Rein, Graz, 1978).
[15] G. Baron und P. Kirschenhofer, *Operatorenkalkül über freien Monoiden. I. Strukturen*, Monatsh. Math. **91** (1981), no. 2, 89–103.
[16] G. Baron und P. Kirschenhofer, *Operatorenkalkül über freien Monoiden. II. Binomialsysteme*, Monatsh. Math. **91** (1981), no. 3, 181–196.
[17] G. Baron und W. Kuich, *The characterization of nonexpansive grammars by rational power series*, Inform. and Control **48** (1981), no. 2, 109–118.
[18] G. Baron und P. Kirschenhofer, *Operatorenkalkül über freien Monoiden. III. Lagrangeinversion und Sheffersysteme*, Monatsh. Math. **92** (1981), no. 2, 83–103.
[19] G. Baron, H. Prodinger, R. F. Tichy, F. T. Boesch und J. F. Wang, *The number of spanning trees in the square of a cycle*, Fibonacci Quart. **23** (1985), no. 3, 258–264.
[20] G. Baron, *Enumeration of induced subgraphs of families of trees*, Ars Combin. **20** (1985), no. A, 77–82, Tenth British combinatorial conference (Glasgow, 1985).
[21] G. Baron, *Ein lineares Programm in der Zahlentheorie*, Zahlentheoretische Analysis, II, Lecture Notes in Math., vol. 1262, Springer, Berlin, 1987, pp. 1–13.
[22] G. Baron und F. Urbanek, *Factorial languages with quadratically upper bounded growth functions and nonlinearly upper bounded subword complexities*, Inform. Process. Lett. **32** (1989), no. 5, 267–269.
[23] G. Baron, *On point sets with differences of distances not less than the minimum distance*, Number-theoretic analysis (Vienna, 1988–89), Lecture Notes in Math., vol. 1452, Springer, Berlin, 1990, pp. 1–5.
[24] G. Baron und M. Drmota, *Die Komponentenverteilung von gesättigten Teilgraphen in Baumfamilien*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire (Salzburg, 1990), Publ. Inst. Rech. Math. Av., vol. 462, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1991, pp. 63–65.
[25] G. Baron und M. Drmota, *Distribution properties of induced subgraphs of trees*, Ars Combin. **35** (1993), 193–213.
[26] G. Baron, M. Drmota und M. Skał ba, *Polynomial relations between polynomial roots*, J. Algebra **177** (1995), no. 3, 827–846.
[27] G. Baron, M. Drmota und L. Mutafchiev, *Predecessors in random mappings*, Combin. Probab. Comput. **5** (1996), no. 4, 317–335.
[28] G. Baron und P. Kirschenhofer, *Einführung in die Mathematik für Informatiker*, Band 1–3, Springer, Wien, 1989 bzw. 1992, 1990 bzw. 1996, 1989 bzw. 1996.
[29] G. Baron und E. Windischbacher (Hrsg.), *Österreichische Mathematik-Olympiaden, 1970–1989: Aufgaben und Lösungen*, Universitätsverlag Wagner, 1990.

[30] G. Baron, E. Windischbacher und V. Lautscham (Hrsg.), *Österreichische Mathematik-Olympiaden 1990–1999: Aufgaben und Lösungen*, öbv &hpt Verlagsgesellschaft mbH & Co. KG, 1999.
[31] G. Baron und B.V. Schmidt (Hrsg.), *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000–2008: Aufgaben und Lösungen*, Eigenverlag, 2009.
[32] G. Baron, K. Czakler, C. Heuberger, W. Janous, R. Razen und B.V. Schmidt (Hrsg.), *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen*, Eigenverlag, 2019.

Adresse der Autoren:

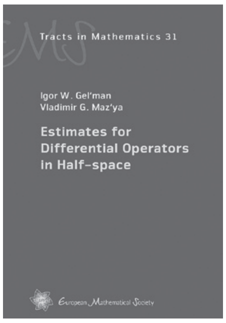
Michael Drmota
TU Wien
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Wiedner Hauptstraße 8–10
A-1040 Wien
email michael.drmota@tuwien.ac.at

Clemens Heuberger
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
Institut für Mathematik
Universitätsstraße 65–67
A-9020 Klagenfurt am Wörthersee
email clemens.heuberger@aau.at

Peter Kirschenhofer
Montanuniversität Leoben
Department Mathematik und Informationstechnologie
Lehrstuhl für Mathematik & Statistik
Franz Josef Straße 18
A-8700 Leoben
email peter.kirschenhofer@unileoben.ac.at

