Internationale Mathematische Nachrichten
International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99), M. Drmota (2000–2007) und J. Wallner (2008–2017).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@oemg.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung:
IBAN AT83-1200-0229-1038-9200 bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzendruck, 8044 Weinitzen.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903
http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt,
Institut für Mathematik
Universitätsstraße 65-67
A-9020 Klagenfurt
email: *oemg@oemg.ac.at*

Vorstand des Vereinsjahres 2018:

Beirat:

Vorsitzende von Sektionen und Kommissionen:

Die Landesvorsitzenden und der Vorsitzende der Didaktikkommission gehören statutengemäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung:
IBAN AT83-1200-0229-1038-9200 bei der Bank Austria–Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 237 (72. Jahrgang) **April 2018**

Inhalt

Die Zahl auf der Titelseite gibt die größte derzeit bekannte Primzahl wieder. Es handelt sich um die Mersennesche Primzahl $M_{77\,232\,917} = 2^{77232917} - 1$ mit 23 249 425 Ziffern. Die Primzahl wurde im Rahmen von GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) durch einen Rechner von Jonathan Pace am 26. Dezember 2017 gefunden. Der Fund wird mit einem Preisgeld von $ 3.000 belohnt. Der Nachweis der Primalität benötigte dabei sechs Tage durchgehender Computerrechnungen auf einem PC mit einer Intel i5-6600-CPU. Mit dieser Primzahl ist man dem nächsten großen Ziel, nämlich eine Primzahl mit mindestens hundert Millionen Stellen zu finden, wieder einen Schritt näher gekommen. Weitere Informationen findet man unter *https://www.mersenne.org/primes/*. In Zeiten von Bitcoin und Co. sind solche aufwendigen Rechnungen, wie etwa auch im Rahmen des SETI-Projekts, leider mittlerweile in Gefahr.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 237 (2018), 1–15

The Guess-and-Prove Paradigm in Action

Manuel Kauers
Johannes Kepler Universität Linz

We give some explicit examples of how computer algebra techniques (or more accurately: computer algebra systems) can be used to solve problems by first guessing a solution and then proving its correctness.

1 Introduction

Modern computer algebra systems offer a lot of useful and nontrivial functionality to their users. Not in all cases is it obvious how to take advantage of these possibilities. In the recent years, we have seen an increasing number of papers about results which rely on an essential use of computer algebra. In such papers the relevant computations are often described only on a conceptual level, with the main goal being to justify that the computations performed really allow to draw the conclusions drawn. Some readers of such papers have difficulties to translate these conceptual descriptions into actual sessions of computer algebra systems, and wonder what exactly they need to type in order to perform the described computations.

In the present paper, we want to address this question by giving some examples. Of course, there is hardly any need for examples when the computer algebra system provides a command that exactly serves the required purpose. For example, commands for factoring polynomials are so easy to use that there is not much more to say about it beyond the examples given in the documentation. Of course the technology behind these commands is highly nontrivial, but this is not our concern here; see, e.g., Chapter 8 of [28] for some recent developments in this direction.

We shall focus here on some applications of computer algebra that involve the combination of several features, or of functions whose purpose may not be immediately obvious from their specification. Obviously, our choice is highly biased

ISSN 0020-7926

and in no way representative. As a common pattern, our examples follow the principle of *guess and prove,* which was already propagated by Polya [32], and which has recently seen some exciting applications in computer algebra, especially in the context of enumerating restricted lattice walks (see [2] and the references given there for lots of examples). The basic idea is to split the work into two phases: In the first phase, the guessing step, we use non-rigorous computations in order to construct a plausible conjecture for the final result or some intermediate auxiliary data. In a second step, the proving step, we use rigorous computations to prove that the conjectures are indeed correct.

Once again, this paper is not meant as a general introduction to computer algebra, nor as an introduction to a certain computer algebra systems. Instead, we hope that the examples given in this paper may serve as inspirations to readers who are already using computer algebra, and who would like to use it more effectively. For a general introduction to computer algebra, readers are referred to the standard textbooks [8, 36]. For introduction to particular computer algebra systems, readers should consult the respective documentation. We do not want to give a preference to any particular system and therefore include example sessions for Mathematica, Maple, and Sage.

2 Expressions

The usual idea behind automated guessing is to generate lots of necessary conditions on the shape of a hypothetical solution, and then find objects satisfying these conditions. If the conditions are sufficiently overconstrained, it is likely that only solutions of the original problem satisfy them.

A very simple application of this idea is polynomial interpolation. If a given problem has a solution $f(x)$ and if the problem is such that we can compute for every specific choice of x the value $f(x)$, and if we suspect that $f(x)$ is a polynomial, then we can compute $f(1), f(2), \ldots, f(100)$ and interpolate. If the degree of the interpolating polynomial is significantly smaller than 100, this is a strong indication that this polynomial is the answer to the problem.

Example 1. *Consider the sequence $f(n)$ which is recursively defined by $f(0) = -10, f(1) = -4$, and $f(n) = (450f(n-1)^2 + 450f(n-2)f(n-1) - 225f(n-2)^2 - 9476f(n-2) - 12428f(n-1) - 298444)/(675f(n-2) - 1654)$ for $n \geq 2$. Is this a polynomial sequence? We can guess a candidate by computing the first few terms of the sequence using the recurrence and then interpolating them. In Sage, this can be done as follows.*

$f = [-10, -4]$

for n in range$(2,20)$: f.append$((450 * f[n-1]^2 + 450 * f[n-2] * f[n-1] - 225 * f[n-2]^2 - 9476 * f[n-2] - 12428 * f[n-1] - 298444)/(675 * f[n-2] - 1654))$

```
n = ZZ['n'].gen()
```

```
crt(f, [n - i for i in range(len(f))])
```

$5*n^3 - 7*n^2 + 8*n - 10$

Generically we would have expected a polynomial of degree 20, and with very ugly coefficients. The fact that we got a low degree polynomial with very short coefficients suggests that this polynomial is not a computational artifact but has in fact some significance for the sequence f. In fact, it is equal to f not only for $n = 0,\dots,19$ (as it is by construction) but also for all $n \geq 20$. To prove this, we just need to plug the polynomial into the recurrence and simplify.

```
f = _
```

```
-f(n) + (450*f(n-1)^2 + 450*f(n-2)*f(n-1) - 225*f(n-2)^2 - 9476*f(n-2) - 12428*f(n-1) - 298444)/(675*f(n-2) - 1654)
```

0

In order to guess non-polynomial expressions, we may be able to use linear algebra.

Example 2. *A while ago, we have posed a Monthly problem [11] to show that*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{3^k} - 2F_{3^k+1}}{F_{3^k} + iF_{2\cdot 3^k}} = i + \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}),$$

where F_n is the nth Fibonacci number and $i = \sqrt{-1}$. The problem is easy to solve once we observe that the truncated series admits a closed form. In order to find it, we may first suspect that such a form may have a similar form as the summand expression, say a rational function in $F_{3^k}, F_{3^k+1}, F_{2\cdot 3^k}, F_{2\cdot 3^k+1}$. Writing $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_{3^k}-2F_{3^k+1}}{F_{3^k}+iF_{2\cdot 3^k}}$, we seek constants $c_0,\dots,c_7$ such that

$$f(n) = \frac{c_0F_{3^n} + c_1F_{3^n+1} + c_2F_{2\cdot 3^n} + c_3F_{2\cdot 3^n+1}}{c_4F_{3^n} + c_5F_{3^n+1} + c_6F_{2\cdot 3^n} + c_7F_{2\cdot 3^n+1}}$$

for all $n \in \mathbb{N}$. By clearing the denominator and evaluating the equation for $n = 0,\dots,10$, we obtain an overdetermined linear system for the unknown coefficients c_i, the solutions of which give rise to candidate closed forms for the sum.

```
In[1]:= F = Fibonacci;
In[2]:= f[n_Integer] := Sum[(F[3^k] - 2F[3^k + 1])/(F[3^k] + I F[2*3^k]), {k,0,n}]
In[3]:= Solve[Table[(c[4]F[3^n] + c[5]F[3^n + 1] + c[6]F[2*3^n] + c[7]F[2*3^n + 1])f[n] ==
        (c[0]F[3^n] + c[1]F[3^n + 1] + c[2]F[2*3^n] + c[3]F[2*3^n + 1]), {n,0,10}]]
```

Out[3]= $\{\{c[2] \to I\,c[0] + I\,c[1], c[3] \to -I\,c[1], c[4] \to (1+I)c[0] - c[1], c[5] \to -c[0] + I\,c[1], c[6] \to (-1+I)c[0] - (1-2I)c[1], c[7] \to -I\,c[0] + (1-I)c[1]\}\}$

We obtain a solution space of dimension two. Specific elements are obtained by setting the free parameters $c[0]$ and $c[1]$ to specific numbers. One possible choice is

In[4]:= $(c[0]F[3^n] + c[1]F[3^n+1] + c[2]F[2*3^n] + c[3]F[2*3^n+1])/(c[4]F[3^n] + c[5]F[3^n+1] + c[6]F[2*3^n] + c[7]F[2*3^n+1])$ /. First[%] /. $\{c[0] \to 1, c[1] \to 0\}$

Out[4]= $((1+I)\text{Fibonacci}[3^n] - (1-I)\text{Fibonacci}[2\cdot 3^n] - \text{Fibonacci}[1+3^n] - I\,\text{Fibonacci}[1+2\cdot 3^n])/(\text{Fibonacci}[3^n] + I\,\text{Fibonacci}[2\cdot 3^n])$

How can we prove that this guess is correct? If $e(n)$ denotes this expression, it suffices to show that $e(n) - e(n-1)$ is equivalent to the summand expression, and to compare one initial value. The difference of $e(n) - e(n-1)$ is a rational function in Fibonacci expressions with exponential argument. A convenient way of showing that it is identically zero is via Binet's formula, using in addition the fact that $(-1)^{3^n} = -1$ for all $n \in \mathbb{N}$. To avoid fractional arguments, we compare $e(n+1) - e(n)$ to the shifted summand expression.

In[5]:= $e[n\_] = \%;$

In[6]:= $e[n+1] - e[n] - ((F[3^n] - 2F[3^n+1])/(F[3^n] + I\,F[2*3^n])$ /. $n \to n+1)$ /. $\text{Fibonacci}[u\_. + v\_.3^{w\_\cdot}] \to \frac{1}{\sqrt{5}}(\text{GoldenRatio}^{u+v3^w} - (-1)^{u+v}$ $/\text{GoldenRatio}^{u+v3^w})$ // Together

Out[6]= 0

In[7]:= $e[0] == ((F[3^n] - 2F[3^n+1])/(F[3^n] + I\,F[2*3^n])$ /. $n \to 0)$

Out[7]= True

At this point we have guessed-and-proved the formula

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{F_{3^k} - 2F_{3^k+1}}{F_{3^k} + iF_{2\cdot 3^k}} = \frac{(1+I)F_{3^n} - (1-I)F_{2\cdot 3^n} - F_{3^n+1} - i\,F_{2\cdot 3^n+1}}{F_{3^n} + i\,F_{2\cdot 3^n}}$$

for $n \in \mathbb{N}$. Now the limit can easily be computed by hand. Also Mathematica is able do it, if we replace 3^n by a fresh variable m.

In[8]:= Limit[$e[n]$ /. $3^n \to m, m \to$ Infinity]

Out[8]= $\frac{(1+2I) - \sqrt{5}}{2}$

In[9]:= Clear[F, f, e]

Using the representation as linear combination of exponentials, many formulas about Fibonacci numbers can be proved automatically. Relations among certain quantities satisfying more complicated recurrence equations can also be proven automatically. For a class of sequences defined by nonlinear recurrences, an algorithm was given by the author [10]. With the corresponding Mathematica package [12], all the steps carried out in the example above can be condensed into a single command.

Other tools are needed to find other types of expressions. For example, formulas for determinants tend to involve nested products, and such expressions can be guessed using a package of Krattenthaler [24] for Mathematica, or more recent code by Hebisch and Rubey [9] for FriCAS.

Example 3. *For every $n \in \mathbb{N}$, consider the determinant of the matrix $A = ((a_{i,j}))_{i,j=1}^{n}$ with $a_{i,j} = \frac{1}{i+j}$. It is easy to compute these determinants for the first few values of n. Krattenthaler's package can find a product representation for this data.*

In[10]:= $<<$ Rate.m

In[11]:= $\mathrm{Table}[\mathrm{Det}[\mathrm{Table}[1/(i+j),\{i,1,n\},\{j,1,n\}]],\{n,1,10\}]$

Out[11]= $$\Big\{\frac{1}{2},\frac{1}{72},\frac{1}{43200},\frac{1}{423360000},\frac{1}{67212633600000},\frac{1}{172153600393420800000},$$
$$\frac{1}{7097063852481244869427200000},\frac{1}{470214262250820283325130473472000000},$$
$$\frac{1}{50019370356486058711268515056654483456000000000},$$
$$\frac{1}{8537000898240926708833515201784986712482596782080000000000}\Big\}$$

In[12]:= Rate@@%

Out[12]= $$\left\{\frac{\prod_{i1=1}^{i0-1}\frac{\prod_{i2=1}^{-1+i1}\frac{(1+i2)(2+i2)}{4(3+2\,i2)^2}}{36}}{2}\right\}$$

We have thus obtained the conjecture

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n} \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{36}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(i+1)(i+2)}{4(2i+3)^2}\right).$$

We will see later how to prove this conjecture.

3 Equations

Instead of trying to match expressions against data, we can also search for functional equations (e.g. differential or recurrence equations) which are consistent with the given data. There are a lot of tools for doing so, and they are very popular. There are implementations for Maple [33], Mathematica [13], Sage [17], or FriCAS [9]. Let us see an example session in Maple.

Example 4. *Suppose we want to find out whether the solutions of the differential equation*

$$24f(x)-(24x+8)f'(x)+(27x^3+21x^2-7x-1)f''(x)=0$$

are algebraic functions. One way of doing so is by calling the dsolve command of Maple. It will have no trouble finding the desired solutions. Although there are algorithms which for any given linear differential equation with polynomial equations can determine the algebraic solutions, no computer algebra system currently has a complete implementation of such an algorithm. Even the powerful solver of Maple will overlook algebraic solutions when the differential equation is too large.

When this happens, we can try the guess-and-prove-approach. We can first compute series solutions of the differential equation and then use suitable commands of the gfun package to guess an algebraic equation for this solution. To keep the expressions small, let's illustrate this with the differential equation above, even though this equation is small enough that Maple can solve it directly.

$\mathrm{with}(\mathrm{gfun}):$
$deq := 24*f(x)-(24*x+8)*\mathrm{diff}(f(x),x)+(27*x^3+21*x^2-7*x-1)*\mathrm{diff}(f(x),x,x):$
$\mathrm{Order} := 10 : \mathrm{dsolve}(\{deq, f(0)=1234, D(f)(0)=5678\}, f(x), \mathrm{series});$

$$1345+2345x+6760x^2-33800x^3+196040x^4-1250600x^5+8497320x^6-60333000x^7 \\ +442408200x^8-3324737000x^9+\mathrm{O}(x^{10})$$

$\mathrm{seriestoalgeq}(\%, f(x));$

$$[-36738675x^2-21636350x-4082075+(13140x+4380)f(x)-f(x)^2, ogf]$$

The command seriestoalgeq has found the minimal polynomial of an algebraic function which fits to the first few terms of a series solution of the differential equation. In order to prove that this guess is correct, we can use another command of gfun to construct a differential equation for the algebraic function defined by this minimal polynomial. If the guess is right, this differential equation must match the equation we started with. (More precisely, it must be contained as a right factor.)

$\mathrm{diffeqtohomdiffeq}(\mathrm{algeqtodiffeq}(\%[1], f(x)), f(x));$

$$\{-105120f(x)+(35040+105120x)\frac{d}{dx}f(x)+(-118260x^3-91980x^2+30660x+ \\ 4380)\frac{d^2}{dx^2}f(x), \\ f(0)=\mathrm{RootOf}(\_Z^2-4380\_Z+4082075), D(f)(0)= \\ 5\mathrm{RootOf}(\_Z^2-4380\_Z+4082075)-4380\}$$

normal(%[1]/deq);

$$-4380$$

This proves that the differential equation satisfied by the guessed algebraic function is a constant multiple of the given differential equation. Therefore, the two differential equations have the same solutions, and in particular the guessed algebraic function is a solution of the original differential equation.

In the example above, the guessing part is hidden in the command seriestoalgeq, which takes a truncated series and returns, a small algebraic equation which fits to the given terms, if there is one. This command is part of the gfun package. The same package also provides the commands which are used in the proving part. These algorithms apply to the class of D-finite functions. A function is D-finite if it satisfies a linear differential equation with polynomial coefficients. As the solution of a differential equation is uniquely determined by the first few initial terms of its series expansion, we can use the differential equation together with the initial values as a finite data structure for representing the function. The commands provided by the gfun package make it possible to perform various operations on this representation. See [34, 33, 35, 18, 15] for the relevant theory.

The theory also applies to sequences satisfying recurrence equations, as well as functions or sequences in several variables. For problems involving several variables, it is more natural to work with linear operators instead of functional equations. These operators live in certain non-commutative algebras, and the set of all operators that map a particular function to zero forms a left ideal in that algebra, called the annihilating ideal. A multivariate D-finite function is uniquely determined by its annihilating ideal and finitely many initial values. Computations with such ideals of operators can be performed with the Maple package mgfun [6], the Mathematica package HolonomicFunctions.m [19, 20], or with the Sage package ore_algebra [17].

An important technique in the multivariate case is creative telescoping [37, 31, 18, 21, 5, 16], which can be used for finding recurrence equations satisfied by definite sums and integrals. As an illustration of this technique, we will show how to prove the determinant evaluation conjectured in Example 3. The proof relies on an approach for proving determinant evaluations proposed by Zeilberger [38]. This technique was used in our proof of the q-TSPP-conjecture [22] and for other examples [23]. The observation is that in order to prove $\det((a_{i,j}))_{i,j=1}^{n} = b_n$, it suffices to exhibit a certificate sequence $c_{n,k}$ with the following three properties:

- $c_{n,n} = 1$ for all $n \geq 1$
- $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}c_{n,k} = 0$ for all $1 \leq i < n$
- $\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}c_{n,k} = b_n/b_{n-1}$ for all $n \geq 1$ (taking $b_0 = 1$).

These properties together with the initial value $a_{1,1} = b_1$ imply the determinant identity. (See [38, 22, 23] for a justification.)

Example 5. *First we have to guess a certificate $c_{n,k}$. To generate data, we can compute some of these terms. Observe that $(c_{n,1},\dots,c_{n,n})$ is the last row of $\frac{\det(A_n)}{\det(A_{n-1})}A_n^{-1}$.*

```
from ore_algebra import *
```

```
A = lambda n : matrix(QQ, [[1/(i + j)for j in range(1, n + 1)] for i in range(1, n + 1)])
```

```
data = [list(A(n).det()/A(n − 1).det() ∗ A(n).inverse()[n − 1]) + [0] ∗ (20 − n)
```

```
for n in range(1, 21)]
```

```
n, k = ZZ['n', 'k'].gens()
```

```
Alg.<Sn, Sk> = OreAlgebra(ZZ[n, k])
```

```
guess(data, Alg, order = 1).groebner_basis()
```

$[(k^2+3*k+2)*Sk+n^2-k^2+2*n-2*k,$
$(4*n^2-4*n*k+10*n-6*k+6)*Sn+n^2+n*k+4*n+2*k+4]$

```
annC = Alg.ideal([g.map_coefficients(lambda p : p(n − 1, k − 1)) for g in _])
```

```
annC
```

Left Ideal
$((k^2+k)*Sk+n^2-k^2, (4*n^2-4*n*k+6*n-2*k+2)*Sn+n^2+n*k+n+k)$ of Multivariate Ore algebra in *Sn*, *Sk* over Fraction Field of Multivariate Polynomial Ring in *n*, *k* over Integer Ring

We are lucky that a small system of operators has been found. Its solution is uniquely determined up to a constant multiplicative factor. If we want, we can express the solution in terms of binomial expressions. This requires a little bit of fiddling, and is not really necessary. In any case, one possible expression is

$$c_{n,k} = 2(-1)^{n+k}\binom{n-1}{k-1}\binom{n+k-1}{k}\Big/\binom{2n}{n}.$$

The multiplicative factor 2 *is chosen so as to match the data computed before:*

```
c = lambda n, k :
```

```
2 ∗ (−1)^(n + k) ∗ binomial(n − 1, k − 1) ∗ binomial(n + k − 1, k)/binomial(2 ∗ n, n)
```

```
[[c(n, k) for k in range(1, 21)] for n in range(1, 21)] == data
```

True

To complete the proof of the determinant identity, it remains to prove that the guessed sequence $c_{n,k}$ has the three required properties. While it is fairly easy to see that $c_{n,n} = 1$ is true for $n \geq 1$, the other properties are less obvious. In order to prove them, we use creative telescoping. The mathematical reasoning behind these steps are not self-evident, the reader not familiar with creative telescoping may want to consult one of the many tutorials on this work (e.g., [31, 18]).

$$i,n,k = ZZ['i','n','k'].\mathrm{gens}()$$

$$Alg2.\langle Si,Sn,Sk\rangle = \mathrm{OreAlgebra}(ZZ[i,n,k])$$

$$annC = Alg2.\mathrm{ideal}(\mathrm{list}(annC.\mathrm{gens}()) + [Si-1])$$

$$annAik = Alg2.\mathrm{ideal}([(1+i+k)*Sk-(i+k),(1+i+k)*Si-(i+k),Sn-1])$$

$$annAik.\mathrm{symmetric\_product}(annC).\mathrm{ct}(Sk-1)[0]$$

$$[(-4*i*n-4*n^2-2*i-6*n-2)*Sn+i*n-n^2+i-n,(i^2-n^2+2*i+1)*Si-i^2-i]$$

$$annAnk = Alg2.\mathrm{ideal}([(1+n+k)*Sk-(n+k),(1+n+k)*Sn-(n+k),Si-1])$$

$$annAnk.\mathrm{symmetric\_product}(annC).\mathrm{ct}(Sk-1)[0]$$

$$[(-16*n^2-16*n-4)*Sn+n^2+n,Si-1]$$

The first of these two outputs says that the sum $f(n,i) := \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}c_{k,n}$ satisfies the recurrence equations $(1+i-n)(1+i+n)f(n,i+1) = i(i+1)f(n,i), 2(1+i+n)(1+2n)f(n+1,i) = (i-n)(1+n)f(n,i)$, from which it can be shown that $f(n,i) = 0$ for $1 \leq i < n$.

The second output says that the sum $f(n) := \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}c_{k,n}$ satisfies the recurrence

$$4(2n+1)^2 f(n+1) = n(n+1)f(n).$$

As this recurrence is also satisfied by b_n/b_{n-1}, we have completed the proof.

4 Numbers

Besides expressions and functional equations for sequences or power series, we can also guess information about numbers. The two main techniques for doing so are the general LLL-algorithm [25, 28] and the more specialized PSLQ-algorithm [7].

Example 6. *The equation* $\arctan(x) = (x^2+1)\arctan(2-x)$ *has a unique real solution. No algorithm is known for solving such transcendental equations in terms of closed form numbers, but we can still try guess-and-prove.*

$Digits := 50; alpha := \text{fsolve}(\arctan(x) - (x^2+1) * \arctan(2-x));$

$$Digits := 50$$
$$alpha := 1.7320508075688772935274463415058723669428052538104$$

$\text{with}(\text{IntegerRelations});$

$$[\text{LLL}, \text{LinearDependency}, \text{PSLQ}]$$

$\text{PSLQ}([1, alpha, alpha^2, alpha^3]);$

$$[-3, 0, 1, 0]$$

This output suggests that $-3 + 0\alpha + \alpha^2 + 0\alpha^3 = 0$, i.e., $\alpha = \sqrt{3}$. To prove that this is indeed the right answer, it suffices to plug it into the equation and rely on Maple's simplifier.

$\text{simplify}(\text{subs}(x = \text{sqrt}(3), \arctan(x) - (x^2+1) * \arctan(2-x)));$

$$0$$

One of the most spectacular results obtained along these lines is the BBP formula for π, which was accidentally discovered during a search for integer relations among infinite series. This formula was totally unexpected, but once it was discovered, its proof was not very difficult: it is equivalent to a linear combination of certain rational integrals which a computer algebra system can easily evaluate. See [1] for further details on this story.

Guessing is often easier than proving, especially for problems about numbers. We frequently encounter such situations when we want to determine the asymptotic behaviour of certain combinatorial sequences. We know that these sequences behave asymptotically like $c\rho^n n^\alpha$ for certain constants c, ρ, α, but while ρ and α are reasonably easy to determine, we do not know how to compute c (unless the methods of Pemantle and Wilson apply [29, 30]). Still, we can often guess the right value of c. We can compute ρ and α from a recurrence for the sequence (which itself may be guessed), then use them to compute a numerical approximation of c to high precision, and finally recover the exact value from the approximation. We conclude by giving one example computation of this sort; see [4, 3, 26, 27] for more.

