Internationale Mathematische Nachrichten
International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@oemg.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzendruck, 8044 Weinitzen.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903
http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-10401
email: *sekr@oemg.ac.at*

Vorstand des Vereinsjahres 2017:

M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Vorsitzender
B. Kaltenbacher (Univ. Klagenfurt): Stellvertretende Vorsitzende
J. Wallner (TU Graz): Herausgeber der IMN
C. Fuchs (Univ. Salzburg): Schriftführer
G. Schranz-Kirlinger (TU Wien): Stellvertretende Schriftführerin
A. Ostermann (Univ. Innsbruck): Kassier
B. Lamel (Univ. Wien): Stellvertretender Kassier
E. Buckwar (Univ. Linz): Beauftragte für Frauenförderung
G. Teschl (Univ. Wien): Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
M. Drmota (TU Wien)
H. Edelsbrunner (ISTA)
H. Engl (Univ. Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
H. Niederreiter (ÖAW)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkultur)
W. Schachermayer (Univ. Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
R. Tichy (TU Graz)
H. Zeiler (Wien)

Vorsitzende von Sektionen und Kommissionen:

W. Woess (Graz)
H.-P. Schröcker (Innsbruck)
C. Pötzsche (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
V. Bögelein (Salzburg)
I. Fischer (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)
W. Müller (Verantwortlicher für Entwicklungszusammenarbeit)

Die Landesvorsitzenden und der Vorsitzende der Didaktikkommission gehören statutengemäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT8312000 22910389200 bei der Bank Austria–Creditanstalt (BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 236 (71. Jahrgang) **Dezember 2017**

Inhalt

Die Graphik auf der Titelseite symbolisiert die Lösung des Problems der dichtesten Kugelpackung im euklidischen $\mathbb{R}^8$: Sie ist diejenige Gitterpackung, bei der die Kugelmittelpunkte auf einem E_8-Gitter $\{(x_1,\dots,x_8) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z}+\frac{1}{2})^8 \mid x_1+\cdots+x_8 \in 2\mathbb{Z}\}$ liegen. Letzteres tritt auf als die Menge der Ecken der Polyeder der regulären Parkettierung "5_{21}" des $\mathbb{R}^8$ durch 8-Simplizes und 8-Kreuzpolytope; die Titelseite zeigt das Coxeter-Dynkin-Diagramm dieser Parkettierung. Für Details und Zusammenhänge, insbesondere auch das Packungsproblem im $\mathbb{R}^{24}$, wird verwiesen auf den Originalartikel von Maryna Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8* (Ann. Math. 185 (2017), 1017–1033), und den Übersichtsartikel von H. Cohn, *A conceptual breakthrough in sphere packing* (Notices AMS, Februar 2017).

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 236 (2017), 1–11

From Creature Forcing to Boolean Ultrapowers

Vera Fischer
Univ. Wien

We will consider four cardinal characteristics of the continuum, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s}$*, and discuss how their study has prompted the development of some of the most powerful forcing techniques: creature forcing, coherent systems of iterations, Shelah's method of template iterations and the method of boolean ultrapowers.*

1 Introduction

The emergence of the subject of set theory can be traced back to the late nineteenth century, the advances of real analysis and the work of Georg Cantor on the trigonometric series representation of a function. In 1871, Cantor proved that if two trigonometric series converge to the same point except on finitely many points, then they converge to the same point everywhere. He soon generalized his theorem to an infinite set of exceptional points. However, this set of exceptional points was not arbitrary. It was subject to the requirement that for some $n \in \mathbb{N}$, its n-th derived set was finite.

These developments were quickly followed by Cantor's proof that the set of natural numbers, $\mathbb{N}$, can not be put in bijective correspondence with the set of real numbers, $\mathbb{R}$, and the *continuum hypothesis*, which is the hypothesis that every infinite set of reals is either in bijective correspondence with $\mathbb{R}$ or with $\mathbb{N}$. The emerging necessity of comparing various sizes or infinities was soon answered by the appearance of Cantor's cardinal numbers and their cardinal arithmetic. The continuum hypothesis, abbreviated CH, can now be formulated as the claim that the cardinality of the real line is the first uncountable cardinal.

The cardinality of $\mathbb{R}$, denoted $\mathfrak{c}$, is in fact the very first cardinal characteristic of the real line. More generally, the *cardinal characteristics* of the real line are usually defined as the minimal size of a set of reals, which is characterized by a certain

ISSN 0020-7926

property. For example, consider the minimal cardinality of a family of meager sets, which covers the real line and denote this minimal size by $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$. We refer to this cardinal characteristics as the *covering number of the meager ideal*. Since the countable union of meager sets is meager, by Baire category theorem $\aleph_0 < \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. On the other hand, the family of all singletons clearly covers $\mathbb{R}$ and so $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{c}$.

The problem of determining the cardinality of the real line was, and maybe still is, one of the major driving forces behind the development of set theory. It took almost a century to show that the usual axioms of set theory, i.e. the axiomatic system ZFC, do not determine the value of $\mathfrak{c}$. Already in 1939, Kurt Gödel established the *consistency of CH with ZFC*, by showing that it holds in his *Constructible Universe* (see [21]). It was not before the appearance of Cohen's *method of forcing* in 1962, that the consistency of the *negation of CH* with ZFC was obtained (see [12], [13]). Thus, with Cohen's result the *independence* of CH from ZFC was established.

The method of forcing is a general method for obtaining *relative consistency* results, excellent expositions of which can be found in [25], or [24]. Since its appearance, the method has found broad applications to the study of the topological, measure theoretic and combinatorial properties of the real line. Among others, it was used to show the independence of the Suslin hypothesis, as well as the independence of the Whitehead problem: while in the Constructible Universe every Whitehead group is free, it is consistent that there exists a non-free Whitehead group. Regarding the covering number of the meager ideal, the method of forcing can be used to show that each of the following is relatively consistent with ZFC: $\aleph_0 < \mathrm{cov}(\mathcal{M}) < \mathfrak{c}$, as well as $\aleph_1 < \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$.

In this article, we will focus on four combinatorial cardinal characteristics of the real line: *the bounding, the dominating, the almost disjointness and the splitting* numbers, denoted by $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$, and $\mathfrak{s}$ respectively. Apart from establishing their ZFC relations, we will make an overview of those developments of the method of forcing, which were triggered by the study of the independence of the characteristics in each of the pairs: $\{\mathfrak{a},\mathfrak{d}\}$, $\{\mathfrak{a},\mathfrak{s}\}$, $\{\mathfrak{b},\mathfrak{s}\}$. Among those are some of the most interesting and powerful forcing techniques: creature posets; matrix iterations, and more generally coherent systems of iterations; Shelah's method of template iterations and its development from a method of iterating Suslin posets to a more general method permitting the iteration of Mathias-Prikry posets. Finally, we will briefly discuss the method of boolean ultrapowers and conclude with two open problems, which are central to the current development of the area.

2 Four cardinal characteristics and their ZFC relations

The results in this section are well-known and can be found in any expository presentation of the combinatorial cardinal characteristics of the real line, e.g. [4] or [23]. The following two notions, the notions of eventual dominance and almost containment, will be of particular importance for the upcoming discussion.

- For any two elements f, g in ${}^{\omega}\omega$, we say that f is *eventually dominated* by g, denoted $f <^* g$, if there is $n \in \omega$ such that for all $k \geq n$, $f(k) < g(k)$.
- For $A, B \in [\omega]^{\omega}$, we say that A is *almost contained* in B, denoted $A \subseteq^* B$, if $A \setminus B$ is a finite set.

Now, we can define two of the cardinal characteristics, which we will be of interested for our discussion:

- The *bounding number*, denoted $\mathfrak{b}$, is defined as the minimal size of an unbounded (with respect to the eventual dominance order) family in ${}^{\omega}\omega$. More precisely, $\mathcal{B} \subseteq {}^{\omega}\omega$ is said to be *unbounded*, if for every $f \in {}^{\omega}\omega$ there is $g \in \mathcal{B}$ such that $g \not\leq^* f$. That is, $\exists^{\infty} n \in \omega(f(n) \leq g(n))$. Thus $\mathfrak{b} = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ is unbounded}\}$.
- The *dominating number*, denoted $\mathfrak{d}$, is defined as the minimal size of a dominating (with respect to the eventual dominance order) family in ${}^{\omega}\omega$. More precisely, $\mathcal{D} \subseteq {}^{\omega}\omega$ is said to be *dominating*, if for every $f \in {}^{\omega}\omega$ there is $g \in \mathcal{D}$ such that $f <^* g$. Thus $\mathfrak{d} = \min\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \text{ is dominating}\}$.

One of the first uses of the bounding number can be found in [29] (see also [32]). For a set $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Rothberger defines X to have property λ, if each of its countable subsets is relative G_δ. Furthermore, he defines for a set X to have property λ', if $X \cup Y$ has property λ for each countable subset Y of $\mathbb{R}^n$. Then, he goes on to give a characterization of the sets with the property λ', which in contemporary terminology can be formulate as follows: *A set $X \subseteq \mathbb{R}^n$ has property λ', if and only if $|X| < \mathfrak{b}$.*

Lemma 2.1. $\omega_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$.

Proof. Let $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \omega}$ be a countable family in ${}^{\omega}\omega$. Consider the function g, which diagonalizes $\mathcal{F}$, i.e. the function g defined by $g(k) = \max_{i \leq k} f_i(k) + 1$ for all k. Then g eventually dominates every member of $\mathcal{F}$ and so the minimal size of an unbounded family is strictly above $\aleph_0$. The fact that $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$ follows from the observation that every dominating family is unbounded. Furthermore, since the collection of all functions in ${}^{\omega}\omega$ is dominating, we clearly have $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$. □

The other two characteristics which will be for importance for our discussion are the almost disjointness and the splitting numbers.

Definition 2.2.

- A family $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ is said to be *almost disjoint*, if for all $a, b \in \mathcal{A}$ such that $a \neq b$, the intersection $a \cap b$ is finite. An infinite almost disjoint family is said to be a *maximal almost disjoint* family, abbreviated m.a.d. family, if it is almost disjoint and maximal under inclusion. The minimal size of a maximal almost disjoint family is denoted $\mathfrak{a}$ and is referred to as the *almost disjointness number*.

- A family $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ is said to be *splitting*, if for every $a \in [\omega]^\omega$ there is $s \in \mathcal{S}$ such that both $a \cap s$ and $a \cap (\omega \backslash s) = a \backslash s$ are infinite. The minimal cardinality of a splitting family is denoted $\mathfrak{s}$ and is referred to as the *splitting number*.

The existence of maximal almost disjoint families is an easy application of the Axiom of Choice, or equivalently Zorn's Lemma. It is also not difficult to construct a maximal almost disjoint family of size $\mathfrak{c}$ (see for example [4] or [23]). An interesting observation is the fact that the splitting number originally appeared as an algebraic characterization of sequential compactness. In [10], Booth shows that for every regular uncountable cardinal λ, the space 2^λ is sequentially compact, if and only if for every sequence $\langle a_\alpha : \alpha \in \lambda \rangle$ of infinite subsets of ω, there is $b \in [\omega]^\omega$ with the property that for every $\alpha \in \lambda$, $b \subseteq^* a_\alpha$ or $b \subseteq^* \omega \backslash a_\alpha$. In contemporary notation, Booth's result can be reformulated as the claim that 2^λ *is sequentially compact, if and only if* $\lambda < \mathfrak{s}$.

Lemma 2.3. $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$

Proof. Consider an arbitrary maximal almost disjoint family $\mathcal{A} = \{x_\xi\}_{\xi \in \kappa}$. By finitely modifying the first ω members of the family, we can assume that they form a partition of ω. More precisely, take $x^* := \omega \backslash (\bigcup_{\xi \in \kappa} x_\xi)$, $x'_0 := x_0 \cup \{0\} \cup x^*$ and for each $n \geq 1$, $x'_n := (x_n \cup \{n\}) \backslash (\bigcup_{k \in n} x'_k)$. Then, since the elements of $\mathcal{A}$ are pairwise almost disjoint, each x'_n is infinite and clearly $\{x'_n\}_{n \in \omega}$ forms a partition of ω. It is also straightforward that $\mathcal{A} \backslash \{x_\xi\}_{\xi \in \omega} \cup \{x'_\xi\}_{\xi \in \omega}$ is a m.a.d. family.

Claim: There is a bijection $h : \omega \to \omega \times \omega$ such that $h^{-1}(\{n\} \times \omega) = x'_n$ for each n.

Proof: For each n, let g_n be the enumerating function of x'_n. Since $\{x'_n\}_{n \in \omega}$ forms a partition of ω, we can define

$$h(m) = (n,k) \text{ iff } m \in x'_n \text{ and } g_n(k) = m.$$

Clearly, h is as desired.

For each $\xi \in \kappa$ and $k \in \omega$, define $f_\xi(k) := \max\{l : (k,l) \in h[x_\xi] \cap h[x'_k]\}$. Note that $f_\xi(k) = \max\{l : (k,l) \in h[x_\xi]\}$ and also, that since $x_\xi \cap x'_k$ is finite, the function $f_\xi(k)$ is well defined. However, the cardinality of $\mathcal{B} = \{f_\xi\}_{\xi\in\kappa}$ is smaller than $\mathfrak{b}$ and so there is a function f dominating all elements of $\mathcal{B}$. But then $h^{-1}[\{(n, f(n))\}_{n\in\omega}]$ is a set, which is almost disjoint from every element of $\mathcal{A}$. □

It is not hard to see that the minimal size of a splitting family is strictly above $\aleph_0$ and that there is always a splitting family of size $\mathfrak{c}$ (see for examples [4]). Furthermore, we have the following:

Lemma 2.4. $\mathfrak{s} \leq \mathfrak{d}$.

Proof. Note that if f is a strictly increasing function in ${}^\omega\omega$ with $f(0) > 0$, then f determines an interval partition of ω, given by $\{[f^n(0), f^{n+1}(0))\}_{n\in\omega}$, where $f^0(0) = 0$ and for each n, $f^{n+1}(0) = f(f^n(0))$. Then, for a strictly increasing function f the sets

$$\sigma^e_f = \bigcup\{[f^{2n}(0), f^{2n+1}(0)) : n \in \omega\} \text{ and}$$
$$\sigma^o_f = \bigcup\{[f^{2n+1}(0), f^{2n+3}(0)) : n \in \omega\}$$

form a partition of ω into two infinite sets.

Equipped with the above partitions, we will show that every dominating family $\mathcal{D} \subseteq {}^\omega\omega$ gives in a natural way rise to a splitting family of the same cardinality. Fix an arbitrary dominating family $\mathcal{D}$. Without loss of generality, the elements of D are strictly increasing and for each $f \in \mathcal{D}$, $f(0) > 0$. Let $S_\mathcal{D} := \{\sigma_f : f \in \mathcal{D}\}$.

Claim: The family $S_\mathcal{D}$ is splitting.

Proof: For each $x \in [\omega]^\omega$, let f_x denote its enumerating function. Since $\mathcal{D}$ is dominating, for each $x \in [\omega]^\omega$ there is $f \in \mathcal{D}$ such that $f_x <^* f$, i.e. there is n_0 such that for each $k \geq n_0$, $f_x(k) < f(k)$, and so in particular for each $k \geq n_0$, $k \leq f_x(k) < f(k)$. Observe also that since both f and f_x are strictly increasing, $k \leq f^k(0)$ and $k \leq f_x(k)$ for all k.

Now, for $k \geq n_0$ we have

$$f^k(0) \leq f_x(f^k(0)) < f(f^k(0)) = f^{k+1}(0).$$

Therefore for all k, $f_x(f^k(0)) \in [f^k(0), f^{k+1}(0))$, which implies that both $x \cap \sigma^e_f$ and $x \cap \sigma^o_f$ are infinite. Clearly $\sigma^o_f = \omega \setminus \sigma^e_f$ and so σ^o_f splits x. □

3 Creature posets, coherent systems and template iterations

Our understanding of many of the combinatorial properties of the real line, which are not provable from ZFC, is often heavily dependent on the richness, or lack, of forcing techniques. In this context, the four cardinal characteristics we have chosen to consider, play an interesting and important role. Apart from the inequalities proved in Lemmas 2.1, 2.3, 2.4 and the fact that each of them takes values between $\aleph_1$ and $\mathfrak{c}$, and of course the fact that $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$, there are no other ZFC-provable inequalities between any two distinct elements of $\{\aleph_1, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s}\}$. To establish the lack of such further dependencies, we rely on the method of forcing. For example, to show that there is no ZFC proof of say $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{s}$, we show that the negation of this statement, i.e. the strict inequality $\mathfrak{s} < \mathfrak{b}$, is relatively consistent with ZFC. In general, the task of establishing the independence between the cardinal characteristics in each of the pairs $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{d}\}$, $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{s}\}$ and $\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$ is highly non-trivial and has brought the development of some of the most interesting forcing techniques, techniques which have already found applications far beyond the problems they were initially introduced for.

The relative consistency of $\mathfrak{s} < \mathfrak{b}$ was obtained by Baumgartner and Dordal, [3], in their study of what is now known as the Hechler model. Since $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$, in the same model $\mathfrak{s} < \mathfrak{a}$ holds. Their consistency proof gives one of the first uses of a *rank argument* and presents an innovative for its time method of showing that a splitting family from the ground model remains splitting in the final generic extension. The consistencies of $\mathfrak{b} = \aleph_1 < \mathfrak{s} = \aleph_2$ and $\mathfrak{b} = \aleph_1 < \mathfrak{a} = \aleph_2$ are due to Shelah (see [30]). To obtain the desired inequalities, he introduced a powerful forcing technique, known as *creature forcing*. His construction comes with a single drawback: the original creature posets are proper and so they can not be used to provide models in which $\mathfrak{c} > \aleph_2$.

It took more than a decade to overcome this difficulty and establish the consistency of $\mathfrak{b} = \kappa < \mathfrak{a} = \kappa^+$ (see [6]) for κ arbitrary regular uncountable cardinal. Almost another decade was necessary before the consistency of $\mathfrak{b} = \kappa < \mathfrak{s} = \kappa^+$ for κ arbitrary regular, uncountable cardinal, was obtained (see [18]). For the forcing specialist, it might be interesting to know, that each of those last two results was only possible because of the existence of a a *ccc poset*, which has all crucial properties of a *proper, non-ccc counterpart* from [30]. Furthermore, the results involve the construction of a special (ultra)filter: given an unbounded, directed family $\mathcal{H}$ in ${}^{\omega}\omega$ with $|\mathcal{H}| = \mathfrak{c}$, there is an (ultra)filter $\mathcal{U}$ such that the associated Mathis-Prikry poset, $\mathbb{M}(\mathcal{U})$ preserves the unboundedness of $\mathcal{H}$. These special filters are clearly a special form of what is now know as *Canjar filters* (see [11] and [22]).[1]

[1] For the case $\mathfrak{b} < \mathfrak{s}$, see also [15].