20% discount for individual members of the EMS, member societies or societies with a reciprocity agreement

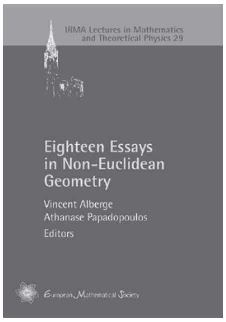
New books published by the European Mathematical Society



Igor W. Gel'man and Vladimir G. Maz'ya (Linköping University, Sweden, and University of Liverpool, UK)
Estimates for Differential Operators in Half-space (EMS Tracts in Mathematics, Vol. 31)

ISBN 978-3-03719-191-0. 2019. 264 pages. Hardcover. 17 x 24 cm. 48.00 €

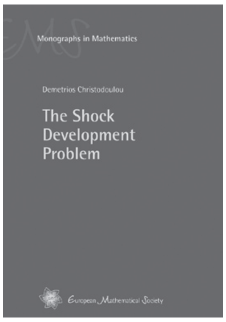
Inequalities for differential operators play a fundamental role in the modern theory of PDEs. Among the numerous applications are existence and uniqueness theorems, error estimates for numerical approximations of solutions and for residual terms in asymptotic formulas, as well as results on the structure of the spectrum. The book focuses on estimates up to the boundary of a domain. It contains a great variety of inequalities for differential and pseudodifferential operators with constant coefficients. Results of final character are obtained, without any restrictions on the type of differential operators. Algebraic necessary and sufficient conditions for the validity of the corresponding a priori estimates are presented. The book will be interesting and useful to a wide audience, including graduate students and specialists in the theory of differential equations.



Eighteen Essays in Non-Euclidean Geometry (IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, Vol. 29)
Vincent Alberge (Fordham University, Bronx, USA) and Athanase Papadopoulos (Université de Strasbourg, France), Editors

ISBN 978-3-03719-196-5. 2019. 475 pages. Hardcover. 17 x 24 cm. 78.00 €

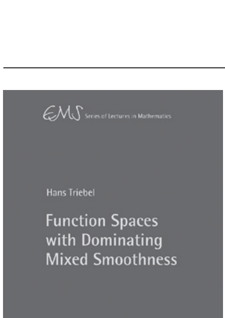
This book consists of a series of self-contained essays in non-Euclidean geometry in a broad sense, including the classical geometries of constant curvature (spherical and hyperbolic), de Sitter, anti-de Sitter, co-Euclidean, co-Minkowski, Hermitian geometries, and some axiomatically defined geometries. Some of these essays deal with very classical questions and others address problems that are at the heart of present day research, but all of them are concerned with fundamental topics. All the essays are self-contained and most of them can be understood by the general educated mathematician. They should be useful to researchers and to students of non-Euclidean geometry, and they are intended to be references for the various topics they present.



Demetrios Christodoulou (ETH Zürich, Switzerland)
The Shock Development Problem (EMS Monographs in Mathematics)

ISBN 978-3-03719-192-7. 2019. 932 pages. Hardcover. 16.5 x 23.5 cm. 128.00 €

This monograph addresses the problem of the development of shocks in the context of the Eulerian equations of the mechanics of compressible fluids. The mathematical problem is that of an initial-boundary value problem for a nonlinear hyperbolic system of partial differential equations with a free boundary and singular initial conditions. The free boundary is the shock hypersurface and the boundary conditions are jump conditions relative to a prior solution, conditions following from the integral form of the mass, momentum and energy conservation laws. The prior solution is provided by the author's previous work which studies the maximal classical development of smooth initial data. New geometric and analytic methods are introduced to solve the problem. Geometry enters as the acoustical structure, a Lorentzian metric structure defined on the spacetime manifold by the fluid. This acoustical structure interacts with the background spacetime structure. Reformulating the equations as two coupled first order systems, the characteristic system, which is fully nonlinear, and the wave system, which is quasilinear, a complete regularization of the problem is achieved.



Hans Triebel (Friedrich-Schiller Universität Jena, Germany)
Function Spaces with Dominating Mixed Smoothness (EMS Series of Lectures in Mathematics)

ISBN 978-3-03719-195-8. 2019. 210 pages. Softcover. 17 x 24 cm. 36.00 €

The first part of this book is devoted to function spaces in Euclidean *n*-space with dominating mixed smoothness. Some new properties are derived and applied in the second part where weighted spaces with dominating mixed smoothness in arbitrary bounded domains in Euclidean *n*-space are introduced and studied. This includes wavelet frames, numerical integration and discrepancy, measuring the deviation of sets of points from uniformity.
These notes are addressed to graduate students and mathematicians having a working knowledge of basic elements of the theory of function spaces, especially of Besov–Sobolev type. In particular, it will be of interest for researchers dealing with approximation theory, numerical integration and discrepancy.