Example 7. *The sequence $f(n)$ is defined by $f(0) = 1$, $f(1) = 5$, and $36(n+1)(2n+1)(2n+3)f(n) - 10(n+2)(2n+3)(2n+5)f(n+1) + (n+2)(n+3)(n+4)f(n+2) = 0$ for $n \geq 0$. We want to know the asymptotic behaviour of this sequence. Using a package written by the author [14], we can compute formal asymptotic solutions of the recurrence.*

In[13]:= << Asymptotics.m

Asymptotics Package by Manuel Kauers — © RISC Linz — V 0.11 (2012-07-19)

In[14]:= $rec = 36*(1+n)*(1+2*n)*(3+2*n)*f[n] - 10*(2+n)*(3+2*n)*(5+2*n)*f[1+n] + (2+n)*(3+n)*(4+n)*f[2+n];$

In[15]:= $\text{Asymptotics}[rec, f[n]]$

Out[15]= $\{\frac{4^n}{n^3}, \frac{36^n}{n^3}\}$

This output means that for n $\to \infty$ our sequence $f(n)$ should agree with a certain linear combination of $4^n n^{-3}$ and $36^n n^{-3}$. Since the latter dominates the former, we expect $f(n) \sim c36^n n^{-3}$ for some constant c. We can determine the constant numerically by evaluating the quotient $f(n)/(36^n n^{-3})$ for large indices n.

In[16]:= $f[n\_\text{Integer}] := \text{Which}[n == 0, 1, n == 1, 5, \text{True}, f[n] = (-2*(18*(-1+n)*(-3+2*n)*(-1+2*n)*f[-2+n] - 5*n*(-1+2*n)*(1+2*n)*f[-1+n]))/(n*(1+n)*(2+n))]$

In[17]:= $u[n\_\text{Integer}] := f[n]/(36^n n^{-3})$

In[18]:= $N[u[1000], 50]$

Out[18]= 1.5134596447757720515220774543079292467924679843816

In[19]:= $N[u[2000], 50]$

Out[19]= 1.5163678166038235873110260313758186940468202585729

In[20]:= $N[u[3000], 50]$

Out[20]= 1.5173389381113803705216478071872594483911360060059

Okay, this seems to converge. But the convergence is pretty slow. Despite using several thousand terms, we hardly get two decimal digits of accuracy. This won't be enough to recover the exact value. We can considerably improve the performance by taking the first few terms of the asymptotic expansions into account. These can also be computed with the Asymptotics package.

In[21]:= $\text{Asymptotics}[rec, f[n], \text{Order} \to 2]$

Out[21]= $\{\frac{4^n(1+\frac{11729}{2048n^2}-\frac{93}{32n})}{n^3}, \frac{36^n(1+\frac{21089}{2048n^2}-\frac{123}{32n})}{n^3}\}$

In[22]:= $expansion[n\_] = \text{Last}[\text{Asymptotics}[rec, f[n], \text{Order} \to 30]];$

In[23]:= $u[n\_\text{Integer}] := f[n]/expansion[n]$

In[24]:= $N[u[1000], 50]$

Out[24]= 1.5192837835151164923743986348238747332464688780494

In[25]:= $N[u[2000], 50]$

Out[25]= $1.5192837835151164923743986348238747332464688780494$

In[26]:= $N[u[3000], 50]$

Out[26]= $1.5192837835151164923743986348238747332464688780494$

This is more useful; it looks like we can trust at least the first 50 digits. To recover the exact value from the approximation, we can use Mathematica's builtin LLL engine. The following commands produce the coefficient list of a conjectured minimal polynomial of degree at most three:

In[27]:= $c = \%;$

In[28]:= Most[First[LatticeReduce[
Transpose[Append[IdentityMatrix[4], Floor[$10^{50} * c$^Range[0, 3]]]]]]]

Out[28]= $\{-466510788517, 1274558997045, -396763651656, -158001503235\}$

That does not look convincing. Probably the limit is not a cubic algebraic number. We could next try to see if the limit can be written as a product of rational powers of small primes.

In[29]:= Most[First[LatticeReduce[
Transpose[Append[IdentityMatrix[5], Floor[$10^{50} *$ Log[{c, 2, 3, 5, 7}]]]]]]]

Out[29]= $\{1913619642, 5397440880, 2649112157, -1504537155, -2585144737\}$

These can hardly be the right exponents. Maybe we have to allow some other constants to appear in the expression, such as e *or* π.

In[30]:= Most[First[LatticeReduce[
Transpose[Append[IdentityMatrix[7], Floor[$10^{50} *$ Log[{c, 2, 3, 5, 7, E, Pi}]]]]]]]

Out[30]= $\{2, 5, -6, 0, 0, 0, 2\}$

This looks much better! It suggests that $c^2 2^5 3^{-6} \pi^2 \approx 1$, so $c \approx \frac{27}{\sqrt{32}\pi}$. By construction, this number matches the numerical approximation to at least 50 decimal digits. It continues to match if we increase the precision, which adds further evidence that this is the correct number.

In[31]:= $N[u[3000] - 27/\mathrm{Sqrt}[32]/Pi, 50]$

Out[31]= $-1.5916384284863134212136886738764800892681026709034\ 10^{-88}$

In[32]:= $N[u[5000] - 27/\mathrm{Sqrt}[32]/Pi, 50]$

Out[32]= $-2.1061302299467352839632639627253057878450758432551\ 10^{-95}$

In[33]:= $N[u[7000] - 27/\mathrm{Sqrt}[32]/Pi, 50]$

Out[33]= $-6.2096552325227282669338997935809208070195638383563\ 10^{-100}$

We have no doubt that indeed $f(n) \sim \frac{27}{\sqrt{32\pi}} 36^n n^{-3}$ ($n \to \infty$), but we do not know of any (semi-)automatic method that could help us prove that the guessed multiplicative constant is correct.

Acknowledgments

Supported by the Austrian FWF grants Y464-N18 and F5004.

References

[1] David H. Bailey, Peter B. Borwein, and Simon Plouffe. On the rapid computation of various polylogarithmic constants. *Mathematics of Computation*, 66:903–913, 1997.

[2] Alin Bostan. *Calcul formel pour la combinatoire des marches.* Habilitation a Diriger des Recherches, Université Paris 13, 2017.

[3] Alin Bostan, Frédéric Chyzak, Mark van Hoeij, Manuel Kauers, and Lucien Pech. Hypergeometric expressions for generating functions of walks with small steps in the quarter plane. *European Journal of Combinatorics*, 61:242–275, 2017.

[4] Alin Bostan and Manuel Kauers. Automatic classification of restricted lattice walks. In *Proceedings of FPSAC'09*, pages 201–215, 2009.

[5] Frédéric Chyzak. *The ABC of Creative Telescoping – Algorithms, Bounds, Complexity*. Habilitation á diriger des recherches. University Paris-Sud 11, 2014.

[6] Frédéric Chyzak. The mgfun package. ttps://specfun.inria.fr/chyzak/mgfun.html, 2016.

[7] Helaman R. P. Ferguson and David H. Bailey. A polynomial time, numerically stable integer relation algorithm. Technical Report RNR-91-032, RNR, 1992.

[8] Keith O. Geddes, Stephen R. Czapor, and George Labahn. *Algorithms for Computer Algebra*. Kluwer, 1992.

[9] Waldemar Hebisch and Martin Rubey. Extended Rate, more GFUN. *Journal of Symbolic Computation*, 46(8):889–903, 2011.

[10] Manuel Kauers. *Algorithms for Nonlinear Higher Order Difference Equations*. PhD thesis, Johannes Kepler Universität Linz, 2005.

[11] Manuel Kauers. Problem 11258. *The American Mathematical Monthly*, 113(10):939, December 2006.

[12] Manuel Kauers. SumCracker: A package for manipulating symbolic sums and related objects. *Journal of Symbolic Computation*, 41(9):1039–1057, 2006.

[13] Manuel Kauers. Guessing handbook. Technical Report 09-07, RISC-Linz, 2009.

[14] Manuel Kauers. A Mathematica package for computing asymptotic expansions of solutions of p-finite recurrence equations. Technical Report 11-04, RISC-Linz, 2011.

[15] Manuel Kauers. The holonomic toolkit. In *Computer Algebra in Quantum Field Theory: Integration, Summation and Special Functions*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, pages 119–144. Springer, 2013.

[16] Manuel Kauers. Computer algebra. In *Handbook of Enumerative Combinatorics*, pages 975–1046. Taylor and Francis, 2015.

[17] Manuel Kauers, Maximilian Jaroschek, and Fredrik Johansson. Ore polynomials in Sage. In *Computer Algebra and Polynomials*, LNCS 8942, pages 105–125. Springer, 2014.

[18] Manuel Kauers and Peter Paule. *The Concrete Tetrahedron*. Springer, 2011.

[19] Christoph Koutschan. *Advanced Applications of the Holonomic Systems Approach*. PhD thesis, Johannes Kepler University, 2009.

[20] Christoph Koutschan. HolonomicFunctions (User's Guide). Technical Report 10-01, RISC Report Series, University of Linz, Austria, January 2010.

[21] Christoph Koutschan. Creative telescoping for holonomic functions. In *Computer Algebra in Quantum Field Theory: Integration, Summation and Special Functions*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, pages 171–194. Springer, 2013.

[22] Christoph Koutschan, Manuel Kauers, and Doron Zeilberger. Proof of George Andrews' and David Robbins' q-TSPP-conjecture. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(6):2196–2199, 2011.

[23] Christoph Koutschan and Thotsaporn Thanatipanonda. Advanced computer algebra for determinants. *Annals of Combinatorics*, 17(3):509–523, 2013.

[24] Christian Krattenthaler. RATE: A Mathematica guessing machine. Available at http://mat.univie.ac.at/~kratt/rate/rate.html, 1997.

[25] Arjen K. Lenstra, Hendrik W. Lenstra, and László Lovász. Factoring polynomials with rational coefficients. *Annals of Mathematics*, 126:515–534, 1982.

[26] Stephen Melczer and Marni Mishna. Asymptotic lattice path enumeration using diagonals. *Algorithmica*, 74(4):782–811, 2016.

[27] Stephen Melczer and Marc Wilson. Asymptotics of lattice walks via analytic combinatorics in several variables. In *Proceedings of FPSAC 2016*, pages 863–874, 2016.

[28] Phong Q. Nguyen and Brigitte Vallée. *The LLL Algorithm*. Springer, 2010.

[29] Robin Pemantle and Mark C. Wilson. Twenty combinatorial examples of asymptotics derived from multivariate generating functions. *SIAM Review*, 50(2):199–272, 2008.

[30] Robin Pemantle and Mark C. Wilson. *Analytic Combinatorics in Several Variables*. Cambridge, 2013.

[31] Marko Petkovšek, Herbert Wilf, and Doron Zeilberger. $A = B$. AK Peters, Ltd., 1997.

[32] George Polya. Guessing and proving. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 9(1):21–27, 1978.

[33] Bruno Salvy and Paul Zimmermann. Gfun: a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 20(2):163–177, 1994.

[34] Richard P. Stanley. Differentiably finite power series. *European Journal of Combinatorics*, 1:175–188, 1980.

[35] Richard P. Stanley. *Enumerative Combinatorics, Volume 2*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 62. Cambridge University Press, 1999.

[36] Joachim von zur Gathen and Jürgen Gerhard. *Modern Computer Algebra*. Cam-

bridge University Press, 1999.

[37] Doron Zeilberger. The method of creative telescoping. *Journal of Symbolic Computation*, 11:195–204, 1991.

[38] Doron Zeilberger. The holonomic ansatz II: Automatic discovery(!) and proof(!!) of holonomic determinant evaluations. *Annals of Combinatorics*, 11(2):241–247, 2007.

Author's address:
Manuel Kauers
Johannes Kepler Universität Linz
Altenbergerstraße 69
A-4040 Linz
email manuel.kauers@jku.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 237 (2018), 17–25

Sufficient Reductions of Predictors in the Exponential and Elliptically Contoured Distribution Families

Efstathia Bura
TU Wien

1 Dimension Reduction in Regression and Classification

In regression and classification the goal is to model and/or predict a a target variable or vector Y using a large set of potentially useful predictors $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p) \in \mathbb{R}^p$. When $Y \in \mathbb{R}$ or $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^q$, we refer to the problem as regression, and when $Y \in \mathbb{N}$ as classification. The values of the predictors are unrestricted. In full generality, this amounts to finding the conditional cumulative distribution function of Y given $\mathbf{X}$, $F(Y|\mathbf{X})$. Because of the difficulty of this task, the most commonly used approach has been *linear regression* that models the first two moments of $F(Y|\mathbf{X})$ via

$$Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_j + \varepsilon, \tag{1}$$

where $\mathrm{E}(Y|\mathbf{X}=\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j$, and $\mathrm{var}(Y|\mathbf{X}=\mathbf{x}) = \mathrm{var}(\varepsilon|\mathbf{x}) = \sigma^2$, or, $\sigma^2(\mathbf{x})$. The $\mathbf{X}$ components can be functions of other $\mathbf{X}$ components, such as polynomials, so that the *linear model* (1) is not as restrictive as it may first appear to be. Nevertheless, when the dimension of the predictor vector is large, it is practically impossible to visualize how Y changes as a function of the components of $\mathbf{X}$ and modeling becomes fairly challenging.

ISSN 0020-7926

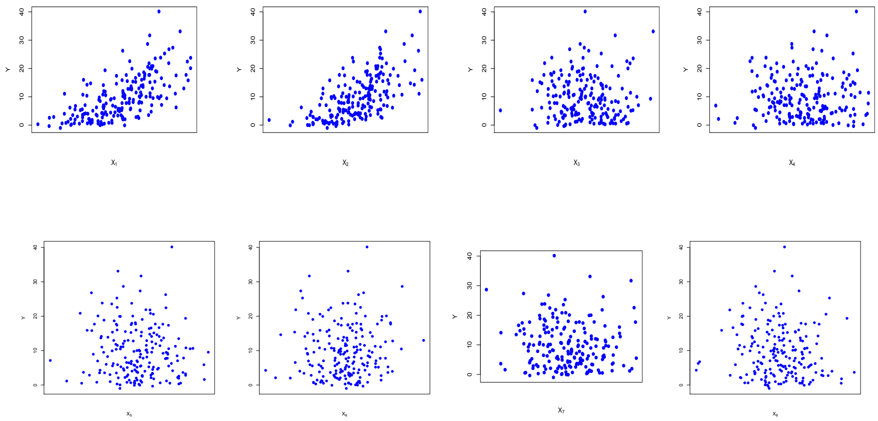

Figure 1: Scatterplots of Y vs X_j, $j = 1, \ldots, 8$.

Dimension reduction aims to reduce the complexity; that is, the dimension of the regression or classification problem by (a) dropping uninformative variables (variable or feature selection), or (b) by replacing the predictors with fewer functions of themselves (feature extraction). In this note, we consider feature extraction, focusing on *sufficient dimension reduction* (SDR) that reduces the dimension of the problem prior to selecting a model for predicting the response.

1.1 A simple example

In order to illustrate the intricacies in modeling real data, we construct an artificial data set, where the predictor vector satisfies $\mathbf{X} \sim N_{10}(0, \mathbf{I}_{10})$, i.e. it comprises of 10 independent standard normal variables. We generate 200 observations for each X_j, $j = 1, \ldots, 10$. The response Y is generated from a model based on these X's that will be revealed later. We would like to model, i.e. understand, the relationship between Y and these X_j's. We start by visualizing the data by drawing all scatterplots of Y vs X_j, $j = 1, \ldots, p$. Eight of these plots are given in Figure 1.[1] From these plots it appears Y is a non-linear function of (at least) X_1 and X_2. The relationship, if any, between Y and the other X's is unclear. In linear regression modeling, one would probably start by fitting

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1^2 + \beta_4 X_2^2 + \beta_5 X_1 X_2 \\ + \beta_6 X_3 + \beta_7 X_4 + \ldots + \beta_{13} X_{10} + \varepsilon$$

and carry out model selection in order to identify the best fitting model. Model selection refers to a series of steps in order to select the “best" among a set of

[1]The remaining are omitted as they are similar.

candidate models according to some criteria. Stepwise regression, application of goodness of fit measures such as R^2, AIC, BIC, Mallow's C_p are tools for model selection. An overview of the ever growing area of model selection in statistics is given in Leeb and Pötscher (2009).

Alternatively, one can try to simplify the modeling problem by reducing the predictors prior to fitting. For example, applying SIR (Li 1991), a simple SDR method, to these data results into a significantly easier modeling problem as it first reduces the predictor vector $\mathbf{X}$ to one linear combination of its components. Specifically, using the `dr` package of the statistical freeware `R` to analyze these data, we obtain that the *true* dimension of the regression is 1 (see the boldfaced part of the following output), and we can replace the original 10 and use this *reduced* predictor to model Y. Thus, SIR estimated the *sufficient* predictor which drastically simplified modeling. Moreover, it uncovered the "true" model that generated Y, which was $Y = (X_1 + X_2 + 3)^2 + .5N(0,1)$, in that a single linear function of the predictors, $X_1 + X_2$, is only needed to model the response.

```
s1=dr(y~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10,method="sir")
summary(s1)

Method:
sir with 14 slices, n = 200.

Large-sample Marginal Dimension Tests:
              Stat  df   p.value
0D vs >= 1D 304.73 130 4.441e-16
1D vs >= 2D 113.33 108 3.439e-01
2D vs >= 3D  78.15  88 7.647e-01
3D vs >= 4D  53.88  70 9.232e-01
```

Next, we plot Y versus the estimated predictor by SIR in Figure 2, from which a quadratic regression appears to be an appropriate model for Y. The computer output summarizes the quadratic regression model which has practically perfect fit with $R^2 = .9951$.

```
summary(lm(y~SIR1+SIR1sq))

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  9.24427    0.05719  161.64   <2e-16 ***
SIR1        -8.61903    0.04360 -197.69   <2e-16 ***
SIR1sq       1.95772    0.03008   65.09   <2e-16 ***
```