The task of obtaining a larger spread between $\mathfrak{b}$ and $\mathfrak{s}$ proved to be quite difficult. The main challenge is the problem of generically adjoining an unslit real, while preserving the unboundedness of a family $\mathcal{H}$ from the ground model, whose cardinality is *much smaller* than the size of the continuum. The consistency of $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \kappa < \mathfrak{s} = \lambda$ for $\kappa < \lambda$ arbitrary regular uncountable cardinals was obtained in [9]. Furthermore, the presented proof is one of the few places in the literature, where a solution to the above problem can be found.[2] The generic extension in which the above constellation is realized is obtained via a *matrix iteration*. Recall that a matrix iteration is a system of κ-many finite support iterations of ccc posets, $\langle \mathbb{P}_{\alpha,\beta} : \beta \leq \lambda \rangle$, here $\alpha \in \kappa$, with the following property: if V is the ground model and $V_{\gamma,\delta}$ is the generic extension of V obtained via $\mathbb{P}_{\gamma,\delta}$, then whenever $\gamma_1 \leq \gamma_2$ and $\delta_1 \leq \delta_2$, the poset $\mathbb{P}_{\gamma_1,\delta_1}$ is a complete suborder of $\mathbb{P}_{\gamma_2,\delta_2}$ and so V_{γ_2,δ_2} is a generic extension of V_{γ_1,δ_1}. Such two-dimensional systems of generic extensions allow a much finer analysis of the interplay between unboundedness and splitting. Indeed, assume in addition that the ground model $V (= V_{0,0})$ satisfies the Generalized Continuum Hypothesis (GCH) and that $V_{\kappa,0}$ is obtained by adjoining a family $\mathcal{C}$ of κ-many Cohen reals over V. Inductively along a column of the intended matrix, say β for $\kappa < |\beta| \leq \lambda$, one can construct an ultrafilter $\mathcal{U}_{\kappa,\beta}$ in $V_{\kappa,\beta}$ such that forcing with the Mathias-Prikry poset $\mathbb{M}(\mathcal{U}_{\kappa,\beta})$ over $V_{\kappa,\beta}$ preserves the family $\mathcal{C}$ unbounded. Note that for β sufficiently large, $V_{\kappa,\beta} \models |\mathcal{C}| = \kappa < \mathfrak{c}$. Thus in particular, the Mathias-Prikry poset $\mathbb{M}(\mathcal{U}_{\kappa,\beta})$ solves the above problem and the ultrafilter $\mathcal{U}_{\kappa,\beta}$ and can be viewed as a strongly Canjar filter.

The paper [9] provides the second appearance in the literature of the idea of a matrix iteration (the first being the original appearance of this idea in [5]). Among others, the consistency proof of $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \kappa < \mathfrak{s} = \lambda$ offers a new method of preserving a maximal almost disjoint family along a matrix iteration. Since then, matrix iterations have been applied to the study of the characteristics of measure and category [26] and [16].[3] The technique has been recently generalized not only to three dimensional systems of finite support iterations, but even more generally to arbitrary *coherent systems of iterations* as defined in [16]. Furthermore, matrix iterations have been used to answer one of the long standing open questions in the area, namely to show that the splitting number can be singular (see [14]).

The independence of $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{d}$ marked the appearance of one of the most interesting and intricate forcing methods. The consistency of $\mathfrak{a} < \mathfrak{d}$ is not difficult to obtain: in a model of CH one can inductively construct a maximal almost disjoint family, which remains maximal in the Cohen extension of the same model (for a proof see for example [25]). It remains to observe that the Cohen real is unbounded, which easily gives the desired inequality. However, the consistency

[2] Alternative construction, though restricted to cardinalities $\aleph_1$ for the unbounded family and cardinality $\aleph_2$ for the continuum, can be found in [19].

[3] An excellent exposition of the characteristics of measure and category can be found in [1] and [2].

of $\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$ required a completely new idea. The result was obtained only after the appearance of Shelah's method of *iterations along a template* (see [31] and for more axiomatic approach [7]). Shelah's template model is a ccc generic extension in which $\mathfrak{s} = \aleph_1 < \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \kappa < \mathfrak{a} = \lambda$. The requirement that $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} > \aleph_1$ is necessary. These original technique allows the iteration of nicely definable, in fact Suslin, posets along a template. The fact that $\mathfrak{s} = \aleph_1$ in Shelah's extension is almost accidental: the preservation properties of the construction imply that a family of $\aleph_1$ Cohen reals, which are generically adjoined along the forcing construction, remains splitting in the final generic extension. Obtaining the same constellation with the additional requirement that $\mathfrak{s}$ is arbitrarily large, required major developments in Shelah's template iteration techniques. On one hand is the appearance of a technique permitting the iteration of Mathias-Prikry posets along a template (see [27]) and on the other, the realization that a template can be characterized not only by its length, but also by a notion of a width (see [17]). In particular, equipped with the new notion of a width, we could mimic the original isomorphism-of-names argument typical for the template constructions from [31] to posets, which are defined as template iterations involving non-definable iterands and so, establish the relative consistency of $\aleph_1 < \mathfrak{s} < \mathfrak{b} < \mathfrak{d}$, which is the main result of [17].

Apart from the above advances in Shelah's technique of template iterations, there is one more direction which should be mentioned. In [8], Brendle modifies the original construction to completely embed into the template poset a forcing notion which generically adjoins a maximal almost disjoint family of arbitrary cardinality. The technique produced the first model in which the almost disjointness number is of countable cofinality. The modified construction of Brendle was axiomatized and further developed by Fischer and Törnquist in [20], who showed that the minimal size of a maximal cofinitary group can be of countable cofinality.

4 Boolean Ultrapowers and beyond

There are many possible constellations of $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s}\}$ whose consistency remains open and for which our current methods of obtaining relative consistency results seem to be inadequate or simply of little help. Concerning the characteristics $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ and $\mathfrak{s}$ there are two other ZFC-admissible constellations in which all three of those take distinct values, in addition to $\mathfrak{s} < \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ which was discussed in section 3. These are: $\mathfrak{b} < \mathfrak{s} < \mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b} < \mathfrak{a} < \mathfrak{s}$.

Using the technique of *boolean ultrapowers* Raghavan and Shelah obtain the consistency of $\mathfrak{b} < \mathfrak{s} < \mathfrak{a}$, however at the expense of assuming the existence of super compact cardinals (see [28]). The technique of boolean ultrapowers is comparatively new to the study of the cardinal characteristics of the continuum, nevertheless it can be fully expected to produce many interesting new results as well as

bring new insights into the area.

The consistency of $\mathfrak{b} < \mathfrak{a} < \mathfrak{s}$ *it still open.* One possible approach could be the further development of the theory of coherent systems of iterations, with the aim of introducing the iteration of appropriate Mathias-Prikry posets along a three dimensional coherent system. Note that the existing three dimensional constructions (see [16]) allow the iteration only of nicely definable posets. Thus, the suggested approach reminds greatly the development of Shelah's template iteration theory: originally the constructions allowed only the iteration of nicely definable posets ([30]), while later the theory was successfully generalized to include non-definable (in fact for now, only Mathias-Prikry) iterands (see [27, 17]).

Another well-known admissible constellation, which seems to evade our existing methods, is the well-known Roitman's Problem: *Is it a ZFC theorem that* $\mathfrak{d} = \aleph_1$ *implies* $\mathfrak{a} = \aleph_1$*?* We could either hope to obtain a ZFC proof of this implication, or if not, then obtain the relative consistency of $\mathfrak{d} = \aleph_1 < \mathfrak{a}$. The problem remains one of the most interesting open questions in the field.

Acknowledgments

The author would like to thank the Austrian Science Fund (FWF) for the generous support through grant START-Y1012 N35.

References

[1] T. Bartoszynski. *Invariants of measure and category.* Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3, pp. 491–555, Springer, Dordrecht, 2010

[2] T. Bartoszynski, H. Judah. *Set theory – on the structure of the real line,* A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

[3] J. Baumgartner, P. Dordal. *Adjoining dominating functions*, The Journal of Symbolic Logic, vol.50, no.1, 99–101, 1985.

[4] A. Blass. *Combinatorial cardinal characteristics*, Handbook of set theory, Vol. 1,2,3, pp. 395–489, Sprinder, Dordrecht, 2010.

[5] A. Blass, S. Shelah. *Ultrafilters with small generating sets*, Israel Journal of Mathematics, vol. 65, no. 3, pp. 259-271, 1989.

[6] J. Brendle. *Mod families and mad families*, Arch. Math. Logic, vol. 37, 183–197, 1998.

[7] J. Brendle. *Mad families and iteration theory* Contemporary Mathematics, vol. 302, 1-31, 2002.

[8] J. Brendle. *The almost-disjointness number may have countable cofinality* Trans. of the Amer. Math. Soc. **355**, no. 7, 2633–2649, 2003.

[9] J. Brendle, V. Fischer. *Mad families, splitting families and large continuum*, Journal of Symbolic Logic, 76, 1, 198-208, March 2011.

[10] D. Booth. *A boolean view of sequential compactness*, Fundamenta Mathematicae 110, pp. 99-102, 1980.

[11] R. M. Canjar. *Mathias forcing which does not add dominating reals*, Proceeding of the American Mathematical Society, vol. 104, no. 4, 1988.

[12] P. Cohen. *The independence of the continuum hypothesis*. Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 50, no.9, pp. 1143-1148, 1963.

[13] P. Cohen. *The independence of the continuum hypothesis, II*, Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 51, no.1, pp. 105-110, 1964.

[14] A. Dow, S. Shelah. *On the cofinality of the splitting number*, preprint.

[15] V. Fischer, B. Irrgang. *Non-dominating ultrafilters* Acta Universitatis Carolinae – Mathematica et Physica, vol. 51, 13-17, 2010.

[16] V. Fischer, S. D. Friedman, D. Mejia, D. Montoya. *Coherent systems of finite support iterations* accepted at the Journal of Symbolic Logic, 2017.

[17] V. Fischer, D. Mejia. *Splitting, bounding and almost disjointness can be quite different*, accepted at the Canadian Journal of Mathematics, DOI:10.4153/CJM-2016-021-8.

[18] V. Fischer, J. Steprans. *The consistency of* $\mathfrak{b} = \kappa < \mathfrak{s} = \kappa^+$, Fundamenta Mathematicae 201 (3), pp. 283-293, 2008.

[19] V. Fischer, J. Steprans. *Further combinatorial properties of Cohen forcing*, RIMS Conference proceedings in "Combinatorial and Descriptive Set Theory", Kyoto, 2008.

[20] V. Fischer, A. Törnquist. *Template iterations and maximal cofinitary groups*, Fundamenta Mathematicae, 230 (3):205-236, 2015.

[21] K. Gödel. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Annals of Mathematical Studies, Vol. 3, Princeton University Press 1940.

[22] O. Guzman, M. Hrusák, A. Martínez-Celis. *Canjar filters*, Notre Dame J. Form. Logic 58 (1):79-95, 2017.

[23] L. Halbeisen. *Combinatorial set theory. With a gentle introduction to forcing*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, London, xvi. +453pp, 2012.

[24] T. Jech. *Set Theory*, Springer-Verlag, 2003.

[25] K. Kunen. *Set Theory: An introduction to independence proofs*, North-Holland, 1980.

[26] D. A. Mejía. *Matrix iterations and Cichon's diagram*, Arch. Math. Logic 52, no. 3-4, 261–278, 2013.

[27] D. A. Mejía. *Template iterations with non-definable ccc forcing notions*, Ann. Pure Appl. Logic, DOI:10.1016/j.apal.2015.06.00, 2015.

[28] D. Raghavan, S. Shelah, in preparation.

[29] F. Rothberger *Sur un ensemble toujours de premiere categorie qui est depourvu de la propriete* λ, Fundamenta Mathematicae 32, pp. 294-300, 1939.

[30] S. Shelah. *On cardinal invariants of the continuum*, In (J.E. Baumgartner, D.A. Martin, S. Shelah eds.) Contemporary Mathematics (The Boulder 1983 conference) Vol. 31, Amer. Math. Soc., pp. 184-207, 1984.

[31] S. Shelah. *Two cardinal invariants of the continuum* $(\mathfrak{d} < \mathfrak{a})$ *and FS linearly ordered iterated forcings*. Acta Math. 192, 187-223, 2004.

[32] J. Steprans. *History of the continuum in the 20th century*, Sets and extensions in the twentieth century, 73-144, Handb. Hist. Log.,6, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2012.

Author's address:
Vera Fischer
Kurt Gödel Research Center, University of Vienna
Währingerstr. 25, 1090 Wien.
email vera.fischer@univie.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 236 (2017), 13–24

Abel Prize 2017 for Yves Meyer

Hans G. Feichtinger
Univ. Wien

The Abel Prize 2017 was awarded to Yves Meyer, mostly for his work concerning wavelets. It is the purpose of the review article to explain the background and application areas of wavelet theory, indicate the connections to Gabor analysis and time-frequency analysis and share some personal experiences.

1 Yves Meyer, biographical background

Yves Francois Meyer was born July 19th, 1939 in Paris, but he grew up in Tunisia. After his studies at the École Normale Supérieure he was a teacher for three years at the school Prytanée Militaire in La Flèche (Loire Valley) and obtained a position in Strasbourg afterwards. During this period he prepared his PhD which he presented in 1966. Formally Jean-Pierre Kahane was his advisor, but he considers himself a *self-made man*. From that time on he spent all of his active time in Paris at different schools, such as Université Paris-Sud, École Polytechnique, Université Paris-Dauphine and École Normale Supérieure de Cachan.

His extensive work has many facets, covering number theory [38], harmonic analysis, quasi-crystals, operator theory and of course wavelets, as is nicely described in the article [11] by Ingrid Daubechies. We will focus in our presentation on the last two topics, because they have been the reason for awarding him the Abel Prize 2017. The interview with Yves Meyer published in the EMS Newsletter [15] also reveals some interesting background regarding his personal views on his development as a mathematician, some of his private interests (e.g. in literature) and the achievements which have been important to himself.

I will also add some personal comments to this story, because I had the good luck of meeting Yves Meyer as well as Alex Grossmann in Marseille around the critical period, just after the "discovery of orthonormal wavelets", under the French name of "ondelettes", allowing me to present some (hopefully interesting) background information.

ISSN 0020-7926

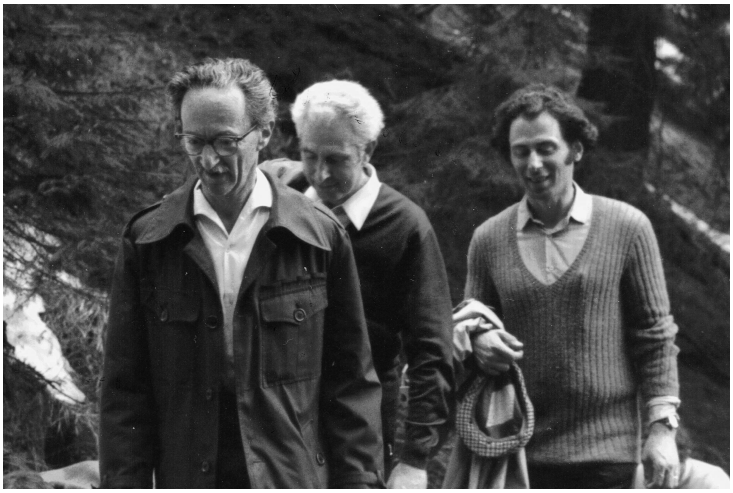


Figure 1: S. Hartmann, J. P. Kahane and Yves Meyer, ca. 1980, in Wisla.

2 What are Wavelets?

The first and decisive observation by Y. Meyer in connection with wavelet theory was the *construction* of a particular smooth, real-valued and even functions $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ with the property that a collection of certain dilated and shifted versions (atoms of *constant shape*) of ψ form an orthonormal basis (ONB) $(\psi_i)_{i\in I}$ for the Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$. The fact that such a function must satisfy $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$ implies that it's graph must show both positive and negative parts; it thus looks like a wavelet (or in French: "ondelette"), a *localized wave*.

Before going into more technical details let us discuss some of the immediate consequences, which can be described in a colloquial style:

1. Since clearly every $f \in L^2(\mathbb{R})$ has a unique representation as

$$f = \sum_{i\in I} c_i \psi_i := \sum_{i\in I} \langle f, \psi_i \rangle \psi_i, \tag{1}$$

   the coefficients c_i provide information about the "energy content within f" at the *scale and position*, corresponding the dilation factor and the center of the function ψ_i. Summing over the coarse scales only provides a *sparse* approximation of f, using a fairly small number of non-zero coefficients;

2. Certain operators (namely the so-called Calderón-Zygmund operators) which behave well with respect to dilations have an interesting, "diagonally concentrated" (infinite) matrix representation with respect to such an ONB, which helps to verify their mapping properties on the classical smoothness spaces;

3. The fact that the dilations applied to ψ allows to create narrow building blocks indicates already that even jumps or strongly transient parts in a function f do not require a huge number of coefficients (in contrast to Fourier series expansions). This fact implies among others that functions which are piecewise smooth with some jumps in between can be well approximated using finite wavelet sums.

It was also clear to Yves Meyer from the very beginning that these countable systems of smooth functions are not just an orthonormal basis for $L^2(\mathbb{R})$, but since the ones he constructed are all Schwartz functions, i.e. belong to the space $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ of *rapidly decreasing functions* on $\mathbb{R}$, they also belong to all the classical smoothness spaces, including the (inhomogeneous) Besov spaces and the Triebel-Lizorkin spaces (as described in the books of Hans Triebel [51, 52, 53, 54], or the book of Elias Stein [47]). Note that Bessel-potential spaces, and in particular the classical Sobolev spaces $\mathcal{H}^s(\mathbb{R})$ belong to this family of function spaces.

Even more importantly, these ONBs form in addition *unconditional bases* for these spaces. This fact justifies the use of many (even non-linear) procedures, such as the (hard or soft) thresholding procedure, which works as follows: Given a (perhaps very *noisy*) signal f one tries to "clean" or "denoise" it by setting all the small wavelet coefficients to zero before resynthesis. Since for each of the classical function spaces mentioned above there is some solid BK-space over the index set, i.e. a Banach space $(Y, \|\cdot\|_Y)$ of sequences over I with the crucial property that for $\mathbf{c} = (c_i)_{i\in I} \in Y$ and any other sequence $(d_i)_{i\in I}$ with $|d_i| \leq |c_i|$ for all $i \in I$, one finds that $\mathbf{d} \in Y$ and $\|\mathbf{d}\|_Y \leq \|\mathbf{c}\|_Y$ characterizing the membership of a – say tempered distribution – f to the corresponding function space. Typically these BK-spaces are weighted mixed norm spaces, where the order of summation decides about the type of function space which can be characterized.

The (French) books of Yves Meyer [42, 43, 44] and the "Ten Lectures" by Ingrid Daubechies, published with SIAM in 1992, based on her course given at the first wavelet conference in Lowell (main organizer was Beth Ruskai) have been the first books covering the basic principles of the arising field of *wavelet analysis*. They are good sources until now.

Yves Meyer was also promoting the idea of an MRA (a multi-resolution analysis), which is another important aspect of wavelet theory, closely linked with a systematic construction of wavelet ONBs, especially in the multi-dimensional case. The concept of MRA had been introduced by Stephane Mallat [35, 36], motivated by precursors in image analysis. It is well described and illustrated in his important book [34]. It is useful e.g. for the transfer of images, where one would like to transfer first (and fast) the coarse information, while subsequently, by orthogonal enrichment of the already transmitted information, details can be filled in (e.g. for teleconferencing applications at low bit rates).

In Chapter II of his book [42] Yves Meyer gives already the detailed description[1] of a multi-resolution for the Hilbert spaces $\big(L^2(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_2\big)$: it consists of an increasing sequence of closed subspaces V_j, indexed by $j \in \mathbb{Z}$, satisfying

1. $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$, and $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ is dense in $L^2(\mathbb{R}^d)$,
2. $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall j \in \mathbb{Z} : f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$,
3. $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall k \in \mathbb{Z}^d : f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$,
4. $\exists g \in V_0$ such that $g(x-k), k \in \mathbb{Z}^d$ is Riesz basis for V_0.

In words: at each level $j \in \mathbb{Z}$ (representing scale) the space V_j is translation invariant, very much like the space of e.g. cubic spline functions (where the cubic B-spline would take the role of the generator g). This function is often called the "father wavelet" (or scaling function) because it is the starting point for the derivation of some "mother wavelet" ψ (in higher dimensions one needs $2^d - 1$ such wavelets), which span in a similar way the orthogonal complement $W_j := V_{j+1} \ominus V_j$. The whole Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$ is then an infinite orthogonal sum of all these "incremental spaces" $W_j, j \in \mathbb{Z}$, providing information about $f \in L^2(\mathbb{R})$ at the different scales j (with well defined localizations of their atoms).