European Mathematical Society Publishing House
Technische Universität Berlin, Mathematikgebäude
Strasse des 17. Juni 136
10623 Berlin, Germany
orders@ems-ph.org
www.ems-ph.org

Buchbesprechungen

F. Rassoul-Agha, T. Seppäläinen: A Course on Large Deviations with an Introduction to Gibbs Measures. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 162.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2015, xiv+318 S. ISBN 978-0-8218-7578-0 H/b $ 79.

Das vorliegende Buch gibt eine Einführung in die Theorie der "Large Deviations", also der Untersuchung der logarithmischen Größenordnung von seltenen Ereignissen. Diese Methoden sind ein zentrales Hilfsmittel der Wahrscheinlichkeitstheorie und ein einführendes Werk, das auch für Studierende auf Master-Niveau zugänglich ist.. Die thematische Zusammenstellung ist sehr breit, sodass dieses Buch nicht nur für Forscherinnen und Forscher aus der Mathematik, sondern auch der Physik und der Informatik interessante Einblicke zu bieten hat. So werden sowohl die Zusammenhänge mit der statistischen Mechanik (Gibbs-Maße) als auch mit der Informationstheorie ausführlich behandelt. Insgesamt ist das Buch eine wertvolle Ergänzung zur Literatur über Wahrscheinlichkeitstheorie und sowohl für das Selbststudium als auch als Grundlage für einen weiterführenden Kurs über Wahrscheinlichkeitstheorie bestens geeignet.

P. Grabner (Graz)

R. Bezrukavnikov, A. Braverman, Z. Yun (eds.): Geometry of Moduli Spaces and Representation Theory. (IAS/Park City Mathematics Series, Vol. 24.) American Mathematical Society, Providence (USA), 2017, 436 S. ISBN 978-1-4704-3574-5 H/b $ 104.

Die IAS/Park City veranstaltet seit 1991 jedes Jahr zu einem bestimmten Thema von großem mathematischen Interesse eine Summer School. Die Lecture Notes zu dieser Summer School werden in Buchform jährlich veröffentlicht. Das hier vorgestellte Buch ist die Sammlung der Lecture Notes zur Summer School aus dem Jahr 2015 zu dem Thema "Geometry of Moduli Spaces and Representation theory". Ziel dieser Summer School war es, aktuelle Entwicklungen in der sogenannten geometrischen Darstellungstheorie zu präsentieren. Insbesondere war es ein Ziel, die Ideen rund um das geometrische Langlands-Programm und der abzählenden algebraischen Geometrie darzustellen und Interaktionen zwischen diesen zwei Themen zu fördern. So sind die ersten vier Lecture Notes dem geometrischen Langlands-Programm gewidmet, beginnend mit "perverse sheaves" und ihren Anwendungen über Springer Auflösungen hin zu den fundamental Lemmata des Langlands-Programms, eine der Lecture Notes ist von Ngô Bau Châu selbst verfasst. Der Themenkomplex zur abzählenden Geometrie umfasst zwei Lecture Notes. In dem Beitrag von Okounkov (mit über 130 Seiten) geht es um K- theoretische Berechnungen in der abzählenden Geometrie. Dabei wird auch besonders auf Verbindungen zur theoretischen Physik hingewiesen. Im letzten Beitrag von Nakajima wird dann die Verbindung zwischen theoretischer Physik und geometrischer Darstellungstheorie weiter vertieft. Da wie schon erwähnt dieses Buch eine Ansammlung von Lecture Notes ist und kein klassisches Textbuch, werden viele

Beweise ausgelassen (vor allem Beweise, die man in der Standardliteratur findet). Dafür wird mehr Wert auf einen größeren Überblick und ein tieferes Verständnis der Methoden gelegt. Da es ja auch ein Ziel der Summer School war, den aktuellen Stand der Forschung darzustellen, sind gründliche Kenntnisse in algebraischer Geometrie und Darstellungstheorie unumgänglich, um dieses Buch wirklich würdigen zu können.

V. Ziegler (Salzburg)

G. Schneider, H. Uecker: Nonlinear PDEs. A Dynamical Systems Approach. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 182.) American Mathematical Society, Providence (USA), 2017, 575 S. ISBN 978-1-4704-3613-1 H/b $ 99.