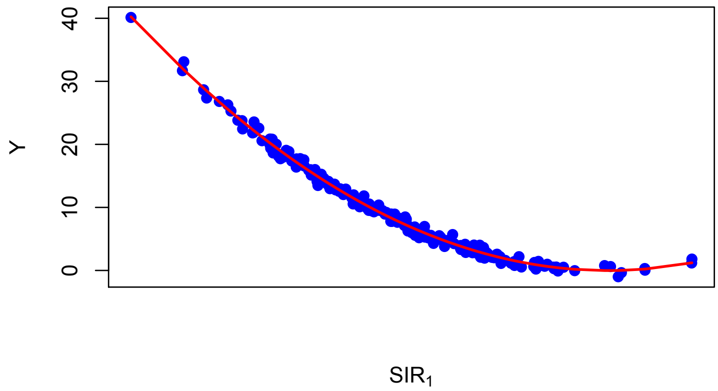

Figure 2: Plot of Y vs the SIR predictor.

```
Residual standard error: 0.6485 on 197 degrees of
freedom, Multiple R-squared: 0.9951, Adjusted
R-squared: 0.9951, F-statistic: 2.01e+04 on 2 and
197 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

2 Background on Sufficient Dimension Reduction

Sufficient Dimension Reduction (SDR; Cook 1998) aims to find a function or "reduction" $\mathbf{R}$ of $\mathbf{X}$, $\mathbf{R} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^d$ with $d \leq p$, that contains the same information as $\mathbf{X}$ about the response Y. That is, $F(Y|\mathbf{X}) = F(Y|\mathbf{R}(\mathbf{X}))$, where $F(\cdot|\cdot)$ is the conditional distribution function of Y given the second argument. This version of dimension reduction is called *sufficient* because $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ replaces the predictor vector $\mathbf{X}$ without any loss of information on Y.

If $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ is a sufficient reduction for the forward regression $Y|\mathbf{X}$, then it is also a sufficient *statistic* for the inverse regression $\mathbf{X}|Y$, where Y is viewed as a parameter (Cook 2007). Most of the methodology in SDR has been based on the concept of inverse regression that a sufficient reduction can be determined from $\mathbf{X}|Y$ and then it can be passed on to the forward regression $Y|\mathbf{X}$, or the joint distribution, without specifying the marginal distribution of Y or the conditional distribution of $Y|\mathbf{X}$. The appeal of inverse regression is that in most regression problems the response is one dimensional, whereas the number of predictors can be large, rendering the forward regression of Y on $\mathbf{X}$ to be very challenging to model. In contrast, the inverse regression of $\mathbf{X}$ on Y consists of p one-dimensional regressions, which are much easier to visualize and model.

With a few exceptions (Fukumizu et al. 2009, Li, Artemiou and Li 2011, Bura and Forzani 2015, Bura, Duarte and Forzani 2016), mostly *linear* sufficient transformations, $\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \eta^T\mathbf{X}$ with $\eta \in \mathbb{R}^{p\times d}$, have been studied and used in SDR-methodology. The subspace spanned by the *minimal* linear sufficient reductions, which is the intersection of all subspaces spanned by the columns of matrices η such that $F(Y|\mathbf{X}) = F(Y|\eta^T\mathbf{X})$, is called the *central subspace* by Cook (1994). The dimension d of the *central subspace* is called the structural dimension of the regression of Y on $\mathbf{X}$, and can take on any value in the set $\{0, 1, \ldots, p\}$. When $d < p$, the structural dimension of the regression is smaller than the number of predictors and the complexity of the regression is reduced. In the example we studied in Section 1.1, the structural dimension of the regression was estimated by SIR to be $d = 1$ and the linear reduction was estimated by the one-dimensional predictor $\widehat{\eta}^T\mathbf{X}$.

The kickoff in sufficient reduction was finding that the span of the curve $\Sigma_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathrm{E}(\mathbf{X}|Y) - \mathrm{E}(\mathbf{X}))$, where $\Sigma_{\mathbf{x}} = \mathrm{var}(\mathbf{X})$, is part of the sufficient reduction for $Y|\mathbf{X}$ when the predictor vector $\mathbf{X}$ has the linearity property on a subspace of lower dimension than p (Li 1991).

The estimation of linear sufficient reductions is based on moments or functions of moments of the conditional distribution of $\mathbf{X}|Y$. In absence of a distributional model for $\mathbf{X}|Y$, conditions are required so that functions of these moments would fall into the subspace of the sufficient reductions. Such moment-based SDR methods include sliced inverse regression (SIR, Li 1991), sliced average variance estimation (SAVE, Cook and Weisberg 1991), parametric inverse regression (PIR, Bura and Cook 2001), minimum average variance estimation (MAVE, Xia et al. 2002), contour regression (CR, Li et al. 2005), inverse regression estimation (IRE, Cook and Ni 2005), Fourier methods (Zhu and Zheng 2006), and a variety of methods based on marginal moments like principal Hessian directions (Li 1991), iterative Hessian transformations (Cook and Li 2002), and directional regression (DR, Li and Wang 2007).

Moment-based SDR requires continuous predictors, conditions on their moments, and typically captures *only part* of the reduction. Moreover, it is *linear* SDR as the reductions it finds are *linear* combinations of the predictors. Reproducing kernel Hilbert spaces (RKHS)-based methods (Li et al. 2011), in which the predictors are immersed in a higher dimensional space so that linear sufficient dimension methodology can be applied, went a step further to obtain functions of the predictors that are sufficient but not necessarily linear in the original predictors, though for most it is not possible to extract an explicit form of the reduction. The generality of kernel-based methods, as they are applicable to any types of data, is their most appealing feature. For the same reason, they can be less efficient than methods that take advantage of the distribution of the data when the latter is known or easy to deduce.

Likelihood-based SDR emerged from the connection that Cook (2007) drew between sufficient statistics and sufficient reductions. We make use of this connection to compute sufficient reductions in regression and classification. In the sequel we briefly present the distribution based approach to fully identify all sufficient reductions in regression and classification problems where the *inverse predictors* $\mathbf{X}|Y$ are elliptically contoured (Bura and Forzani 2015), and in the exponential family of distributions (Bura, Duarte and Forzani 2016). The most attractive features of the sufficient reductions we derive are that (1) they are exhaustive, (2) they can be both linear and nonlinear functions of the predictors, and (3) they have explicit functional forms. Moreover, the estimates of the sufficient reductions are MLEs and hence efficient (they have asymptotically minimum variance).

2.1 Elliptically contoured inverse predictors

Assume $\mathbf{X}$ and Y have a joint distribution and let $\mu_Y = \mathrm{E}(\mathbf{X}|Y)$, $\mu = \mathrm{E}(\mathbf{X})$. Bura and Forzani (2015) derived

- the *minimal sufficient reduction* for Y when $\mathbf{X}|Y$ is normal. Specifically,
  - if $\mathbf{X}|Y \sim N_p(\mu_Y, \Delta)$,
  $$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \eta'(\mathbf{X}-\mu) = (\eta_1'(\mathbf{X}-\mu), \ldots, \eta_d'(\mathbf{X}-\mu))$$
  - if $\mathbf{X}|Y \sim N_p(\mu_Y, \Delta_Y)$
  $$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = (\eta'(\mathbf{X}-\mu), (\mathbf{X}-\mu)'\Sigma_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{X}-\mu))$$

  where
  $$\eta = \Sigma_{\mathbf{x}}^{-1}\mathrm{span}(\mu_Y - \mu); \tag{2}$$
- the *minimal sufficient reduction* for Y when $\mathbf{X}|Y \sim EC_p(\mu_Y, \Delta, g_Y)$ (elliptically contoured) with pdf
  $$f_{\mathbf{X}|Y}(\mathbf{x}) = |\Delta|^{-\frac{1}{2}} g_Y\left[(\mathbf{x}-\mu_Y)^T \Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mu_Y)\right]$$
  where $\mathrm{var}(\mathbf{X}|Y) = c_Y\Delta$, $c_Y = \mathrm{E}(Q_Y^2)/p$, with $Q_Y^2 = (\mathbf{X}-\mu_Y)^T\Delta^{-1}(\mathbf{X}-\mu_Y)$, to be
  $$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \left(\eta^T(\mathbf{X}-\mu), (\mathbf{X}-\mu)^T\Sigma_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{X}-\mu)\right)$$
  where η is given by (2). Elliptically contoured distributions include the multivariate normal, the multivariate t, the multivariate Cauchy, the multivariate Laplace, the multivariate uniform, mixtures of normal distributions, and multivariate stable distributions.

Model-free (moment-based) SDR methods, such as SIR, cannot recover the non-linear component and cannot be exhaustive. Bura and Forzani (2015) also effectively characterized normality via linear reductions by showing that $\eta^T(\mathbf{X}-\mu)$ is a sufficient reduction if and only if the distribution of $\mathbf{X}|Y$ is normal with constant variance. It has a non-linear component only when the variance is not constant.

2.2 Inverse predictors in the exponential family

The exponential is the natural family of distributions for $\mathbf{X}|Y$ when predictors are all continuous, all categorical, or mixtures of continuous and categorical with pdf

$$f(\mathbf{x}|\eta_y, Y=y) = e^{\eta_y^T \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \psi(\eta_y)} h(\mathbf{x})$$

where the natural "parameters" are $\eta_y = (\eta_{y1}, \dots, \eta_{yk})^T$, $k \geq p$, and $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ is the *minimal sufficient statistic* for Y when considered as a parameter.

Bura, Duarte and Forzani (2016) showed that when $\mathbf{X}|Y$ is in the exponential family the *minimal sufficient reduction* for Y is

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \alpha^T(\mathbf{T}(\mathbf{X}) - \mathrm{E}(\mathbf{T}(\mathbf{X})))$$

with

$$\alpha = \mathrm{span}\{(\eta_Y - \mathrm{E}_Y(\eta_Y) = (\eta_Y - \bar{\eta}), Y \in \mathcal{S}_Y, \}$$

where $\mathcal{S}_Y$ denotes the support of the marginal distribution of Y. To estimate $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ we need to estimate the natural *parameters* η_Y.

2.3 Estimation

Estimation of Sufficient Reductions in the Elliptically Contoured Family: Assume $(\mathbf{X}_i, Y_i)$, $i = 1, \dots, n$, is a random sample from $\mathbf{X}|Y \sim EC_p(\mu_Y, \Delta, g_Y)$. Bura and Forzani (2015) showed that $\mathrm{E}(\mathbf{X}|Y) = \mu_Y = \mu + \Delta\alpha\nu_Y$. Let $\nu_Y = \beta(\mathbf{f}_Y - \mathrm{E}(\mathbf{f}_Y))$, where $\mathbf{f}_Y \in \mathbb{R}^r$ is a known vector-valued function of Y, and $\beta \in \mathbb{R}^{d\times r}$, $d \leq \min(r,p)$, is an unrestricted rank d matrix. Then,

$$\mu_{Y_i} = \mathrm{E}(\mathbf{X}_i|Y_i) = \mu + \Delta\alpha\beta(\mathbf{f}_{Y_i} - \bar{\mathbf{f}}).$$

We proposed an *iterative re-weighted least squares* (IRLS) algorithm for the estimation of η, β and Δ and showed that the IRLS estimates are also MLEs:

$$\widehat{\mathbf{R}}_{mle}(\mathbf{X}) = \widehat{\mathbf{R}}_{lse}(\mathbf{X}) = \left(\widehat{\eta}^T(\mathbf{X}-\bar{\mathbf{X}}), (\mathbf{X}-\bar{\mathbf{X}})^T \widehat{\Sigma}_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{X}-\bar{\mathbf{X}})\right)$$

where $\bar{\mathbf{X}}$ is the sample average, and $\widehat{\Sigma}_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^T/n$ is the sample covariance matrix of $\mathbf{X}$.

Estimation of Sufficient Reductions in the Exponential Family: Bura, Duarte and Forzani (2016) used the generalized linear model framework to estimate the sufficient reduction. Let $\mathbf{D} : k \times r$, and $\mathbf{f}_Y \in \mathbb{R}^r$ known functions of Y, so that

$$\begin{aligned} \eta_Y &= \bar{\eta} + \mathbf{D}(\mathbf{f}_Y - \mathrm{E}(\mathbf{f}_Y)) \\ \mathrm{span}(\eta_Y - \bar{\eta}) &= \mathrm{span}(\mathbf{D}). \end{aligned}$$

Estimates of $\bar{\eta}$ and $\mathbf{D}$ via Iterative Reweighted Least Squares were obtained, which were shown to be MLEs. The rank d of $\mathbf{D}$, $\hat{d}$, is estimated with asymptotic tests or information based criteria such as BIC/AIC. The first $\hat{d}$ eigenvectors of $\widehat{\mathbf{D}}$, $\widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_d$, yield the MLE of the sufficient reduction,

$$\widehat{\mathbf{R}}(\mathbf{X}) = \widehat{\alpha}'(\mathbf{T}(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X})).$$

References

[1] Bura, E. and Cook, R.D. (2001), Estimating the structural dimension of regressions via parametric inverse regression, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 63, 393–410.

[2] Bura, E., Duarte, S. and Forzani, L. (2016), Sufficient reductions in regressions with exponential family inverse predictors, *Journal of the American Statistical Association*, 111, 1313-1329.

[3] Bura, E. and Forzani, L. (2015), Sufficient reductions in regressions with elliptically contoured inverse predictors, *Journal of the American Statistical Association*, 110, 420-434.

[4] Cook, R. D. (1994), Using dimension-reduction subspaces to identify important inputs in models of physical systems, In *Proc. Sect. Phys. Eng. Sc.* , p. 18-25. Alexandria, VA: American Statistical Association

[5] Cook, R. D. (1998), *Regression Graphics: Ideas for studying regressions through graphics*, New York: Wiley.

[6] Cook, R. D. (2007), Fisher lecture: Dimension reduction in regression, *Statistical Science*, 22, 1-26.

[7] Cook, R. D. and Li, B. (2002), Dimension reduction for the conditional mean in regression, *The Annals of Statistics*, 30, 455-474.

[8] Cook, R.D. and Ni, L. (2005), Sufficient dimesion reduction via inverse regression: A minimum discrepancy approach, *Journal of the American Statistical Association*, 100, 410-428.

[9] Cook, R.D., and Weisberg, S. (1991), Discussion of: Sliced inverse regression for dimension reduction, *Journal of the American Statistical Association*, 86, 328-332.

[10] Fukumizu, K., Bach, F. R. and Jordan, M. I. (2009), Kernel Dimension Reduction in Regression, *The Annals of Statistics*, 37, 1871-1905.

[11] Leeb H. and Pötscher B.M. (2009), Model Selection, in: Mikosch T., Kreiß J.P., Davis R., Andersen T. (eds) Handbook of Financial Time Series. Springer, Berlin, Heidelberg.

[12] Li, K. C. (1991), Sliced inverse regression for dimension reduction (with discussion), *Journal of the American Statistical Association*, 86, 316-342.

[13] Li, B., Artemiou, A. and Li, L. (2011), Principal support vector machines for linear and nonlinear sufficient dimension reduction, *Annals of Statistics*, 39(6), 3182-3210.

[14] Li, B. and Wang, S. (2007), On directional regression for dimension reduction, *Journal the American Statistical Association*, 102, 997-1008.

[15] Li, B., Zha, H. and Chiaromonte, F. (2005), Contour Regression: A general approach to dimension reduction, *Annals of Statistics*, 33(4), 1580-1616.

[16] Xia, Y., Tong, H., Li, W. K., and Zhu, L-X. (2002), An adaptive estimation of dimension reduction space (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 64 , 363-410.

[17] Zhu, Y. and Zeng, P. (2006), Fourier methods for estimating the central subspace and the central mean subspace in regression, *Journal of the American Statistical Association*, 101, 1638-1651.

Author's address:
Efstathia Bura
TU Wien
Wiedner Hauptstr. 8-10
A-1040 Wien
email efstathia.bura@tuwien.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 237 (2018), 27–58

Zentralmatura in der Sackgasse?

Reinhard Winkler
TU Wien

Der vorliegende Artikel schließt an den vor zwei Jahren entstandenen Vorläufer [7] mit dem Titel „Zentralmatura – quo vadis?“ an, eine Auseinandersetzung mit Chancen und Gefahren im Zusammenhang mit der neuen standardisierten schriftlichen Reifeprüfung („Zentralmatura“) an Österreichs Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS). Ich vermute, dass für die Berufsbildenenden Höheren Schulen, kurz BHS, mutatis mutandis Ähnliches gilt und deshalb eine analoge kritische Diskussion auch dort wünschenswert wäre, doch bin ich mit der BHS weit weniger vertraut und gehe deshalb nicht näher auf sie ein.

War [7] vor allem an die Lehrerschaft gerichtet, so wende ich mich diesmal an die ÖMG und die gesamte mathematische Gemeinschaft in Österreich. Prolog und Epilog sollten auch für Nichtmathematiker verständlich sein. Im Vergleich zu [7] gibt der Lauf mancher Entwicklungen bzw. noch mehr der Stillstand in anderen Belangen mittlerweile Anlass zu einer deutlich kritischeren Haltung.

Unter Mathematikern hoffe ich auf Unterstützung bei meiner in Kapitel 2 ausführlich begründeten Kritik, vor allem am Katalog der 73 sogenannten Grundkompetenzen. Erstens droht der Mathematikunterricht immer mehr auf dieses Subminimalprogramm reduziert zu werden. Zweitens weist der vorliegende Katalog zahlreiche fachliche Mängel auf, die bestenfalls als pragmatische Übergangslösung für ein, zwei Jahrgänge hinzunehmen gewesen wären, geboren aus der Notwendigkeit, am Status quo anzusetzen. Als immerwährender Kanon des Schulfachs Mathematik, als welcher der Katalog von Lehrenden und Lernenden in der Praxis immer mehr anerkannt zu werden scheint, erweist er sich aus mathematischer Sicht jedoch als unzulänglich.

In Kapitel 2 als Hauptteil steht die Besprechung zahlreicher konkreter Mängel des Katalogs im Zentrum. Das nimmt auch mehr als die Hälfte des gesamten Textes in Anspruch. Voraus geht dem Hauptteil ein Prolog (Kapitel 1), in dem u.a. das Problematische an der übermächtigen Rolle eines Katalogs von Grundkompetenzen unabhängig von einzelnen Unzulänglichkeiten behandelt wird. Im Epilog (Kapitel 3) werden allgemeine Schlüsse aus dem Vorangegangenen gezogen, Erkenntnisse zusammengefasst und notwendige Schritte formuliert.

ISSN 0020-7926

1 Prolog

Im Prolog rekapituliere ich zunächst in 1.1 triftige Gründe für die vor einigen Jahren erfolgte Umstellung der österreichischen Reifeprüfung, die ich an sich für einen wichtigen und begrüßenswerten Schritt halte. In 1.2 diskutiere ich die Rolle des Grundkompetenzkatalogs (GKK), um den es auch im Hauptteil gehen wird, in 1.3 die Verantwortung der mathematischen Gemeinschaft in Österreich für eine kritische Auseinandersetzung damit. Der Prolog schließt in 1.4 mit einem kurzen Überblick über den Rest des Artikels.

1.1 Systemumstellung an Österreichs Höheren Schulen

Seit einigen Jahren gibt es an Österreichs Höheren Schulen eine neue Form der Reifeprüfung, die ich, dem allgemeinen Sprachgebrauch folgend, einfach *Zentralmatura* nennen möchte. Im Fach Mathematik[1] war diese Reform höchst an der Zeit und wurde von großen Teilen der Öffentlichkeit, von Bildungsexperten wie auch den meisten Mathematikern an Österreichs Universitäten begrüßt. Denn schwerwiegende Mängel des bisherigen Systems waren nicht zu übersehen: Lehrerinnen und Lehrer stellten einige wenige Prüfungsaufgaben für die eigene Klasse zusammen und legten sie einer Zentralstelle vor. Oft waren diese Aufgaben beeindruckend kompliziert; schließlich will man der Prüfungsaufsicht ja zeigen, was man seinen Schützlingen alles beigebracht hat. Die Bildungsbehörde wählte davon vier Aufgaben für die schriftliche Matura aus. So genügte es aus Sicht der Lehrenden, sich bei der Maturavorbereitung auf die paar Aufgabentypen, die infrage kamen, zu konzentrieren und alles andere beiseite zu lassen. Aus der Perspektive der Schüler war es, sofern man inhaltlich nichts verstand, eine erfolgversprechende Strategie, den Drill für wenige Wochen brav mitzumachen. Dann konnte man sicher sein, bei der Abschlussprüfung erfolgreich abzuschneiden, auch ohne irgendetwas Relevantes aus dem Fach Mathematik mitgenommen zu haben. Auch den Lehrenden kann man es nicht verargen, wenn sie genau diesen Drill boten, um nicht junge Menschen, die ihnen bis zu acht Jahre lang persönlich ans Herz gewachsen waren, in ein Prüfungsdesaster laufen zu lassen. Es geht mir bei meiner Kritik generell nicht darum, Personengruppen oder gar Einzelpersonen die Schuld an einem Systemversagen zuzuweisen, sondern nach Ansatzpunkten Ausschau zu halten, wo das System verbessert werden kann.

[1] Ich beziehe mich in diesem Artikel auf die AHS. In den „Berufsbildenden Höheren Schulen“ (BHS) heißt das Fach „Angewandte Mathematik“. Ein Jahr später als in den AHS wurde auch in den BHS eine Zentralmatura eingeführt. Ich sehe keinen Grund für einen grundsätzlich anderen Befund als für die AHS. Allerdings gibt es für die BHS-Matura meines Wissens nicht einmal ein bildungstheoretisch fundiertes Grundkonzept, das sich mit jenem von Fischer/Peschek für die AHS vergleichen ließe. Insofern müsste man bei einer Analyse vermutlich sogar schon auf einer grundsätzlicheren Ebene ansetzen. Außerdem schafft die Vielfalt verschiedener BHS-Typen weitere zusätzliche Komplikationen.

Die Einführung der Zentralmatura gab Anlass zur Hoffnung, dass es mit den geschilderten Missständen ab nun ein für alle Mal vorbei sein werde. Denn die Lehrenden sind beim schriftlichen Teil nicht mehr gleichzeitig die Prüfenden (wenn auch die Korrigierenden) und kennen die Prüfungsaufgaben nicht im Voraus. Folglich müssen sie im Unterricht zur Prüfungsvorbereitung nicht nur wenige Typen von Aufgaben abdecken, sondern den ganzen Lehrstoff im Auge haben. – Wirklich den ganzen Lehrstoff? Natürlich nicht den *ganzen*! Aber was genau?

Um das zu klären, wurde ein Dokument erstellt (siehe [1]), das den Titel „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik" trägt und auf der Internetseite des Bundesministeriums zu finden ist. Präzisierend liest man im Untertitel „Inhaltliche und organisatorische Grundlagen ...". Auf dieses Dokument werde ich mich im Folgenden beziehen, und zwar auf die seit geraumer Zeit gültige Version mit dem Zusatz „gültig für alle Schüler/innen, die ab dem Haupttermin 2018 maturieren (Stand: Oktober 2015)". Weil der Kerninhalt dieses Dokuments die 73 sogenannten Grundkompetenzen (kurz GKen) sind, werde ich es den Grundkompetenzkatalog, kurz GKK, nennen.

1.2 Die Not des Augenblicks sub specie aeternitatis

Viel Erfahrung aus der Schulpraxis ist in den GKK eingeflossen, und die Autoren haben sich allem Anschein nach große Mühe gegeben, das gesamte System – wie es so schön heißt – inhaltlich „dort abzuholen", wo es sich zum Zeitpunkt der Umstellung befand. Das war auch unerlässlich. Denn allein die organisatorischen Umstellungen forderten den Lehrenden, den Lernenden, der Schulbehörde und den Eltern so viel Kooperationsbereitschaft und guten Willen ab, dass ihnen zum Zeitpunkt der Umstellung nicht auch noch inhaltliche Innovationen zugemutet werden konnten. So weit das ein in Bezug auf das Schulsystem außenstehender Mathematiker beurteilen kann, wurde der GKK behutsam an den Status quo dessen angepasst, was landläufig „Schulmathematik" genannt wird. Mit diesem Wort scheinen schlicht die real existierenden Zustände im Zusammenhang mit dem Unterrichtsfach Mathematik an Österreichs Schulen gemeint zu sein. Man kann den GKK demnach als ein Produkt betrachten, das aus der Not des Augenblicks der Systemumstellung geboren ist und als solches in der Phase des Übergangs seine wertvollen, ja unverzichtbaren Dienste geleistet hat. Wer (so wie ich) in der Phase dieser Umstellung eine Zeit lang in der sogenannten Steuergruppe des Projekts AHS-Zentralmatura mitarbeitete, litt unweigerlich an den unübersehbaren Mängeln des durch den GKK eingefangenen Status quo, musste aber die pragmatische Notwendigkeit einsehen, von dieser Basis aus zu starten.

Wenn man jemanden dort abholt, wo er sich befindet, sollte es aber auch ein Ziel geben, wohin man ihn oder sie begleiten möchte. Denn andernfalls wäre das Abholen ja überflüssig gewesen. Entsprechend war die Maturareform mit dem Anspruch angetreten, den Status quo zu verbessern und nicht einzuzementieren. Gemeinsam mit Kollegen machte ich deshalb unzählige Vorschläge, wie der GKK weiterentwickelt werden könnte und welche Begleitmaßnahmen, etwa den Lehrplan betreffend, sinnvoll wären. Da es verständlicherweise Unruhe vor allem bei der Lehrerschaft erzeugt hätte, wenn der GKK, scheinbar erratisch, alle paar Wochen aktualisiert worden wäre, fand ich mich damit ab, dass gut Ding Weile brauche und Revisionen langfristig geplant werden müssten. Auch sollten inhaltliche Verbesserungen an der Wurzel angegangen werden. Folglich sollte man sich mit der Implementierung lieber ein, zwei, ja meinetwegen fünf Jahre Zeit nehmen, als durch unüberlegte Schnellschüsse Verwirrung und womöglich Chaos zu erzeugen. Klar – so meine Überzeugung – müsse vor allem für die Lehrenden an Österreichs Schulen jedenfalls sein, dass mittelfristig GKK, Lehrplan und (unverzichtbar!) auch noch andere Rahmenbedingungen weiterentwickelt würden und man sich darauf einzustellen habe.