3 My Personal Involvement

As a responsible (volunteer) for the Mathematical Library of our Institute of Mathematics in Strudlhofgasse 4 in Vienna I was lucky to immediately identify first the paper by Grossmann-Morlet [26] when it appeared in the BIBOS preprint series published in Bielefeld. I decided to visit professor Alex Grossmann in 1985.

When subsequently, in the autumn of 1985, Yves Meyer's paper [39] appeared (also first as a preprint) it was clear that this was an "extra-ordinary" event (at least for me). Hence I got into contact with professor Yves Meyer around Christmas 1985, because I had already an invitation for a Colloqium Talk in Nancy (by George Bohnke) in February 1986.

During a relatively short meeting in Paris Yves Meyer disclosed to me that they had (at that time) just two constructions of orthonormal wavelet bases as described in [39] and [32], one together with his student Pierre Gilles Lemarié. But he was also very excited about their findings and immediately realized the great potential for applications, notably in connection with the theory of Calderón-Zygmund operators. These operators, generalizing the Hilbert transform, had been in the center of his research (see [8] with R. Coifman and A. McIntosh, work of his students J.-L. Journé and G. David [13] and the books [44, 45]).

When I met Yves Meyer and Alex Grossmann I had already developed my own theory of *modulation spaces* and atomic decompositions (see [17], published in

[1] Under the given Riesz basis assumption one can find another generator g_1 for V_0 which forms an orthonormal basis of translates in 4. above.

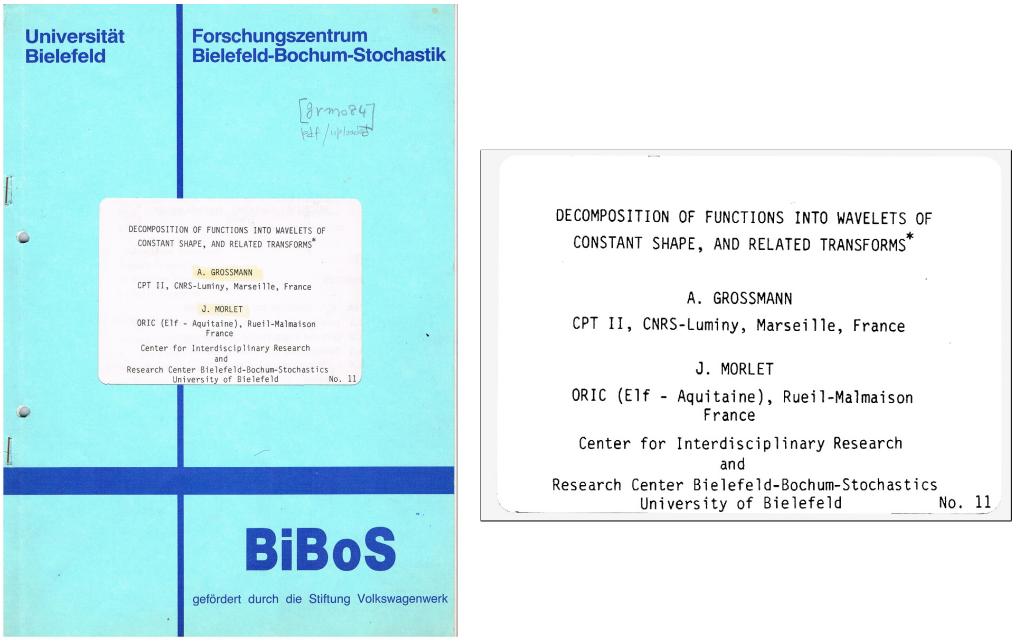


Figure 2: The title page of Grossmann-Morlet 1984 [26].

2002 as [18], see also [19]) and thus it was not hard to realize that there might be something in common with wavelet theory.

The result of this research together with Karlheinz Gröchenig is the so-called *Theory of Coorbit Spaces* (see [20, 21]) which is continuing to develop until now.

During this project K. Gröchenig was also visiting Yves Meyer in Paris, where he solved a problem concerning multi-dimensional wavelets (see [25]) which had been under discussion in Yves Meyer's group at that time. Afterwards Gröchenig also had an extended visit to A. Grossmann in Marseille.

Another influential paper which appeared in 1986 was [12], entitled "Painless nonorthogonal expansions", describing situations where *frame expansions* could be obtained in an easy way, because the frame operator is a simple multiplication operator. According to Yves Meyer (citation from memory) this paper was "painless for me, because I just had to provide some ideas and my co-authors took care of the manuscript". The coauthors have been Alex Grossmann and Ingrid Daubechies (she was a Post-Doc in Marseille at that time).

Although the concept of frames had been already introduced in by Duffin and Schaeffer [14] in 1952, it had not been viewed as very important until wavelet frames and Gabor frames (as described in [12]) got into the focus of attention. Without discussing them in detail let us just mention that *frames* are indexed families $(g_j)_{j\in J}$ (typically with a countable index set) which form a *stable set of generators*, in the sense that one can guarantee that every element can be expanded

as an infinite, unconditionally convergent series with $\ell^2(J)$-coefficients. For the foundations of frame theory one may recommend [5] or [10].

4 Prehistory of Wavelet Theory

The history of wavelet theory is quite interesting, also from a historical point of view. While the concrete construction of orthonormal wavelet bases was the starting point of an exciting movement during the last 30 years, it is not unrelated to many other developments in (Fourier) analysis.

First of all it is commonly agreed that the *idea* to use what is now called "wavelets" goes essentially back to Jean Morlet (1931–2007), a geophysicist at Elf-Aquitaine. Together with Alex Grossmann, a theoretical physicist in Marseille, the *continuous wavelet transform*, together with the continuous representation of functions (or distributions) was developed. Writing abstractly ψ_g for a generic dilated and shifted version of ψ their representation formula takes the form

$$f = \int_G \langle f, \psi_g \rangle \psi_g dg, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \tag{2}$$

where the integral is over the half plane respectivly over the affine "$ax+b$"-group G with respect to the left invariant (Haar) measure dg. As it turned out this was a rediscovery of what is nowadays called *Calderón's reproducing formula* (see [6]).

Since it is common sense to expect that an integral representation allows (by writing corresponding Riemanian sums) to obtain approximate representation using countable grids (a multiplicative lattice of the form $a^n, n \in \mathbb{Z}$, for some $a > 1$ and an arithmetic grid of translations of the form by $kb, k \in \mathbb{Z}$, for some $b > 0$) it was plausible that one could approximate every $f \in L^2(\mathbb{R})$ by finite wavelet sums. Looking for good examples, the so-called Mexican hat function, the second derivative of the usual Gauss function $g_0(t) := e^{-\pi t^2}$, was proposed as a candidate (see also [3, 4]). Numerically it showed quite good approximation properties, allowing an almost exact reproduction of the functions f, almost like an orthonormal basis. Nowadays we know that it can form a snug[2], i.e. almost *tight frame*.

Hence Alex Grossmann suggested to contact finally Yves Meyer to check whether maybe the deviation was only a question of numerical approximation. However, Yves Meyer, being aware of a 1981 paper [1] by Roger Balian related to Gabor thought (according to what he told me in February 1986) that it is impossible to have such an orthonormal system, starting from a smooth function ψ. As it turned out to his surprise, his conjecture was wrong, because he himself *found a counterexample*. But in fact, to find a way to construct such a "counterexample" was good news, and Yves Meyer immediately recognized the potential of his invention (or

[2]This term, used in early papers, was soon discarded.

discovery, one can discuss this question over a glass of wine). So the first papers appeared in that year: [39, 32, 40, 41].

Working in the "exploding" area of wavelets, Yves Meyer became a sedulous prophet of this new branch of mathematical analysis and showed in many cases how the rich structure of "good wavelet systems" can be used to study boundedness of operators. His credo (once formulated in a private conversation) is: *"Function spaces are only good for the description of operators!"*

While the first, now so-called Meyer wavelets had been real-valued functions of exponential decay, but with compactly supported Fourier transform (hence analytic functions) it was Ingrid Daubechies who was able to describe the first construction of compactly supported wavelets (published in 1988, [9]) of prescribed smoothness. As with splines one has to accept larger support size with increased smoothness request. She also provided iterative rules which allows to compute the wavelet coefficients in a numerical efficient way.

It took a while until it was realized that there had been precursors to his construction. First of all (as pointed out in [10], or [29]) the Haar system (see [27]) can be viewed as a wavelet system of the lowest order, i.e. consisting of piecewise constant functions (in fact taking the values $1, -1$ and 0), but one can argue that these are well localized, discontinuous step-functions. There was however another one, consisting of continuous functions, published before the construction of the Meyer wavelets, in the work of J.-O. Strömberg [48] on Franklin bases for $H^1(\mathbb{R})$, which form a wavelet system of piecewise linear and continuous functions. But his contribution was not immediately recognized, although he presented (as Peter Jones mentioned in one of his talks) his results at the conference to celebrate Antoni Zygmund's 80th birthday, in front of a group of leading experts in the field.

The original paper of A. Haar [27] does not mention dilations at all (see [29]), i.e. it is a re-interpretation introduced in [10] in order to describe the idea of the basic wavelet algorithms through a simple example. On the other hand the good compressive properties of wavelet expansion are only valid for smooth wavelets (as proposed by I. Daubechies or Y. Meyer) and not by the simple Haar wavelets.

It was Yves Meyer who recognized the relevance and the possibilities that opened up with the existence of what is nowadays called an *orthonormal wavelet basis*. Recall that there does not exist any orthonormal (and not even Riesz) basis in the Gaborian case. This fact forced the community to work with Banach frames and redundant representation in that context [20, 22].

5 Further Information

In addition to the comments and stories provided above let us mention a couple of further sources.

On *YouTube* one can view 18 videos recorded at the final event of my semester

on the Morlet Chair at the CIRM in Luminy (Marseille). One can access all the presentations, including many contributions by pioneers in wavelet theory, by searching for the title of the event on *YouTube*, namely "30 Years of Wavelets". Let me particularly point to the contribution by Patrick Flandrin who showed that wavelets is not only a mathematical subject, but also a topic that found widespread applications in engineering. He also indicated that the field of wavelets has very much contributed to an intensive cooperation across scientific disciplines, which I consider another important aspect of wavelet theory.

The relevance of wavelet systems is partially due to the perfect fit between function spaces of Besov-Triebel-Lizorkin type and their characterization through "good wavelet bases". The transition translates the membership of a distribution to one of these function spaces to the membership of its wavelet coefficients in the corresponding Banach lattice of multi-dimensional sequences. This characterization is independent of the concrete wavelet system, as long as it satisfies certain quality criteria (decay and moment conditions). Since thresholding operators are harmless in such lattices the wavelet expansions allow for these non-linear operations, preserving the smoothness of the original input f.

This in sharp contrast to the situation for $L^p(\mathbb{T})$ and Fourier-series expansions, as has been shown by V. Temlyakov [50]. There it cannot be assured that one has convergence of the partial sums obtained by letting a sequence of threshold parameters tend to zero. The problem of "conditionality" of Fourier series has been discussed in detail earlier by T. W. Körner [30, 31] for continuous functions.

We also want to point out that the connection between wavelet characterizations of the function spaces is based on the Fourier characterization of these function spaces, as described by the pioneers of interpolation theory, Jaak Peetre [46] and Hans Triebel (see his books). An important step for these characterizations is the Littlewood-Paley characterization (see [16]) of L^p-spaces using dyadic decompositions on the Fourier transform side. These decompositions have been also been the basis for the *atomic decompositions* and the ϕ-transform approach by M. Frazier and B. Jawerth (in [23, 24]).

Chris Heil and Dave Walnut, who have contributed to the early popularization of wavelets through [28] have also put together a collection of "Fundamental Papers in Wavelet Theory" in [29], making these papers available to the English speaking community (starting from Haar's paper of 1910, written in German, to the early papers about "ondelettes" of the French school around Yves Meyer).

A short summary of the history of wavelets is given by Albert Cohen [7]. The paper [33] also reports about Yves Meyer as a Gauss Prize Winner. A popular description of the world of wavelets has been given already in 1996 (since then several new editions, also in different languages) by Hubbard Burke, see [2].

6 Final Comments

As we have seen, the theory of wavelets is an interesting and important branch of modern Harmonic Analysis, and Yves Meyer was one of the key figures contributing greatly to the development of this field, by showing that it is possible to create orthonormal wavelet bases. But he was not only constructing such bases, but already in his early publications on the subject indicating how they can be used to characterize function spaces (most of the classical ones) and how to use this fact in order to prove boundedness results for certain classes of operators, in particular for Calderón-Zygmund operators.

The theory of *wavelets* has developed greatly and has also found a lot of recognition in the engineering community. For a while the (meanwhile terminated) *Wavelet Digest* had more than 20,000 subscribers. In the last 30 years more than 300 PhD theses have been written in the field (according to the Mathematical Genealogy Database, theses with the word "wavelet" in the title), but the numbers have started to decrease in the last few years.

Wavelet theory is a well established set of tools, but it will continue to expand further and find new applications also in the future, also through interesting new generalizations (like shearlets) or new application areas. Wavelets have been useful for a number of real-world applications, e.g. for the JPEG-2000 standard, see [37] and [49].

With Yves Meyer, the Norwegian Abel Prize committee has honoured in 2017 one of the outstanding pioneers of the field of wavelets and the person who has been promoting their use for so many years in so many different branches of mathematics. At the end, he himself claims that there is nothing that cannot be also done without wavelets. But I would like to add, "but by using wavelets things are often easier to understand", and also the idea of multi-scale is certainly here to stay.

In addition, the wavelet movement has been the basis for other, more recent branches of mathematical analysis of high application potential, such as sparse approximation, compressive sensing, or deep learning based on Mallat's idea of a scattering transform.

References

[1] R. Balian. Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre*, 292(20):1357–1362, 1981.

[2] H. Burke. *The World According to Wavelets: the Story of a Mathematical Technique in the Making.* Wellesley, 1996.

[3] H.-Q. Bui and R. S. Laugesen. Wavelets in Littlewood-Paley space, and Mexican hat completeness. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 30(2):204–213, 2011.

[4] H.-Q. Bui and R. S. Laugesen. Frequency-scale frames and the solution of the Mexican hat problem. *Constr. Approx.*, 33(2):163–189, 2011.
[5] O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Basel, Second edition, 2016.
[6] A. P. Calderón. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Math.*, 24:113–190, 1964.
[7] A. Cohen. Sur la route des ondelettes. *Gaz. Math., Soc. Math. Fr.*, 130:19–36, 2011.
[8] R. R. Coifman, A. G. McIntosh, and Y. Meyer. L'integrale de Cauchy definit un operateur borne sur L^2 pour les courbes Lipschitziennes. *Ann. of Math. (2)*, 116(2):361–387, 1982.
[9] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 41(7):909–996, 1988.
[10] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.*, Vol. 61 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
[11] I. Daubechies. The work of Yves Meyer. In *Proc. Internat. Congress Math.. Vol. I*, pages 115–124. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.
[12] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys.*, 27(5):1271–1283, May 1986.
[13] G. David and J.-L. Journé. A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators. *Ann. Math. (2)*, 120:371–397, 1984.
[14] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer. A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72:341–366, 1952.
[15] B. I. Dundas and C. Skau. Interview with Abel Laureate Yves Meyer. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 105:14–22, 2017.
[16] R. E. Edwards and G. I. Gaudry. *Littlewood-Paley and Multiplier Theory*, Vol. 90, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, Springer-Verlag, 1977.
[17] H. G. Feichtinger. Modulation spaces on locally compact Abelian groups. Technical report, University of Vienna, January 1983.
[18] H. G. Feichtinger. Modulation spaces of locally compact Abelian groups. In R. Radha, M. Krishna, and S. Thangavelu, editors, *Proc. Internat. Conf. on Wavelets and Applications*, pages 1–56, Chennai, January 2002, publ. 2003. New Delhi Allied Publishers.
[19] H. G. Feichtinger. Modulation Spaces: Looking Back and Ahead. *Sampl. Theory Signal Image Process.*, 5(2):109–140, 2006.
[20] H. G. Feichtinger and K. Gröchenig. Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions, I. *J. Funct. Anal.*, 86(2):307–340, 1989.
[21] H. G. Feichtinger and K. Gröchenig. Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions, II. *Monatsh. Math.*, 108(2-3):129–148, 1989.
[22] H. G. Feichtinger and K. Gröchenig. Gabor wavelets and the Heisenberg group: Gabor expansions and short time Fourier transform from the group theoretical point of view. In C. K. Chui, editor, *Wavelets: a tutorial in theory and applications*, Vol. 2 of *Wavelet Anal. Appl.*, pages 359–397. Academic Press, Boston, 1992.
[23] M. Frazier and B. Jawerth. Decomposition of Besov spaces. *Indiana Univ. Math.*

J., 34:777–799, 1985.

[24] M. Frazier and B. Jawerth. The φ-transform and applications to distribution spaces. In *Function Spaces and Applications, Proc. US-Swed. Seminar, Lund/Swed, Lect. Notes Math. 1302*, pages 223–246. 1988.

[25] K. Gröchenig. Analyse multi-échelles et bases d'ondelettes. *C. R. Acad. Sci. Paris S'er. I Math.*, 305(1):13–15, 1987.

[26] A. Grossmann and J. Morlet. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.* 15:723–736, 1984.

[27] A. Haar. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. (Erste Mitteilung.) *Math. Ann.*, 69:331–371, 1910.

[28] C. Heil and D. F. Walnut. Continuous and discrete wavelet transforms. *SIAM Rev.*, 31:628–666, 1989.

[29] C. Heil and D. F. Walnut, editors. *Fundamental Papers in Wavelet Theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.

[30] T. W. Körner. Divergence of decreasing rearranged Fourier series. *Ann. of Math. (2)*, 144(1):167–180, 1996.

[31] T. W. Körner. Decreasing rearranged Fourier series. *J. Fourier Anal. Appl.*, 5(1):1–19, 1999.

[32] P. G. Lemarié and Y. Meyer. Ondelettes et bases hilbertiennes. (Wavelets and Hilbert bases). *Rev. Mat. Iberoam.*, 2:1–18, 1986.

[33] R. Malhotra. Yves Meyer, the 2010 Gauss Prize winner. *Current Sci.*, 99(11):1501–1504, 2010.

[34] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing.* Academic Press, San Diego, CA, 2nd ed. edition, 1999.

[35] S. G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 11(7):674–693, 1989.

[36] S. G. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315(1):69–87, 1989.

[37] M. Marcellin. *JPEG2000 Image Compression Fundamentals, Standards and Practice: Image Compression Fundamentals, Standards, and Practice*, Vol. 1. Springer, 2002.

[38] Y. Meyer. Algebraic Numbers and Harmonic Analysis. North-Holland Mathematical Library. Vol. 2. North- Holland Publ. Comp., 1972.

[39] Y. Meyer. De la recherche petrolière à la géometrie des espaces de Banach en passant par les paraproduite. (From petroleum research to Banach space geometry by way of paraproducts). In *Sém. Équ. Dériv. Part., 1985–1986, Exp. No. I*, pages 1–11. Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1986.

[40] Y. Meyer. Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées. (Wavelets, spline functions and multiresolution analysis). *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 45(1):1–42, 1987.

[41] Y. Meyer. Constructions de bases orthonormées d'ondelettes. (Construction of orthonormal bases of wavelets). *Rev. Mat. Iberoam.*, 4(1):31–39, 1988.

[42] Y. Meyer. *Ondelettes et Operateurs I: Ondelettes.* Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, Paris, 1990.