This interesting and well-written book under review tackles the long-term behavior of evolutionary PDEs using dynamical systems methods. Beginning with an introduction to (non)linear PDEs and the idea of modulation equations, it is subdivided into four parts:

Part I deals with dynamical systems in finite dimensional spaces. Beyond the basics, sections on dissipative and Hamiltonian dynamics address various valuable aspects. Within a bit more than 100 pages topics from existence and uniqueness, bifurcations and center manifolds, the Hartman-Grobman theorem and completely integrable systems to homoclinic chaos are covered. One even finds illustrations of the celebrated Feigenbaum diagram or Fractals generated by the quadratic map.

Part II describes the transition into infinite dimensions by means of the Allen-Cahn equation (on an interval) and the Navier-Stokes equations (under periodic boundary conditions), i.e. problems in countably infinite dimensions.

The main focus of the book, namely PDEs (modulation equations) on unbounded domains, are studied in Part III and IV. They represent the central features of the text and allow to access corresponding results in a well-presented textbook form. In detail, dissipative PDEs (KPP, Allen-Cahn and Burgers), canonical modulation equations (NLS, KdV and GL) and reaction-diffusion problems are covered. The final Part IV presents the dynamics of patterns and the GL equation, the Swift-Hohenberg equation, wave packets and the NLS equation, long waves and their modulation equations, center manifold reduction in spatial dynamics and finally diffusive stability.

The width of the covered topics is impressive. Nevertheless in the reviewer's opinion certain aspects would have deserved a bit more details, some could have been left out, but this might be a matter of taste. Moreover, a certain flavor of the "Stuttgart school" is undeniable.

As pointed out by the authors, the text could serve as a basis for several courses, ranging from an introduction to dynamical systems to advanced topics on the asymptotics of solutions to various PDEs. Finally, this successful contribution nicely complements the existing literature, among which we would also like to mention Milani and Koksch (An Introduction to Semiflows, CRC Press, Boca Raton etc., 2001) or Sell and You (Dynamics of Evolutionary Equations, Applied Mathematical Sciences 143, Springer, Berlin etc., 2002).

Ch. Pötzsche (Klagenfurt)

K. Thas (ed.): Absolute Arithmetic and $\mathbb{F}_1$-Geometry. European Mathematical Society, Zürich, 2016, 397 S. ISBN 978-3-03719-157-6 H/b EUR 68.

Anfang der 1990er-Jahre konnte Deninger zeigen, dass es unter der Annahme, dass gewisse Kategorien von Motiven existieren, möglich ist, die Beweisidee von Weil für die Riemannschen Vermutung für Kurven auf den Fall der gewöhnlichen Riemannschen Vermutung umzulegen. Insbesondere würde die Konstruktion einer passenden algebraischen Geometrie über dem hypothetischen Körper mit nur einem Element, dem Körper $\mathbb{F}_1$, einen Beweis der Riemannschen Vermutung liefern. Bislang sind jedoch alle Versuche einer solchen Konstruktion gescheitert, obwohl es einige vielversprechende Ansätze dazu gibt. Ziel des zu besprechenden Buches ist es, die verschiedenen Ansätze und Ideen für mögliche $\mathbb{F}_1$-Geometrien in Hinblick auf die Resultate von Deninger zu entwickeln.

Das Buch ist dazu in vier Teile aufgeteilt: Der erste kurze Teil über kombinatorische Zugänge zur $\mathbb{F}_1$-Geometrie liefert die ersten Einblicke in diese Theorie. Im zweiten ebenfalls kurzen Teil wird das nötige Hintergrundwissen über Kategorien und Homologie-Theorien, die man für die Untersuchung von $\mathbb{F}_1$-Schemata braucht, bereitgestellt. Der darauffolgende dritte Teil ist das Herzstück dieses Buchs und beschreibt die verschiedenen Aspekte einer möglichen algebraischen Geometrie über $\mathbb{F}_1$. Der letzte Teil ist dann der absoluten Arithmetik gewidmet. Insbesondere wird die Verbindung von Deningers Resultaten und einer bislang hypothetischen $\mathbb{F}_1$-Geometrie dargestellt.

Obwohl die einzelnen Kapitel des Buches jeweils von verschiedenen Experten der $\mathbb{F}_1$-Geometrie geschrieben wurden, bleibt der rote Faden gut erkennbar, und das Buch kann als ein in sich abgeschlossenes Werk angesehen werden. Obwohl bei vielen Beweisen auf die entsprechenden Papers verwiesen wird, bekommt man doch ein sehr gutes Bild von der Ideenwelt der sonst oft ominösen $\mathbb{F}_1$-Geometrie. Einem Leser mit solidem Hintergrundwissen in algebraischer Geometrie, der einen ersten Einblick in die Ideen und aktuellen Probleme der $\mathbb{F}_1$-Geometrie bekommen möchte, kann ich dieses Buch guten Gewissens empfehlen.