Doch leider: Seit mittlerweile ein paar Jahren ist weit und breit keine Initiative für eine notwendige tiefgreifende Revision der inhaltlichen, d.h. mathematischen Festlegungen im GKK auszumachen. Ich möchte betonen, dass ich für dieses Versäumnis keinesfalls jenes Team verantwortlich machen möchte, das mit der laufenden Abwicklung der Zentralmatura befasst ist. In der Steuergruppe durfte ich erleben, wie aktuelle Erfordernisse dem operativen Geschäft fast permanente Feuerwehreinsätze abverlangen. Grundlegende inhaltliche Revisionen müssten einer eigens einzusetzenden Arbeitsgruppe mit starker fachwissenschaftlicher Beteiligung und langfristiger Arbeitsperspektive übertragen werden.

In der schulischen Realität bedeuten die kritisierten Versäumnisse: Der aus der Not des Augenblicks entstandene GKK wird zur ehernen Grundlage und unveränderlich eingefrorenen Heiligen Schrift, die dogmatisch festlegt, was bis zum Jüngsten Gericht, sozusagen *Sub Specie AEternitatis* (mit der Abkürzung SSAE werde ich gelegentlich an diesen Gesichtspunkt erinnern) unter „Schulmathematik“ zu verstehen sei. Lehrplan, Bildungsstandards und alle hehren Bildungsziele treten in den Hintergrund, der Mathematikunterricht wird allein von den 73 GKen im GKK bestimmt. Dieser Eindruck wird sowohl durch Äußerungen Betroffener bestätigt wie auch durch Beobachtungen, die Außenstehenden möglich sind, sofern sie fachkundig sind und hin- statt wegschauen.

1.3 Unsere Verantwortung

Wer, wenn nicht wir Mathematikerinnen und Mathematiker, trägt die Verantwortung, auf die rein *fachlichen* Mängel hinzuweisen, die sich in der „Schulmathematik“ als Traditionen festgesetzt haben und an denen einzelne Lehrerinnen und Lehrer, wollen sie nicht anecken, kaum zu rütteln wagen? Das Selbstbewusstsein, den eigenen Zweifeln mehr zu trauen als kollektiv eingefahrenen Gewohnheiten, ist nicht jedermanns Sache, und man kann es von den Unterrichtenden, die ja den Schulbehörden unterstellt sind, nicht einfordern.

Es gilt auszusprechen, was in fachmathematischen Kreisen bereits als Selbstverständlichkeit gilt, woran sich sonst anscheinend aber kaum mehr jemand stößt: Die fachliche Substanz und Nachhaltigkeit des tradierten Mathematikunterrichts an unseren Schulen ist, gelinde gesagt, verbesserungswürdig. Der GKK stellt eine Momentaufnahme des Status quo dar, die als aus der Not des Augenblicks geborene Orientierungshilfe für die Zentralmatura notwendig war. Betrachtet man den GKK aber als langfristig prägende Vorgabe (SSAE), ist er nicht nur mangelhaft, sondern strotzt geradezu vor mathematischen Fragwürdigkeiten. Angesichts des Gleichmuts, mit dem das in der Schulpraxis nicht nur hingenommen, sondern geradezu gepflegt wird, fragt man sich, ob man sich in der Gemeinschaft jener, die sich für „Schulmathematik" verantwortlich fühlen, des Ausmaßes der Schwächen bewusst ist. Mit diesem Artikel versuche ich, etwas dazu beizutragen.

Wer wie ich vorwiegend an einer Universität wirken darf, hat, so vermute ich, ein nur sehr unvollständiges Bild von den mannigfachen Nöten, unter denen man im Schulsystem je nach Position zu leiden hat. Nur so kann ich mir erklären, warum man dort an vielem, nie aber an fachlichen Mängeln Anstoß nimmt, obwohl diese wirklich unübersehbar und höchst schmerzhaft sind. Umso mehr liegt es an uns „Hochschulmathematikern", diese Mängel aufzuzeigen. Ich habe das zwar schon vielfach und gegenüber unterschiedlichen Personengruppen getan. Meine Stimme ist aber zu leise. So wende ich mich in diesem Artikel zunächst an die ÖMG und hoffe auf Unterstützung und Verstärkung durch meine Kollegenschaft, wo immer sich die Gelegenheit dazu ergibt. In diesem Sinn bin ich ausdrücklich dankbar für jede Rückmeldung, die mir Mut gibt, meine Bemühungen fortzusetzen. Gemeinsam können wir vielleicht doch etwas ausrichten.

1.4 Überblick über das Folgende

So wie in der gegenwärtigen „Schulmathematik" an der AHS, steht auch im vorliegenden Artikel der GKK im Zentrum. Im Hauptteil (Abschnitt 2) werde ich zahlreiche der darin enthaltenen GKen kritisch besprechen. Je nach Zählweise kommen von den 73 GKen im GKK zwischen einem Viertel und einem Drittel explizit kritisch zur Sprache. Dabei entsteht, so denke ich, ein durchaus repräsentatives Bild vom Stoff, der durch den GKK abgedeckt wird bzw. abgedeckt werden soll. Dem Urteil der Leserin und des Lesers seien Antworten auf folgende Fragen anheimgestellt: Welche Note gäbe es auf eine Schularbeit, in der etwa 30% des Gebotenen angreifbar ist? Und welche Note verdient (SSAE) ein österreichweit verbindlicher Kompetenzkatalog mit den Schwächen des vorliegenden GKK?

Nach der Besprechung des GKK in seinen mathematischen Einzelheiten werde ich in einem Epilog (Kapitel 3) noch weitere, teils allgemeinere Aspekte anschneiden und grundsätzliche Überlegungen anstellen.

2 Der Grundkompetenzkatalog GKK

Das Kapitel über den GKK stellt den Hauptteil des vorliegenden Artikels dar. Ich habe bereits angedeutet, warum der GKK auf die Praxis des Mathematikunterrichts einen überwältigenden Einfluss ausübt. Deshalb muss eine Beurteilung der Zentralmatura insgesamt eine kritische Auseinandersetzung mit dem GKK beinhalten, die auch ins fachliche Detail geht. Eine solche soll nun folgen.

Da es nicht um mathematische Theoreme geht, sondern um die Beurteilung von mehr oder weniger gelungen formulierten „Kompetenzen", die von Maturanten in Mathematik erwartet werden, fließen unweigerlich persönliche Einschätzungen ein, die hie und da vielleicht auch Widerspruch ernten. Auch einzelne Irrtümer meinerseits bei der Einschätzung der Intentionen sind nicht nur möglich, sondern sogar wahrscheinlich. Dass aber jedenfalls eine fachmathematische Diskussion über den GKK höchst an der Zeit ist, dem wird man, wie ich meine, schwerlich widersprechen können. Mit meinem Text verbinde ich die Absicht, eine solche Diskussion anzukurbeln.

Die ausführliche Besprechung des GKK beginnt mit allgemeinen Bemerkungen zu seiner Struktur (2.1), gefolgt von Abschnitten, die den vier Inhaltsbereichen des GKK entsprechen: Algebra und Geometrie (2.2), Funktionale Abhängigkeiten (2.3), Analysis (2.4) sowie Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (2.5).

2.1 Allgemeines

Der GKK (siehe [1]) hat insgesamt 35 Seiten. Davon geht es auf den ersten fünf Seiten um inhaltliche Grundlagen des Konzepts von Roland Fischer und Werner Peschek, die ihrerseits stark von Fischers bildungstheoretischen Untersuchungen geprägt sind. Die letzten 17 Seiten des GKK wiederum enthalten begleitende Informationen über außermathematische Kontexte, Einheiten und Größen, Rahmenbedingungen, Antwortformate und zum Beurteilungsschema. Dazwischen bleiben somit asketische 13 Seiten für die 73 GKen im eigentlichen Sinn, auf die sich der Mathematikunterricht zunehmend konzentriert (SSAE) – wir werden ausreichend Beispiele kennenlernen. Die Formulierungen der einzelnen GKen nehmen jeweils ein bis vier Zeilen in Anspruch. Zwischen den GKen gibt es gelegentlich Anmerkungen, außerdem einleitende Texte von jeweils einer halben bis ganzen Seite Länge zur bildungstheoretischen Orientierung jedes der vier „Inhaltsbereiche", in die der Schulstoff gegliedert ist. Jeder Inhaltsbereich wird durch zwei Buchstaben abgekürzt und ist in vier bis sechs Gruppen von GKen unterteilt, die ich hier „Themenbereiche" nennen möchte. Innerhalb der Themenbereiche sind die GKen durchnummeriert. Die vier Inhaltsbereiche sind:

Algebra und Geometrie (AG, $2+5+5+2=14$ GKen in 4 Themenbereichen)

Funktionale Abhängigkeiten (FA, $9+6+4+4+6+6=35$ GKen in 6 Themenbereichen)

Analysis (AN, $4+1+3+3=11$ GKen in 4 Themenbereichen)

Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS, $4+4+4+1=13$ GKen in 4 Themenbereichen)

Die Abkürzung AG 2.4 beispielsweise steht für die vierte GK aus dem zweiten Themenbereich „(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme“ innerhalb des Inhaltsbereichs Algebra und Geometrie (AG).

Bevor wir uns den Inhaltsbereichen, ihren Themenbereichen und den GKen im Einzelnen zuwenden, sei auf eine Eigentümlichkeit der Gliederung auf der obersten Hierarchieebene hingewiesen. Mit den drei Themenbereichen AG, AN und WS sind in sehr sinnvoller Weise große und etablierte Teilgebiete der Mathematik erfasst. Im Gegensatz dazu bezeichnet FA (Funktionale Abhängigkeiten) nach meinem Verständnis kein Teilgebiet, sondern eine Querschnittsmaterie, die alle Teilgebiete der Mathematik durchzieht. Wenn wir uns in 2.3 diesem Inhaltsbereich FA ausführlicher widmen werden, wird der Eindruck entstehen, dass damit eigentlich fast nur reelle Funktionen gemeint sind, und dabei wieder solche, die einem von nur wenigen sehr speziellen Typen zuzuordnen sind. Nach üblichem Verständnis fällt der Inhaltsbereich FA also auch in die Analysis (AN). Vermutlich wurde er deshalb ausgegliedert, damit AN im Vergleich zu den anderen Inhaltsbereichen nicht zu groß würde. Natürlich berühren solch terminologische Erörterungen zunächst nur die Oberfläche. Dass es aber durchaus auch substanzielle Einwände gibt, wird sich an entsprechender Stelle zeigen.

Auch das Verhältnis zwischen Elementarem und Fortgeschrittenem verdient eine kurze allgemeine Bemerkung. An einigen Stellen werde ich kritisieren, dass die GKen zu gewissen Themenbereichen über ein sehr bescheidenes Niveau nicht hinauskommen. Damit will ich keineswegs kritisieren, dass auch relativ einfache Inhalte durch GKen repräsentiert sind, ganz im Gegenteil: Ich fände es nicht abwegig, beispielsweise auch die Ausführung von Grundrechnungsarten explizit als Maturastoff festzuschreiben. Eine Ausweitung des GKK um ganz besonders wichtige elementare Inhalte, die bisher nicht ausdrücklich erwähnt werden, hielte ich sogar für sinnvoll. Kritik am *nur* Elementaren äußere ich lediglich dann, wenn ich meine, dass Bemühungen, über das aktuelle Niveau hinauszukommen, lohnen könnten.

2.2 Inhaltsbereich „Algebra und Geometrie“ (AG)

Der Inhaltsbereich AG gliedert sich in vier Themenbereiche mit insgesamt 14 GKen:

1. Grundbegriffe der Algebra (2 GKen)
2. (Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme (5 GKen)

3. Vektoren (5 GKen)
4. Trigonometrie (2 GKen)

Beginnen wir gleich mit den beiden GKen zu AG 1 unter der Überschrift „Grundbegriffe der Algebra“. Die erste lautet:

> *AG 1.1 Wissen über die Zahlenmengen* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *verständig einsetzen können*

Welches Wissen ist da genau gemeint? Soll man wissen, um welchen Typ algebraischer Struktur (im Sinn von Gruppe, Halbring, Ring, Körper, etc.) mit entsprechenden Axiomen bzw. arithmetischen Eigenschaften es sich handelt? Ist mit $\mathbb{N}$ das Induktionsprinzip verbunden, mit $\mathbb{Z}$ die Primfaktorzerlegung, mit $\mathbb{Q}$ die Axiomatik für einen Körper, mit $\mathbb{R}$ die Vollständigkeit, mit $\mathbb{C}$ die algebraische Abgeschlossenheit? Soll man vielleicht sogar charakterisierende Eigenschaften für die Struktur jedes der fünf Bereiche formulieren können? Die offenen Fragen machen deutlich, dass hier wie an vielen anderen Stellen ausführliche Präzisierungen wünschenswert wären. Das würde den knappen Rahmen des GKK natürlich bei Weitem sprengen. Begleitende Literatur, die sich primär an die Lehrenden richtet, wäre also erforderlich. Wenn ich im Schlussresümee (3.4) nochmals darauf zu sprechen komme, denke ich an solche Vertiefungen des Stoffs als Desideratum. Fehlen dergleichen Präzisierungen, so zeigt die Erfahrung, dass man sich – gemäß einem empirisch recht universell, d.h. im Mathematikunterricht genauso wie in der Natur feststellbaren Minimalprinzip – schlussendlich im Wesentlichen damit begnügt, die Inklusionskette $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ einzuprägen sowie Ausdrücke mit einem Minuszeichen als $\notin \mathbb{N}$, Brüche als $\notin \mathbb{Z}$, Zahlen, in denen Wurzeln, e oder π vorkommen, als $\notin \mathbb{Q}$ und solche mit einem i als $\notin \mathbb{R}$ zu identifizieren. Doch warum lautet AG 1.1 dann nicht schlicht „Die Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$“? Werfen wir dazu einen Blick auf die Formulierung der zweiten GK zu AG 1:

> *AG 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit*

Abgesehen davon, dass auch hier eine Konkretisierung des geforderten Wissens moniert werden könnte, fällt die in AG 1.1 und AG 1.2 übereinstimmende Wendung „Wissen über ... einsetzen können“ auf. Solche Formulierungen ziehen sich durch den gesamten GKK. Der überwiegende Großteil aller GKen ist mit dem Verb „können“ gebildet, vereinzelt kommen „kennen“ und „wissen“ vor. Die zwei, drei Formulierungen, wo das nicht der Fall ist, scheinen aus Versehen hineingerutscht zu sein. Wenn ich nichts übersehen habe, kommt das Verb „verstehen“, das ich im Zusammenhang mit mathematischer Bildung für das entscheidende halte, nur in einer einzigen GK vor, nämlich in FA 1.7: *Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können*. Dieses eine Mal treffen also sogar Verb und Adverb zusammen. Tatsächlich finden sich Formulierungen mit „verständig“ als Ersatz für „verstehen“ im GKK sogar sehr häufig. Als mögliche Erklärung dieses Phänomens, ständig „etwas verständig tun können“, kaum aber „etwas verstehen“ zu müssen, habe ich das Schlagwort der „Kompetenzorientierung“ anzubieten. Ich werde in 3.1 in allgemeinerem Zusammenhang darauf zurückkommen.

Ich überspringe die jeweils fünf GKen zu „(Un)Gleichungen und Gleichungssystemen“ (AG 2) sowie zu „Vektoren“ (AG 3) und wende mich den beiden GKen des Themenbereichs Trigonometrie (AG 4) zu. Bei

> *AG 4.1 Definitionen von Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkeligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke einsetzen können*

ist man versucht, sich zu fragen, was von einem rechtwinkeligen Dreieck übrig bleibt, nachdem es aufgelöst worden ist. Man kann aber – und das will ich tun – gleich auch die nächste GK in den Blick nehmen:

> *AG 4.2 Definitionen von Sinus und Cosinus für Winkel größer als* 90^o *kennen und einsetzen können*
>
> *Anmerkungen:*
>
> *Die Kontexte beschränken sich auf einfache Fälle in der Ebene und im Raum, komplexe (Vermessungs-)Aufgaben sind hier nicht gemeint; Sinus- und Cosinussatz werden dabei nicht benötigt.*

Niemand wird behaupten, dass die in AG 4 angeführten Inhalte nicht zu „kennen“ bzw. zu „können“ seien. Ist hiermit aber *alles* Unverzichtbare zur Trigonometrie abgedeckt? Sind z.B. der Satz des Pythagoras oder die Winkelsumme des Dreiecks für eine mathematische Allgemeinbildung Luxusgüter? Unter dem Gesichtspunkt SSAE wohl schwerlich!

2.3 Inhaltsbereich „Funktionale Abhängigkeiten“ (FA)

Der Inhaltsbereich mit diesem bereits in Abschnitt 2.1 infrage gestellten Titel ist der umfangreichste und enthält nahezu die Hälfte aller GKen im GKK, nämlich 35 von 73. Er ist gegliedert in sechs Themenbereiche:

> 1. Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsfomen und Eigenschaften (9 GKen)
> 2. Lineare Funktion [$f(x) = kx + d$] (6 GKen)
> 3. Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$ oder mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$

(4 GKen)
4. Polynomfunktion $[f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}]$ (4 GKen)
5. Exponentialfunktion $[f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}]$ (6 GKen)
6. Sinusfunktion, Cosinusfunktion (6 GKen)

Ich habe bereits eingangs Einwände dagegen vorgebracht, dass eine mathematische Querschnittsmaterie als Inhaltsbereich gleichrangig neben die klassischen mathematischen Teilgebiete Algebra und Geometrie, Analysis sowie Wahrscheinlichkeit und Statistik gestellt wird. Von diesen Einwänden will ich jetzt aber absehen. Denn immerhin weckt die Überschrift „Funktionale Abhängigkeiten" die Hoffnung, dass dem allgemeinen, die gesamte Mathematik durchziehenden Begriff der Funktion (oder, in einem formalen Sinn synonym, auch Abbildung genannt) gebührendes Gewicht verliehen wird. Der geeignete Rahmen wäre der Themenbereich FA 1. Tatsächlich findet sich auch gleich zu Beginn:

> *FA 1.1 für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann*

Bei genauerer Analyse der darauf folgenden GKen erkennt man aber, dass FA 1.1 die einzige GK bleibt, die sich nicht auf den Spezialfall reeller Funktionen beschränkt. Und selbst zu dieser GK ist mir noch keine stimmige Prüfungsaufgabe untergekommen.[2] Eine Erklärung ist schnell ausgemacht: Um funktionale von nichtfunktionalen Zusammenhängen unterscheiden zu können, wäre ein begrifflicher Rahmen erforderlich, der etwas weiter gefasst ist. Ein solcher stünde in Gestalt des noch allgemeineren Begriffs der Relation auch zur Verfügung – wohlgemerkt in der Mathematik, anscheinend aber nicht in der „Schulmathematik". Stünde der Begriff der Relation zur Verfügung, wäre es didaktisch fast zwingend, nicht nur Funktionen als Relationen mit einer bestimmten zusätzlichen Eigenschaft zu definieren, sondern auch die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv zu behandeln. Natürlich fehlen auch sie, folglich auch der Begriff der Umkehrfunktion und, damit eng verknüpft, jener der (etwas später nochmals aufzugreifenden) Verkettung von Funktionen. Konsequenterweise gehen auch allgemeine Wurzelfunktionen und Logarithmen im gesamten GKK ab. An dieser Stelle sei auch auf den (nunmehr keineswegs überraschenden) Umstand hingewiesen, dass Folgen als Funktionen mit der speziellen Definitionsmenge $\mathbb{N}$ ebenfalls gänzlich fehlen.

Wir wenden uns nun jenen Typen reeller Funktionen zu, die im GKK aufscheinen. Von den speziellen Funktionen übergehe ich hier die linearen (FA 2, anlässlich

[2] Dem Vernehmen nach soll es vereinzelt Aufgaben geben, wo eine Kurve in der Ebene darauf zu untersuchen ist, ob sie eine reelle Funktion darstellt. Damit ist aber immer noch nicht der allgemeine Funktionsbegriff erfasst.

von FA 5.4 werde ich aber FA 2.4 kurz erwähnen) und wende mich gleich dem Themenbereich

> FA 3: *Potenzfunktion mit* $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$ *oder mit* $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$

zu. Wie es überhaupt dazu gekommen ist, exakt diese geradezu sinnlos artifizielle Klasse von Funktionen als eine besondere auszuzeichnen, darüber kann ich nur spekulieren. Sie besteht – um meine Kritik anhand einer von zahlreichen Merkwürdigkeiten zu illustrieren – aus durchwegs (im Inneren des Definitionsbereichs) differenzierbaren Funktionen, ist aber gegenüber der Operation des Differenzierens nicht abgeschlossen. Kein Mathematiker würde sich ohne Not mit so einer Klasse beschäftigen!

Nach den Polynomfunktionen (FA 4) folgen als Themenbereich

> *FA 5 Exponentialfunktionen der Gestalt* $f(x) = a \cdot b^x$ *bzw.* $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$.

Die vierte der GKen dazu lautet:

> *FA 5.4 charakteristische Eigenschaften (*$f(x+1) = b \cdot f(x); [e^x]' = e^x$*) kennen und im Kontext deuten können*

Was heißt hier „charakteristisch“? An der Differentiationsregel $[e^x]' = e^x$ wollen wir keinen Anstoß nehmen (auch wenn selbst daraus Missverständnisse erwachsen könnten, weil neben f mit $f(x) = e^x$ ja auch jedes Vielfache $b \cdot e^x$ mit $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung der entsprechenden Differentialgleichung $y' = y$ ist). Jedoch die Funktionalgleichung $f(x+1) = b \cdot f(x)$ betreffend, habe ich die Erfahrung gemacht, dass sie oft irrtümlich als „charakterisierend“ angesehen wird, nämlich als ob die angegebenen Exponentialfunktionen die einzigen Lösungen wären. Offensichtlich gibt es aber (sofern $b \neq 0$) zu *jeder* Funktion $f_0 : [0,1) \to \mathbb{R}$ eine (eindeutige) Fortsetzung f auf ganz $\mathbb{R}$, die gleichzeitig Lösung der Funktionalgleichung $f(x+1) = b \cdot f(x)$ ist, während aber natürlich nur sehr spezielle Funktionen f_0 auf $[0,1)$ Exponentialfunktionen im intendierten Sinn sind. Eine ganz analoge Kritik betrifft lineare Funktionen und FA 2.4, weil die dort hervorgehobene Beziehung $f(x+1) = f(x) + k$ auf Funktionen der Bauart $f(x) = kx + d$ zwar natürlich zutrifft, jedoch aus analogen Gründen wie bei FA 5.4 *nicht nur* auf diese. Auch zu FA 6.4 wird nochmals ein ähnlicher Kritikpunkt auftauchen.

Der sechste und letzte Themenbereich zu FA beginnt mit:

FA 6.1 grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

Was genau hier „allgemeine Sinusfunktion" bedeuten soll, ist unklar. Eine mögliche Sinngebung für FA 6.1: Variiert man bei der grafischen Darstellung der Sinusfunktion die Einheiten auf x- und y-Achse, so entspricht dem die Variation der Parameter a und b. So ein Phänomen ist aber nicht spezifisch für die Sinusfunktion, sondern lohnt, wie ich etwas später noch in einem weiteren Kontext erwähnen werde, für allgemeines f verstanden zu werden. Als auf den Sinus beschränkte GK überzeugt mich FA 6.1 nicht. Aber vielleicht herrscht tatsächlich Verwirrung, was nun eine (spezielle?, allgemeine?) Sinusfunktion ist, und was eine beliebige periodische Funktion. Die nachfolgende GK, die ebenfalls noch dem Themenbereich FA 6 mit dem Titel „Sinusfunktion, Cosinusfunktion" angehört, deutet fast darauf hin:

FA 6.4 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können

Hier wird suggeriert, dass sich jede periodische Funktion auf elementare Weise (niemand denkt hier an Fourierreihen) mittels Sinus und Cosinus darstellen lasse, was natürlich falsch ist. Das Problematische daran ist von verwandter Art wie bei FA 2.4 und FA 5.4. In all diesen Fällen wird so getan, als wären gewisse Eigenschaften sehr spezieller Funktionen für diese bereits charakterisierend, während die interessierenden Eigenschaften in Wahrheit eine viel größere Funktionenklasse definieren.

Es lohnt ein kurzer, kritischer Rückblick auf den Inhaltsbereich FA. Zunächst wäre aus den bereits diskutierten Gründen statt „Funktionale Abhängigkeiten" wohl „Reelle Funktionen" die ehrlichere Überschrift. Deutlich schmerzhafter als dieser terminologische Schönheitsfehler sind schon die extrem willkürlichen, geradezu erratisch ausgewählten Mengen von Funktionen, mit denen Vertrautheit gefordert wird. Wer immer mit Mathematik nicht nur oberflächlich in Berührung gekommen ist, würde stattdessen wahrscheinlich, von einigen wenigen „elementaren" Funktionen ausgehend, jede Funktion zulassen, die sich daraus mittels Grundrechnungsarten und Verkettung bilden lässt. Damit ist ein entscheidendes Wort gefallen: Funktionen ohne Verkettung zu behandeln, ist ähnlich, wie wenn die Zahlenbereiche aus AG 1.1 ohne die auf ihnen definierten Rechenoperationen gelehrt würden. Von den zahlreichen inhaltlichen Mängeln, die dem GKK anzukreiden sind, gibt es ein paar – in 3.2 werde ich einige davon nochmals rekapitulieren –, die besonders schmerzen, und davon ist das Fehlen der Verkettung von Funktionen wahrscheinlich der fundamentalste. Wie also könnten Verbesserungsvorschläge lauten?

Wenn man zunächst nur die Identität $x \mapsto x$ als einzige „elementare“ Funktion zuließe, so ergäben sich allein vermittels der Grundrechnungsarten bereits sämtliche Polynome und alle gebrochen rationalen Funktionen. Darüber hinaus sollte aber zumutbar sein, auch andere elementare Funktionen (exp u.a., siehe weiter unten) zuzulassen und – vor allem – sie miteinander zu verketten. Dass die Komplexität einer zusammengesetzten Funktion in einer Prüfungsaufgabe ein angemessenes Maß nicht überschreiten darf, versteht sich von selbst. Gäbe man jedoch a priori eine obere Schranke der Komplexität explizit an, würde man bei weniger Begabten ein Lernen provozieren, das nicht auf Verständnis abzielt, sondern auf die Einübung von Rezepten, die möglichst alle laut Kompetenzkatalog erlaubten Beispiele abdecken.

Hat man (wie ich es für unverzichtbar hielte) auch die Verkettung von Funktionen zur Verfügung, so wären damit automatisch die (extrem wichtigen) Übergänge von einer Funktion $f(x)$ zu $f(x+c)$, $f(cx)$, $f(x)+c$, $cf(x)$ u.Ä. erfasst. Zurzeit klingt das im Kompetenzkatalog – extrem unbefriedigend – lediglich in zwar vielleicht wichtigen, aber dennoch relativ willkürlich herausgegriffenen Spezialfällen (wie $a \cdot \sin(b \cdot x)$ in FA 6.1) an.