[43] Y. Meyer. *Ondelettes et Operateurs II: Operateurs de Calderon-Zygmund. (Wave-*

lets and Operators II: Calderon-Zygmund Operators). Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, Paris, 1990.
[44] Y. Meyer and R. R. Coifman. *Ondelettes et Operateurs. III* . Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts, Paris, 1991.
[45] Y. Meyer and R. R. Coifman. *Wavelets: Calderon–Zygmund and Multilinear Operators*. Number 48 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
[46] J. Peetre. *New Thoughts on Besov spaces*. Duke University Mathematics Series, No. 1. Mathematics Department, Duke University, 1976.
[47] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
[48] J.-O. Strömberg. A modified Franklin system and higher-order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces. In et al. and W. Beckner, editors, *Conference on Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund, Vol. II, Wadsworth (Belmont, CA)*, pages 475–494, 1983.
[49] T. Strutz. *Bilddatenkompression. Grundlagen, Codierung, JPEG, MPEG, Wavelets.* Braunschweig: Vieweg, 2. akt. u. erw. Aufl., 2002.
[50] V. N. Temlyakov. Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation. *Constr. Approx.*, 14(4):569–587, 1998.
[51] H. Triebel. *Theory of Function Spaces.* Vol. 78 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, 1983.
[52] H. Triebel. *Theory of Function Spaces II.* Vol. 94 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, 1992.
[53] H. Triebel. *The Structure of Functions.* Birkhäuser, Basel, 2001.
[54] H. Triebel. *Theory of Function Spaces III*, Vol. 100 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, 2006.

Author's address:
Hans G. Feichtinger,
Universität Wien
Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien.
email hans.feichtinger@univie.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 236 (2017), 25–37

Merkwürdige Partitionen

Gerald Kuba
Univ. Bodenkultur Wien

Einleitung

Wie üblich, ist $\mathcal{P}$ eine *Partition* von M, falls die Elemente von $\mathcal{P}$ paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen von M sind, deren Vereinigung die Menge M ist. Sind A und B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$, so schreiben wir $A+B$ für $\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$ (und es sei $a+B := \{a\}+B$ für $a\in\mathbb{R}$.)

Es sei L eine nichtleere Menge reeller Zahlen. Somit ist L in natürlicher Weise eine linear geordnete Menge. Wir nennen eine Partition $\mathcal{P}$ von L eine *Autopartition von* L, falls jede (natürlich geordnete) Menge $A\in\mathcal{P}$ mit L ordnungsisomorph ist, falls also jedes $A\in\mathcal{P}$ mit einer streng monoton wachsenden Funktion surjektiv auf L abgebildet werden kann. Kurz gesagt ist eine Autopartition von L eine Partition von L in Kopien von L. Die Partition $\{L\}$ ist die *triviale Autopartition* von L. (Ist L *endlich*, so ist $\{L\}$ natürlich die einzige Autopartition von L.) Ein naheliegendes Beispiel einer nichttrivialen Autopartition von $\mathbb{Z}$ ist $\{G,U\}$, wobei G bzw. U die Menge der geraden bzw. ungeraden ganzen Zahlen ist. Die Menge $\mathbb{Z}$ besitzt auch eine *unendliche* Autopartition. Eine solche ist zum Beispiel durch

$$\{Y,Z_2,Z_3,Z_5,Z_7,\ldots\},\quad \text{mit}$$
$$Z_p := \{(-p)^n \mid n\in\mathbb{N}\}\ (p \text{ prim}),\quad Y=\mathbb{Z}\setminus(Z_2\cup Z_3\cup Z_5\cup Z_7\cup\ldots)$$

gegeben. Dabei ist $\mathbb{N}$ die Menge der *natürlichen* Zahlen, mit $0\notin\mathbb{N}$. Mithilfe von Primzahlen kann man auch leicht eine unendliche Autopartition von $\mathbb{Q}$ definieren. Auch die Zahlengerade $\mathbb{R}$ besitzt eine unendliche Autopartition. Ist nämlich $\mathcal{Z}$ eine Autopartition von $\mathbb{Z}$, so ist eine Autopartition von $\mathbb{R}$ offensichtlich durch

$$\Big\{\bigcup\nolimits_{n\in A}[n,n+1[\ \Big|\ A\in\mathcal{Z}\Big\}$$

gegeben. Wir nennen eine Autopartition $\mathcal{A}$ von L *extrem*, falls $\mathcal{A}$ und L gleichmächtige Mengen sind. Da $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar sind, besitzen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ extreme Autopartitionen. Ein Hauptziel dieser Note ist ein Beweis von

ISSN 0020-7926

Satz 1. *Die Zahlengerade $\mathbb{R}$ besitzt eine extreme Autopartition.*

Satz 1 ist insofern bemerkenswert, als ordnungsisomorphe Kopien von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ keineswegs irgendwie *exotische* Mengen sind. Dieselben sind nämlich, wie folgende Proposition zeigt, *Borelmengen* einfachster Bauart.

Proposition 1. *Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so gilt $f(\mathbb{R}) = A \setminus B$ für eine euklidisch abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}$ und eine abzählbare Menge $B \subset \mathbb{R}$.*

Satz 1 ist eine unmittelbare Folgerung aus

Satz 2. *Das halboffene Intervall $]0,1]$ besitzt eine extreme Autopartition.*

Ist nämlich $\mathcal{A}$ eine Autopartition von $]0,1]$, so ist offensichtlich $\{\mathbb{Z}+A \mid A \in \mathcal{A}\}$ eine Autopartition von $\mathbb{R}$. Wir werden Satz 2 auf zwei Arten anschaulich und vor allem *konstruktiv* beweisen. Weniger konstruktiv dagegen gewinnt man den folgenden Satz, der durchaus bemerkenswert ist, da bekanntlich $\{[0,1]\}$ die einzige Partition von $[0,1]$ in *topologische* Kopien von $[0,1]$ ist. Dabei nennen wir B eine topologische Kopie von A, falls A und B homöomorphe Teilräume des euklidischen Raumes $\mathbb{R}$ sind.

Satz 3. *Das euklidisch kompakte Intervall $[0,1]$ besitzt eine extreme Autopartition.*

Da die topologischen Kopien von $\mathbb{R}$ genau die offenen Intervalle sind, kann eine Autopartition von $\mathbb{R}$ höchstens abzählbar viele topologische Kopien von $\mathbb{R}$ enthalten. Und die einzige Partition von $\mathbb{R}$, deren Elemente durchwegs topologische Kopien von $\mathbb{R}$ sind, ist die triviale Partition $\{\mathbb{R}\}$. Ganz anders ist die Situation beim euklidischen Raum $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, der üblicherweise *Baire-Raum* genannt wird:

Satz 4. *Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ besitzt eine extreme Autopartition $\mathcal{A}$ dergestalt, dass jede Menge $A \in \mathcal{A}$ homöomorph mit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist.*

Der Baire-Raum ist eines der beiden zentralen Objekte der deskriptiven Analysis der reellen Zahlen (siehe [5]). Das andere ist die berühmte *Cantormenge*

$$\mathbb{D} := \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} \mid a_n \in \{0,2\} \Big\}.$$

Auch für die Cantormenge $\mathbb{D}$ gibt es eine extreme Autopartition $\mathcal{A}$ dergestalt, dass jede Menge $A \in \mathcal{A}$ homöomorph mit $\mathbb{D}$ ist. Überdies gibt es eine solche Autopartition mit einer bemerkenswerten Zusatzeigenschaft:

Satz 5. *Es gibt mit $\mathbb{D}$ ordnungsisomorphe und homöomorphe (somit kompakte) Mengen $A, B \subset \mathbb{D}$ dergestalt, dass die Translate $a+B$ $(a \in A)$ paarweise disjunkt sind und $A+B = \mathbb{D}$ gilt.*

Anders als bei $\mathbb{D}$ können wir mit einer extremen Autopartition von $\mathbb{R}$, die nur aus Translaten einer *einzigen* Grundmenge besteht, nicht dienen. Immerhin gelingt uns eine solche mit *zwei* Grundmengen:

Satz 6. *Es gibt mit $\mathbb{R}$ gleichmächtige Mengen $R_1, R_2, T_1 \subset \mathbb{R}$ und eine abzählbare Menge $T_2 \subset \mathbb{R}$ dergestalt, dass die natürlich geordneten Mengen R_1, R_2 mit $\mathbb{R}$ isomorph sind und für $i \in \{1,2\}$ die Translate $t + R_i$ $(t \in T_i)$ paarweise disjunkt sind und $(T_1 + R_1) \cap (T_2 + R_2) = \emptyset$ und $(T_1 + R_1) \cup (T_2 + R_2) = \mathbb{R}$ gilt und überdies $T_2 + R_2$ eine Nullmenge ist.*

Ein besonders bemerkenswerter Satz, der sowohl Satz 1 als auch die Existenz einer extremen Autopartition von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ trivial impliziert und dessen Beweis zwar sehr natürlich, jedoch auch völlig inkonstruktiv ist, ist der folgende.

Satz 7. *Die Basismenge $\mathbb{B}$ sei entweder die Zahlengerade $\mathbb{R}$ oder der Baire-Raum $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es sei I eine mit $\mathbb{R}$ gleichmächtige Indexmenge und $\emptyset \neq T_i \subset \mathbb{R}$ für alle $i \in I$. Dann gibt es eine auf I definierte Abbildung $i \mapsto F_i$ so, dass $F_i \subset \mathbb{B}$ für alle $i \in I$ und $\mathbb{B} = \bigcup_{i \in I} F_i$ sowie stets $F_i \cap F_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt und dass für jeden Index $i \in I$ die beiden Mengen T_i und F_i ordnungsisomorph sind.*

Bekanntlich ist jede abzählbare und dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ordnungsisomorph mit $\mathbb{Q}$, vgl. [5, S. 91]. Die Menge $\mathbb{Q}$ besitzt eine extreme Autopartition – analog wie oben ist durch $\left\{ \bigcup_{n \in A} (\mathbb{Q} \cap [n, n+1[) \;\middle|\; A \in \mathcal{Z} \right\}$ eine Autopartition von $\mathbb{Q}$ gegeben, sofern $\mathcal{Z}$ eine Autopartition von $\mathbb{Z}$ ist. Somit besitzt jede abzählbare und dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ eine extreme Autopartition. Daher ist folgender Satz, der eine naheliegende Frage beantwortet, bemerkenswert.

Satz 8. *Es gibt eine dicht in $\mathbb{R}$ liegende Menge $D \subset \mathbb{R}$, die keine nichttriviale Autopartition besitzt.*

Satz 8 ist eine reine Existenzaussage, und der Beweis ist inkonstruktiv. Dagegen zeigt der folgende Satz, dass man sehr leicht konkrete Beispiele für unendliche Mengen reeller Zahlen finden kann, die keine nichttriviale Autopartition besitzen.

Satz 9. *Keine kompakte, abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat eine nichttriviale Autopartition.*

Ganz anders ist die Situation bei *kompakten, überabzählbaren* Teilmengen von $\mathbb{R}$. Diese Mengen besitzen immer eine extreme Autopartition, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 10. *Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$, die eine überabzählbare abgeschlossene Menge enthält, besitzt eine extreme Autopartition.*

Beweis von Proposition 1

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, und es sei U die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Für $z \in \mathbb{R}$ sei

$$f^+(z) := \lim_{x \to z^+} f(x), \quad f^-(z) = \lim_{x \to z^-} f(x).$$

Natürlich gilt stets

$$f^-(z) \le f(z) \le f^+(z)$$

und dabei gilt $f^-(z) \neq f^+(z)$ genau dann, wenn $z \in U$. Aus $f^-(z) < f^+(z)$ für $z \in U$ gewinnt man sofort die wohlbekannte Erkenntnis, dass U abzählbar sein muss, denn $\mathbb{Q} \cap [f^-(z), f^+(z)] \neq \emptyset$ für $z \in U$.

Es sei A der Abschluss von $f(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ und $B := A \setminus f(\mathbb{R})$. Wegen $f(\mathbb{R}) \subset A$ gilt $f(\mathbb{R}) = A \setminus B$, und somit genügt es, zu zeigen, dass die Menge B abzählbar ist. Es sei $b \in B$. Gleich vorweg sei der Fall ausgeschlossen, dass b ein Extremum von A ist, dass also b gleich $\sup f(\mathbb{R}) = \lim_{x\to\infty} f(x)$ oder gleich $\inf f(\mathbb{R}) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ ist. Da b ein Häufungspunkt von $f(\mathbb{R})$ außerhalb von $f(\mathbb{R})$ ist, gilt wegen der Monotonie $b = f^-(t)$ oder $b = f^+(t)$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Wegen $b \notin f(\mathbb{R})$ und $f^-(z) = f(z) = f^+(z)$ für $z \notin U$ muss t in U liegen. Da U abzählbar ist und A höchstens zwei Extrema hat, muss somit auch B abzählbar sein.

Beweis von Satz 2 und 6

Für $x \in \mathbb{R}$ und $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ schreiben wir $x \cdot A$ für $\{xa \mid a \in A\}$.

Es sei Σ die Menge aller Folgen

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots) \text{ mit } \sigma(n) \in \{0,1\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und Σ_1 die Menge aller $\sigma \in \Sigma$, für die die Indexmenge $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) = 1\}$ unendlich ist. Man beachte, dass jede reelle Zahl im halboffenen Intervall $]0,1]$ *eindeutig* in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) 2^{-n} \text{ mit } \sigma \in \Sigma_1$$

darstellbar ist und dass die Ausdrücke dieser Form das ganze Intervall $]0,1]$ ergeben. Wir setzen

$$G_1 := \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) 2^{-2n} \;\Big|\; \sigma \in \Sigma_1 \Big\}, \qquad G_0 := \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) 2^{-2n} \;\Big|\; \sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_1 \Big\},$$

$$H_0 := \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) 2^{1-2n} \;\Big|\; \sigma \in \Sigma \Big\}, \qquad H_1 := \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) 2^{1-2n} \;\Big|\; \sigma \in \Sigma_1 \Big\}.$$

Wir behaupten, dass

$$\mathcal{P} := \{x + G_1 \mid x \in H_0\} \cup \{x + H_1 \mid x \in G_0\}$$

eine extreme Autopartition der Menge $]0,1]$ ist, womit Satz 2 höchst konstruktiv bewiesen ist.

Erstens sind G_1 und H_1 ordnungsisomorph mit $]0,1]$, denn einerseits gilt offensichtlich $H_1 = 2 \cdot G_1$ und andererseits ist durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) 2^{-n} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) 2^{-2n} \quad (\sigma \in \Sigma_1)$$

offensichtlich eine streng monoton wachsende Bijektion von $]0,1]$ nach G_1 definiert.

Zweitens gilt offensichtlich stets $(x+G_1) \cap (y+G_1) = \emptyset$ für verschiedene $x, y \in H_0$ und $(x + H_1) \cap (y + H_1) = \emptyset$ für verschiedene $x, y \in G_0$, und überdies sind die Vereinigungen $H_0 + G_1$ und $G_0 + H_1$ disjunkt.

Drittens gilt $\bigcup \mathcal{P} =]0,1]$. Dazu beachte man, dass im Falle $\{\sigma_g, \sigma_h\} \subset \Sigma \setminus \Sigma_1$ die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_h(n) 2^{1-2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_g(n) 2^{-2n}$$

mit ihren nur endlich vielen nichtverschwindenen Summanden einen Wert hat, der in der Menge $H_0 + G_1$ liegt.

Da $\Sigma \setminus \Sigma_1$ abzählbar ist, ist G_0 abzählbar. Wie man leicht feststellt, sind G_1, H_0, H_1 Nullmengen. Insbesondere ist $G_0 + H_1$ eine Nullmenge (von der Kardinalität des Kontinuums), und somit schlucken die Translate von G_1 bereits fast alle Punkte in $]0,1]$.

Offensichtlich ist für jede mit $]0,1]$ ordnungsisomorphe Menge $Y \subset]0,1]$ die Menge $\mathbb{Z} + Y$ ordnungsisomorph mit $\mathbb{R}$. Daher sind die Mengen $R_1 := \mathbb{Z} + G_1$ und $R_2 := \mathbb{Z} + H_1$ beide ordnungsisomorph mit $\mathbb{R}$. Die Translate $x + R_1 (x \in H_0)$ und $x + R_2 (x \in G_0)$ sind paarweise disjunkt, und auch deren jeweiligen Vereinigungen $H_0 + R_1$ und $G_0 + R_2$ sind disjunkt. Wegen $(H_0 + G_1) \cup (G_0 + H_1) =]0,1]$ gilt $(H_0 + R_1) \cup (G_0 + R_2) = \mathbb{R}$, und daher ist mit der Festlegung $H_0 = T_1$ und $G_0 = T_2$ Satz 6 komplett erledigt, da $G_0 + R_2$ als Vereinigung der abzählbar vielen Nullmengen $x + H_1 (x \in G_0 + \mathbb{Z})$ eine Nullmenge ist.

Bemerkung. Ohne Translatdarstellungen gelingt ein alternativer konstruktiver Beweis von Satz 2 (und damit von Satz 1) folgendermaßen: Für jede Folge $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ mit $n_1, n_2, n_3, \ldots \in \mathbb{N}$ sei die wohldefinierte reelle Zahl

$$\varphi(n_1, n_2, n_3, \ldots) = 2^{-n_1} + 2^{-n_1-n_2} + 2^{-n_1-n_2-n_3} + 2^{-n_1-n_2-n_3-n_4} + \cdots$$

betrachtet. Jede Zahl x im Intervall $]0,1]$ kann in dieser Weise eindeutig dargestellt werden, weil $x = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) 2^{-n}$ für genau ein $\sigma \in \Sigma_1$ gilt. Überdies gilt für

verschiedene Zahlen $\varphi(n_1,n_2,n_3,\ldots)$ und $\varphi(m_1,m_2,m_3,\ldots)$ offensichtlich genau dann $\varphi(n_1,n_2,n_3,\ldots) < \varphi(m_1,m_2,m_3,\ldots)$, wenn das erste nichtverschwindende Glied der Folge $(n_1-m_1,n_2-m_2,n_3-m_3,\ldots)$ positiv ist. Daher ist eine schöne extreme Autopartition von $]0,1]$ durch

$$\Big\{\{\varphi(n_1,m_1,n_2,m_2,n_3,m_3,\ldots) \mid n_1,n_2,n_3,\ldots \in \mathbb{N}\} \;\Big|\; m_1,m_2,m_3,\ldots \in \mathbb{N}\Big\}$$

gegeben.

Beweis von Satz 3

Es sei $\mathcal{A}$ eine extreme Autopartition von $\left]\frac{1}{2},1\right]$, z.B.

$$\mathcal{A} = \Big\{\frac{1}{2}(1+P) \;\Big|\; P \in \mathcal{P}\Big\} \text{ mit } \mathcal{P} = \big\{x+G_1 \mid x \in H_0\big\} \cup \big\{x+H_1 \mid x \in G_0\big\}$$

wie im Beweis von Satz 2. Offensichtlich ist $\{x\} \cup A$ ordnungsisomorph mit $[0,1]$ für alle $x \leq \frac{1}{2}$ und alle $A \in \mathcal{A}$. Daher ist eine extreme Autopartition von $[0,1]$ durch

$$\Big\{\{x\} \cup f(x) \;\Big|\; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\Big\}$$

gegeben, wobei f irgendeine Bijektion von $[0,\frac{1}{2}]$ auf $\mathcal{A}$ ist.

Bemerkung. Wegen der Beliebigkeit der Abbildung f ist der Beweis von Satz 3 nicht konstruktiv, jedenfalls nicht so wie der Beweis von Satz 2 und 6. Erwähnenswert ist allerdings, dass die Funktion f ohne Verwendung des Auswahlaxioms definiert werden kann, Denn der *Satz von Schröder-Bernstein* ist eine Folgerung des Axiomensystems ZF. In diesem erweiterten Sinne ist der Beweis von Satz 3 dann eben doch konstruktiv.