V. Ziegler (Salzburg)

H. Kielhöfer: Calculus of Variations. An Introduction to the One-Dimensional Theory with Examples and Exercises. (Texts in Applied Mathematics, Vol. 67.) Springer International Publishing, Cham, 2018, xvi+227 S. ISBN 978-3-319-71122-5 H/b EUR 35,99.

The text is an elementary introduction to the Calculus of Variations and based on lectures given by to author at the University of Augsburg, Germany (which, as a personal side note, the reviewer gladly remembers). It restricts to variational problems with one independent variable and consists of three chapters, whose contents are as follows:

(I) The Euler-Lagrange Equation (Function spaces, the first variation, the fundamental lemma, Euler-Lagrange equation, examples, minimal surfaces of revolution, Dido's problem, Brachistochrone, natural boundary conditions, functionals in parametric form, Weierstraß-Erdmann corner conditions).

(II) Variational Principles with Constraints (Isoperimetric constraints, Dido's problem as variational problem with isoperimetric constraint, the hanging chain, Weierstraß-Erdmann corner conditions under isoperimetric constraints, holonomic constraints, geodesics, nonholonomic constraints, transversality, Noether's theorem, the two-body-problem).

(III) Direct Methods in the Calculus of Variations (The method, explicit performance in a Hilbert space, applications).

One should point out that the prerequisites are kept at a low level. Preliminaries in Functional Analysis are not required and indeed a solid background in Calculus and Linear Algebra is sufficient. More advanced tools are collected (including proofs) in the appendix or developed as needed. Most sections close with interesting exercises whose solutions can be found at the end. Therefore, the book is appropriate for advanced B.Sc. students and covers enough material for a 4h/week course. It is a successful, nicely illustrated introduction to the field, follows its historical development and – without a doubt – can be recommended for students of mathematics, physics and engineering.

Ch. Pötzsche (Klagenfurt)

V. G. Maz'ya: Boundary Behaviour of Solutions to Elliptic Equations in General Domains. (EMS Tracts in Mathematics Vol. 30.) European Mathematical Society, Zürich, 2018, 441 S. ISBN 978-3-03719-190-3 P/b EUR 78.

The notion of capacity enabled N. Wiener to characterize regular boundary points for the Dirichlet problem of the Laplace equation in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. In this book several modifications of the Wiener capacity generated by p-Laplacians or more general elliptic operators are discussed in order to find sufficient conditions for the regularity of a boundary point of Ω. This includes also higher order elliptic equations as the polyharmonic operator $(-\Delta)^m$. In addition, necessary and sufficient conditions for the validity of imbedding theorems are given. Each chapter ends with short historical comments on the included material. The book will be an interesting and useful tool for a wide community of students and researchers working in partial differential equations and potential theory.

F. Haslinger (Wien)

Neue Mitglieder

Vundi David – c/o International Christian School of Vienna, 1022 Wien. geb. 1976. Mathematiklehrer mit 23-jähriger Erfahrung an der International Christian Schoolf of Vienna. email *dvundi@icsv.at*

Mercier Gwenael, Dr. – c/o Fakultät für Mathematik, Oskar Morgensternplatz 1, 1090 Wien. geb. 1988. Doktorat 2015 an der École Polytechnique in Paris unter Betreuung von Antonin Chambolle. Postdoc am Ricam Linz von 2015-2018. Seit 2018 Universitätsassistent an der Universität Wien. email *gwenael.mercier@univie.ac.at*

Gritschacher Simon, Dr. – c/o Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, Universitetsparken 5, 2100 Copenhagen, Denmark. geb. 1988. Studium der Mathematik und Physik an der TU Graz, TU München, LMU München und am MPI für Physik von 2007-2013. Doktorat 2017 an der University of Oxford. Seit 2017 Postdoc im Centre of Symmetry and Deformation an der Universität von Kopenhagen. email *gritschacher@math.ku.dk* http://www.simongritschacher.com

Schwab Johannes, Dipl.-Ing. – c/o Technikerstraße 13, 6020 Innsbruck. geb. 1992. Mathematikstudium an der Universität Innsbruck. Ebendort zurzeit Doktoratsstudent. email *johannes.schwab@uibk.ac.at* https://applied-math.uibk.ac.at/members/phd-students/johannes-schwab