Auch zu den „charakteristischen“ Eigenschaften gewisser Funktionen sind weitere Bemerkungen am Platz. Statt der Funktionalgleichung $f(x+1) = b \cdot f(x)$, die – wie bereits oben erwähnt – eine zwar wissenswerte, aber keine charakterisierende Eigenschaft von Funktionen der Gestalt $f(x) = a \cdot b^x$ ist, bietet sich als Ausgangspunkt die viel prominentere Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ der Exponentialfunktion an. Dass sie im GKK nicht vorkommt, hängt wohl damit zusammen, dass $a \neq 1$ zugelassen wurde, in welchem Fall aus mathematischer Sicht nur die weniger interessante, weil speziellere erste, nicht aber die fundamentale zweite Funktionalgleichung gilt. Dabei bietet sich aus mathematischer Sicht eine sehr elegante Vorgangsweise an: Mit Addition und Multiplikation lassen sich vier sehr einfache Funktionalgleichungen (interpretierbar als Homomorphiebedingungen zwischen der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ bzw. der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^+$) formulieren, deren Lösungsmenge (bei minimaler zusätzlicher Voraussetzung, Stetigkeit oder Monotonie an nur einer Stelle genügt) jeweils eine einparametrige Schar von sehr wichtigen Funktionen ist: Die Lösungen von $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sind die (homogenen) linearen Funktionen der Bauart $f(x) = k \cdot x$ mit $k \in \mathbb{R}$; die Lösungen von $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, sind die Exponentialfunktionen der Bauart $f(x) = b^x$ mit $b > 0$; die Lösungen von $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, sind (neben $f \equiv 0$) die Logarithmusfunktionen der Bauart $f(x) = \log_b(x)$ mit $b > 0, b \neq 1$; und die Lösungen von $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sind die Potenzfunktionen der Bauart $f(x) = x^c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Diese vier Funktionstypen könnte man beispielsweise als Ausgangspunkt nehmen. Ergänzt man sie noch durch die trigonometrischen Funktionen, so hat man wohl alles, was man für den Schulunterricht braucht. (Wie sich all diese

Funktionen aus der Exponentialfunktion entwickeln lassen, habe ich in [5] in Hinblick auf den Schulunterricht ausgebreitet – so wie in zahlreichen vergleichbaren Artikeln vor allem in den „Didaktikheften“ der ÖMG auch andere schulrelevante Themen.)

2.4 Inhaltsbereich „Analysis“ (AN)

Die Analysis wird sehr schlank, nämlich durch nur 11 GKen abgedeckt, die vier Themenbereichen zugeordnet sind:

1. Änderungsmaße (4 GKen)
2. Regeln für das Differenzieren (1 GK)
3. Ableitungsfunktion/Stammfunktion (3 GKen)
4. Summation und Integral (3 GKen)

In den ersten drei GKen aus AN 1 ist von absoluten und relativen (prozentuellen) Änderungsmaßen die Rede sowie von Differenzen- und Differentialquotienten auf der „Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs“. Was soll das heißen? Beide, Intuition und Begriff, sind in der Mathematik von entscheidender Bedeutung.[3] Als besonders mächtig erweist sich die Mathematik, indem sie die beiden beständig in Verbindung setzt. Der Begriff des Grenzwerts ist für die Mathematik vielleicht der wichtigste überhaupt. Wenigstens für ihn, so würde man meinen, sollten GKen sowohl Intuition als auch begriffliche Klarheit einfordern. Auch wenn Letzteres mit gewissen intellektuellen Ansprüchen verbunden sein mag: Wozu haben wir „Höhere Schulen“, wenn wir sämtliche intellektuellen Ansprüche von vornherein aufgeben? Meiner Erfahrung nach steht die Floskel vom „intuitiven Grenzwertbegriff“ dafür, dass begrifflich überhaupt nichts geklärt wird, und die Intuition durch schwammige Formulierungen ersetzt wird, die sich auch nicht für Prüfungsaufgaben eignen. Angesichts dieses Vakuums umso bemerkenswerter ist die letzte der vier GKen aus AN 1:

> *AN 1.4 das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können*

Geht es hier also um dynamische Systeme? Ohne sauberen Grenzwertbegriff und ohne den Begriff der Folge vorbereitet zu haben? Sind unter dem Begriff der „Differenzengleichung“ beliebige Rekursionen subsumiert oder nur lineare? Und setzt das Verständnis von Rekursionen nicht auch das Induktionsprinzip voraus, das nicht nur im GKK fehlt, sondern vor geraumer Zeit überhaupt aus dem Lehrplan eliminiert wurde? Bei all diesen ungeklärten Fragen verwundert es nicht,

[3] Man denke an Kants berühmte Sentenz: „Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind.“

dass man substanzielle Prüfungsaufgaben zu AN 1.4 vergebens sucht – schlicht weil sie im Vergleich zum sonst vorkommenden Stoff um Größenordnungen zu anspruchsvoll wären.

Die Regeln für das Differenzieren sind in einer einzigen GK zusammengefasst:

> *AN 2.1 einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für* $[k \cdot f(x)]'$ *und* $[f(k \cdot x)]'$ *(vgl. Inhaltsbereich* Funktionale Abhängigkeiten*)*

Wieder einmal haben wir es mit einer unvollständigen und willkürlichen Auswahl zu tun (SSAE). Wörtlich genommen und in Verbindung mit den GKen aus FA können damit nur Polynomfunktionen, ergänzt durch Summanden der Bauart $a \cdot e^x$, $a \cdot \sin(b \cdot x)$ und/oder $a \cdot \cos(b \cdot x)$, differenziert werden. (Man beachte, dass die Ableitung der laut FA 3 noch zulässigen Quadratwurzeln nicht mehr zulässig ist, weil Funktionen der Bauart $f(x) = a \cdot x^z$ mit $z = -\frac{1}{2}$ nicht vorkommen.) Die letzte Regel in AN 2.1 ist offenbar ein verkümmertes Relikt der wichtigen und extrem aussagekräftigen Kettenregel, die aber natürlich fehlt, weil sie mangels Verkettung von Funktionen (siehe Inhaltsbereich FA) nicht einmal griffig formuliert werden kann. Gerade beim Differenzieren wäre es jedoch mit geringem zusätzlichen Aufwand möglich, einen vollständigen Werkzeugkasten für beliebige „regulär aufgebaute“ Funktionen bereitzustellen – ganz im Gegensatz zum Integrieren.

Aber nicht einmal auf das Vorhandensein eines solchen Werkzeugkastens wird hingewiesen. Dafür folgen unmittelbar drei (an sich zweifellos sinnvolle) GKen zum Themenbereich Ableitungsfunktion/Stammfunktion (AN 3), von denen die erste lautet:

> *AN 3.1 den Begriff Ableitungsfunktion/Stammfunktion kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können*

Es ist zu vermuten, dass als Grundlage auch hier ein „intuitiver Grenzwertbegriff“ gemeint ist. Aber warum nur intuitiv? Aus Angst vor dem so wichtigen Begriff? Grenzwerte von Folgen, Konvergenz unendlicher Reihen, Stetigkeit, Ableitung und Integral – fünf zentrale Begriffe der Mathematik, die alle auf dieselbe Idee bzw. dieselbe logische Struktur zurückzuführen sind und daher theoretisch fast mit einem Streich sauber erschlossen werden könnten. (Natürlich erstrecken sich diese Themen über mehrere Schuljahre; es lohnt also, aus früheren Schulstufen bereits bekannten Stoff gelegentlich zu wiederholen.) Entscheidend wäre, dass man sich zu begrifflich klarer Arbeit durchringen könnte.

Im Themenbereich „Summation und Integral" überrascht es nicht, dass jene GK, die auf Integrationsregeln abzielt, in ähnlicher Weise matt wirkt wie AN 2.1 zum Differenzieren weiter oben:

> *AN 4.2 einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)\,dx$, $\int f(k \cdot x)\,dx$ (vgl. Inhaltsbereich* Funktionale Abhängigkeiten*), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können*

Noch mehr als das Bruchstückhafte von AN 4.2 schmerzt aber die viel zu undeutlich bleibende Unterscheidung zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral sowie – hier wird es geradezu absurd – das Fehlen jeglicher halbwegs expliziten Bezugnahme auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in seiner allgemeinen, nicht auf Polynomfunktionen beschränkten Form. Zugespitzt könnte man sagen: Der Witz der gesamten Infinitesimalrechnung auf Schulniveau besteht darin, dass zwischen zwei auf den ersten Blick völlig unterschiedlichen Konzepten, nämlich dem der Ableitung (Differentialquotient) und dem des bestimmten Integrals (Ober- und Untersummen) jene Beziehung besteht, die der Hauptsatz beschreibt und wodurch erst der Begriff des unbestimmten Integrals (Stammfunktion) seine Bedeutung erlangt.

2.5 Inhaltsbereich „Wahrscheinlichkeit und Statistik" (WS)

Der Inhaltsbereich WS erweist sich als besonders problematisch. Zugegebenermaßen liegt das auch daran, dass wir in der Vermittlung der Stochastik vom Stein der Weisen noch ganz besonders weit entfernt sind. Es scheint nämlich alles andere als klar, wie die teils anspruchsvollen Begriffe, die im GKK (oft nur implizit) vorkommen, für den Schulunterricht am besten adaptiert werden sollten. Aufgrund dieser Schwierigkeiten werde ich bei WS auch häufiger und ausführlicher als bisher darauf aufmerksam machen, wenn ich den Eindruck habe, dass bei gewissen Schlagworten die dahinterstehenden Begriffe nicht selbstverständlich sind. Umso dringlicher erscheint es, auf die besonders zahlreichen fachlichen Unstimmigkeiten des GKK und die damit verbundenen ungelösten Probleme im Inhaltsbereich WS hinzuweisen. Entsprechend umfangreich ist dieser Abschnitt geraten. Doch der Reihe nach! Die 4 Themenbereiche innerhalb WS lauten:

1. Beschreibende Statistik (4 GKen)
2. Wahrscheinlichkeitsrechnung (4 GKen)
3. Wahrscheinlichkeitsverteilung(en) (4 GKen)
4. Schließende/Beurteilende Statistik (1 GK)

Der erste Themenbereich, die beschreibende Statistik, ist äußerst elementar gehalten. Dagegen ist zunächst nichts einzuwenden. Bedauerlicherweise wird das elementare Niveau aber auch nie verlassen. Repräsentativ ist bereits die erste GK daraus (die zweite ist sehr ähnlich):

> *WS 1.1 Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können*

Dass 18-Jährige (so wie hoffentlich auch schon 12-Jährige) imstande sein sollen, Tabellen zu lesen, dem stimmen wir vorbehaltlos zu. Erst recht wichtig ist die Fähigkeit zu angemessenen Interpretationen von grafischen Darstellungen. Auch folgende „Kompetenz“ erwartet man von Maturanten:

> *WS 1.3 statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus, Quartile, Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können*

Was beispielsweise wäre die Interpretation des Werts $V = 10$ für die Varianz V in einem bestimmten Kontext? Weil das wahrscheinlich nicht nur mir nicht so klar ist, gibt es zu dem gar nicht so kleinen Themenkomplex, der durch WS 1.3 angesprochen wird, anscheinend im Wesentlichen nur einen Aufgabentyp, die sogenannte „Boxplot“-Aufgabe. Dabei handelt es sich um ein in der „Schulmathematik“ besonders beliebtes, standardisiertes grafisches Schema, mit dem man Minimum, Maximum, Median und Quartile eines Datensatzes darstellen kann. Der mathematische Kern einer Boxplotaufgabe besteht aber nur darin, endlich viele Zahlenwerte der Größe nach zu ordnen und anschließend in zwei Hälften bzw. in vier Viertel zu teilen, wobei eventuell noch gewisse (sehr nachrangige) Besonderheiten hinsichtlich gerade/ungerade, etc. zu beachten sind.[4] Das, so denke ich,

[4] Ich danke Walter Mayrhuber für den Hinweis, dass gerade wegen dieser Besonderheiten bei einer geraden Anzahl $2n$ von geordneten Zahlenwerten $x_1 \leq \ldots \leq x_{2n}$ auch beim „Boxplot“ Schwierigkeiten auftreten können: Mindestens drei Möglichkeiten einer Definition eines Medians kommen mir ad hoc in den Sinn: das arithmetische Mittel $\frac{x_n+x_{n+1}}{2}$, das Intervall $[x_n, x_{n+1}]$ (also eine Menge statt einem einzelnen Wert) oder auch jede beliebige Zahl aus dem Intervall $[x_n, x_{n+1}]$. Im letzten Fall ist der Zusammenhang, der ein Zahlen-$2n$-Tupel mit seinem Median verknüpft, kein funktionaler (sofern nicht zufällig $x_n = x_{n+1}$ gilt). Meint man diese Variante des Begriffs und spricht man aber gleichzeitig von *dem* statt von *einem* Median, so sind Missverständnisse vorprogrammiert und sie scheinen bei Prüfungen auch schon tatsächlich aufgetreten zu sein. Besonders bedauerlich ist das deshalb, weil es hier ja nur um terminologische Konventionen geht und nicht um den Kern des Medianbegriffs, den man für meinen Geschmack vorteilhaft im Zusammenhang mit Verteilungsfunktionen und beliebigen Quantilen behandeln könnte. Versucht man vom Konkreten dieses Beispiels zu abstrahieren, so fällt die Anfälligkeit der „Schulmathematik“ für Unsicherheiten auf, die von Nebensächlichkeiten herrühren, aus denen aber schwerwiegende dogmatische Fragen gemacht werden. Ich habe schon mehrmals erlebt, wie in Diskussionen über unbedeutende Kleinigkeiten mehr Zeit vergeudet wird, als – um es anhand eines prominenten Beispiels etwas überspitzt auszudrücken – die Einführung eines sauberen Grenzwertbegriffs in Anspruch nehmen würde.

sollte auch einem durchschnittlich begabten Volksschulkind ohne große Schwierigkeiten beizubringen sein. Doch auch für unsere 18-Jährigen gehen nur wenige Aufgabentypen zum Inhaltsbereich WS über dieses Niveau hinaus. Woran das liegt? Vor allem daran, dass in den verbleibenden drei Themenbereichen zu WS nur mehr wenig Überzeugendes kommt und manches fachlich höchst fragwürdig ist, während es aber trotzdem bei jedem Maturatermin wenigstens ein paar Aufgaben zum Themenbereich WS geben muss (SSAE). Mit dieser scharfen Kritik verpflichte ich mich gleichzeitig, jede der $4+4+1=9$ noch kommenden GKen zur Gänze wiederzugeben und wenigstens kurz zu diskutieren.

Beginnen wir mit dem Themenbereich WS 2, Wahrscheinlichkeitsrechnung Grundbegriffe. Vor über 80 Jahren erlöste Kolmogorow die Wahrscheinlichkeitsrechnung von ihrem bis dato unbefriedigenden Status innerhalb der Mathematik. Indem er sie auf ein maßtheoretisches Fundament stellte, fügte er sie in den mittlerweile riesigen Korpus der modernen Mathematik, der den höchsten Kriterien methodischer Strenge genügt, nahtlos ein. Im ersten, konzeptuell fundamentalen Schritt gelingt das mithilfe des Begriffs des Wahrscheinlichkeitsraums. Darunter versteht man bekanntlich ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit einer Menge Ω sogenannter Elementarereignisse, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω von (messbaren) Ereignissen und einer $[0,1]$-wertigen, σ-additiven Mengenfunktion $\mathbb{P}$, die einem Ereignis $A \in \mathcal{A}$ seine Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$ zuordnet und insbesondere $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ und $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ erfüllt. Dass man diese Terminologie für den Schulunterricht nicht eins zu eins übernimmt, finde auch ich sinnvoll. Insbesondere möchte ich alles andere, als das σ betonen. Im Schulunterricht sollte es vollkommen genügen, die endliche Additivität von $\mathbb{P}$ als den entscheidenden Punkt des Wahrscheinlichkeitsbegriffs herauszuarbeiten. Außerdem geht es nicht darum, an Worten oder an einem bestimmten Formalismus zu kleben. Mit umso größerer Spannung erwarten wir die erste GK zum Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie lautet:

> *WS 2.1 Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können*

Aus dieser GK könnte durchaus etwas werden! Mit „Grundraum“ dürfte jene Menge gemeint sein, die ich oben mit Ω bezeichnet habe, mit „Ereignis“ ein Element der Algebra $\mathcal{A}$. Leider gibt auch die nächste GK darüber keine nähere Auskunft. Dafür ist erstmals von „Wahrscheinlichkeit“ die Rede, die man (mit oder ohne Kolmogorow) wohl als *den* fundamentalen Begriff des Inhaltsbereichs WS anzusehen geneigt ist:

> *WS 2.2 relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können*

Was Wahrscheinlichkeit ist, geht daraus nicht hervor, sondern wir erfahren nur eine ihrer Eigenschaften, nämlich durch gewisse Quotienten geschätzt werden zu können. An sich ist diese Enthaltsamkeit hinsichtlich metaphysischer Erklärungen lobenswert und wäre wohl auch ganz im Sinne Kolmogorows, der uns ja auch nicht verrät, *was* Wahrscheinlichkeit ist. Es ist geradezu der Witz an seiner Definition eines Wahrscheinlichkeitsraums, dass in der (σ-) Additivität von $\mathbb{P}$ (samt begleitenden Trivialforderungen) alles Nötige steckt, um darauf sowohl eine wunderbare Theorie als auch beeindruckend leistungsstarke Modelle für Anwendungen aufbauen zu können. Doch scheint man in der „Schulstochastik" keinen Anlass zu sehen, Nutzen aus den großen Freiheiten zu ziehen, die uns Kolmogorow eröffnet. Beispielsweise könnte man auf einer endlichen Menge $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$ a priori *beliebige* $p_i = \mathbb{P}(\{a_i\}) \in [0,1]$ zulassen, sofern sie nur $p_1 + \ldots + p_n = 1$ erfüllen. (Mit $n = 6$ könnte man damit beispielsweise auch einen „unfairen" Würfel modellieren.) Doch bräuchte man dazu einen sauberen Funktionsbegriff, dessen Fehlen ich ja bereits kritisiert habe. Anstatt begriffliche Klarheit zu schaffen, wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff auch in der folgenden GK WS 2.3 (siehe weiter unten) nur umkreist wie der heiße Brei. Bevor wir uns dieser nächsten GK zuwenden, soll aber noch ein weiterer problematischer Aspekt von WS 2.2 herausgearbeitet werden.

Und zwar liegt es nahe, WS 2.2 mit dem Gesetz der großen Zahlen im Hintergrund zu sehen. Man könnte etwas zugespitzt, aber ohne großes Risiko behaupten: Die beiden Grundbegriffe der Stochastik sind Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit, ihre beiden Hauptergebnisse sind das Gesetz der großen Zahlen und der Zentrale Grenzwertsatz. Das klingt alles im GKK an, expressis verbis erwähnt wird nur die Wahrscheinlichkeit, überzeugend erklärt wird gar nichts. Natürlich dürfen wir vom GKK auch keine umfassenden mathematischen Erklärungen erwarten. Dafür wären, wie schon an früherer Stelle bemerkt, andere, umfangreichere Unterlagen wünschenswert. Man möchte aber doch genauer verstehen, was mit einer GK gemeint ist. Zunächst zum Gesetz der großen Zahlen: Was spricht dagegen, eine Aussage der folgenden Art zu unterrichten? „Für eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen (die alle dieselbe Verteilung haben und nicht zu sehr schwanken dürfen) konvergieren die arithmetischen Mittel mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen den gemeinsamen Erwartungswert." Das ist wegen der unpräzisen Voraussetzung zwar kein mathematisches Theorem im strengen Sinn. Auch ist an dieser Stelle nicht ausdrücklich geklärt, wie das Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Raum aller möglichen Folgen zu definieren ist. Dafür drückt die vorgeschlagene Formulierung einen beträchtlichen Teil dessen aus, worum es in der Stochastik geht. Wer einwendet, dass dies in der Schule unmöglich gelehrt werden könne, weil die Begriffe „Unabhängigkeit" und „konvergieren" im GKK fehlen, dem antworte ich: Umso dringlicher ist die Aufnahme beider in den GKK zu fordern.

Doch nun zur bereits angekündigten nächsten GK:

> *WS 2.3 Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und inter-*

pretieren können

Mit „Laplace-Annahme“ ist anscheinend gemeint, dass es nur endlich viele Elementarereignisse gibt, die alle gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Nimmt man den ersten Teil von WS 2.3 wörtlich, so besagt er: Man soll in der Lage sein, zu zählen und, wenn beim Zählen als Ergebnis die Zahl n herauskommt, auch noch ihren Kehrwert $\frac{1}{n}$ zu bilden. Anspruchsloser geht es wohl kaum! Wertvoll wäre dabei aber gerade das Vermögen, kritisch zu beurteilen, *ob* die Laplace-Annahme gleicher Wahrscheinlichkeiten (etwa durch Symmetrieargumente) gerechtfertigt werden kann. Es ist nicht notwendig, dass ich hier eines der allseits bekannten Beispiele dafür ausbreite, dass gerade die Laplace-Annahme, obwohl vielleicht auf den ersten Blick plausibel, nach genauerer Prüfung verworfen werden muss. Hat man sich hingegen in einem konkreten Beispiel einmal vom Zutreffen der Laplace-Annahme überzeugt, so ist das Abzählen der Elementarereignisse und die Bildung des Kehrwerts ihrer Anzahl schwerlich als vollwertige Maturaaufgabe anzusehen. Im ersten Teil von WS 2.3 wurde also wieder einmal das mathematisch interessante Potenzial erstickt und durch das Banale ersetzt (SSAE).

Wenden wir uns dem zweiten Teil von WS 2.3 mit „Additions-“ und „Multiplikationsregel“ zu. Es scheint, dass unter „Additionsregel“ die Additivität von $\mathbb{P}$, also das wesentliche Element des Wahrscheinlichkeitsbegriffs selbst verstanden wird. Mit „Multiplikationsregel“ hingegen dürfte jene Beziehung zweier Ereignisse gemeint sein, die man gemeinhin zur Definition ihrer Unabhängigkeit verwendet. Nicht aber im GK: Hier kommt der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit nämlich gar nicht vor. Doch auch wenn man sich nur die beiden genannten Regeln vor Augen hält: Sowohl mathematisch als auch didaktisch höchst unglücklich ist die scheinbare Gleichrangigkeit, mit der sie, nur durch das Wort „und“ verknüpft, in einem Atemzug präsentiert werden. Dabei könnte ihr Status unterschiedlicher kaum sein: Das eine ist Bestandteil des Grundbegriffs, von dem große Teile des Inhaltsbereichs WS handeln. Das andere ist eine Eigenschaft, die ein Paar oder auch eine größere, möglicherweise auch unendliche Familie von Ereignissen haben kann oder auch nicht. Erst *wenn* diese Eigenschaft vorliegt, liefern die meisten interessanten Resultate der Stochastik (wie das Gesetz der großen Zahlen oder der Zentrale Grenzwertsatz) die beeindruckenden Aussagen. Doch wo kein Begriff von Unabhängigkeit, da auch keine interessante Stochastik![5] Dabei wäre der Begriff der Unabhängigkeit auch abseits jedes Formalismus wertvoll. Er wäre (vorzugsweise zusammen mit dem Begriff der Korrelation) z.B. dazu prädestiniert, zur Diskussion und Erhellung des ominösen und philosophisch so schwierigen Begriffs des Zufalls entscheidend beizutragen. Jedenfalls wäre es mehr als wünschenswert, sowohl bei der „Additionsregel“ als auch bei der „Multiplikationsregel“ dem Schematischen durch das Begriffliche erst seinen Sinn zu geben.

Wer den Begriff der Unabhängigkeit völlig vermeiden möchte, kann sich übrigens

[5] Ich darf auch auf meinen Artikel [6] verweisen.

noch auf folgende Ergänzung im GKK berufen:

> *Anmerkungen:*
>
> *Die Multiplikationsregel kann unter Verwendung der kombinatorischen Grundlagen und der Anwendung der Laplace-Regel (auch) umgangen werden.*

Man kann spekulieren, was genau und insbesondere welche „kombinatorischen Grundlagen“ hier gemeint sind. Darf man die letzte GK des Themenbereichs WS 2 als Hinweis deuten?

> *WS 2.4 Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können*

Es bietet sich zwar mancherlei an, um an WS 2.4 anzuschließen. Die Erfahrung zeigt aber, dass die in WS 2.3 und WS 2.4 enthaltenen Andeutungen zu vage sind, als dass daraus interessante Prüfungsaufgaben erwüchsen. Somit bleibt auch an dieser Stelle beträchtliches Potenzial ungenutzt (SSAE).

Wir wenden uns WS 3, dem dritten Themenbereich innerhalb des Inhaltsbereichs Wahrscheinlichkeit und Statistik, zu. Er trägt den Titel Wahrscheinlichkeitsverteilung(en). Mancherlei kommt in den vier GKen dieses Themenbereichs vor, nur nicht – man ist bereits darauf gefasst – ein klarer Hinweis, wie der titelgebende Begriff gemeint ist. Zwar lautet schon die erste GK:

> *WS 3.1 die Begriffe* Zufallsvariable, (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung, Erwartungswert *und* Standardabweichung *verständig deuten und einsetzen können*

Doch steht man ratlos vor der Frage, ob mit „(Wahrscheinlichkeits-)Verteilung“ der durch $\mathbb{P}$ gegebene Wahrscheinlichkeitsraum gemeint ist (vermutlich nicht, denn sonst wäre er schon früher aufgetaucht), eine Verteilungsfunktion (wodurch ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Trägermenge $\Omega = \mathbb{R}$ festgelegt wäre) oder sonst ein Surrogat der beiden. Zweifellos sind alle diese Begriffe aus WS 3.1 unverzichtbar für die Stochastik, doch verkommen sie in der Praxis der „Schulmathematik“ meist zu hohlen Schlagworten, die im Wesentlichen nur in zwei konkreten Fällen äußerst schematische Anwendung finden: Binomial- und Normalverteilung. Inwiefern sich beide Beispiele einem gemeinsamen allgemeinen Begriff unterordnen, bleibt im Dunkeln. Natürlich ist es schwierig zu begreifen, was eine Zufallsvariable ist, wenn der allgemeine Funktionsbegriff nicht wirklich verstanden wird. Und wie erst will man ohne klaren Begriff einer Zufallsvariablen und auf der Basis defizitärer Integralrechnung allgemein von Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen sprechen? Es scheint, als ginge dem System „Schulmathematik“ das Bewusstsein dafür ab, wie dünn das Eis ist, auf dem man sich in der Stochastik bewegt, und wie abgrundtief die Gewässer darunter mit ihren Strudeln und Ungetümen!