Beweis von Satz 4 und 5

Jede Zahl in $\mathbb{D}$ ist *eindeutig* in der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2\sigma(n))3^{-n} \text{ mit } \sigma \in \Sigma$$

darstellbar, und umgekehrt ergibt jede Summe dieser Form eine Zahl aus $\mathbb{D}$. Damit ist ein Beweis von Satz 5 auch rasch erledigt. Wir setzen

$$A := \Big\{2\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)3^{-2n} \;\Big|\; \sigma \in \Sigma\Big\} \text{ und } B := \Big\{2\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)3^{1-2n} \;\Big|\; \sigma \in \Sigma\Big\}$$

und sehen sofort, dass die Translate $a+B$ $(a \in A)$ paarweise disjunkt sind und dass $A+B=\mathbb{D}$ gilt. Naturgemäß ist die Ordnungstopologie einer natürlich geordneten Menge $M \subset \mathbb{R}$ mit der Relativtopologie der euklidischen Topologie der Zahlengeraden identisch, falls M eine *abgeschlossene* Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Da A, B offensichtlich abgeschlossen sind und $\mathbb{D}$ selbstverständlich abgeschlossen ist, ist somit jeder Ordnungsisomorphismus von $\mathbb{D}$ auf A bzw. B automatisch ein Homöomorphismus von dem euklidischen Raum $\mathbb{D}$ auf den euklidischen Raum A bzw. B. Mit einem analogen Argument wie im Beweis von Satz 2 erkennen wir, dass A mit $\mathbb{D}$ und somit (wegen $B = 3 \cdot A$) auch B mit $\mathbb{D}$ ordnungsisomorph ist.

Zu einem konstruktiven Beweis von Satz 4 verwenden wir naheliegenderweise *Kettenbrüche.* Jede Irrationalzahl hat eine eindeutige Kettenbruchdarstellung $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für verschiedene Irrationalzahlen $a = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ und $b = [0; b_1, b_2, b_3, \ldots]$ gilt $a < b$ genau dann, wenn das erste nichtverschwindende Glied der alternierenden Differenzenfolge

$$(a_1 - b_1, b_2 - a_2, a_3 - b_3, b_4 - a_4, \ldots)$$

positiv ist. Somit ist für jede festgehaltene Folge $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ natürlicher Zahlen durch

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, , \ldots] \longmapsto [a_0; a_1, a_2, b_1, b_2, a_3, a_4, b_3, b_4, \ldots]$$

eine streng monoton wachsende Selbstabbildung f der Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ definiert. Man sieht sofort, dass f stetig ist und dass die Umkehrabbildung f^{-1} eine stetige Bijektion von $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist. Da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und die Menge aller Folgen $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ gleichmächtig mit $\mathbb{R}$ sind, ist daher eine extreme Autopartition von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wie gewünscht durch

$$\left\{ \{ [a_0; a_1, a_2, b_1, b_2, a_3, a_4, b_3, b_4, \ldots] \mid a_0 \in \mathbb{Z} \wedge a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N} \} \;\middle|\; b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{N} \right\}$$

gegeben.

Beweis von Satz 8 und 9

Satz 8 ist eine triviale Konsequenz des folgenden Satzes von Dushnik und Miller aus dem Jahre 1940. Einen Beweis dieses berühmten Satzes findet man in [6, 9.1].

Satz 11. *Es existiert eine dicht in $\mathbb{R}$ liegende Menge D dergestalt, dass die Identität die einzige streng monoton wachsende Funktion von D nach D ist.*

Zum Beweis von Satz 9 benötigen wir *Cantor-Ableitungen.* Für den damit nicht vertrauten Leser beweisen wir zunächst folgende moderate Abschwächung von Satz 9. Dieselbe ist *moderat*, weil jeder kompakte und abzählbare Hausdorffraum homöomorph mit einer euklidisch topologisierten Menge $W \subset \mathbb{R}$ ist, die die Voraussetzung des folgenden Satzes erfüllt, siehe [2, 16.3].

Satz 12. *Wenn $W \subset \mathbb{R}$ ein Maximum hat und die natürliche Ordnung von W eine Wohlordnung ist, dann hat W keine nichttriviale Autopartition.*

Beweis. Es sei $W \subset \mathbb{R}$ wohlgeordnet mit Maximum w. Es sei $\mathcal{P}$ eine Autopartition von W und $A, B \in \mathcal{P}$ mit $w \in A$. Mit dem Nachweis, dass $w \notin B$ unmöglich ist, folgt $B = A$ und somit $\mathcal{P} = \{W\}$. Angenommen, $w \notin B$. Da W ein Maximum hat, muss auch B ein Maximum haben, das mit b bezeichnet sei. Dann gilt $b < w$ und $x \leq b$ für alle $x \in B$. Es sei f eine streng monoton wachsende Bijektion von W auf B. Dann gilt zwangsläufig $f(w) = b$. Da B als Teilmenge von W wohlgeordnet ist, gilt $f(x) \geq x$ für alle $x \in W$. Insbesondere gilt $b \geq w$ in Widerspruch zu $b < w$. □

Mit folgender Beweisskizze von Satz 9 erkennt der mit Cantor-Ableitungen vertraute Leser sofort, wie der Hase läuft: Es sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und abzählbar unendlich. Da der perfekte Kern von K leer ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Ordinalzahl α, sodass die Ableitung $K^{(\alpha)}$ eine *endliche* nichtleere Menge ist. Es sei $K^{(\alpha)} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ mit $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Entscheidend ist nun die leicht einzusehende Beobachtung, dass, wenn M eine Teilmenge von $[\min K, a_1[\cap K$ oder von $]a_n, \max K] \cap K$ oder von $]a_i, a_{i+1}[\cap K$ mit $1 \leq i < n$ ist, dann – bezogen auf die Ordnungstopologie von M – zwangsläufig $M^{(\alpha)} = \emptyset$ gilt. Daraus abzuleiten, dass eine nichttriviale Autopartition von K nicht existieren kann, ist eine schöne Übungsaufgabe.

Beweis von Satz 7

Wir schreiben $|X| = |Y|$, falls X, Y gleichmächtige Mengen sind und $|X| < |Y|$, falls X weniger mächtig als Y ist. Insbesondere gilt $|\mathbb{B}| = |\mathbb{R}|$ für beide Basismengen $\mathbb{B}$ im Satz 7.

Lemma 1. *Es gibt eine streng monoton wachsende Funktion φ von $]0,1[$ nach $]0,1[\setminus \mathbb{Q}$.*

Ein Beweis von Lemma 1 ist eine einfache Übungsaufgabe. Überdies folgt Lemma 1 sofort aus Proposition 2 im nächsten Kapitel. (Erwähnenswert ist, dass φ prinzipiell nicht bijektiv sein kann, was zu verifizieren eine nette Übungsaufgabe darstellt.)

Wir beweisen Satz 7 simultan für $\mathbb{B} = \mathbb{R}$ und für $\mathbb{B} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. In beiden Fällen sei zur einfacheren Schreibweise $\mathbb{B}$ identisch mit der Indexmenge I. Es sei $\mathcal{A}$ eine extreme Autopartition von $]0,1[$. (Da $]0,1[$ natürlich ordnungsisomorph mit $\mathbb{R}$ ist, existiert $\mathcal{A}$ nach Satz 1.) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$\mathcal{P}(k) := \{k + \varphi(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

mit φ wie in Lemma 1. Somit gilt stets $|\mathcal{P}(k)| = |\mathbb{R}|$, und die Mengen in der Familie $\mathcal{P}(k)$ sind paarweise disjunkte Kopien von $\mathbb{R}$ und $P \subset]k, k+1[\setminus \mathbb{Q}$ für

alle $P \in \mathcal{P}(k)$. (Insbesondere gilt $P \subset \mathbb{B}$ für alle $P \in \mathcal{P}(k)$ in beiden Fällen $\mathbb{B} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{B} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.) Für jede reelle Zahl x sei

$$n(x) := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid x < k\} \quad \text{und} \quad m(x) := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid x > k+1\}.$$

Dann sind $m(x)$, $n(x)$ stets ganze Zahlen mit $m(x)+1 < x < n(x)$. Die folgende Aussage ist trivial, erweist sich aber für unsere Zwecke als essentiell.

(*). *Es sei $t \in T \subset \mathbb{R}$ und $m(t)+1 < z < n(t)$ und $A \in \mathcal{P}(m(t))$ und $B \in \mathcal{P}(n(t))$. Sind $f\colon T \cap]-\infty, t[\to A$ und $g\colon T \cap]t, \infty[\to B$ streng monoton wachsend, so sind*

$$f(T \cap]-\infty, t[) \;\cup\; \{z\} \;\cup\; g(T \cap]t, \infty[)$$

und T ordnungsisomorph.

Wir fixieren eine *minimale Wohlordnung* $\preceq$ der Basismenge $\mathbb{B}$. Dies ist eine Wohlordnung $\preceq$ auf $\mathbb{B}$ dergestalt, dass $|\{x \in \mathbb{B} \mid x \preceq b\}| < |\mathbb{B}|$ für alle $b \in \mathbb{B}$ gilt. Ferner fixieren wir eine Auswahlfunktion $i \mapsto t_i \in T_i$ auf dem Definitionsbereich $I = \mathbb{B}$. Die Existenz so einer Wohlordnung ist eine wohlbekannte Folgerung des *Auswahlaxioms*, siehe das Korollar in [5, S. 381]. Auch die Existenz der Funktion $i \mapsto t_i$ beruht auf dem Auswahlaxiom. Dies sind zwei Gründe für die *Inkonstruktivität* des Beweises von Satz 7.

Wir definieren eine Abbildung $i \mapsto F_i$ mit Definitionsbereich $I = \mathbb{B}$ wie gewünscht mit Ordnungsinduktion bezogen auf $\preceq$. Dabei zielen wir darauf ab, dass jede Menge F_i von der Form $L_i \cup \{\tau_i\} \cup R_i$ mit $l < \tau_i < r$ für alle $(l, r) \in L_i \times R_i$ ist, wobei L_i bzw. R_i stets innerhalb geigneter Partitionsmengen von $\mathcal{P}(m(\tau_i))$ bzw. $\mathcal{P}(n(\tau_i))$ liegen, sodass die paarweise Disjunktheit der Mengen F_i sowie die komplette Ausschöpfung der Menge $\mathbb{B}$ steht und fällt mit der Wahl der Trennungspunkte τ_i. (Die folgende Durchführung ist angelehnt an paradoxe geometrische Konstruktionen mit transfiniter Induktion, wie z.B. die Darstellung von $\mathbb{R}^3$ als Vereinigung paarweise disjunkter Kreislinien, siehe [4, 6.1.3]).

Angenommen, für $y \in \mathbb{B}$ sind Quintupel $(A_x, L_x, \tau_x, R_x, B_x)$ für alle $x \prec y$ bereits so definiert, dass stets $\tau_x \in \mathbb{B}$ sowie $L_x \subset A_x \in \mathcal{P}(m(\tau_x))$ und $R_x \subset B_x \in \mathcal{P}(n(\tau_x))$ gilt und dass die Mengen $A_x \cup \tau_x \cup B_x$ $(x \prec y)$ und somit auch die Mengen $L_x \cup \tau_x \cup R_x$ $(x \prec y)$ paarweise disjunkt sind. Im Induktionsschritt definieren wir $(A_y, L_y, \tau_y, R_y, B_y)$ wie folgt.

Zunächst betrachten wir die Teilmenge

$$U(y) \;:=\; \bigcup_{x \prec y} (L_x \cup \{\tau_x\} \cup R_x)$$

von $\mathbb{B}$ und stellen fest, dass die Menge $\mathbb{B} \setminus U(y)$ nicht leer ist. Denn $\mathbb{B} \setminus U(y)$ enthält offensichtlich die Vereinigung über die nichtleere Familie

$$\mathcal{G}_y := \Big\{ G \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}(k) \;\Big|\; G \cap \{\tau_x \mid x \prec y\} = \emptyset \Big\} \setminus \Big(\big\{ A_x \mid x \prec y \big\} \cup \big\{ B_x \mid x \prec y \big\} \Big)$$

nichtleerer Mengen. Es gilt $\mathcal{G}_y \neq \emptyset$, weil sogar $|\mathcal{G}_y| = |\mathbb{B}|$ gilt. Dies ergibt sich sofort aus $|\{x \mid x \prec y\}| < |\mathbb{B}| = |\mathcal{P}(k)|$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$.

Nun setzen wir $\tau_y = y$, falls $y \notin U(y)$ gilt. Im Falle $y \in U(y)$ sei τ_y das *Minimum* der nichtleeren Menge $\mathbb{B} \setminus U(y)$ *bezogen auf die Wohlordnung* $\preceq$ *von* $\mathbb{B}$.

Nachdem nun τ_y fixiert ist, wählen wir $A_y \in \mathcal{G}_y \cap \mathcal{P}(m(\tau_y))$ sowie $B_y \in \mathcal{G}_y \cap \mathcal{P}(n(\tau_y))$ beliebig. Dies ist möglich, da $|\{x \mid x \prec y\}| < |\mathcal{P}(k)|$ für $k \in \{m(\tau_y), n(\tau_y)\}$ gilt. Anschließend wählen wir eine ordnungsisomorphe Kopie L_y bzw. R_y von $T_y \cap]-\infty, t_y[$ bzw. $T_y \cap]t_y, \infty[$ innerhalb der (mit $\mathbb{R}$ ordnungsisomorphen) Menge A_y bzw. B_y. Damit ist das Quintupel $(A_y, L_y, \tau_y, R_y, B_y)$ definiert und der Induktionsschritt vollzogen. Wegen $(*)$ sind die Mengen $L_y \cup \{\tau_y\} \cup R_y$ und T_y ordnungsisomorph. (Dabei ist $L_y \cup \{\tau_y\} \cup R_y$ eine Teilmenge von $\mathbb{B}$.) Somit genügt es, abschließend $F_i := L_i \cup \{\tau_i\} \cup R_i$ für alle $i \in \mathbb{B}$ zu setzen, um eine auf $I = \mathbb{B}$ definierte Abbildung $i \mapsto F_i$ wie gewünscht zu bekommen.

Beweis von Satz 10

Proposition 2. *Ist $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und überabzählbar, so gibt es eine streng monoton wachsende Funktion von $\mathbb{R}$ nach A.*

Beweis. Falls A ein Intervall $[u, v]$ mit $u < v$ enthält, ist durch

$$x \mapsto \frac{u+v}{2} + \frac{v-u}{\pi} \arctan x$$

eine Abbildung wie gewünscht festgelegt. Es sei also angenommen, dass A kein echtes Intervall enthält.

Da A überabzählbar ist, kann nicht jede der Mengen $[-n, n] \cap A$ abzählbar sein. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so, dass $K := [-n, n] \cap A$ überabzählbar ist. Dann ist K eine überabzählbare, *kompakte* Teilmenge von $\mathbb{R}$, die kein echtes Intervall enthält. Es genügt, eine streng monoton wachsende Abbildung φ von $\mathbb{Q}$ nach K zu finden, denn dann ist durch

$$f(x) := \sup\{\varphi(r) \mid r \in \mathbb{Q} \wedge r \leq x\}$$

wegen der Abgeschlossenheit von K eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach K (und somit nach A) definiert, die klarerweise streng monoton wachsend ist.

Wir betrachten die Menge C der *Kondensationspunkte* von K. (Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist ein Kondensationspunkt von K, falls jede Umgebung von x überabzählbar viele Punkte aus K enthält.) Da höchstens abzählbar viele Punkte einer überabzählbaren Menge reeller Zahlen keine Kondensationspunkte der Menge sind, vgl. [5, S. 354], ist die Menge C abgeschlossen und nicht leer, und C enthält keine isolierten Punkte. Die Menge C besitzt ein Maximum und ein Minimum, da C als abgeschlossene Teilmenge von K kompakt ist. Es sei $a = \min C$ und $b = \max C$. Da die Menge

$[a,b] \setminus C$ offen ist, können wir eine Familie $\mathcal{U}$ paarweiser disjunkter offener Intervalle definieren dergestalt, dass $\bigcup \mathcal{U} \subset [a,b]$ und $C = [a,b] \setminus \bigcup \mathcal{U}$ gilt. Da nach unserer Annahme C kein echtes Intervall enthält, liegt $\bigcup \mathcal{U}$ dicht in $[a,b]$. Es sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller zweielementigen Mengen $Z \subset \mathbb{R}$ mit $[\min Z, \max Z] \cap C = Z$. Wir erkennen, dass $\{x,y\} \in \mathcal{Z}$ für $x < y$ genau dann gilt, wenn $]x,y[\in \mathcal{U}$ gilt. Es sei $D := \{\min Z \mid Z \in \mathcal{Z}\}$. Mit Blick auf die Intervalle in $\mathcal{U}$ erkennen wir, dass D kein Paar unmittelbar aufeinander folgender Elemente haben kann. (Denn stets gilt $[u_1,u_2] \cap [v_1,v_2] = \emptyset$ für verschiedene Intervalle $]u_1,u_2[,]v_1,v_2[$ in $\mathcal{U}$.) Ferner kann D kein kleinstes oder größtes Element haben, da weder a noch b ein isolierter Punkt von C ist. Daher ist nach einem berühmten Satz von Cantor [5, S. 91] der Ordnungstyp von D gleich dem Ordnungstyp der natürlich geordneten Menge $\mathbb{Q}$. Es gibt also eine monoton wachsende Bijektion φ von $\mathbb{Q}$ nach D und somit eine streng monoton wachsende Funktion f von $\mathbb{R}$ nach K. □

Bemerkung. Aus Proposition 2 ergibt sich die wohlbekannte und im folgenden Beweis verwendete Tatsache, dass jede überabzählbare *abgeschlossene* Menge reeller Zahlen gleichmächtig mit $\mathbb{R}$ ist. Ferner ist auch Lemma 1 eine Konsequenz von Proposition 2, da $]0,1[\setminus \mathbb{Q}$ sicher eine in $\mathbb{R}$ abgeschlossene überabzählbare Menge A enthält. (Man betrachte zum Beispiel die Menge A aller Irrationalzahlen in $]0,1[$, in deren Kettenbruchentwicklung $[0;a_1,a_2,a_3,\ldots]$ stets $a_i \in \{1,2\}$ gilt. Dann ist A natürlich abgeschlossen in $\mathbb{R}$, und offensichtlich gilt $|A| = |\Sigma| = |\mathbb{R}|$.)

Zum Beweis von Satz 10 sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die eine überabzählbare abgeschlossene Menge enthält. Somit gilt $|M| = |\mathbb{R}|$. Zunächst diskutieren wir den Fall, dass $[u,v] \subset M$ für gewisse $u < v$ gilt. Da $]u,v[$ eine ordnungsisomorphe Kopie von $\mathbb{R}$ ist, können wir Satz 7 anwenden, um eine Partition $\mathcal{H}$ von $]u,v[$ mit $|\mathcal{H}| = |\mathbb{R}|$ dergestalt zu gewinnen, dass eine Menge $H_1 \in \mathcal{H}$ mit $M \cap [u,v]$ ordnungsisomorph ist und jede Menge $H \in \mathcal{H} \setminus \{H_1\}$ mit M ordnungsisomorph ist. Wie gewünscht, ist dann eine extreme Autopartition von M offensichtlich durch

$$(\mathcal{H} \setminus \{H_1\}) \cup \{H_1 \cup (M \setminus [u,v])\}$$

gegeben.

Im Fall, dass M kein echtes Intervall enthält, können wir in ähnlicher Weise ans Ziel gelangen: Proposition 2 gestattet uns, eine streng monoton wachsende Funktion f von $\mathbb{R}$ nach M festzulegen. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$A_n := f\Big(\,]2^{-n-1}, 2^{-n}[\,\Big) \text{ und } B_n := f\Big(\,]1-2^{-n}, 1-2^{-n-1}[\,\Big).$$

Somit sind die Mengen $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ paarweise disjunkte Kopien von $\mathbb{R}$. Nach Satz 1 können wir zu jeder Menge $G \in \{A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots\}$ eine mit $\mathbb{R}$ gleichmächtige Familie $\mathcal{G}$ paarweiser disjunkter Teilmengen von G finden, die alle ordnungsisomorph mit $\mathbb{R}$ sind. Man beachte, dass alle Mengen A_i, B_j Teilmengen von $M \cap]f(0), f(1)[$ sind. Dies ermöglicht es uns, den Beweis von Satz 7 in

naheliegender Weise zu adaptieren, um eine Partition $\mathcal{H}$ von $L := M \cap]f(0), f(1)[$ mit $|\mathcal{H}| = |\mathbb{R}|$ dergestalt zu definieren, dass eine Menge $H_1 \in \mathcal{H}$ mit L ordnungsisomorph ist und jede Menge $H \in \mathcal{H} \setminus \{H_1\}$ mit M ordnungsisomorph ist. (Man arbeite wieder mit Trennungspunkten τ_x und suche sich die passenden linken bzw. rechten Teile L_x bzw. R_x in Mengen A_n bzw. B_m mit $a_n < \tau_x < b_m$. Wie im Beweis von Satz 7 sichert die Ordnungsinduktion längs der mit einer minimalen Wohlordnung versehenen Menge L dann eine komplette Ausschöpfung der Menge L.) Dann ist

$$(\mathcal{H} \setminus \{H_1\}) \cup \{H_1 \cup (M \setminus L)\}$$

eine extreme Autopartition von M.

Bemerkung. Eine erwähnenswerte Folgerung aus Satz 10 ist, dass für jede Menge $S \subset \mathbb{R}$, die eine *Nullmenge* oder eine *magere Menge* ist, die Menge $\mathbb{R} \setminus S$ eine extreme Autopartition besitzt. (Man vergleiche dies mit Satz 4.) Dies ergibt sich sofort aus der wohlbekannten Tatsache, vgl. [4, 6.3.6], dass $I \setminus S$ eine abgeschlossene überabzählbare Menge enthalten muss, wenn $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres offenes Intervall ist und $S \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge oder eine magere Menge ist. Deshalb kann man überdies mit einer simplen Adaptation des Beweises von Satz 7 erreichen, dass die Aussage von Satz 7 nicht nur für $\mathbb{B} = \mathbb{R}$ und für $\mathbb{B} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sondern für jede Basismenge $\mathbb{B} = \mathbb{R} \setminus S$ gilt, sofern $S \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge oder eine magere Menge ist. Satz 7 wird damit zum Spezialfall $S = \emptyset$ bzw. $S = \mathbb{Q}$.

Abschließend wollen wir noch zeigen, dass Proposition 2 gewissermaßen umkehrbar ist und somit die Voraussetzung von Satz 10 eine einfache ordnungstheoretische Charakterisierung besitzt:

Proposition 3. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat genau dann eine überabzählbare, in $\mathbb{R}$ abgeschlossene Teilmenge, wenn eine Teilmenge von M mit $\mathbb{R}$ ordnungsisomorph ist.*

Beweis. Eine Richtung ist durch Proposition 2 bereits erledigt. Es sei angenommen, dass $f : \mathbb{R} \to M$ streng monoton wachsend ist. Um eine überabzählbare Teilmenge von M zu finden, die in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist, sei wie im Beweis von Proposition 1 die *abzählbare* Menge U der Unstetigkeitsstellen von f betrachtet. Da $\mathbb{Q} \cup U$ abzählbar und dicht in R ist, gibt es nach dem Satz von Cantor [5, S. 91] eine monoton wachsende und bijektive Abbildung g von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ mit $g(\mathbb{Q} \cup U) = \mathbb{Q}$. Daher ist $f \circ g^{-1}$ eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach M, die jedenfalls bei allen Irrationalzahlen stetig ist. Somit genügt es, irgendeine kompakte und überabzählbare Menge A von Irrationalzahlen zu finden. (Denn dann muss $f \circ g^{-1}(A)$ eine kompakte und somit abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein, die überabzählbar und in M enthalten ist.) Es gibt viele Möglichkeiten, eine passende Menge A zu finden. Man kann etwa die in der obigen Bemerkung mit Kettenbrüchen definierte Menge A nehmen. Eine andere Möglichkeit ist, eine reelle

Zahl ξ so zu wählen, dass das Translat $\xi + \mathbb{D}$ der Cantormenge nur Irrationalzahlen enthält. (Der Nachweis der Existenz einer Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ mit $(\xi + \mathbb{D}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ ist eine schöne Übungsaufgabe.)

Literatur

[1] A. Dasgupta. *Set Theory*. Birkhäuser 2014.
[2] K. Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician.* Cambridge University Press 1997.
[3] O. Deiser. *Reelle Zahlen*, 2. Auflage. Springer 2008.
[4] J. G. Rosenstein. *Linear Orderings*. Academic Press 1982.

Adresse des Autors:
Gerald Kuba,
Institut für Mathematik, Universität für Bodenkultur Wien
Augasse 2–6, 1090 Wien
email gerald.kuba@boku.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 236 (2017), 39–51

Summen und Differenzen von Wurzeln

Hans Humenberger
Univ. Wien

Dieser Artikel ist die ausgearbeitete Fassung des Vortrags mit dem Titel „Summen und Differenzen von (Quadrat-)Wurzeln. An der Grenze zwischen elementarer und höherer Mathematik“ bei der ÖMG-DMV-Tagung in Salzburg (11.–15.9.2017).

Einleitende Vorbemerkungen

In praktisch allen universitären Lehrveranstaltungen über Zahlentheorie bzw. Algebra (im weitesten Sinne) im Rahmen der Ausbildung von Lehramtsstudierenden kommt das Thema Wurzeln in Zusammenhang mit Irrationalität vor. Es gibt zahlreiche Beweise für $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Der klassische Widerspruchsbeweis nach Euklid birgt (schon oft erprobt) die Gefahr, dass sein Prinzip auch auf andere Fälle gedankenlos übertragen wird. Bei diesem Beweis von $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ wird argumentiert $2 \mid p^2 \implies 2 \mid p$. Das Pendant, wenn man mit dieser Methode z.B. $\sqrt{8} \notin \mathbb{Q}$ beweisen möchte, wäre $8 \mid p^2 \implies 8 \mid p$, was ja nicht stimmt (das sieht man schon an $p = 4$). Wenn man also den klassischen Euklidischen Beweis für $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ favorisiert, dann sollte man auch unbedingt dazuüberlegen, wie dieser Beweis für z.B. $\sqrt{8} \notin \mathbb{Q}$ korrekt aussehen würde, und wo genau das Beweisprinzip bei $\sqrt{4}$ versagt. Man kann als Fazit jedenfalls festhalten, dass der Euklidische Beweis seine Tücken hat bei der Verallgemeinerung, dass nämlich Wurzeln aus natürlichen Zahlen entweder ganzzahlig oder irrational sind. (Es gibt keine Brüche, die Wurzeln aus natürlichen Zahlen sind.) Dies gilt nicht nur für Quadratwurzeln, sondern auch allgemein für k-te Wurzeln.

Mit einer anderen, aber immer noch elementaren Brille sind die zugehörigen Begründungen aber auch nicht komplizierter als jene für die Irrationalität von $\sqrt{2}$. Eine mögliche Grundlage ist das

Lemma. *(Lemma von Euklid, angewandt auf Primzahlen). Wenn eine Primzahl*

ISSN 0020-7926

ein Produkt von Zahlen teilt, so muss diese Primzahl mindestens einen Faktor teilen:

$$p \mid a \cdot b \implies p \mid a \text{ oder } p \mid b.$$

Analoges gilt für beliebig viele Faktoren:

$$p \mid a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \implies \exists i : p \mid a_i.$$

Bei der Behandlung bzw. Verwendung dieses Lemmas in einem möglichen Schulunterricht wird man es nicht formal beweisen, denn aus Schülersicht ist dies kaum beweisbedürftig („Das ist ja eh klar, denn die unteilbare Primzahl kann ja nicht teilweise in einem und teilweise im anderen Faktor stecken!“). Jedenfalls lässt sich damit leicht allgemein zeigen[1]:

$$\sqrt[k]{a} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt[k]{a} \in \mathbb{N} \quad (a \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_{\geq 2}). \tag{1}$$

Beweis. $\sqrt[k]{a} = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^* \text{ mit } \mathrm{ggT}(p,q) = 1) \implies a \cdot q^k = p^k$. Jeder Primteiler von q müsste daher auch Primteiler von p^k und damit (Lemma von Euklid) von p sein. Wegen der Voraussetzung $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ kann q also gar keine Primteiler haben, d.h. $q = 1$, und das bedeutet schließlich $\sqrt[k]{a} = p \in \mathbb{N}$. □

Wie sieht die weit verbreitete Begründung des Lemmas von Euklid in Zahlentheoriebüchern und -lehrveranstaltungen aus? Meist wird kursorisch so vorgegangen: Zuerst kommt die Division mit Rest, dann der Euklidische Algorithmus und die sogenannte Darstellbarkeit des größten gemeinsamen Teilers (gemeint: $\mathrm{ggT}(a,b)$ als Linearkombination von a und b). Daraus kann dann das Lemma von Euklid gewonnen werden. Dies ist strukturell also ziemlich aufwendig. In meiner Zeit in Dortmund (2000 bis 2005) ist mir erstmals bewusst geworden, dass das Lemma von Euklid auch anders (einfacher?) zu erhalten ist. Damit kann dann auch auf eine intuitive, sehr nahe liegende Art und Weise die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung begründet werden. Der sonst oft übliche Induktionsbeweis klärt ja nur, *dass* es so ist, er verschweigt aber in gewisser Weise das *warum* (“I believe it would be useful to introduce to the discussion an explicit distinction between proofs that prove and proofs that explain.”, [3, S. 9]). Auch der bekannte Beweis mittels des Wohlordnungsprinzips (jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element) für die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist nicht genetisch, auch er klärt nur das *dass*:

Beweis. (Indirekt) Angenommen, es gibt natürliche Zahlen > 1 mit zumindest zwei verschiedenen Primfaktorzerlegungen. Dann hat die Menge dieser Zahlen ein kleinstes Element a:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s.$$

[1] Hier wollen wir $\mathbb{N} := \{0,1,2,\ldots\}$ und $\mathbb{N}^* := \{1,2,\ldots\}$ setzen

Keine der Primzahlen p_i kann mit einer der Primzahlen q_j übereinstimmen, denn sonst könnte man durch diese Primzahl dividieren und man hätte zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen einer noch kleineren Zahl.

O.B.d.A. ist $p_1 < q_1$. Wir bilden eine Zahl $n < a$:

$$\begin{aligned} n &= (q_1 - p_1) \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s = \underbrace{q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s}_{=a=p_1 \cdot \ldots \cdot p_r} - p_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s \\ &= p_1 \cdot (p_2 \cdot \ldots \cdot p_r - q_2 \cdot \ldots \cdot q_s) \,. \end{aligned}$$

p_1 tritt zwar als Faktor in der letzten Produktdarstellung auf, aber sicher nicht in der ersten: $p_1 \neq q_j$ und p_1 teilt nicht $q_1 - p_1$ (denn sonst müsste $p_1 \mid q_1$ gelten). Damit haben wir mit n eine kleinere Zahl als a gefunden mit zwei verschiedenen Primfaktorzerlegungen. Das ist ein Widerspruch. □

Wie könnte ein genetischerer Zugang zum Lemma von Euklid aussehen? Man braucht zwei Voraussetzungen: den *Satz vom kgV* und den *Satz vom kgV und ggT*, zwei strukturell sehr einfache Zusammenhänge.

Satz vom kleinsten gemeinsamen Vielfachen. *Jedes gemeinsame Vielfache von a und b ist ein Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen,* $\mathrm{kgV}(a,b)$.

Beweis. Das kgV kann auf der Zahlengeraden folgendermaßen bestimmt werden: Man trägt Vielfachenbogen der Länge a und Vielfachenbogen der Länge b ab. (Im Produkt $a \cdot b$ treffen diese Bogengirlanden einander ganz sicher, denn $b \cdot a = a \cdot b$.) Die Zahl, bei der die Girlanden einander erstmals treffen, ist definitionsgemäß das $\mathrm{kgV}(a,b)$.

Von dieser Zahl an beginnt das Muster der beiden Bogengirlanden von Neuem. Ein zweites Mal treffen sie also bei $2 \cdot \mathrm{kgV}(a,b)$, ein drittes Mal bei $3 \cdot \mathrm{kgV}(a,b)$ zusammen, usw. Die Bogengirlanden treffen einander also genau bei den Vielfachen von $\mathrm{kgV}(a,b)$. Das Produkt $a \cdot b$, bei dem die Girlanden einander ja auch treffen, muss also auch ein Vielfaches des $\mathrm{kgV}(a,b)$ sein. □

Satz. *(Satz vom kleinsten gemeinsamen Vielfachen und vom größten gemeinsamen Teiler).* $\mathrm{kgV}(a,b) \cdot \mathrm{ggT}(a,b) = a \cdot b$.

Wenn man die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung voraussetzt, ist dieser Satz unmittelbar klar. Aber das wollen wir hier nicht tun, da wir umgekehrt das Lemma von Euklid dazu benutzen wollen, diese Eindeutigkeit zu zeigen.

Beweis. (a) Wir schreiben $\mathrm{kgV}(a,b)\cdot t = a\cdot b$ für eine Zahl t. Dies ist sicher möglich, da $a\cdot b$ ein gemeinsames Vielfaches von a und b und somit ein Vielfaches von $\mathrm{kgV}(a,b)$ ist. Wir behaupten, t ist ein gemeinsamer Teiler von a und b. Dies ist unmittelbar klar durch Umformung:

$$\frac{\mathrm{kgV}(a,b)}{a}\cdot t = b \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{kgV}(a,b)}{b}\cdot t = a\,.$$

Weil also t ein gemeinsamer Teiler von a und b ist, folgt: $\mathrm{ggT}(a,b)\geq t$ und somit

$$\mathrm{kgV}(a,b)\cdot\mathrm{ggT}(a,b)\geq a\cdot b. \tag{2}$$

(b) Wir schreiben $s\cdot\mathrm{ggT}(a,b) = a\cdot b$ für eine Zahl s. Dies ist sicher möglich, da schon a (auch b) ein Vielfaches von $\mathrm{ggT}(a,b)$ ist. Wir behaupten, dass s ein gemeinsames Vielfaches von a, b ist. Dies ist wieder klar durch Umformung:

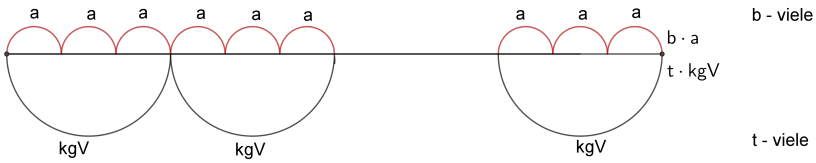
$$s = \frac{a}{\mathrm{ggT}(a,b)}\cdot b \quad \text{und} \quad s = a\cdot\frac{b}{\mathrm{ggT}(a,b)}.$$

Weil also s ein gemeinsames Vielfaches von a und b ist, folgt $\mathrm{kgV}(a,b)\leq s$ und somit

$$\mathrm{kgV}(a,b)\cdot\mathrm{ggT}(a,b)\leq a\cdot b. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt nun die Behauptung. □

Die zugehörigen algebraischen Umformungen könnten auch unterstützt oder gar ersetzt werden durch Veranschaulichungen mittels Bogengirlanden. (Das ist eventuell didaktisch von Belang; analog mit b-Bögen und entsprechend auch für die Umformung im 2. Absatz des Beweises.)



Hier ist t ein gemeinsamer Teiler von a und b. Die Anzahl der a-Bögen ist gleich b, die Anzahl der kgV-Bögen ist gleich t. Nun folgt daraus in wirklich sehr einfacher Weise das

Lemma. *(Lemma von Euklid, angewandt auf Primzahlen): Wenn $p \mid a\cdot b$, dann muss $p \mid a$ oder $p \mid b$ gelten.*

Beweis. Für $p \mid a$ ist die Behauptung erfüllt. Wenn a nicht durch p teilbar ist, dann ist $\mathrm{ggT}(p,a) = 1$, und wegen des Satzes vom kgV und ggT gilt: $\mathrm{kgV}(p,a) = p \cdot a$. $a \cdot b$ ist laut Voraussetzung ein gemeinsames Vielfaches von p und a und nach dem Satz vom kgV ein Vielfaches von $\mathrm{kgV}(p,a) = p \cdot a$, d.h. $a \cdot b = t \cdot (p \cdot a)$. Daraus folgt unmittelbar $b = t \cdot p$. □

Wendet man nun das Lemma von Euklid auf ein Produkt mehrerer Zahlen an, so ergibt sich sofort die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung durch „schrittweises Durchkürzen“: Man zeigt, dass aus der Gleichheit zweier Primzahlprodukte die Gleichheit der Primzahlen selbst folgt:

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_r = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s.$$

Aus $p_1 \mid q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ folgt, dass p_1 einen Faktor q_j teilt (Lemma von Euklid). Da es sich um Primzahlen handelt, besteht Gleichheit: $p_1 = q_j$. Durch Umnummerierung kann man $p_1 = q_1$ erreichen. Beide Seiten der Gleichung (1) werden dann durch $p_1 = q_1$ dividiert. Man erhält die neue Gleichung $p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$, mit der man analog verfahren kann. Es folgt $p_2 = q_2$. In dieser Weise fährt man fort, bis die Gleichheit aller Faktoren und damit auch $r = s$ gezeigt ist.

Dies ist ein besonders elementarer, leicht nachvollziehbarer und gut erklärender Zugang zum Lemma von Euklid und zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Nun zum eigentlichen Thema dieses Aufsatzes: *Summen und Differenzen von Quadratwurzeln*.

Summen und Differenzen von Quadratwurzeln

Im Gegensatz zur Irrationalität von $\sqrt{2}$, sind Wurzel-Summen ein nicht besonders häufig diskutiertes Thema: Kann es z.B. sein, dass die Summe der Wurzeln natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl ist (außer im trivialen Fall, dass schon jede einzelne Wurzel eine natürliche Zahl ist)? Kann es sein, dass die Summe der Wurzeln rationaler Zahlen wieder eine rationale Zahl ist (außer im trivialen Fall, dass schon jede einzelne Wurzel eine rationale Zahl ist)? Intuitiv wird man diese Fragen wohl verneinen, aber wie kann man das begründen?

Ein Grund für das seltene Aufgreifen dieses Themas in Lehrveranstaltungen ist vielleicht, dass hier eine leichte Verallgemeinerbarkeit auf elementarem Niveau nicht mehr möglich zu sein scheint.

Wir werden sehen, dass die Begründung von

$$a, b \in \mathbb{Q},\ \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \implies \sqrt{a} \in \mathbb{Q}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$$

und analog für $\mathbb{N}$ statt $\mathbb{Q}$ algebraisch noch einfach zu bewerkstelligen ist, das Pendant für m-te Wurzeln allerdings nicht mehr, erst recht nicht mehr im „gemischten“ Fall einer m-ten und einer n-ten Wurzel. Auch wenn man bei Quadratwurzeln

bleibt, aber die Anzahl der Summanden erhöht, steht man ab vier Summanden vor großen Problemen, wenn man nicht Methoden der algebraischen Zahlentheorie verwendet. Wir werden im Folgenden bei Quadratwurzeln mögliche elementare Begründungen für den Fall bis zu drei Summanden angeben.

Dieser Problemkreis ist also gewissermaßen an der Grenze zwischen Elementarmathematik und Höherer Mathematik anzusiedeln, was man ihm a priori nicht unbedingt ansieht. Durch die Erfolge für den Fall mit wenigen Summanden könnte man durchaus vermuten, dass dies strukturell so weitergeht auch bei vielen Summanden, dass man also mit elementarer Algebra auskommt, nur der Aufwand sich ein wenig erhöhen wird. Das wird sich jedoch als falsch herausstellen – es gibt hier eine eindeutige strukturelle Grenze.