Und wie sieht die Praxis der „Schulstochastik“ angesichts WS 3.1 aus? De facto reduziert sich das gesamte einzubringende Wissen auf die auswendig gelernten Formeln $\mathbb{E}(X) = n \cdot p$ und $\mathbb{V}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$ (für X binomialverteilt mit Parametern n und p) bzw. $\mathbb{E}(X) = \mu$ und $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ (für X normalverteilt mit Parametern μ und σ). Damit sind wir auch schon bei der nächsten GK:

> *WS 3.2 Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen*

Hier wurde offenbar „Modell“ mit „Beispiel“ verwechselt. Bei der Binomialverteilung handelt es sich nämlich um ein *Beispiel* einer diskreten Verteilung – übrigens das einzige, das neben der nur implizit vorkommenden Gleichverteilung (Laplace) im GKK vorkommt. Von einem *Modell* hingegen spricht man in Bezug auf einen zunächst außermathematischen Sachverhalt, der erst in die Sprache der Mathematik übersetzt wird (vergleiche auch WS 3.3 weiter unten samt Fußnote). An WS 3.2 fällt außerdem kritisch auf, dass Erwartungswert und Varianz in der Praxis lediglich durch Einsetzen der Parameter in die obigen Formeln „ermittelt“ werden, ohne Verständnis für den Hintergrund. Insbesondere geht hier die Bezugnahme auf Unabhängigkeit, die man bei der Additivität von Varianzen ja braucht, schmerzlich ab.

Im Hinblick auf Anwendungen zweifellos höchst sinnvoll ist:

> *WS 3.3 Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann*[6]

Wie ist das ohne den Begriff der Unabhängigkeit auf verständige Weise möglich? Diese Frage wird vom GKK nicht beantwortet. Dafür geht es, an sich ebenfalls durchaus sinnvoll, mit der nächsten GK weiter:

> *WS 3.4 Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können*

Ein didaktisch wie auch historisch naheliegender Zugang zu einem der Hauptsätze der Stochastik scheint sich hier verselbstständigt zu haben. Das Ziel, zu dem dieser Zugang hätte führen sollen, nämlich der Zentrale Grenzwertsatz (ZGWS),

[6] Hier ist es im Gegensatz zu WS 3.2 korrekt, von „modellieren“ zu sprechen.

ist dabei jedoch verloren gegangen. Natürlich übersteigt eine strenge Formulierung des ZGWS (nicht nur in einer sehr allgemeinen Fassung mit asymptotisch vernachlässigbaren Folgen von Zufallsgrößen, Lindeberg- und Fellerbedingung o.Ä.) die Möglichkeiten des Schulunterrichts. Wo immer von Normalverteilung und Glockenkurve die Rede ist, sollte aber aus dem Unterricht der universelle Charakter dieser Verteilung hängen bleiben: Die normierte Summe sehr vieler unabhängiger Zufallsgrößen, von denen jede einzelne klein ist im Vergleich zur Summe, ist (approximativ) normalverteilt. Dabei kommt es – und darin liegt der Witz – *nicht* auf die spezielle Verteilung der einzelnen Summanden an. Die Binomialverteilungen als diskrete Approximationen spielen im ZGWS keine ausgezeichnete Rolle. Sie eignen sich nur deshalb besonders gut zur Veranschaulichung, weil sie mithilfe der Binomialkoeffizienten relativ leicht berechnet werden können. Es gibt also sehr gute Gründe, sie im Unterricht zur Motivation der Glockenkurve zu verwenden; der Held des ZGWS ist aber die Normalverteilung – und nur sie. Verwirrungen, die in diesem Zusammenhang weit verbreitet sind, manifestieren sich gelegentlich auch in Aufgaben, wo die Normalverteilung durch Binomialverteilungen approximiert wird, während in der Praxis der umgekehrte Weg der interessante ist: Ist die Normalverteilung einmal bekannt (und das ist sie, beispielsweise vermittels ihrer Dichtefunktion oder der im Unterricht gebräuchlichen Tabellen), so kann man sie als Approximation verwenden, z.B. für kompliziertere diskrete Verteilungen mit bekanntem Erwartungswert und Varianz, die als Summen vieler kleiner unabhängiger Zufallsgrößen zustandekommen.

Im GKK folgt unmittelbar auf WS 3.4:

> *Anmerkungen:*
>
> *Kennen und Anwenden der Faustregel, dass die Normalapproximation der Binomialverteilung mit den Parametern n und p dann anzuwenden ist und gute Näherungswerte liefert, wenn die Bedingung* $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 9$ *erfüllt ist. Die Anwendung der Stetigkeitskorrektur ist nicht notwendig und daher für Berechnungen im Zuge von Prüfungsbeispielen vernachlässigbar. Kennen des Verlaufs der Dichtefunktion* φ *der Standardnormalverteilung mit Erwartungswert* μ *und Standardabweichung* σ*. Arbeiten mit der Verteilungsfunktion* Φ *der Standardnormalverteilung und korrektes Ablesen der entsprechenden Werte.*

Die Zahl 9 in der „Faustregel“ vermag unter Mathematikern Heiterkeit hervorzurufen. Denn selbstverständlich würde die Faustregel nicht plötzlich völlig falsch, wenn man 9 durch 8 oder durch 10 ersetzte. Auch hängt es von der Art der Anwendung ab, welche Güte der Approximation als zufriedenstellend angesehen werden kann. Mehr Sinn hätte eine Ungleichung dieser Art, wenn mit ihr eine Quantifizierung der Approximationsgüte verbunden wäre. Interessant an der „Faustregel“ ist, wie der Term $n \cdot p \cdot (1-p)$, den wir übrigens schon als Varianz der Binomialverteilung kennengelernt haben, von den beiden Parametern n und p abhängt: Großes n und ein p nicht zu nahe bei 0 oder 1 garantieren eine gute Approximation.

Wir kommen zum letzten Themenbereich des GKK, der Schließenden/Beurteilenden Statistik, die aus nur einer GK besteht:

> *WS 4.1 Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekannten Anteil p interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können*

Sinnvolle und gleichzeitig korrekte Prüfungsaufgaben zum ersten Teil von WS 4.1 sind de facto kaum möglich, weil zu schwierig. Der Begriff des Konfidenzintervalls ist nämlich viel komplizierter, als es bei oberflächlicher Behandlung den Anschein hat (und auch als es in zahlreichen „schulmathematischen" Quellen suggeriert wird). Um das an einem möglichst einfachen Beispiel zu illustrieren, gehen wir von einer binomialverteilten Zufallsgröße aus, von der der Parameter n bekannt und p gesucht sei. Zur Konkretisierung denken wir uns eine Münze, von der wir nicht wissen, ob sie fair ist. Deshalb bezeichne p die Wahrscheinlichkeit für „Kopf", $1-p$ für „Adler". Wir wollen die Münze n-mal werfen und auf Basis des Ergebnisses ein Intervall angeben, in dem der Parameter p mit großer Sicherheit liegt. Wie p zu schätzen ist, liegt auf der Hand: durch den Wert $\tilde{p} := \frac{k}{n}$, wenn unter n Würfen k-mal „Kopf" vorgekommen ist. Natürlich hoffen wir auf $\tilde{p} \approx p$. Es wäre aber absurd, exakt mit $\tilde{p} = p$ zu rechnen. Ein Konfidenzintervall $[a,b]$, etwa $a = \tilde{p} - \varepsilon$ und $b = \tilde{p} + \varepsilon$ mit angemessen gewähltem $\varepsilon > 0$, ist – zunächst sehr grob gesprochen – ein Intervall, das p „mit hoher Wahrscheinlichkeit" enthält. Geht man dieser noch ungenauen Formulierung auf den Grund, so erkennt man die Schwierigkeit: Sie suggeriert, dass der Parameter p selbst eine Zufallsgröße mit einer Verteilung sei, unter der das Intervall $[a,b]$ große Wahrscheinlichkeit habe. Das ist aber (in der klassischen, frequentistischen Statistik, anders verhält es sich in der Bayesschen) nicht der Fall, weil p *keine* Zufallsgröße, sondern eine feste, wenn auch unbekannte reelle Zahl ist. Jedoch sollen sich die Intervallgrenzen a und b aus der vorliegenden (zufälligen) Stichprobe X ergeben. Sie sind also selber als Zufallsgrößen $a = a(X)$ und $b = b(X)$ aufzufassen. Allerdings kennen wir, weil der wahre Wert p ja unbekannt ist, die Verteilung der Stichprobe nicht. Eine korrekte Beschreibung für ein Konfidenzintervall könnte etwa so lauten: Die Schätzfunktionen $a(X)$ und $b(X)$ sind so zu definieren, dass für jeden denkbaren Parameter p (im Beispiel $p \in [0,1]$) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $a(X) \leq p \leq b(X)$ gilt, z.B. mindestens 0,99 ist. Man mache sich an dieser Stelle klar, welch umfangreiche Rechnungen notwendig wären, um $a(X)$ und $b(X)$ nicht nur geeignet zu definieren (zum Beispiel als $a(X) := \tilde{p} - \varepsilon_1(X)$ und

$b(X) := \tilde{p} + \varepsilon_2(X)$ mit näher zu spezifizierenden „Sicherheitsabständen" $\varepsilon_1(X)$ und $\varepsilon_2(X)$), sondern für jedes $p \in [0,1]$ die behauptete Wahrscheinlichkeitsaussage nachzuweisen. Wie mir scheint, bestehen die einzig realistischen Aufgaben zu WS 4.1 darin, in Standardformeln für $\varepsilon_1(X)$ und $\varepsilon_2(X)$ einzusetzen.

Vielleicht wäre es einfacher und trotzdem sinnvoll, statt der Konfidenzintervalle Hypothesentests aufzunehmen. Dabei geht es nicht um ein Intervall, in dem der gesuchte Parameter hoffentlich liegt, sondern darum, ob eine den gesuchten Parameter betreffende Behauptung, genannt „Nullhypothese" H_0, durch eine Stichprobe hinreichend gestützt oder widerlegt wird. H_0 könnte beispielsweise lauten: Die Münze ist fair, also $p = \frac{1}{2}$. Bei einem Test für diese Hypothese $p = \frac{1}{2}$ wäre ein Intervall $[a,b]$, in diesem Fall sinnvollerweise mit $a < \frac{1}{2} < b$, anzugeben derart, dass $\tilde{p}$, aufgefasst als Zufallsgröße, dann mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit in $[a,b]$ landet, sofern der unbekannte Parameter tatsächlich $p = \frac{1}{2}$ ist. Erhält man jedoch ein $\tilde{p}$ außerhalb dieses Bereichs, nimmt man das zum Anlass, H_0 zu verwerfen. Die logische Struktur kann man als eine mit Wahrscheinlichkeiten behaftete Variante eines indirekten Beweises ansehen. Auch eine Assoziation zum berühmten Popperschen Falsifizierungsprinzip liegt nahe, wonach Theorien in empirischen Wissenschaften falsifiziert, aber nicht verifiziert werden können. Auf sehr ähnliche asymmetrische Weise ist bei einem Test das Annehmen einer Nullhypothese H_0 weniger aussagekräftig als, sofern es die Daten rechtfertigen, das Verwerfen von H_0, denn: Bei einem Schätzwert $\tilde{p}$ nahe bei $\frac{1}{2}$ ist jeder der (unendlich vielen) Werte $p \neq \frac{1}{2}$, wenn er nur sehr nahe bei $\tilde{p}$ liegt, kaum weniger plausibel als exakt $p = \frac{1}{2}$ (deshalb keine „Verifikation" von H_0). Umgekehrt wäre aber $p = \frac{1}{2}$ äußerst unplausibel, wenn $\tilde{p} = \frac{k}{n}$ weit weg von $\frac{1}{2}$ liegt (in diesem Sinne also „Falsifikation" von H_0).

Die Beispiele, die ich für Konfidenzintervalle und Hypothesentesten gegeben habe, sind so ziemlich die einfachsten, an denen das Typische sichtbar wird. Die Logik hinter dem Testen dürfte etwas leichter zugänglich sein. Denn auch für einzelne Werte von p (in obigem Beispiel $p = \frac{1}{2}$) gibt es sinnvolle Tests, während beim Konfidenzintervall unweigerlich ein zusätzlicher versteckter Allquantor im Spiel ist (im Beispiel: $\forall p \in [0,1]$) . Überdies sind die oben angedeuteten Verbindungen zu indirektem Beweis und Falsifikation von übergeordnetem Interesse. Im Hinblick auf Bildungsstandards, Lehrplan, GKK, etc. könnte es sich lohnen, all das breiter zu diskutieren.

3 Epilog

Abschließend sollen aus den bisher beobachteten Einzelheiten Diagnosen auf allgemeiner Ebene abgeleitet (3.1) und nochmals mit konkreten Beispielen in Verbindung gebracht werden (3.2). Aus der Feststellung von Defiziten ergeben sich umgekehrt auch Anliegen, was man im Hinblick auf eine Verbesserung bedenken sollte (3.3). Am Ende stehen ein Schlussresümee (3.4) und eine Danksagung (3.5).

3.1 Systematisches Defizit bei Begrifflichkeit und Sprache

In Kapitel 2, dem Hauptteil dieses Textes, habe ich über das Problematische einzelner GKen im aktuellen GKK gesprochen. Ich halte das für notwendig, weil es, soweit ich es überblicke, in dieser Breite überhaupt noch nie getan worden ist. Alleine die Quantität der mathematischen Mängel, die dabei zum Vorschein kommen, vermag doch zu erstaunen. Dennoch ist es notwendig, die Problemanalyse neben der Aufzählung einzelner Mängel auch auf einer grundsätzlichen Ebene voranzutreiben. Welche allgemeinen Tendenzen, mit denen viele der aufgezeigten Einzelprobleme zusammenhängen, lassen sich identifizieren?

Vor allem orte ich eine Blindheit gegenüber der Rolle der Sprache und, damit eng zusammenhängend, begrifflicher Klarheit. Im Mathematikunterricht hat man sich völlig abgewöhnt, Fragen der Form „Was ist ein(e) … ?“ zu stellen. Anstatt Verständnis zu entwickeln und den Dingen auf den Grund zu gehen, werden sogenannte Kompetenzen erworben und bei Prüfungen eingefordert, sonst nichts. (Es klingt wie: „Brauchbare Maschinen haben Funktionen, brauchbare Menschen haben Kompetenzen.“) Natürlich ist es eine anspruchsvolle Herausforderung, Prüfungsaufgaben auf Verständnis statt auf Kompetenzen auszurichten. Wenn man sich aber wie im GKK fast völlig auf solche Kompetenzen beschränkt, wo man etwas „können“ oder „kennen“ muss, so legt man sich ohne Not Fesseln an. Was das in der Praxis heißt, lässt sich – zugegebenermaßen polemisch überspitzt – so formulieren: Bei „können“ hat man den richtigen bedingten Pawlowschen Reflex auszulösen, bei „kennen“ hat man zu nicken und eventuell eine Zuordnung zu treffen, zum Beispiel zwischen Grafiken aus einer Liste und Schlagworten aus einer anderen Liste. Manchmal reicht es sogar, ein Schlagwort, das eine Kompetenz nur bezeichnet, wiederzuerkennen, um dadurch die Kompetenz selbst, für die das Schlagwort ursprünglich gestanden ist, attestiert zu bekommen. Böse Zungen meinen, dass sich im Laufe der Zeit alles nur mehr auf eine einzige Kompetenz konzentriere: die Inkompetenzkompensationskompetenz. Als vor Jahren das Schlagwort von den „Kompetenzen“ im Bildungsbereich ubiquitär wurde, war ich angesichts kritischer Haltungen, wie sie etwa in [4] zum Ausdruck kommen, noch geneigt einzuwenden, dass Diskussionen um die Wortwahl nur Schall und Rauch seien. Doch frage ich unter dem Gesichtspunkt SSAE: Kommt ein GKK, der neben „können“ und gelegentlich „kennen“ kaum noch weitere Zeitwörter verwendet, nur mir wie eine Parodie seiner selbst vor?

Damit ich mich aber nicht in einem leeren Streit um Worte verfange, möchte ich mich auf die Suche nach konstruktiven Perspektiven begeben. Dazu rufe ich zunächst eine erkenntnistheoretische Selbstverständlichkeit in Erinnerung: Überall dort, wo Menschen versuchen, bestimmte Aspekte der sie umgebenden Wirklichkeit zu verstehen, werden Begriffe gebildet. Zunächst entstehen sie vielleicht nur im Bewusstsein eines Einzelnen. Oft ergeben sich diese Begriffe als Abstraktionen, indem man aus einer chaotischen Flut von Einzelphänomenen gewisse herausgreift, unter denen man eine Ähnlichkeit wahrzunehmen meint. Für das Gemeinsame der untereinander ähnlichen Einzelphänomene soll dann der neu zu prägende Begriff stehen. In der Mathematik und auch generell kann die Bildung eines neuen und klaren Begriffs einen wichtigen, manchmal sogar entscheidenden Erkenntnisfortschritt bedeuten. Doch sind wir nicht nur erkennende, wir sind auch soziale Wesen. Der einzelne Mensch ist verloren ohne seine Mitmenschen. Deshalb wollen wir über die Begriffe, mit denen wir unsere Vorstellung von der Welt strukturieren, auch „kommunizieren“, d.h. sie „vergemeinschaften“. Das bedeutet mehr als Informationsübertragung in eine Richtung. Deshalb hat uns die Evolution unsere Sprachfähigkeit entwickeln lassen. Begriffsbildung und Versprachlichung werden so zum allgemeinmenschlichen Fundament jeglicher Wissenschaft, ja unserer gesamten Zivilisation.

Die Mathematik hat daran nicht nur Anteil, sie ist geradezu *das* Musterbeispiel für den Prozess der Begriffswerdung (meist durch Abstraktion) und ihrer Verbalisierung. Und just im Mathematikunterricht werden diese Potenziale des menschlichen Bewusstseins, auf das sich unsere Spezies so viel zugutehält, traditionell sträflich vernachlässigt.

Um Missverständnisse zu vermeiden, möchte ich bei dieser Gelegenheit betonen, dass bei der Versprachlichung von Mathematik nicht das Vokabular der Fachsprache das primär Interessante ist. Vielmehr geht es um die Möglichkeit der Sprache, mithilfe von bereits etablierten Begriffen neue präzis zu definieren und dann ebenso präzis Aussagen (Theoreme) darüber zu machen, die ihrerseits gleichfalls präziser Beweise bedürfen. Mathematische Formeln und Rechnungen sind nur Bestandteile komplexerer sprachlicher Äußerungen und dienen in der Regel zur Abkürzung und/oder zur besseren visuellen Wiedergabe einer abstrakten Struktur.

3.2 Nochmals ein paar Beispiele

Um meine wortreichen Behauptungen auch mit konkreten Inhalten zu füllen, will ich ein paar Beispiele aus dem Hauptteil rekapitulieren, die dafür stehen, wie im GKK großartige Gelegenheiten versäumt werden, Begriffsbildung und Versprachlichung anhand interessanter Mathematik zu schulen. Solche Beispiele finden sich in jedem der vier Themenbereiche des GKK.

Wenn ich bei AG 1.1 im Zusammenhang mit den natürlichen Zahlen (außerdem nach AN 1.4) das Induktionsprinzip erwähnt habe, liegt mir nicht primär daran, im Schulunterricht schematische Induktionsbeweise zu etablieren und dann zu drillen. Das wären nur *Anwendungen* des Induktionsprinzips. Das Induktionsprinzip selbst spiegelt eines der großen Aha-Erlebnisse wider, die die Mathematik zu bieten hat: Mit einer Formulierung wie zum Beispiel „Jede Menge von Zahlen, die 0 enthält und mit jedem n auch den Nachfolger $n+1$, muss bereits alle natürlichen Zahlen enthalten" (ergänzt durch ein paar andere Banalitäten, Schlagwort Peano-Axiome) gelingt es, den Begriff vom Zahlenbereich $\mathbb{N}$ sprachlich so präzis zu fassen, dass damit mit voller mathematischer Strenge gearbeitet werden kann. Das lässt sich dann anhand von (mehr oder weniger schematischen) Induktionsbeweisen illustrieren, anwenden und, wenn man will, auch üben.

Relation, Funktion und Verkettung von Funktionen im Zusammenhang mit FA 1.1 sind weitere Beispiele, aus denen man schon im Unterricht wesentlich mehr herausholen könnte. Entsprechendes gilt für den den gesamten Themenbereich AN durchziehenden Grenzwertbegriff in seinen verschiedenen Ausprägungen. Aus der Stochastik schließlich erinnere ich an den fundamentalen Begriff der Wahrscheinlichkeit (siehe etwa die Ausführungen zu WS 2.1, 2.2. und 2.3) sowie den unmittelbar darauf aufsetzenden und für die gesamte Stochastik zentralen Begriff der Unabhängigkeit samt seiner Relevanz für das Problem, „Zufall" philosophisch zu fassen (siehe WS 2.3 und anschließende Diskussion). Da ich diese Themen im Hauptteil über den GKK bereits besprochen habe, darf ich mich hier mit diesen kurzen Erwähnungen begnügen, die lediglich nochmals die Verbindung zwischen Allgemeinem und Konkretem belegen sollen.

3.3 (Schul-)Mathematik und (Gegen-)Aufklärung

Angesichts der weitreichenden Potenziale des Mathematikunterrichts wirkt das tatsächlich Umgesetzte wie eine lieblose Ansammlung von Fragmenten, die sich leider nicht selten in Belanglosigkeiten verlieren und vom Wesentlichen ablenken. Man könnte meinen, eine böse Allianz von Finstermännern hätte beschlossen, den Mathematikunterricht geradezu als Speerspitze der Gegenaufklärung zu instrumentalisieren. Doch sind solche Verschwörungstheorien natürlich irrational und bringen uns nicht weiter.

In einem Punkt fällt es aber schwer, weiter reichende Spekulationen zu unterdrücken. Und zwar geht es um die Verwendung des Computers. Es besteht kein Zweifel, dass er, unter klugem Einsatz der reichlich vorhandenen Software, für die Illustration mathematischer Inhalte didaktische Möglichkeiten eröffnet, die früheren Generationen noch nicht zur Verfügung standen. Ganz anders verhält es sich aber mit Prüfungen. Schon seit Jahren beobachte ich eine mir unverständliche Vehemenz, mit der von vielen Seiten der Einsatz das Computers auch als Prüfinstrument bei der Zentralmatura in Mathematik propagiert wird. Für diese Propaganda werden auch beträchtliche Ressourcen frei gemacht, während an anderen Stellen – etwa wenn es um die Behebung der in diesem Artikel aufgezeigten Mängel geht – Mittel für das Notwendigste angeblich fehlen. Meines Erachtens wiegen die Argumente gegen den Einsatz des Computers bei Prüfungen sehr schwer. Es gibt ja auch Gründe, dass an Universitäten selbst Computerspezialisten ersten Ranges sich bei Prüfungen nicht auf ihr Lieblingsinstrument verlassen. Im Zuge meiner Arbeit für die Zentralmatura habe ich meine Argumente gegen den Computereinsatz bei der Prüfung immer wieder vorgebracht. Die Beharrlichkeit, mit der darauf nicht einmal eingegangen wurde, lässt mich mit Cicero fragen: Cui bono?

Sehr klar rational fassbar und verstehbar sind hingegen solche Mechanismen, wo eines ins andere greift und schließlich in unerwünschte Resultate mündet, obwohl keiner der Beteiligten sie beabsichtigen konnte. Bereits eingangs habe ich in 1.1 jene Dynamik der früheren Form der Mathematikmatura skizziert, die ein vom Lehrer bestimmtes „teaching to the test" nach sich gezogen hatte. Dabei wurden nur einige wenige, teils artifiziell komplizierte Aufgabentypen gedrillt, ohne dabei das Verständnis für das Wesentliche zu fördern. Neuerdings ist die Zahl der verschiedenen Aufgabentypen, auf die sich das nunmehr durch den GKK bestimmte „teaching to the test" in Zukunft zu konzentrieren droht, zwar etwas größer. Dafür findet das allermeiste auf viel geringerem Komplexitätsniveau statt. Was einem lieber ist (oder eigentlich: wovor einem mehr graut), dürfte Geschmackssache sein.[7] Als Rechtfertigung für die Systemumstellung auf die Zentralmatura kann ihre gegenwärtige Praxis jedenfalls noch nicht wirklich überzeugen. Es wäre sehr bedauerlich, wenn das so bliebe. Was also wäre zu tun?

Manches geht aus dem bisher Gesagten bereits hervor. Außerdem verweise ich auf [7], wo ich bereits einige Vorschläge formuliert habe. Insbesondere behandle ich dort die meines Erachtens entscheidende Frage, wie man – etwa mithilfe permanenter Fluktuationen im Stoff – verhindern könnte, dass ein GKK, wie perfekt auch immer er im Idealfall ausformuliert sein mag, längerfristig zu einer Erstarrung mit entsprechendem „teaching to the test" führt.

Um der Aufklärung und nicht ihrem Gegenteil zuzuarbeiten (ich darf auch auf [8] verweisen), haben wir dem Mathematikunterricht zuallererst eine verfeinerungsfähige Sprache wiederzugeben. Wann und wo immer es intellektuell anspruchsvoll und damit erst interessant wird, dürfen wir nicht, wie es allem Anschein nach geradezu zum kollektiven Reflex geworden ist, aus übergroßem Respekt vor der didaktischen Herausforderung ausweichen und ängstlich den Kopf einziehen. Stattdessen sollten wir uns bemühen, möglichst viel Interessantes durch geschickte Adaption in den Mathematikunterricht hinüberzuretten. Das bedingt eine Bewusstheit für den begrifflichen Charakter der Mathematik und die dafür notwendige sprachliche Genauigkeit, die sich nicht in terminologischen Haarspaltereien erschöpfen darf, sondern logische Strukturen richtig wiedergeben soll.

---

[7] Als grundsätzlicher Befürworter der Zentralmatura bekenne ich, dass mir in diesem Punkt persönlich immer noch vor dem alten System mehr graut. Manches deutet darauf hin, dass bei der Zentralmatura auch in der gegenwärtig unbefriedigenden Situation trotz allem ein ganz kleines bisschen Mehr an echtem Verständnis hängen bleibt. Doch könnte ich mich da auch täuschen. Vor allem ist zu befürchten, dass ein dauerhaftes Beharren auf der aktuellen Version des GKK längerfristig sehr negative Auswirkungen zeitigen wird.

Auch der Lehrplan (siehe [2]), vor allem in seinem (teilweise hervorragenden!) allgemeinen Teil könnte dazu einen wertvollen Beitrag leisten. Wer sich bei der Gestaltung von Prüfungen und erst recht im Unterricht die sechs darin verankerten Aspekte der Mathematik zu Herzen nimmt, kann kaum fehlgehen. Was dort mit wenigen Schlagworten über den „schöpferisch-kreativen", den „sprachlichen", den „erkenntnistheoretischen", den „pragmatisch-anwendungsorientierten", den „autonomen" und den „kulturell-historischen" Aspekt gesagt wird, deckt bei sinnvoller Interpretation den allergrößten Teil dessen ab, was einem an Mathematik wichtig sein kann. Das ursprüngliche bildungstheoretische Konzept der AHS-Zentralmatura von Roland Fischer und Werner Peschek fügt sich da sinnvoll ein, auch wenn eine vier- oder fünfstündige Prüfung natürlich nicht alles testen kann, was man sich von einem Mathematikunterricht, der sich über immerhin zwölf Schuljahre erstreckt, erhofft.