Zunächst widmen wir uns der Summe der Quadratwurzeln zweier rationaler Zahlen. Diese Summe ist nur dann rational, wenn schon jede einzelne Quadratwurzel rational ist. Dies wird man auch intuitiv wohl vermuten, es lässt sich auch leicht algebraisch nachvollziehen bzw. bestätigen:

Satz 1a. *Für rationale Zahlen a,b,c gilt*

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=c \implies \sqrt{a}\in\mathbb{Q},\ \sqrt{b}\in\mathbb{Q}. \tag{4}$$

Beweis 1. Klarerweise müssen $a,b,c\geq 0$ und $\sqrt{a},\sqrt{b}\geq 0$ gelten. Für $c=0$ muss auch $\sqrt{a}=0=\sqrt{b}$ sein, und die Behauptung ist damit erfüllt.

Für $c>0$ folgt aus $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ und $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b\in\mathbb{Q}$ unmittelbar

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\in\mathbb{Q}.$$

Damit ist aber

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})=2\sqrt{a}$$

eine Summe von zwei rationalen Zahlen und damit rational. Es folgt, dass auch $\sqrt{a}$ rational ist.

Analog erhält man als Differenz von zwei rationalen Zahlen $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})=2\sqrt{b}$, d.h. $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. □

Der Nachteil dieses Beweises ist, dass er nicht verallgemeinerbar ist auf mehr als zwei Wurzeln. Die Methode von Beweis 2 ist vielleicht weniger elegant, funktioniert aber dafür auch bei einigen weiteren Fällen (siehe unten) und ist vielleicht auch einfacher zu finden („durch Quadrieren versuchen, die Wurzeln wegzubringen“).

Beweis 2. Der Fall $c=0$ bleibt gleich. Im Fall $c>0$ erhält man aus $\sqrt{a}=c-\sqrt{b}$ durch Quadrieren zunächst $a=c^2+b-2c\sqrt{b}$ und daraus $\sqrt{b}=\frac{c^2+b-a}{2c}\in\mathbb{Q}$. Mit der Voraussetzung von (4) ist dann auch $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$. □

In welchen Fällen ist die Differenz der Quadratwurzeln zweier rationaler Zahlen selbst rational? Man wird wieder nur die trivialen Lösungen erwarten, aber diese spalten sich hier prinzipiell in zwei Möglichkeiten auf: Die Wurzeln stimmen überein (Differenz = 0), oder jede einzelne Wurzel ist rational. Auch das lässt sich algebraisch wieder ganz elementar nachvollziehen:

Satz 1b. *Für rationale Zahlen a,b,c gilt*

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=c \implies \sqrt{a}=\sqrt{b} \text{ oder } \sqrt{a}\in\mathbb{Q},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}. \tag{5}$$

Der Beweis ist im Fall $c\neq 0$ analog zu Satz 1a. Im Fall $c=0$ haben wir $\sqrt{a}=\sqrt{b}$. Die entsprechenden Sätze für natürliche statt rationale Zahlen folgen hieraus mit (1) unmittelbar.

Beim Thema dieses Abschnittes kann man in relativ nahe liegender Weise auch danach fragen, wann eine Summe bzw. Differenz zweier Quadratwurzeln rationaler Zahlen selbst eine Quadratwurzel einer rationalen Zahl ist: Was kann man aus $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{c}$ $(a,b,c\in\mathbb{Q})$ folgern? Anders gefragt: Unter welchen genauen Bedingungen an a,b,c ist diese Beziehung erfüllt?

Wir beginnen mit der Summe: Wann gilt $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$ für rationale Zahlen a,b,c?

Klarerweise haben wir wieder $a,b,c\geq 0$ und $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\geq 0$. Für $c=0$ muss auch $a=0=b$ sein. Im Fall $c>0$ muss mindestens einer der beiden Summanden auf der linken Seite positiv sein (o.B.d.A. $\sqrt{a}>0$). Dann erhalten wir durch Quadrieren zunächst

$$\sqrt{ab}=\frac{c-a-b}{2}\in\mathbb{Q}_0^+$$

und damit wegen $\sqrt{a}>0$,

$$\sqrt{b}=\frac{c-a-b}{2\sqrt{a}}=\frac{c-a-b}{2a}\cdot\sqrt{a}.$$

Der Bruch wird mit A bezeichnet. D.h. entweder gilt $b=0$ und $a=c$ oder $\sqrt{b}$ muss ein rationales Vielfaches von $\sqrt{a}$ sein (und umgekehrt): $\sqrt{b}=A\cdot\sqrt{a}$ bzw. $b=A^2\cdot a$. Insgesamt erhalten wir also:

Hilfssatz. *Gilt für rationale Zahlen $a,b,c\geq 0$, dass*

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c},$$

dann tritt einer der beiden Fälle auf:

1. $a = 0$ *und* $b = c$ *(rational, nichtnegativ) oder* $b = 0$ *und* $a = c$ *(rational, nichtnegativ).*
2. $\sqrt{b} = A \cdot \sqrt{a}$, $\sqrt{c} = (1+A) \cdot \sqrt{a}$ *mit* $a, A \in \mathbb{Q}^+$ *beliebig.*

Bemerkung: Es ist auch jede in 1. bzw. 2. angegebene Möglichkeit auch wirklich eine Lösung, so dass man in der obigen Aussage die Implikation durch eine Äquivalen ersetzen könnte.

Die entsprechende Aussage für natürliche Zahlen lautet:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} \quad (a,b,c \in \mathbb{N}) \\ \Longrightarrow\ & a = 0, b = c \text{ oder } b = 0, a = c, \text{ oder} \\ & \sqrt{a} = q \cdot \sqrt{n}, \sqrt{b} = p \cdot \sqrt{n}, \sqrt{c} = (q+p) \cdot \sqrt{n} \text{ mit } n, p, q \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Begründung der letzten Aussage ergibt sich dabei durch: $\sqrt{b}$ muss laut obigem Hilfssatz ein positives rationales Vielfaches von $\sqrt{a}$ sein: $\sqrt{b} = (p/q) \cdot \sqrt{a}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$), d.h. $\sqrt{b} = \sqrt{(p^2/q^2) \cdot a}$; wegen $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ muss $q^2 \mid a$ gelten.

Nun betrachten wir dasselbe Problem für eine Differenz: Wann gilt $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c}$ für rationale Zahlen a, b, c? Zur Bedingung $a, b, c \geq 0$ kommt hier a priori $a \geq b$ dazu. Wenn $c = 0$ ist, muss $a = b$ sein. Für $c > 0$ muss auch $a > 0$ sein. Wieder ergibt sich, dass entweder $b = 0 \wedge a = c$ oder $\sqrt{b}$ ein positiv rationales Vielfaches von $\sqrt{a}$ sein muss ($\sqrt{b} = A \cdot \sqrt{a}$), diesmal aber mit der Einschränkung $0 < A \leq 1$ (wegen $b \leq a$). Insgesamt erhalten wir hier:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} \quad (a,b,c \in \mathbb{Q}) \\ \Longrightarrow\ & c = 0, a = b \in \mathbb{Q}_0^+ \text{ oder } b = 0, a = c \in \mathbb{Q}_0^+, \text{ oder} \\ & b = A^2 \cdot a,\ c = (1-A)^2 \cdot a \text{ mit } a \in \mathbb{Q}^+,\ 1 \geq A \in \mathbb{Q}^+. \end{aligned}$$

Die entsprechende Aussage für natürliche Zahlen:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} \quad (a,b,c \in \mathbb{N}) \implies \\ & c = 0, a = b \in \mathbb{N} \text{ oder } b = 0, a = c \in \mathbb{N} \text{ oder} \\ & \sqrt{a} = q \cdot \sqrt{n} \text{ mit } n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{b} = p \cdot \sqrt{n}, \sqrt{c} = (q-p) \cdot \sqrt{n} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N}^*, p < q. \end{aligned}$$

Summen und Differenzen dreier Quadratwurzeln

Wir wollen in diesem Abschnitt Gleichungen der Art $\pm\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} = d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Q}$) untersuchen. Dabei sind natürlich die beiden Fälle $(+,+,+)$ und $(-,-,-)$ als gleich zu betrachten, ebenso alle weiteren Fälle untereinander (ein Vorzeichen einfach, das andere doppelt). Man kann sich also beschränken auf $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Q}$) und $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} = d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Q}$). Die oben verwendete Methode wird auch hier zum Ziel führen.

Satz 2a.

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=d\ (a,b,c,d\in\mathbb{Q})\implies\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$$

Beweis. Klarerweise muss $a,b,c,d\geq 0$ gelten. Wir können sogar $a,b,c>0$ annehmen, denn sonst wären wir bei Satz 1a. Für $d=0$ muss auch $\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}=0$ sein, und die Behauptung ist damit erfüllt.
Im Fall $d>0$ erhält man aus $\sqrt{a}+\sqrt{b}=d-\sqrt{c}$ durch Quadrieren

$$\underbrace{\sqrt{a\cdot b}}_{>0}=\underbrace{\frac{d^2+c-a-b}{2}}_{=:A\in\mathbb{Q}^+}-d\cdot\sqrt{c}.$$

Diese Gleichung wird wieder quadriert, und man erhält $a\cdot b=A^2+d^2\cdot c-2A\cdot d\cdot\sqrt{c}$, woraus schließlich $\sqrt{c}=\frac{A^2+d^2\cdot c-a\cdot b}{2A\cdot d}\in\mathbb{Q}$ folgt. Wegen Satz 1a müssen dann auch $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ sein. □

Satz 2b. *Falls für rationale Zahlen a,b,c,d die Beziehung*

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}=d$$

gilt, tritt einer der folgenden vier Fälle auf:

1. $a=d=0,b=c\in\mathbb{Q}_0^+$ *oder* $b=d=0,a=c\in\mathbb{Q}_0^+$;
2. $d=0$, $\sqrt{b}=A\cdot\sqrt{a}$, $\sqrt{c}=(1+A)\cdot\sqrt{a}$ *mit* $a,A\in\mathbb{Q}^+$ *beliebig;*
3. $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$;
4. $a=c,b=d^2$ *oder* $b=c,a=d^2$.

Beweis. Es gilt hier $a,b,c\geq 0$, das Vorzeichen von d ist unbestimmt. Für $d=0$ ergeben sich die beiden Fälle 1. und 2. direkt aus dem Hilfssatz. Im Fall $d>0$ erhält man aus $\sqrt{a}+\sqrt{b}=d+\sqrt{c}$ durch Quadrieren

$$\sqrt{a\cdot b}=\underbrace{\frac{d^2+c-a-b}{2}}_{=:A\in\mathbb{Q}}+d\cdot\sqrt{c}.$$

(Das Vorzeichen von $A\in\mathbb{Q}$ ist hier leider nicht klar.) Diese Gleichung wird wieder quadriert, und man erhält

$$a\cdot b=A^2+d^2\cdot c+2A\cdot d\cdot\sqrt{c},$$

woraus schließlich für $A\neq 0$ die Beziehung $\sqrt{c}=\frac{a\cdot b-A^2-d^2\cdot c}{2A\cdot d}\in\mathbb{Q}$ folgt. Wegen Satz 1a müssen dann auch $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ sein (Fall 3.). Im Fall $A=0$ gilt $(a\cdot b=d^2\cdot c)\wedge(a+b=d^2+c)$ mit den „Lösungen“ (a priori klar oder durch Lösen einer zugehörigen quadratischen Gleichung): $a=c,b=d^2$ bzw. $b=c,a=d^2$ (Fall 4.). □

Bemerkung: Die entsprechenden Sätze für natürliche statt rationale Zahlen folgen hieraus mit (1) und (6) unmittelbar.

Auch hier kann man in relativ nahe liegender Weise wieder danach fragen, wann eine Summe bzw. Differenz dreier Quadratwurzeln rationaler Zahlen selbst eine Quadratwurzel einer rationalen Zahl ist: Was kann man aus $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} = \sqrt{d}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Q})$ folgern?
Anders gefragt: Unter welcher Bedingung gilt $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} = \sqrt{d}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{Q})$? Wir beschränken uns auf die Summe: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{d}$. (Die anderen Fälle $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} = \sqrt{d}$ bzw. $\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} = \sqrt{d}$ gingen analog.)

Satz 3. *Gilt für rationale Zahlen a,b,c,d die Beziehung*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \sqrt{d},$$

so tritt einer der drei folgenden Fälle ein:

1. Mindestens zwei der Zahlen a,b,c sind null, die dritte ist gleich d;
2. Genau eine der Zahlen $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ ist null, die anderen beiden sind positiv rationale Vielfache voneinander, $\sqrt{d}$ ist die Summe dieser beiden Wurzeln (also auch ein positives rationales Vielfaches jeder der beiden positiven Wurzeln);
3. Alle Wurzeln sind positiv und rationale Vielfache voneinander.

Beweis. Klarerweise haben wir $a,b,c,d \geq 0$ und $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d} \geq 0$ und $d \geq a,b,c$. Für $d = 0$ muss auch $a = b = c = 0$ sein (Fall 1.). Im Fall $d > 0$ muss mindestens einer der drei Summanden auf der linken Seite positiv sein (o.B.d.A. $\sqrt{c} > 0$). Dann erhalten wir durch Subtrahieren von $\sqrt{c}$ auf beiden Seiten und anschließendes Quadrieren zunächst $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} = \frac{d+c-a-b}{2} \in \mathbb{Q}^+$. Mit Satz 1a muss dann $\sqrt{cd} = B \in \mathbb{Q}^+$ sein, und wegen $\sqrt{d} = B/\sqrt{c} = \frac{B}{c} \cdot \sqrt{c}$ ist klar, dass $\sqrt{d}$ ein positiv rationales Vielfaches von $\sqrt{c}$ sein muss: $\sqrt{d} = C \cdot \sqrt{c}$ mit $1 \leq C \in \mathbb{Q}^+$. Des Weiteren ist (wegen Satz 1a) $\sqrt{ab} = D \in \mathbb{Q}_0^+$. Für $a = 0$ oder $b = 0$ kann man den Hilfssatz benutzen (Fall 1. und 2.). Für $a,b > 0$ (insgesamt also $a,b,c,d > 0$) ist $d > c$ (d.h. $C > 1$) und analog $\sqrt{b}$ ein positiv rationales Vielfaches von $\sqrt{a}$, d.h. $\sqrt{b} = E \cdot \sqrt{a}$ mit $E \in \mathbb{Q}_0^+$. Damit haben wir

$$\sqrt{a} + \underbrace{E \cdot \sqrt{a}}_{\sqrt{b}} = \underbrace{C \cdot \sqrt{c}}_{\sqrt{d}} - \sqrt{c} \text{ bzw. } \sqrt{c} = \underbrace{\frac{1+E}{C-1}}_{=:F \in \mathbb{Q}^+} \cdot \sqrt{a},$$

d.h. auch $\sqrt{c}$ und damit $\sqrt{d}$ sind positiv rationale Vielfache von $\sqrt{a}$ (Fall 3.). □

Bemerkung zum Schulunterricht: Die bis hierher gegebenen Beweise sind von ihrem Niveau her so, dass sie sogar in der Schule in einem Wahlpflichtfach (das sich z.B. schwerpunktmäßig Fragen der Irrationalität widmet) möglich wären. Man kann dabei einerseits viel algebraisches Rüstzeug („das Rechnen mit Buchstaben“) üben, man hat viele Möglichkeiten, Lernende nicht nur vorgegebene Beweise nachvollziehen zu lassen, sondern sie auch selbstständig arbeiten zu lassen (z.B. Satz 1a und 2a durch die Lehrkraft, andere Sätze durch Schülergruppen). Andererseits ist das mathematische Prinzip der Fallunterscheidung hier zentral verankert und tritt in elementarer Form auf. Man erhält des Weiteren ein vertieftes Verständnis von Rationalität-Irrationalität (vgl. auch [4]: $\log_{10}2$ ist irrational; was ist die genaue Bedingung an die natürlichen Zahlen $a,b \geq 2$, sodass $\log_b a$ rational ist?, etc.), sieht selber am Horizont weiterführende Fragen (Wie ist das mit mehr als drei Quadratwurzeln? Wie ist das mit anderen Wurzeln?, etc.), bei denen aber das vorhandene Rüstzeug nicht ausreicht. Dies ist nicht selbstverständlich, denn bei vielen Fragen der Mathematik, bei denen das schulische Rüstzeug nicht ausreicht, kann man als Schüler/in die zugehörige Fragestellung bzw. die Problemlage gar nicht verstehen. Im Bereich der Zahlentheorie (z.B. Goldbachvermutung, etc.) ist ein Verstehen des geschilderten Problems aber oft relativ leicht möglich. Unter Umständen haben solche „Grenzerlebnisse“ sogar etwas Faszinierendes, so dass dadurch die Motivation steigt, in diesem Bereich mehr wissen zu wollen, und die Mathematik als Wissenschaft hat da auch mehr zu bieten (Universität). Insgesamt ist dies sicher ein „skalierbares Thema“ [5], das einen möglichen Einsatz auf verschiedenen Niveaustufen (Schule, Universität) hat.

Summen und Differenzen von Wurzeln – allgemeiner

Man könnte nun vermuten, dass zwar der algebraische Aufwand immer ein wenig größer wird, dass es aber prinzipiell möglich ist, mit der geschilderten Methode die Anzahl der Quadratwurzeln zu steigern, z.B. bei $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=e$ $(a,b,c,d,e \in \mathbb{Q})$ oder $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=\sqrt{e}$ mit $a,b,c,d,e \in \mathbb{Q}$. Aber das funktioniert nicht mehr, da dann durch Quadrieren die Anzahl der auftretenden Quadratwurzeln nicht mehr gesenkt werden kann.

Schon im Fall zweier (beliebiger) Wurzeln kommt man mit Elementarmathematik nicht mehr aus, da braucht man u.a. den Begriff des Minimalpolynoms, speziell dessen Eigenschaft: Wenn α Nullstelle eines beliebigen Polynoms f ist, dann muss das zugehörige Minimalpolynom p das Polynom f teilen (vgl. [1], dort aber sehr kurz und eigentlich etwas unsauber).

Satz 4a. *Wenn a,b,m,n positive ganze Zahlen mit $\sqrt[m]{a}, \sqrt[n]{b} \notin \mathbb{Q}$ sind, dann ist auch $\sqrt[m]{a}+\sqrt[n]{b} \notin \mathbb{Q}$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass a,b,m,n minimal in folgendem Sinn sind: Es gibt

keine kleineren positiven ganzen Zahlen a',b',c',d' mit $\sqrt[m']{a'} = \sqrt[m]{a}$ bzw. $\sqrt[n']{b'} = \sqrt[n]{b}$ (also so etwas wie z.B. $\sqrt[9]{8}$ sei verboten, dafür würden wir $\sqrt[3]{2}$ schreiben). Dann ist das sogenannte Minimalpolynom von $\sqrt[m]{a}$ über $\mathbb{Q}$ gegeben durch $f_a(X) = X^m - a$, analog jenes von $\sqrt[n]{b}$ durch $f_b(X) = X^n - b$. Annahme: $\sqrt[m]{a} + \sqrt[n]{b} = q \in \mathbb{Q} \implies \sqrt[n]{b} = q - \sqrt[m]{a}$; dann wäre $\sqrt[m]{a}$ Nullstelle von $f_b(q-X)$ und somit müsste (Minimalpolynom!) $f_a(X) \mid f_b(q-X)$; analog wäre $f_b(X) \mid f_a(q-X)$ und mit der Substitution $X \to q-X$ daher $f_b(q-X) \mid f_a(X)$. Also können sich $f_b(q-X)$ und $f_a(X)$ nur durch einen rationalen Faktor unterscheiden („assoziierte Polynome"), d.h. $f_b(q-X) = c \cdot f_a(X)$ mit $c \in \mathbb{Q}$: $(q-X)^n - b = c \cdot (X^m - a)$. Dies ist nur für $q = 0$ möglich (denn sonst hätte man ja wegen des Binomischen Lehrsatzes auch viele weitere Potenzen von X auf der linken Seite): $(-X)^n - b = c \cdot (X^m - a)$. Für gerades n ergibt sich daraus $n = m, c = 1$ und $a = b$, und damit $= 2\sqrt[m]{a}$ also $\sqrt[m]{a} \in \mathbb{Q}$, Widerspruch. Für ungerades n ergibt sich $c = -1, n = m$ und $a = -b$, Widerspruch. □

Solche Beweise wären in der Schule nicht möglich, auch in der Ausbildung für Lehramtskandidaten an Universitäten ist das nicht überall möglich, weil die Algebra oft nicht in einem hinreichend tiefen Ausmaß vorkommt (und daher z.B. die Begriffe des Minimalpolynoms oder der Körpererweiterung gar nicht thematisiert werden).