Ich möchte auch auf das Projekt „Mathematik macht Freu(n)de" (siehe [3]) hinweisen, im Rahmen dessen Michael Eichmair von der Universität Wien und sein Team seit ein, zwei Jahren u.a. sehr empfehlenswerte Unterrichtsmaterialien für Schüler entwickeln. Vielleicht können derartige Errungenschaften auch für die Zentralmatura nutzbar gemacht werden.

3.4 Schlussresümee

Die aktuelle Organisation und Gestaltung der AHS-Zentralmatura in Mathematik hat zur Folge, dass der Katalog der insgesamt nur 73 sogenannten Grundkompetenzen mittlerweile zur übermächtigen Instanz geworden ist, an der sich zunehmend der gesamte Unterricht orientiert. Ist schon dieser Umstand allein nicht wünschenswert, so irritiert mindestens ebenso sehr, welche ganz konkreten mathematischen Mängel darin schon seit mehreren Jahren anscheinend widerspruchslos hingenommen werden. Eines meiner Anliegen im vorliegenden Text ist die Diagnose solcher Mängel sowie die Argumentation, warum ihre Auswirkungen höchst bedenklich sind und nicht widerstandslos hingenommen werden dürfen. Dagegen aufzutreten, liegt in der Verantwortung von uns Mathematikern.

Mit der kosmetischen Ausbesserung der erwähnten Fehler wird man sich nicht zufriedengeben dürfen. Längerfristig wären viel tiefer greifende Initiativen erforderlich, die neben dem Katalog der Grundkompetenzen auch den Lehrplan betreffen, außerdem die Erstellung von Unterlagen für die Lehrerschaft, etc. Wie solche Initiativen aussehen könnten, habe ich in diesem Text bestenfalls angedeutet; etwas mehr dazu findet sich in [7].

Die Zentralmatura könnte eine Chance sein, den Mathematikunterricht an Österreichs Höheren Schulen auf ein neues und tragfähigeres Fundament zu stellen. Zurzeit drohen die Entwicklungen aber in die verkehrte Richtung zu laufen. Deshalb appelliere ich an die fachmathematische Gemeinschaft in Österreich, diese

Entwicklungen kritisch zu beobachten, die vielen Argumente, die für oder gegen die unterschiedlichsten Pläne vorgebracht werden, mit Sachverstand zu prüfen und sich zu Wort zu melden, wann immer es notwendig erscheint.

3.5 Danksagung

Ich danke Gerhard Dorfer, Michael Fischer, Clemens Fuchs, Martin Goldstern, Gernot Greschonig, Gregor Kastner, Manfred Kronfellner und Gerald Kuba für wertvolle Verbesserungsvorschläge zu einer Vorversion des vorliegenden Artikels.

Literatur

[1] V. Aue et al. *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik*. Am 24.1.2018 online verfügbar unter:
`https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf`

[2] Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. *AHS-Lehrpläne Oberstufe neu: Mathematik*. Am 30.1.2018 online verfügbar unter:
`https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf`

[3] M. Eichmair et al. *Mathematik macht Freu(n)de*. Am 31.1.2018 online verfügbar unter:
`http://mathematikmachtfreunde.univie.ac.at/`

[4] K.-H. Graß. *Kompetenzorientierung – Gefahren bei der Implementierung und ökonomische Einflüsse*. Internat. Math. Nachrichten, 232 (2016), 25-45.

[5] R. Winkler. *Im Anfang war die Exponentialfunktion*. Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft – Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen, 44 (Jänner 2012), 98-109. Auch im Internet verfügbar unter:
`http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/exp.pdf`

[6] R. Winkler. *Stochastik – ein Fest der Unabhängigkeit*. Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft – Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen, 45 (2012), 122-136. Auch im Internet verfügbar unter:
`http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/stochastik.pdf`

[7] R. Winkler. *Zentralmatura – quo vadis?* Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft – Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik an Höheren Schulen, 49 (2016), 131-144. Auch im Internet verfügbar unter:
`http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/quo-vadis.pdf`

[8] R. Winkler. *Mathematik als zentraler Teil des Projektes Aufklärung auf breiter Front*. Soll 2018 erscheinen in: *Mathematik und Gesellschaft. Historische, philosophische und didaktische Perspektiven.* Herausgeber: G. Nickel, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink, M. Rathgeb. Springer Spektrum.

Adresse des Autors:
Reinhard Winkler
TU Wien
Wiedner Hauptstr. 8
A-1040 Wien
email reinhard.winkler@tuwien.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 237 (2018), 59–63

August Florian 1928–2017

Christian Buchta
Univ. Salzburg

Am 1. November 2017 ist August Florian, em.o. Professor der Universität Salzburg, im 90. Lebensjahr verstorben. Seit 1975 war er korrespondierendes Mitglied und seit 1995 wirkliches Mitglied der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften.

Ansprache[1] im Rahmen der Trauerfeier für August Florian am 13. November 2017 in Salzburg

Liebe Söhne Peter, Andreas und Thomas, liebe Schwiegertochter Sandra, liebe Enkelkinder David und Anna, liebe weitere Angehörige, von denen mir insbesondere die Nichte Doris, Tochter des verstorbenen Bruders Helmut, und der Schwager Peter, Bruder der verstorbenen Frau Evelyn, aus Erzählungen geläufig sind.

Liebe Nachbarn, liebe Hausgemeinschaft, liebe Freunde und Weggefährten! Lieber Herr Altrektor Schweiger, ich spreche Dich so an, weil ich weiß, dass das im Sinn von Gustl wäre. Liebe Frau Vizerektorin Ferreira, Herr Prof. Florian würde es sehr zu schätzen wissen, dass mehr als zwanzig Jahre nach seiner Emeritierung ein Mitglied des amtierenden Rektorats ihm diese Ehre erweist. Lieber Herr Fachbereichsleiter Schröder, liebe Frau Fachbereichsleiterin Bögelein, ich danke Euch, dass Ihr gekommen seid, obwohl Herr Florian in der Zeit, seit Ihr in Salzburg seid, im Fachbereich nicht mehr so präsent war und Ihr ihn deshalb gar nicht so nah gekannt habt.

Liebe Kolleginnen und Kollegen, auch aus anderen Fachbereichen und aus anderen Einrichtungen der Universität. Ich bin sehr gerührt, hier Gesichter zu sehen, die ich schon seit Jahren nicht mehr gesehen habe und die hier aus der Pension aufgetaucht sind, um August Florian zu ehren.

Der älteste Sohn Peter hat mich im Namen der Familie gefragt, ob ich hier einige Worte sagen könnte. Ein ebensolches Mandat habe ich von den Kolleginnen und Kollegen im Fachbereich erhalten. So möchte ich einerseits kurz etwas zur fach-

[1]Die Ansprache wurde frei gehalten und im Nachhinein aus dem Gedächtnis sinngemäß aufgeschrieben.

ISSN 0020-7926

lichen Würdigung von August Florian sagen und andererseits einige persönliche Erinnerungen ansprechen.

August Florian im Jahr 2006

August Florian wurde 1928 in Graz geboren. Er studierte Mathematik und Physik an der Universität Graz, wo er auch promovierte. Als Hans Hornich, damals in Graz tätig, den Ruf auf die Nachfolge von Paul Funk an der Technischen Hochschule Wien, jetzt TU Wien, erhalten hatte, bot er August Florian an, nach Wien mitzukommen und eine Assistentenstelle zu übernehmen. Das Arbeitsgebiet von Hans Hornich war die Funktionentheorie, heute würde man Complex Analysis sagen, mit der sich August Florian nicht beschäftigte. Mit dem Angebot, die Assistentenstelle zu übernehmen, war nicht die Erwartung verbunden, sich in dieses Gebiet einzuarbeiten. Hans Hornich hatte die Einstellung, jeder Mitarbeiter solle wissenschaftlich machen, was er wolle, und so war er ganz damit einverstanden, dass August Florian sich weiter mit dem beschäftigte, was er bereits in Graz begonnen hatte, nämlich die Diskrete Geometrie. Dieses Gebiet wurde damals in Österreich von niemandem betrieben! Eine fachliche Bezugsperson war der spätere Salzburger Ehrendoktor László Fejes Tóth in Ungarn, der einige Jahre davor ein Buch mit dem wenig spektakulären Titel „Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum“ verfasst hatte. Das Buch war in gewisser Weise bemerkenswert. Nicht alles, was als mathematische Tatsache dargestellt wird, würde man heute als bewiesen akzeptieren. Manche der Aussagen könnten nach gegenwärtiger Auffassung bei wohlwollender Betrachtung ein Programm für ein Forschungsprojekt abgeben, bei weniger wohlwollender Betrachtung könnte man sie als reine

Spekulation ansehen. Dennoch ist das Buch in der berühmten „Gelben Reihe“ des Springer-Verlags „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften“ erschienen.

Das Buch war für August Florian ein mathematisches Programm. Seine beachtlichen Beiträge zu diesem Gebiet bildeten die Grundlage dafür, dass er als erster Ordinarius für Mathematik nach Salzburg berufen wurde und in weiterer Folge maßgeblich zum Aufbau des mathematischen Instituts beitrug. Da ich hier auch als Vertreter der Kollegen spreche, habe ich das Gespräch mit Hans Linhart, Ferdinand Österreicher und Max Thaler gesucht, weil ich ja während der aktiven Zeit von August Florian nicht in Salzburg war. Besonders wurde hervorgehoben, dass August Florian beispielsweise seine Tätigkeit als Institutsvorstand immer sehr engagiert, sorgfältig und pflichtbewusst ausgeführt hat, und es war den genannten Kollegen ein Anliegen, das hier auch zum Ausdruck zu bringen. Ich selbst habe in anderem Zusammenhang die Erfahrung gemacht, dass August Florian alle ihm anvertrauten Aufgaben stets sehr sorgfältig und gewissenhaft erledigt hat.

Sein wissenschaftliches Interesse galt auch nach seiner Berufung nach Salzburg der Diskreten Geometrie. Mit Hans Linhart hatte er einen erfolgreichen Partner. Während der ersten Jahre seiner Tätigkeit in Salzburg nahm die Diskrete Geometrie als Gebiet innerhalb der Mathematik einen enormen Aufschwung. Dies ging Hand in Hand damit, dass durch die rasante Entwicklung der Computer sich neue Möglichkeiten boten und das Gebiet das Interesse vieler Fachkollegen weckte. Es etablierte sich die sogenannte Computational Geometry als neues Fachgebiet, und bald verschmolzen die Diskrete Geometrie und die Computational Geometry zu einem einheitlichen Gebiet. Von besonderer Bedeutung für das Verschmelzen der Gebiete war die Gründung der sehr erfolgreichen Zeitschrift „Discrete and Computational Geometry“, die heute zu den renommiertesten mathematischen Zeitschriften zählt. August Florian wurde so von einem Vertreter eines kleinen Randgebiets der Mathematik zu einem Pionier eines großen, aufstrebenden und neuen Gebiets, das in einem der Mainstreams der Mathematik lag. In dem Kondolenzschreiben, das Vater und Sohn Böröczky geschickt haben, der Vater etwas jünger als August Florian, der Sohn im Alter der Söhne, ist das folgendermaßen, aus meiner Sicht sehr treffend, ausgedrückt: „Our heart is full with deep sadness learning the news about August Florian whom my father considers a mentor and friend, and I consider a hero of the early days of discrete geometry. [...]“

Ich möchte nun auf ein paar persönliche Erinnerungen eingehen. Ich habe die Familie Florian im Sommer 1982 kennengelernt. Die ganze Familie war zu einer Tagung nach Siegen gekommen, die Jörg Wills, der mehreren Anwesenden bekannt ist, veranstaltet hat. Danach fand eine Konferenz in Oberwolfach statt, wo auch die ganze Familie dabei war. Den Mathematikern sind ja die Örtlichkeiten vor Augen. Oben auf dem Berg im Forschungsinstitut fand die Tagung statt, die Familie war unten im Dorf im Gasthof Hirschen untergebracht. Während der Tagung brach bei August Florian eine durch einen Zeckenbiss ausgelöste FSME-Erkrankung aus, die sich dramatisch entwickelte. Er wurde in die Universitätsklinik nach Freiburg gebracht, seine Frau blieb bei ihm in der Klinik, und die Söhne kamen in die Obhut seines Bruders und dessen Frau. Eine gewisse Zeit lang stand das Überleben auf des Messers Schneide. Endlich kam eine positive Nachricht von seiner Frau Evelyn mit den Worten: „Er macht wieder Mathematik.“ Das bedeutete, er wird überleben.

Ich möchte heute auch die Gelegenheit nützen, seiner Frau Evelyn zu gedenken, die ihren Mann bei all seinem beruflichen Wirken intensiv unterstützte, ja die sich mit seinen beruflichen Zielen vollständig identifizierte. August Florian veranstaltete mehrere größere Tagungen über Diskrete Geometrie. Bei der größten dieser Tagungen im Jahr 1985 gab Evelyn Florian eine Abendeinladung in ihrer Wohnung mit vierzig Tagungsteilnehmern. Zu diesem Zweck wurden in wochenlanger Vorbereitung Möbel aus der Wohnung entfernt, um Platz für zusätzliche Sitzgelegenheiten zu haben. Diese Abendeinladung ist manchen immer noch in guter Erinnerung. Gerade als ich meinen Computer herunterfahren wollte, um hierher zu kommen, erhielt ich ein Kondolenzschreiben des großen, bedeutenden englischen Mathematikers David Larman, der offenbar in Erinnerung an diese Einladung unter anderem schrieb: „He was very welcoming when I visited Salzburg.“

Seine Frau lernte ich näher in Italien kennen. Sie stammte aus einem alten schottischen Adelsgeschlecht, den Drummonds. Schloss Drummond in der Grafschaft Perthshire ist eine für seine Terrassengärten berühmte Sehenswürdigkeit, die in jedem Reiseführer zu finden ist. Evelyn Florian beeindruckte mich durch ihr vornehmes und elegantes Auftreten. Sie war sehr attraktiv, belesen und gebildet und hatte in Oxford studiert. Ein gemeinsamer Freund, der leider auch im letzten Jahr gestorben ist, Marius Stoka, hatte Zugang zu Geldquellen, die es ermöglichten, Tagungen in mondänen Hotels in Süditalien in exzeptionellen Lagen am Meer auszurichten, in die man im Rahmen seiner beruflichen Tätigkeit als Mathematiker üblicherweise nicht kommt. In dieses Ambiente passte das Ehepaar Florian aufgrund des perfekten Auftretens und der eleganten Kleidung hervorragend. Dieser Eindruck wurde durch den Gegensatz zum Outfit anderer Tagungsteilnehmer, die in Strandkleidung zu mehrgängigen Dinners erschienen, noch verstärkt.

Im Herbst 1998 erhielt Monika Ludwig, die August Florian auch verbunden ist und die heute leider nicht hier sein kann, weil sie ein Sabbatical in Berkeley verbringt, einen Preis der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Nach der Preisverleihung wurde zu einem Umtrunk in den Räumen der Akademie eingeladen, und Mitarbeiterinnen der Akademie boten auf Tabletts Häppchen und Süßigkeiten an. August Florian und ich waren so intensiv ins Gespräch vertieft, dass wir nicht bemerkten, dass sich der Raum schon geleert hatte und die Mitarbeiterinnen der Akademie nach einem höflichen Weg suchten, uns zum Aufbruch zu bewegen. Eine der Damen kam mit einem Tablett mit den noch verbliebenen Schokoladen auf August Florian zu und sagte: „Herr Professor, zum Abschied was Süßes?“ Und er antwortete: „Der Abschied ist nie süß“; und das mit einer Bitterkeit, die ich jetzt noch im Ohr habe und die zum Ausdruck brachte, wie wenig, wie überhaupt nicht er den Tod seiner Frau verwunden hatte, der damals ja bereits fast fünf Jahre zurücklag.

Im September 2001 konnte ich nach gewissen Verzögerungen seine Nachfolge antreten. Bald nach mir kam Sarah Lederer, und unser erstes gemeinsames größeres Projekt war die Ausrichtung einer Tagung zu August Florians 75. Geburtstag. Erst nachträglich wurde mir bewusst, wie gut sich die Tagung auch aufgrund ihres Rahmenprogramms in die Reihe der davor von August Florian veranstalteten Tagungen einfügte. Es gab ein Konzert mit anschließendem Empfang, ein festliches Abendessen und einen Ausflug ins Salzkammergut. Die Tagung, mit der sich Sarah sehr viel Mühe gegeben hatte, war der Anfang einer von gegenseitiger Wertschätzung getragenen Freundschaft zwischen August Florian und Sarah Lederer, die auch dazu beitrug, dass August Florian weiterhin regelmäßig in den Fachbereich kam. Sarah unterstützte ihn in vielfältiger Weise bei seiner Arbeit, insbesondere wo er mit den technischen Neuerungen nicht mehr so vertraut war. So trug sie auch dazu bei, dass er bis zuletzt mathematisch aktiv war. Liebe Sarah, als sein Freund nehme ich die Gelegenheit wahr, Dir für all die Unterstützung zu danken, die es ihm ermöglicht hat, in den letzten fünfzehn Jahren sein Leben besser zu meistern.

Lieber Gustl, nun zu sagen, wir werden Dir ein ehrendes Andenken bewahren, wäre viel zu wenig. Zum einen hast Du Dir durch Deine Arbeiten ein unauslöschliches Denkmal gesetzt. Zum anderen nehme ich Dich in den Kreis meiner virtuellen Berater auf: Wenn mir nächstens eine Entscheidung schwerfällt, werde ich mich fragen, wozu Du raten würdest, und mich daran orientieren.

Der Abschied ist nie süß. – Die Redemptoristen haben in ihrem Orden ein Lied, das sie einem Mitbruder singen, um ihm zu gratulieren, zum Professjubiläum, zur Bischofsweihe oder zu einem runden Geburtstag. Wenn meine musikalischen Talente ausreichten, würde ich Dir jetzt zum Abschied das Segenslied der Redemptoristen singen. Aber das lasse ich doch lieber bleiben und beschränke mich darauf, einige Worte aus dem Text herauszugreifen. Das Lied beginnt in Latein: „Vivat in aeternum, in aeternum vivat“ – „Er möge in Ewigkeit leben“ und endet auf Deutsch: „Wir wünschen Dir alles Gute für Zeit und Ewigkeit.“ Deine Zeit in unserer Mitte ist jetzt verstrichen, wir wünschen Dir alles Gute für das, was nun vor Dir liegt.

Adresse des Autors:
Christian Buchta
Universität Salzburg
Hellbrunner Str. 34
A-5020 Salzburg
email christian.buchta@sbg.ac.at

Buchbesprechungen

M. C. Pereyra, L. A. Ward: Harmonic Analysis. From Fourier to Wavelets. (Student Mathematical Library, Vol. 63.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012, xiii+410 S. ISBN 978-0-8218-7566-7 P/b $ 58.

Das vorliegende Buch gibt eine umfangreiche Einführung in die Theorie der Fourier-Reihen auf dem Niveau eines Master-Studiums. Beginnend mit der klassischen Theorie der punktweisen Konvergenz, werden die Fourier-Transformation, diskrete Fourier-Analysis, Haar-Funktionen und Wavelets ausführlich behandelt. Das Buch ist aus Kursen entstanden, die die Autorinnen abgehalten haben; entsprechend gut durchdacht ist die Aufbereitung des behandelten Materials. Jedes Kapitel endet mit einer Liste von Problemen, die Studierende zu einer tieferen Auseinandersetzung mit der behandelten Thematik animieren sollen.

Insgesamt liegt damit ein empfehlenswertes Buch zur Harmonischen Analysis vor, das sowohl interessierten Studenten zur Lektüre, als auch Dozenten als Grundlage für ein- und weiterführende Lehrveranstaltungen empfohlen werden kann.

P. Grabner (Graz)

J. Roe: Winding Around. The Winding Number in Topology, Geometry, and Analysis. (Student Mathematical Library, Vol. 76) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2015, xiii+269 S. ISBN 978-1-4704-2198-4 P/b $ 49.

Die Windungszahl ist eine der grundlegenden Invarianten der Topologie. Ihr und einer Sammlung von Resultaten im Umfeld der Topolgie, der Geometrie und der Analysis ist dieses ansprechende Buch gewidmet. Ausgehend von der vermeintlich trivialen Tatsache, dass zwei stetige Pfade in $[0,1]^2$, die die Punkte $(0,0)$ und $(1,1)$ bzw. $(1,0)$ und $(0,1)$ verbinden, einen Schnittpunkt haben, wird der Jordansche Kurvensatz diskutiert und bewiesen. Das Buch nimmt die Leserin und den Leser mit auf eine spannende Reise durch Homotopietheorie, die Topologie der Ebene, Differentialformen, Vektorfelder, Überlagerungen bis hin zu Botts Periodizitätssatz. Anhänge mit kurzen Darstellungen der linearen Algebra, der Theorie metrischer und normierter Räume und anderer im Text verwendeter Grundlagen erleichtern die Lektüre für Studierende.

Das Buch kann Studierenden ab den letzten Semestern des Bachelor-Studiums als auch Lehrenden als Grundlage für eine Spezialvorlesung zur gewinnbringenden Lektüre empfohlen werden.

P. Grabner (Graz)

T. Shioya: Metric Measure Geometry. Gromov's Theory of Convergence and Concentration of Metrics and Measures. (IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 25.) EMS, Zürich, 2016, vi+182 S. ISBN 978-3-03719-158-3 H/b € 42.

Seit Gromovs "Structures métriques pour les variétés riemanniennes" aus dem Jahr 1981 sind seine Untersuchungen des Raums der metrischen Maßräume deutlich weiterentwickelt worden. Das vorliegende Buch entwickelt die Gromovsche Theorie konzise und mit detaillierten Beweisen und gibt einige neue Entwicklungen wieder. Gromov hatte zur Geometrisierung des Raums der metrischen Maßräume einen Konvergenzbegriff verwendet, der auf dem von P. Lévy und V. Milman entdeckten Phänomen der Konzentration von Maßen basiert. Hier wird der Begriff der "observable distance" zweier metrischer Maßräume zugrunde gelegt, der eine Verallgemeinerung des Gromovschen Konvergenzbegriffs darstellt. Diese und einige weitere Konvergenzbegriffe werden ausführlich untersucht. Darüber hinaus werden neue Resulatte über die von Gromov initiierte Untersuchung der verallgemeinerten Ricci-Krümmung (basierend auf neuen Arbeiten von K. Funano und T. Shioya, J. Lott und C. Villani und K.-T. Sturm) wiedergegeben.

P. Grabner (Graz)

A. Imhausen: Mathematics in Ancient Egypt. A contextual history. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2016, xi+234 S. ISBN 978-0-691-11713-3 H/b $ 45.

Diese interessante Monografie behandelt das bekannte Wissen über altägyptische Mathematik, beginnend mit der vordynastischen Zeit bis zur Herrschaft der Ptolemäer. Schwerpunkt ist, wie man am Untertitel erkennen kann, nicht der Inhalt der wenigen erhaltenen Papyri mit mathematischem Inhalt, sondern das soziale Umfeld und die Anwendung mathematischer Kenntnisse und Verfahren im Alltag. Dementsprechend wird dieses Buch seine Leserschaft vermutlich spalten. Wer sich nur für mathematische Inhalte interessiert, wird vieles darin finden. Dazu zählen Aufzählungen und Beschreibungen sowohl der erhaltenen hieratischen Texte aus dem mittleren Reich und der darauf folgenden Zwischenzeit als auch der demotischen Papyri. Weiters enthält es Beschreibungen der Zahlschreibweise, der verwendeten Methoden und Tabellen für Multiplikation, Division und Bruchrechnung sowie für die Berechnung von Flächeninhalten und Volumina. Selbst wenn man dem Kontext, in dem Mathematik gelehrt und benützt wurde, nichts abgewinnen kann, wird man hier interessante Details finden, die man in Lehrbüchern, die altägyptische Mathematik nur im Überblick behandeln, vergeblich sucht. Die wahre Zielgruppe dieses Werks sind aber alle, die mehr über Leben und Status jener wissen wollen, die Mathematik im alten Ägypten praktizierten, d.h. die Schreiber. Wer sich dazu zählt, wird um dieses Buch nicht herumkommen und es sei ihm oder ihr sehr empfohlen!

Die Autorin gehört jener Denkschule an, die es als problematisch ansieht, wenn moderne Mathematik zur Interpretation ihrer antiken Vorläufer herangezogen wird. Auch wenn der Rezensent dieser Sichtweise viel abgewinnen kann, kann er sich doch nicht des Eindrucks erwehren, dass hier manchmal das Kind mit dem Bade ausgegossen wird. Vielleicht handelt es sich dabei eher um ein Verständigungsproblem. Beide Disziplinen sollten einander respektieren und bereit sein, voneinander zu lernen. (Dass die Sprache der modernen Mathematik der Autorin eher fremd sein dürfte, erkennt man z.B. an der (falschen) Formel für das Volumen des Pyramidenstumpfs in der Fußnote auf Seite 75 oder an der Diskussion der Berechnung des Flächeninhalts einer Kreisscheibe im Problem 50 des Papyrus Rhind.)

Die Autorin hat ein Verfahren entwickelt, um die Vorgangsweise in altägyptischen Rechnungen in Form kurzer Algorithmen zu beschreiben, die man bei der Besprechung verschiedener Probleme immer wieder findet. Es handelt sich dabei um einen interessanten Versuch, sich dem damaligen Denken anzunähern. (Auch wenn viele Mathematiker einwenden würden, dass der Unterschied zu einer mathematischen Formel oft nicht allzu groß ist.)

Das letzte Kapitel gibt einen Überblick über die erhaltenen demotischen mathematischen Papyri der griechisch-römischen Periode und behandelt damit ebenfalls ein Thema, das oft nur am Rande erwähnt wird; die Autorin erwähnt darin ihre Absicht, ein weiteres Buch zu diesem Thema zu verfassen. Der Rezensent wünscht ihr gutes Gelingen und freut sich auf die Lektüre.