Noch ein Stück abstrakter (tiefer in der algebraischen Zahlentheorie) ist der Beweis der entsprechenden allgemeinen Aussage:

Satz 4b: Aus $r_1,\ldots,r_n \in \mathbb{Q}^+$, $s_1,\ldots,s_n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mit $\sqrt[s_1]{r_1},\ldots,\sqrt[s_n]{r_n} \notin \mathbb{Q}$ folgt $\sum_{i=1}^n \sqrt[s_i]{r_i} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis. (von G. Kuba). Wir betrachten den Körper $K = \mathbb{Q}[\sqrt[s_1]{r_1},\ldots,\sqrt[s_n]{r_n}]$, dessen Grad d über $\mathbb{Q}$ jedenfalls mindestens 2 beträgt. Sei $T(\alpha)$ die Spur von $\alpha \in K$ bezogen auf K (es ist also $T(\alpha) = \sigma_1(\alpha) + \ldots + \sigma_d(\alpha)$, wobei $\sigma_1,\ldots,\sigma_d$ die Monomorphismen von K nach $\mathbb{C}$ sind). Da für $m,a \in \mathbb{N}$ im Fall $\sqrt[m]{a} \notin \mathbb{Z}$ das Minimalpolynom von $\sqrt[m]{a}$ von der Form $X^k - b$ mit $2 \leq k \leq m$ und $b \in \mathbb{N}$ ist, muss $T(\sqrt[s_i]{r_i}) = 0$ für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ und somit auch $T(\sum_{i=1}^n \sqrt[s_i]{r_i}) = 0$ gelten. Dagegen gilt $T(r) = d \cdot r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Da die Zahl $\sum_{i=1}^n \sqrt[s_i]{r_i}$ trivialerweise positiv ist, kann dieselbe somit nicht rational sein. □

Andere Beweise dafür finden sich in [2, 6].

Literatur

[1] Diskussionforum *stackexchange.com*, URL *http://math.stackexchange.com/questions/479092/sum-of-two-irrational-radicals-is-irrational*

[2] A.S. Besicovitch. On the Linear Independence of Fractional Powers of Integers. *Proc. Lond. Math. Soc.* 15 (1940), 3–6.

[3] G. Hanna. Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange* 21/1 (1990), 6–13.
[4] H. Humenberger und B. Schuppar: Irrationale Dezimalbrüche – nicht nur Wurzeln! In: Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift zum 60. Geburtstag für H.-W. Henn (A. Büchter et al., eds), Franzbecker, Hildesheim 2006, pp. 232–245.
[5] N. Hungerbühler. Skalierbare Themen im Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*, WTM-Verlag, Münster, pp. 26–33.
[6] P. Mihailescu. Aufgabe 835. *Elemente der Mathematik* 36 (1981), 19–20.

Anschrift des Verfassers:
Hans Humenberger
Universität Wien, Fakultät für Mathematik
Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien.
email hans.humenberger@univie.ac.at

EARLY STUDENT AWARD
&
ÖMG-STUDIERENDENTREFFEN

17. - 19. September 2018, Strobl am Wolfgangsee

Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

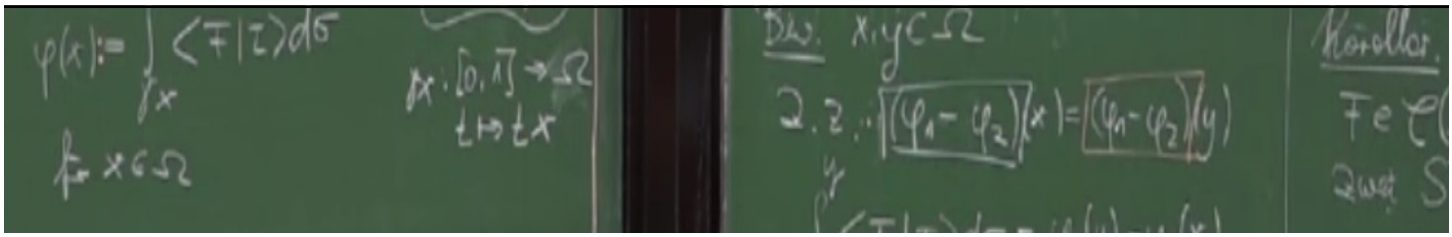
Zu diesem Vernetzungstreffen werden hervorragende Mathematik-Studierende der ersten Studienjahre aus Wien, Graz, Linz, Salzburg, Innsbruck und Klagenfurt am Ende ihres vierten Studiensemesters eingeladen.

In Vorträgen und interaktiven Programmpunkten werden auf ansprechendem Niveau Richtungen der „reinen" und „angewandten" Forschung, ebenso wie außerakademische Perspektiven aufgezeigt.

Gegenseitiges Kennenlernen und Kontakte zwischen den Mathematik-Studierenden verschiedener Standorte stehen im Zentrum.

Den von den Fachbereichen zu nominierenden Teilnehmerinnen und Teilnehmern wird beim Treffen der *Early Student Award* verliehen und sie erhalten eine einjährige Gratis-Mitgliedschaft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft.

Für den Inhalt verantwortlich: das Initiativteam
Tobias Hell (Universität Innsbruck), Reinhard Winkler (TU Wien), Wolfgang Woess (TU Graz)



Internat. Math. Nachrichten
Nr. 236 (2017), 53–54

Early Student Award und ÖMG-Studierendentreffen

Wolfgang Woess
TU Graz

Das Ziel dieser Initiative ist es, exzellente junge österreichsche Mathematik-Studierende aller Standorte zu einem Vernetzungstreffen zusammenzubringen.

Das erste solche Treffen wird vom 17. bis 19. September 2018 im BIFEB (Bundesinstitut für Erwachsenenbildung) in Strobl am Wolfgangsee stattfinden. Den Teilnehmerinnen und Teilnehmerm sollen dort im Rahmen von Vorträgen und interaktiven Programmpunkten in freundlicher Atmosphäre „Richtungen“ aufgezeigt werden – nicht nur sogenannte reine und angewandte Forschung, auch außerakademische Perspektiven. Genügend Zeit soll zur Verfügung stehen, um gegenseitiges Kennenlernen und Kontakte zwischen den Mathematik-Studierenden verschiedener Standorte zu ermöglichen.

Am Ende des Treffens wird den eingeladenen Teilnehmerinnen und Teilnehmern der *Early Student Award* der ÖMG verliehen und sie erhalten eine einjährige Gratismitgliedschaft bei der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft.

Als Vorbild für diese Initiative dienten dem Autor dieser Zeilen Aktivitäten des Istituto Nazionale di Alta Matematica, Italien; dort erhielten die landesweit ausgewählten besten Studierenden auch ein Stipendium (was außerhalb des finanziellen Rahmens der ÖMG läge) und wurden z.B. zu einem Dreitagestreffen an die internationale Sommeruniversität in Perugia eingeladen, mit einem Programm ähnlich dem hier konzipierten. (Der Autor hielt einen der Minikurse für die begabten jungen Leute.)

Für das österreichische Studierendentreffen wurde ein Initiativteam gebildet, bestehend aus Tobias Hell (Universität Innsbruck), Reinhard Winkler (TU Wien) und Wolfgang Woess (TU Graz). Wir kamen zu dem Schluss, dass es am besten ist, die Auswahl für den *Early Student Award* auf den (jeweils) zweiten Jahrgang der Studierenden an den universitären Mathematik-Standorten einzugrenzen. Die Art der Nominierung kann standortspezifisch sein. Sie wurde den Kontakpersonen an den Standorten überlassen:

ISSN 0020-7926

- Universität Wien: Christian Krattenthaler
- TU Wien: Reinhard Winkler
- KFU Graz und TU Graz: Wolfgang Woess
- Universität Linz: Friedrich Pillichshammer
- Universität Salzburg: Clemens Fuchs
- Universität Innsbruck: Tobias Hell
- Universität Klagenfurt: Clemens Heuberger

Sie werden sich natürlich mit ihren Kolleginnen und Kollegen austauschen, insbesondere jenen, die die Hauptlehrveranstaltungen des dritten Studiensemesters halten. Die Nominierung der Studierenden soll im März 2018 erfolgen.

Die Ankündigung auf der Seite 52 wird an die Studierenden des zweiten Jahrgangs verteilt, und im Ausblick auf das Folgetreffen werden auch jene des ersten Jahrgangs darauf aufmerksam gemacht.

Der ÖMG-Vorstand hat zugestimmt, die vorwiegende Finanzierung des Studierendentreffens in den Jahren 2018 und 2019 zu übernehmen. Beiträge aus den Fachbereichen (z.B. Finanzierung bzw. Zusatzfinanzierung der Teilnahme einiger Studierender) werden nicht nur zu Beginn erhofft: Insbesondere um eine längerfristige Durchführung nach einem hoffentlich erfolgreichen Start zu ermöglichen, wird die Kofinanzierung durch die Fachbereiche zunehmend wichtig werden.

Auch was das Team der Organisatoren und Vortragenden betrifft, hoffen wir auf graduelle Übergabe der „Staffel“ an andere Kolleginnen und Kollegen aus unserer Gemeinschaft.

Adresse des Autors:
Wolfgang Woess
Institut für Diskrete Mathematik, TU Graz
Steyrergasse 30, 8010 Graz
email woess@tugraz.at

Buchbesprechungen

M. Shearer, R. Levy: Partial Differential Equations. An Introduction to Theory and Applications. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2016, vii+274 S. ISBN 978-0-691-16129-7 H/b$ 85.

As an active and broad field of research in modern analysis, partial differential equations are well-covered in the literature featuring some rather popular and widely used textbooks. The recent contribution by Michael Shearer and Rachel Levy provides an accessible and very readable introduction addressing beginning graduate students and advanced undergraduates.

This audience will appreciate both the clear explanations of theoretical aspects of PDEs, as well as various illustrative remarks addressing applications.

The text at hand consists of 15 chapters beginning with an introduction (e.g. on initial and boundary conditions) and basic principles (on aspects like well-posedness). First-order equations are tackled by the method of characteristics and illustrated using scalar conservation laws and the formation of shocks. Canonical topics such as the wave equation and the heat equation follow. To both of them, separation of variables is applied (based on Fourier series and the theory of eigenfunctions). Laplace's and Poisson's equations (harmonic functions) are next, and the role of Green's functions and distributions is explained. Chapter 10 addresses functional analytical aspects such as Sobolev spaces and weak solutions of second order elliptic equations. The remaining part deals with travelling wave solutions for certain parabolic problems, scalar conservation laws and systems of first order hyperbolic equations. Finally, the equations of fluid mechanics are discussed. Short biographies of famous mathematicians can be found as footnotes, when their results are needed. Each chapter closes with problems, and an electronic solution manual is available to professors.

Three appendices supplement the text and address the required basics on multivariable calculus, analysis (that is, theory of integration and functional analysis)

and ordinary differential equations. The references consist of 47 entries, ranging from textbooks to research papers.

As a subjective side note, for an actual course the reviewer would sometimes provide the class with a bit more depth and details (e.g. concerning Sobolev spaces), but the audience will surely benefit from both approaches. In any case, the book can be warmly recommended for libraries. Moreover, students will definitely take advantage from its readability and motivating style.

Ch. Pötzsche (Klagenfurt)

I. I. Vrabie: Differential Equations. An Introduction to Basic Concepts, Results and Applications. World Scientific, New Jersey, 2016, xxii+506 S. ISBN 978-981-4759-20-5 P/b $ 93,40.

Das vorliegende Lehrbuch über Differentialgleichungen ist nicht nur eine Einführung in dieses weitläufige Gebiet, sondern geht thematisch deutlich darüber hinaus. Neben den wahrscheinlich in jeder Einführungsvorlesung zu Differentialgleichungen besprochenen Themen werden unter anderem auch präsentiert (Zitate): generalized solutions, variational inequalities, delay equations, nonlocal problems und vieles mehr.

Das Buch ist ausführlich geschrieben, sehr schön strukturiert und mit interessanten Nebenbemerkungen versehen. Zu jedem Kapitel gibt es eine Vielzahl an Aufgaben, die in Exercises und Problems unterteilt sind. Grob gesprochen: Exercises sind Rechentechnik, bei Problems gibt es etwas zu denken und beweisen. (Das Niveau reicht von einfach bis ganz schön anspruchsvoll.) Bemerkenswert ist, dass die Lösungen dieser Aufgaben in einem Anhang zusammengestellt sind. Weitere nette Details sind, dass jedes Kapitel mit einer kurzen Inhaltsangabe beginnt und dass es eine ausführliche Einleitung gibt, wo einerseits die historische Entwicklung beleuchtet wird und andererseits etliche mathematische Modelle konkreter Probleme diskutiert werden, oder dass für Beweise nicht einfach die Standardmethode verwendet wird, sondern nach effizienten, erklärenden und ästhetischen Wegen gesucht wird.

Dieses Buch ist ein schönes, mit viel Liebe zum Detail geschriebenes, und inhaltlich makelloses Werk, das sich einerseits hervorragend zum Selbststudium eignet und sich andererseits auch für Vortragende als Vorlage anbietet. Zusammenfassend: Empfehlenswert!

H. Woracek (Wien)

Neue Mitglieder

Thomas Benesch, DDr. – Wien. geb. 1971. Doktorat 1996 (Logistik) und 1998 (Wirtschaftsingenieurwesen-Maschinenbau). Seit 1996 Lehrtätigkeit an verschiedenen Institutionen, vor allem im Bereich Mathematik und Statistik. Expertise in der Lehre an verschiedensten Schultypen in Mathematik, Geschichte, Religion, Naturwissenschaften und anderen Fächern. email *thomas.benesch@kabelplus.at*, *http://www.s-benesch.com*.

Tobias Hell, Dr. – Univ. Innsbruck. geb. 1988. Seit 2012 Senior Lecturer am Inst. f. Mathematik der Univ. Innsbruck und seit 2017 Professor f. Methoden empirischer Forschung mit dem Schwerpunkt quantitative Methoden an der Pädagogischen Hochschule Tirol. Arbeitsgebiet Angewandte Statistik. email *tobias.hell@uibk.ac.at*, *http://tobiashell.com*.

Peter Michael Kuleff, Dipl.-Ing. – Wien. geb. 1992. Abschluss des Bachelorstudiums (2015) und Masterstudiums (2017) an der TU Wien. email *peter_kuleff@hotmail.com*.

Alexander Helmut Moßhammer, M.Sc. – Innsbruck. geb. 1992. Abschluss des Masterstudiums Accounting, Auditing and Taxation (2017) an der Univ. Innsbruck. Derzeit Doktorand am Institut für Rechnungswesen, Steuerlehre und Wirtschaftsprüfung an der Univ. Innsbruck. Arbeitsgebiet: Unternehmensbesteuerung. email *alexander.mosshammer@hotmail.com*.

Stefan Planitzer, Dipl.-Ing. – Graz. geb. 1988. Abschluss Masterstudium Mathematische Computerwissenschaften (2015) an der TU Graz, seit 2012 Lehramtstudium Mathematik und Informatik in Graz, seit 2015 Projektassistent im Rahmen des Doktorandenkollegs Diskrete Mathematik an der TU Graz. email *stefan.planitzer@gmx.at*.

Katharina Sator, Mag. – Hausbrunn. geb. 1986. Mathematik- und Physiklehrerin am Konrad Lorenz-Gymnasium Gänserndorf, Fachkoordination Bildungsstandards Mathematik AHS (Pädagogische Hochschule Baden) Schulbuchautorin (Thema Mathematik). email *katharina.sator@gmx.at*.

Daniel Scharler, B.Sc. – Innsbruck. geb. 1992. 2012–2016 Bachelorstudium Technische Mathematik an der Univ. Innsbruck, ab 2016 Masterstudium. email *daniel.scharler@student.uibk.ac.at*.

Filip Zepinic, Dipl.-Ing. – TU Wien. geb. 1987. Abschluss Masterstudium der Technischen Mathematik an der TU Wien im Juni 2017. email *filip.math@gmail.com*.

Ausschreibung der Preise der ÖMG

Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2018

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2018 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematikerinnen oder Mathematiker, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind und welche einen wesentlichen Teil ihrer Arbeiten in Österreich erbracht haben. Dabei soll die Promotion mindestens zwei bis maximal zehn Jahre zurückliegen. (Überschreitungen sind möglich bei Kindererziehungszeiten und bei nachweislichen Präsenz- oder Zivildienstzeiten.)

Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten habilitierten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen. Der Vorschlag muss in elektronischer Form bis spätestens 14. März 2018 bei der Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung; 2. Publikationsliste; 3. Wissenschaftlicher Lebenslauf.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine Begutachtungskommission den Preisträger oder die Preisträgerin aus. Der Preis ist mit 1.000 € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird der Preisträger oder die Preisträgerin eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er oder sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Barbara Kaltenbacher, Universität Klagenfurt. email *barbara.kaltenbacher@uni-klu.ac.at*.

Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2018

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2018 wieder zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2015 oder 2016 eine Diplom- oder Masterarbeit (im Folgenden als Masterarbeit bezeichnet) bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Masterarbeiten ist ein Abschluss eines Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Doktoratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlossenen

Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss in elektronischer Form bis spätestens 14. März 2018 bei der Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Ein Exemplar der als besonders hochqualifiziert bewerteten mathematischen Masterarbeit bzw. Dissertation; 2. Zwei begründete Bewertungen dieser Arbeit; 3. Einen Lebenslauf des Kandidaten bzw. der Kandidatin einschließlich einer kurzen Beschreibung des Studienablaufs.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachtungskommission die Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500 € dotiert. Jeder Preisträger erhält eine Urkunde. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er bzw. sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Barbara Kaltenbacher, Universität Klagenfurt. email *barbara.kaltenbacher@uni-klu.ac.at*.

Ausschreibung der Schülerinnen- und Schülerpreise der ÖMG 2018

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft zeichnet herausragende vorwissenschaftliche Arbeiten, die 2016 oder 2018 an österreichischen Schulen entstanden sind und die einen starken Bezug zu Mathematik oder Darstellender Geometrie aufweisen, mit Preisen aus. Diese Arbeiten müssen in elektronischer Form, als PDF-Datei, bis 10. Juli 2018 bei der ÖMG einlangen und werden von einer Jury begutachtet.

Die Verfasserinnen und Verfasser jener Arbeiten, die im Zuge dieser Begutachtung durch die Jury ausgewählt werden, werden zu einem Kurzvortrag eingeladen, in dem sie ihre Arbeit präsentieren können. Anschließend erfolgt die Preisverleihung. Die Präsentationen und die Preisverleihung der prämierten Arbeiten finden im Herbst 2018 zu einem noch festzusetzenden Termin statt.

Die ÖMG bittet alle ihre Mitglieder sowie die Leserinnen und Leser der *IMN*, potentiell Interessierte von dieser Einladung zu informieren und Schulen zur Teilnahme zu ermuntern.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Barbara Kaltenbacher, Universität Klagenfurt. email *barbara.kaltenbacher@uni-klu.ac.at*.