C. Baxa (Wien)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Ulrich Dieter 1932–2018

Am 25. Jänner 2018 ist Ulrich Dieter, em.o.Univ. Prof. der TU Graz, im 86. Lebensjahr verstorben. Neben seinen vielfältigen akademischen Tätigkeiten war er von 1980-1981 und von 1984-1985 Herausgeber der IMN. Für das nächste Heft ist ein ausführlicher Nachruf geplant.

Protokoll der Generalversammlung der ÖMG am 24.11.2017, Uni Wien

Zeit: Freitag, 24.11.2017, 17:00 - 18:09 Uhr.
Ort: Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Hörsaal 13, 2. Stock, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien

Tagesordnung:

1. Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit
2. Berichte des Vorsitzenden, des Kassiers und weiterer Vorstandsmitglieder
3. Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands
4. Berichte aus den Landessektionen und den Kommissionen
5. Veranstaltungen und Fördermaßnahmen der ÖMG
6. Wahlen: Neuwahl des ÖMG-Vorstands für 2018–2019, Nachnominierungen Didaktikkommission

6a. zusätzlich Wahl Rechnungsprüfer oder Rechnungsprüferinnen

7. Allfälliges

TOP 1. **Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit**

Der Vorsitzende, M. Oberguggenberger, begrüßt die Anwesenden und stellt die Beschlussfähigkeit fest.

TOP 2. **Berichte des Vorsitzenden, des Kassiers und weiterer Vorstandsmitglieder**

Mitgliederstand: M. Oberguggenberger berichtet, dass die ÖMG aktuell 529 persönliche Mitglieder hat. Die Anzahl der ausländischen Mitglieder beträgt dabei

89, die Anzahl der Ehrenmitglieder liegt bei 5; zudem gibt es 18 institutionelle Mitglieder (Schulen, Bibliotheken und Institute). Seit vergangenem Jahr sind 18 Beitritte und 2 Austritte zu verzeichnen gewesen. Soweit der ÖMG bekannt, sind zwei Mitglieder verstorben: Peter Gruber (gest. am 7.3.2017) und August Florian (gest. am 1.11.2017). In einer Schweigeminute wird der verstorbenen Mitglieder gedacht.

Mathe-Brief: Oberguggenberger berichtet, dass der Mathe-Brief hervorragend läuft. Derzeit sind die folgenden Personen aktiv in der Redaktion beteiligt: G. Glaeser, W. Janous, G. Helmberg, M. Kauers (statt G. Pilz), B. Krön, F. Schweiger, L. Summerer und J. Wallner. Es gibt aktuell 264 Abonnenten. Seit November 2016 sind die Mathe-Briefe 74–83 erschienen.

Tagungen: Oberguggenberger berichtet über diverse Veranstaltungen, welche von der ÖMG unterstützt, ausgerichtet oder mitorganisiert wurden und werden: Die ÖMG-DMV-Tagung in Salzburg von 11.–15.9.2017 war äußerst erfolgreich. Es gab etwa 450 Teilnehmer und Teilnehmerinnen. Ein spezieller Dank durch den Präsidenten der DMV, Michael Röckner, erging an Clemens Fuchs und die ÖMG. Die ÖMG ist wieder ideeller Co-Sponsor der Mathmod Vienna, die vom 21.2–23.2.2018 an der TU Wien stattfindet. Die CSASC-Tagung findet in Bratislava von 11.–14.9.2018 statt (Organisator: Roman Nedela). Die Initiative für diese Konferenz der tschechischen, slowenischen, österreichischen, slowakischen und katalanischen mathematischen Gesellschaften ging ursprünglich von Michael Drmota aus und fand erstmals 2010 in Prag statt. Von österreichischer Seite wurden für die CSASC 2018 Vera Fischer (Uni Wien) und Michael Eichmair (Uni Wien) als Plenary Speaker vorgeschlagen. Das General Meeting European Women in Mathematics findet in Graz von 3.–7.9.2018 statt (Mitorganisatorinnen: Karin Baur, Elena Resmerita). Die ÖMG finanziert die Hauptvortragende Gigliola Staffilani. Die nächste ÖMG-Tagung findet von 16.–20.9.2018 an der FH Dornbirn statt (Organisator: Karl Unterkofler). Der ECM findet 2020 in Portoroz statt. Der ÖMG-DMV-Kongress wird im September 2021 in Passau stattfinden, Details werden noch bekannt gegeben. Für das Heidelberg Laureate Forum von 23.–28.9.2018 können Mathematische Gesellschaften (und auch Einzelpersonen) bis März 2018 Young Researchers nominieren. Im Year of Mathematical Biology 2018 findet die European Conference on Mathematical and Theoretical Biology von 23.–27.7.2018 in Lissabon statt.

Preise: Das Preiskomitee für die Schüler- und Schülerinnenpreise wurde von G. Schranz-Kirlinger geleitet. Es hat 19 Einreichungen (13m/6w) gegeben. Es wurden 6 (4m/2w) Preise vergeben. Auch heuer wurden die Buchpreise dankenswerterweise vom Verlag Springer Spektrum gesponsert.

Die Studienpreise ergingen für zwei Dissertationen an *Alexander Bors* (Nominierung durch Clemens Fuchs): On Dynamical Aspects of Finite Group Endomorphisms, Universität Salzburg, und *Peter Gangl* (Nominierung durch Ulrich

Langer): Sensitivity-Based Topology and Shape Optimization with Application to Electrical Machines, Universität Linz. Der Förderungspreis wurde an *Michael Eichmair* vergeben (Arbeitsgebiete: Differentialgeometrie, Allgemeine Relativitätstheorie), die Laudatio hielt Christian Krattenthaler.

Bericht des Kassiers: Alexander Ostermann gibt einen Überblick über die letzten drei Jahre; es gab im letzten Jahr keine großen Änderungen im Vergleich zu den Zahlen aus den Vorjahren. Zudem gibt er einen Überblick über das Vermögen der Gesellschaft zum Stichtag 31.12.2017. Schließlich werden noch die Vermögen der Landessektionen dargestellt. Weitere Berichte von Vorstandsmitgliedern gibt es nicht.

TOP 3. **Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands**

Hans Georg Feichtinger berichtet, dass er alle Daten in Innsbruck eingesehen hat. Peter Szmolyan hat ebenfalls alle Daten eingesehen und sie wurden von beiden Rechnungsprüfern als richtig bestätigt. Der Antrag von Hans Georg Feichtinger auf Entlastung des Vorstands wird von der Generalversammlung mit zwei Enthaltungen angenommen.

TOP 4. **Berichte aus den Landessektionen und den Kommissionen**

(a) Steiermark: Wolfgang Woess berichtet von der Feier anlässlich des 60. Geburtstags von Robert Tichy und anlässlich des 50. Geburtstags von Olaf Steinbach an der TU Graz. Die Professur „Statistik“ an der TU Graz wurde mit Siegfried Hörmann besetzt und eine Laufbahnstelle mit Stefan Thonhauser. An der Karl Franzens Uni Graz wird eine Laufbahnstelle „Mathematik in Life Sciences“ besetzt. Weiters gibt es zwei Berufungskommissionen, eine für „Stochastik“ und eine für „Didaktik“.

(b) Tirol/Vorarlberg: Hans-Peter Schröcker berichtet, dass die Mathematikolympiade Tirol-Vorarlberg mit Buchpreisen im Wert von 200 € und die Tagung Sums of Squares – Real Algebraic Geometry and its Applications (21.–25.8.2017) mit 1.500 € unterstützt wurden. Die Professur „Stochastik“ ist seit Februar 2017 mit Matthias Meiners besetzt. Die Bewerbungsfrist für die Professur „Ingenieurmathematik“ (Nachfolge Michael Oberguggenberger) endet am 4.12.2017.

(c) Kärnten: Christian Pötzsche berichet über die Aktivitäten in Kärnten. Es laufen derzeit die Berufungsverfahren „Stochastische Prozesse“ und „Didaktik der Mathematik (Sekundarstufe)“. Für das erste Verfahren existiert bereits eine Liste. Die Hearings für die andere Professur finden am 4.12.2017 statt.

(d) Oberösterrreich: Friedrich Pillichshammer berichtet, dass im Rahmen der Nachwuchsförderung wieder die Projektwoche Angewandte Mathematik sowie der Mathematik-Teamwettbewerb *Náboj* (mit etwa 200 teilnehmenden Jugendlichen ab der 9. Schulstufe) unterstützt wurde. Die Nachfolge von Peter Klement

„Mathematische Methoden in Medizin und Biowissenschaften“ konnte noch nicht besetzt werden.

(e) Salzburg: Aus Salzburg gab es diesmal keinen Bericht.

(f) Burgenland, Niederösterreich, Wien: Ilse Fischer berichtet von der Besetzung zweier Laufbahnstellen an der TU Wien, „Algebra“ mit Michael Pinsker und „Optimierung mit PDE“ mit Kevin Sturm. An der Uni Wien gibt es ebenfalls zwei neue Laufbahnstellen: „Mathematik“ wurde mit Roland Donninger und „Analysis und/oder Geometrie“ mit Anton Mellit besetzt. Bei der Professur „Finanzmathematik“ (Nachfolge Walter Schachermayer) hat Mathias Beiglböck zugesagt. Bei der Professur „Algebra und Zahlentheorie“ (Nachfolge Joachim Schwermer) wird derzeit mit der Erstgereihten verhandelt. In der Berufungskommission „Stochastik“ (Nachfolge Jiri Cerny) wurde eine Liste erstellt.

Bericht aus der Didaktikkommission: Michael Oberguggenberger berichtet, dass Günter Hanisch und Günther Malle auf eigenen Wunsch aus der Didaktikkommission ausgeschieden sind, aber der Vorsitzende der Didaktikkommission, Hans Humenberger, der wegen der Teilnahme an einer Tagung nicht anwesend ist, derzeit keinen Bedarf nach Nachnominierungen sieht. Die Kommission hat 23 Mitglieder. Bei der Begutachtung der Aufgaben für die Zentralmatura scheiden Günter Hanisch und Günther Malle ebenfalls auf eigenen Wunsch aus. Hans Humenberger schlägt Christoph Ableitinger (Uni Wien) und Christian Dorner (Uni Wien) als Nachfolger vor.

Winfried Müller hat als Entwicklungsbeauftragter aktuell nichts zu berichten, fordert aber größere Offenheit der ÖMG für unterstützungswürdige TeilnehmerInnen von Tagungen und Veranstaltungen. Im Beirat wurde über den Aufgabenbereich des Entwicklungsbeauftragten diskutiert.

TOP 5. **Veranstaltungen und Fördermaßnahmen der ÖMG**

Die Planungsgruppe Christian Krattenthaler, Alexander Ostermann und Wolfgang Woess hat unter anderem die Idee zu der folgenden Veranstaltung.

Vernetzungstreffen und Early Student Award: Es wird ein Vernetzungstreffen einer Auswahl der besten Mathematik-Studierenden aller Standorte in Österreich nach dem 2. Studienjahr unter der Ägide der ÖMG geben. Das erste solche Treffen für etwa 20 Studierende wird von 17.–19.9.2018 in Strobl stattfinden; Barbara Kaltenbacher hat als eine von fünft geplanten Vortragenden schon zugesagt. Die Kosten werden auf etwa 4.000 € geschätzt und von der ÖMG zunächst für 2018 und 2019 übernommen. Die Organisationsgruppe setzt sich zusammen aus Wolfgang Woess (TU Graz), Tobias Hell (Uni Innsbruck) und Reinhard Winkler (TU Wien) und hat u.a. die Aufgabe, entsprechende Studierende zu nominieren. Heinz Engl (Rektor der Universität Wien) hat in der Beiratssitzung vorgeschlagen, diese Aktivität auch in die Leistungsvereinbarungen zu schreiben, da das Ministerium solchen Kooperationsprojekten und Studierendenförderung sehr positiv gegenübersteht.

Mathematikolympiade. Unterstützung durch die ÖMG: Michael Oberguggenberger war in Raach beim nationalen Bewerb der Mathematikolympiade anwesend; an die Goldpreisträger und Goldpreisträgerinnen wurden einjährige Gratismitgliedschaften vergeben.

Summer School Mathematik 2018: Der Organisator dieser Sommerschulen ist Leonhard Summerer (Uni Wien); die ÖMG unterstützt einerseits durch Bewerbung und bei Bedarf auch finanziell.

Mathe im Advent: Die ÖMG ist seit heuer offizielle Unterstützerin (ca. 300 € für Plakate) der Aktion Mathe im Advent. Die Bewerbung erfolgt durch Aussendung von Plakaten, Postkarten und PDFs an sämtliche österreichische Gymnasien. Die Aussendung erfolgte heuer durch den Vorsitzenden Michael Oberguggenberger unter Mithilfe von Günther Maresch, Clemens Heuberger, Hans Humenberger und Hans-Peter Schröcker. In Zukunft muss aber ein Verantwortlicher oder eine Verantwortliche gefunden werden.

Studierendenkonferenz: Die Studierendenkonferenz, die bei der ÖMG–DMV–Tagung in Salzburg stattfand, war sehr erfolgreich. Das Organisationsteam bestand aus Barbara Kaltenbacher für Österreich und Georg Hein für deutsche Studierende. Die Preise für die österreichischen Teilnehmer und Teilnehmerinnen bestanden aus Gratismitgliedschaften bei der ÖMG, Büchern und ein- bis zweiwöchigen Aufenthalten am RISC in Linz.

Initiative Bildungsnetzwerk Technik Österreich: Das Ziel dieser Initiative ist die nachhaltige Stärkung des Bildungs- und Wirtschaftsstandorts Österreich. Der Initiator ist Mischa Kim (Mathworks). Ebenso sind das Bundesministerium für Bildung, Schulen, HTLs, FHs und Universitäten beteiligt. Beim Treffen am 21.11.2017 in Wien wurde die Vereinsgründung in die Wege geleitet. Die ÖMG könnte als Organisation Mitglied sein, sie sollte jedenfalls diese Initiative unterstützen. Die Frage der Mitgliedschaft der ÖMG sollte geklärt werden, sobald die Statuten des Vereins vorliegen und die Gründung erfolgt ist.

TOP 6. **Wahlen: Neuwahl des ÖMG-Vorstands für 2018–2019, Nachnominierungen Didaktikkommission**

Dieser Punkt wird in der Sitzung vor TOP 4 vorgezogen.

In Abwesenheit von Barbara Kaltenbacher wird sie in geheimer Abstimmung mit 20 Stimmen (keine Enthaltung, eine Gegenstimme) von der GV gewählt. Sie nimmt die Wahl an und präsentiert den folgenden Wahlvorschlag:

Vorstand	Barbara Kaltenbacher (Uni Klagenfurt)
Stellvertreter	Johannes Wallner (TU Graz)
Herausgeber der IMN	Clemens Fuchs (Uni Salzburg)
Kassier	Bernhard Lamel (Uni Wien)
Stellvertreter	Philipp Grohs (Uni Wien)
Schriftführerin	Monika Ludwig (TU Wien)
Stellvertreter	Markus Haltmeier (Uni Innsbruck)
Beauftragte für Frauenförderung	Evelyn Buckwar (Uni Linz)
Beauftragter für Öffentlichkeitsarbeit	Clemens Heuberger (Uni Klagenfurt)

Dem Vorschlag wird ebenfalls von der GV einstimmig zugestimmt. Es wurde keine geheime Abstimmung gewünscht. Barbara Kaltenbacher dankt Michael Oberguggenberger, Alexander Ostermann und dem ganzen Vorstand für seine Tätigkeit.

Der Punkt Nachnominierungen Didaktikkommission entällt.

TOP 6a. **zusätzlich Wahl Rechnungsprüfer oder Rechnungsprüferinnen.** Nach kurzer Diskussion werden Hans Georg Feichtinger und Peter Szmolyan in ihrer Funktion als Rechnungsprüfer bestätigt.

TOP 7. **Allfälliges.** Es gibt keine Wortmeldungen.

Die Sitzung endet um 18:09 Uhr.

Vorsitzender: M. Oberguggenberger *Schriftführerin:* G. Schranz-Kirlinger

Laudatio aus Anlass der Verleihung des Förderungspreises 2017

Es ist mir ein große Freude, diese Laudatio anlässlich der Verleihung des Förderungspreises der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft an Michael Eichmair zu halten.

Michael Eichmair ist eine bemerkenswerte, außergewöhnliche Persönlichkeit, in jeder Hinsicht. Er ist in Vöcklabruck geboren; für einen Wiener ist das sozusagen „in der Provinz“. Ich entschuldige mich sogleich für diese Präpotenz. Es hat ihn aber schon früh von der „Provinz“ in die „weite Welt“ gezogen – und mit der „weiten Welt“ ist beileibe nicht Wien gemeint . . . Er studierte nämlich am University College London, wo er seinen Undergraduate Degree erhielt. Anschließend ging er an die Stanford University, um unter der Betreuung von Richard Schoen an seiner Dissertation zu arbeiten. 2008 absolvierte er den Ph.D. mit einer spektakulären Arbeit über das sogenannte Plateauproblem.

Die nächsten vier Jahre hatte er die prestigeträchtige Stelle eines Moore Instructors am M.I.T. inne. Anschließend wurde er Assistenzprofessor an der ETH in Zürich. Es ist schließlich drei Jahre her, dass er von uns, der Fakultät für Mathematik der Universität Wien, den Ruf auf eine Professur erhielt. Wir können uns glücklich schätzen, dass er diesen Ruf angenommen hat und seine Stelle als Professor für Globale Analysis und Differentialgeometrie vor zwei Jahren angetreten hat.

Zum Zeitpunkt seiner Berufung war er der jüngste Professor der Universität Wien – und damit natürlich auch der Fakultät für Mathematik. Er hatte zu diesem „Attribut" immer ein gespaltenes Verhältnis. Einerseits ist er darüber – zu Recht – stolz. Andererseits hatte er oft das Gefühl, dass man seine Leistungen sehr oft eben auf diesen Umstand reduzierte, der jüngste Professor zu sein, und nicht gleichzeitig seine bemerkenswerten wissenschaftlichen und anderen Leistungen würdigte, was ihn störte. Wie er mir gestern erzählte, ist er seit Kurzem nicht mehr der jüngste Professor der Universität Wien; somit wäre dieses Problem einmal gelöst. Ja, er ist immer noch der jüngste Professor an der Fakultät für Mathematik. Es kann aber mit Sicherheit prophezeit werden, dass sich auch das geben wird. Wir arbeiten jedenfalls daran …

Womit beschäftigt sich Michael Eichmair in seiner wissenschaftlichen Arbeit? Sein Arbeitsgebiet ist die Differentialgeometrie. Oftmals stehen hinter den Problemen, mit denen er sich beschäftigt, physikalische Probleme der Relativitätstheorie. Im Zentrum seines Werks bis jetzt stehen oft isoperimetrische Probleme und positive Massetheoreme, die ja eng miteinander in Beziehung stehen.

Einige im Publikum wissen, dass ich der festen Meinung bin, dass es kaum möglich ist, mathematische Forschung durch bloßes Erzählen einem Publikum, das nicht im konkreten Spezialgebiet zu Hause ist, wirklich nahe zu bringen. Ich werde trotzdem einen Versuch unternehmen – und natürlich grandios scheitern. Im gegenständlichen Fall wird das nämlich weiter dadurch erschwert, als auch der Vortragende im konkreten Spezialgebiet nicht zu Hause ist. Egal. Schauen wir mal.

Wir alle kennen die „Mutter" aller isoperimetrischen Probleme: Wie müssen wir eine geschlossenen Bindfaden gegebener Länge in die Ebene legen, sodass er einen maximalen Flächeninhalt einschließt? Oder umgekehrt: Wir haben einen Flächeninhalt gegeben. Wie kann dieser mit minimalem Umfang umschlossen werden? Die Antwort ist natürlich, dass wir einen Kreis wählen müssen. Wir können das verallgemeinern: Gegeben ein Volumen im d-dimensionalen Euklidischen Raum; wie kann ich es mit minimaler Oberfläche umschließen? Auch hier kennen wir die Lösung. Wie ist das aber, wenn wir dieselbe Frage nicht im Euklidischen Raum, sondern in einer Mannigfaltigkeit stellen, die ja dann auch gekrümmt sein mag? Lässt sich das Problem lösen? Wenn ja, wie? Wie viele Lösungen gibt es? (Im Euklidischen Raum gibt es ja offensichtlich viele Lösungen, da diese ja im Raum bewegt werden können.) Dies sind Fragestellungen, mit denen sich Michael Eichmair oft beschäftigt hat.

Eines seiner neueren Resultate besagt, dass es in asymptotisch flachen Riemannschen 3-Mannigfaltigkeiten mit nicht-negativer skalarer Krümmung und positiver Masse zu jedem positiven Volumen einen Bereich in der Mannigfaltigkeit gibt, der das Volumen mit der kleinsten möglichen Oberfläche einschließt. Wenn außerdem das Volumen hinreichend groß ist, dann gibt es genau einen solchen Bereich (eben ganz im Gegensatz zum Euklidischen Raum)!

Das positive Massetheorem von Gerhard Huisken und Shing-Tung Yau wiederum besagt – grob gesprochen –, dass eine asymptotisch flache Riemannsche 3-Mannigfaltigkeit mit Horizontrand und nichtnegativer integrabler skalarer Krümmung eine nichtnegative Masse hat – für einen bestimmten Massebegriff. Michael Eichmair hat mit Koautoren einen neuen Beweis für dieses berühmte und wichtige Resultat gefunden, der zu Verallgemeinerungen und auch zu effektiven Versionen führt. Dass solche Resultate hoch nicht-trivial sind, ist evident, da ja schon das klassische isoperimetrische Problem nicht einfach zu lösen ist. Folgerichtig ist die vorher erwähnte Arbeit, sowie mehrere weitere, in absoluten Topjournalen wie *Inventiones Mathematicae*, dem *Journal of the European Mathematical Society*, *Communications in Pure and Applied Mathematics* oder *Communications in Mathematical Physics* erschienen, was die herausragende Bedeutung weiter unterstreicht.

Es lässt sich vorstellen, dass die Auszeichnung, die er heute erhält, nicht die einzige ist, die er bereits bekommen hat. Bekanntlich wurde ihm im letzten Jahr einer der START-Preise des FWF zuerkannt. Er ist Full Member der European Academy of Sciences and Arts sowie auch Mitglied der Jungen Akademie der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Er erhielt ehrenvolle Einladungen als Plenarvortragender zum zehnjährigen Jubiläum der Berlin Mathematical School, zum Annual Meeting der European Academy of Sciences and Arts dieses Jahr und eben auch zum gemeinsamen ÖMG/DMV-Kongress diesen September (unabhängig vom Förderungspreis; die Plenarvortragenden stehen ja schon mehr als zwei Jahre vor dem Kongress fest).

Man möchte meinen, dass das alles genug sein mag. Nicht für Michael Eichmair. Ich sagte schon, er ist in jeder Hinsicht eine bemerkenswerte Persönlichkeit. Er engagiert sich auch außerordentlich in der Lehre. Und hier ist es ihm ein besonderes Anliegen, die Mathematikausbildung in Österreich auf ein anderes Qualitätsniveau zu bringen. Zu diesem Zweck verfolgt er sein Projekt „Mathematik macht Freu(n)de“, das er mit großem Engagement und Enthusiasmus zusammen mit einigen weiteren jungen – noch jüngeren Leuten mit großem Erfolg vorantreibt. Dass der Schulunterricht eine große Baustelle ist und immer sein wird, das lässt sich wohl nicht wegdiskutieren. Umso wichtiger ist es, dass dieses Feld nicht nur den – wie wir oft geringschätzig sagen – „Pädagogen“ überlassen wird, sondern dass sich hier auch ausgezeichnete Fachmathematiker nicht zu schade sind, sich einzubringen. Wir haben ja eigentlich nichts gegen „Pädagogen“, aber die Sicht der Fachmathematiker ist ebenfalls wichtig, und nur gemeinsam wird man in der Mathematikausbildung unserer zukünftigen Studierenden – denn das sind ja die Schülerinnen und Schüler – wirklich etwas weiterbringen können.

Um diese Laudatio abzuschließen: Michael Eichmair ist gewissermaßen Opfer seines eigenen Erfolgs geworden. Er hat mir erzählt, dass er die Probleme seines START-Projekts eigentlich bereits jetzt gelöst hat. Was nun? Er ist derzeit auf der Suche nach neuen Herausforderungen. Er erklärte mir aber auch, dass er möglicherweise fündig geworden ist und einen neuen Problemkreis entdeckt hat, wo seine Methoden und Ideen genau die richtigen sein könnten, um dort Fortschritte zu erzielen. In diesem Sinne sind wir alle schon sehr gespannt, was dabei herauskommen wird. Und ich gratuliere noch einmal recht herzlich zum Förderungspreis der ÖMG! (Christian Krattenthaler)

Neue Mitglieder

Helen Anderson – Embelgasse 2-8, 1050 Wien. geb. 1990. Seit 2014 an der Montessori International School in Perchtoldsdorf. email *helenanderson-mail@gmail.com*.

Matteo Gallet – Julius Raab Straße 10, 4040 Linz. geb. 1987. Bachelor und Master an der Univ. Triest. Derzeit Doktoratsstudent an der Johannes Kepler-Univ. Linz. email *matteo.gallet@ricam.oeaw.ac.at*.

Peter Gangl, Dr. – Steyrergasse 30/II, 8010 Graz. geb. 1988. Doktorat an der Johannes Kepler-Universität Linz 2017. Seit 09/2017 Postdoc am Institut für Numerische Mathematik an der TU Graz. email *gangl@math.tugraz.at*, *https://www.numerik.math.tugraz.at/gangl*.

Maurice de Gosson, Dr. – Oskar Morgenstern Platz 1, 1090 Wien. geb. 1948. Senior Researcher (FWF) an der Univ. Wien. email *maurice.de.gosson@univie.ac.at* *http://homepage.univie.ac.at/maurice.de.gosson/*.

Philipp Grohs, Dr. – Oskar Morgenstern Platz 1, 1090 Wien. geb. 1981. Master 2006 und Doktorat 2007 an der TU Wien. 2007-2011 Postdoc an der TU Wien, TU Graz, am KAUST und an der ETH Zürich, 2011-2016 Ass.Prof. an der ETH. Seit 2016 Assoz.Prof. an der Univ. Wien. email *philipp.grohs@univie.ac.at*.

Markus Haltmeier, Univ.Prof. Dr. – Technikerstraße 13, 6020 Innsbruck. geb. 1977. Doktorat an der Univ. Innsbruck 2007. Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Univ. Innsbruck, der Univ. Wien und dem Max-Planck-Institut für Biophysikalische Chemie in Göttingen. Seit 2012 Professor an der Univ. Innsbruck. email *markus.haltmeier@uibk.ac.at*.

Philipp Hungerländer, Dr. – Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Universitätsstraße 65-67, 9020 Klagenfurt. geb. 1984. Assoz.Prof. am Institut für Mathematik der Alpen-Adria-Univ. Klagenfurt. email *philipp.hungerlaender@aau.at*.

Svajunas Sajavicius, Dr. – Johannes Kepler-Univ. Linz, 4040 Linz. geb. 1984. Bachelor 2007, Master 2009 und Doktorat 2013 in Computerwissenschaften an der Univ. Vilnius in Litauen. Derzeit Postdoc am Institut für Angewandte Geometrie der Johannes Kepler-Univ. Linz. email *svajunas.sajavicius@gmail.com*.

Christian Spreitzer, Dr. – PH Niederösterreich, Mühlgasse 67, 2500 Baden. geb. 1979. Physikstudium an der Univ. Wien. Lehrertätigkeit an der PH Niederösterreich sowie im Rahmen der Lehramtsausbildung in den Unterrichtsfächern Mathematik und Physik an der Univ. Wien. email *christian.spreitzer@ph-noe.ac.at* *http://homepage.univie.ac.at/christian.spreitzer/*.

Kristof Wiedermann – Grillparzergasse 37, 2225 Zistersdorf. geb. 2000. Student der Finanz- und Versicherungsmathematik an der TU Wien. Schülerpreisträger der ÖMG im Jahr 2017. email *kristof.wiedermann@gmail.com*.