Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@oemg.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzendruck, 8044 Weinitzen.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903
http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-10401
email: *sekr@oemg.ac.at*

Vorstand:

Beirat:

Vorsitzende der Sektionen und ständigen Kommissionen:

Diese gehören statutengemäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT8312000 22910389200 bei der Bank Austria–Creditanstalt (BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 235 (71. Jahrgang) **August 2017**

Inhalt

Die Graphik auf der Titelseite symbolisiert die Lösung des Problems der dichtesten Kugelpackung im euklidischen $\mathbb{R}^8$: Sie ist diejenige Gitterpackung, bei der die Kugelmittelpunkte auf einem E_8-Gitter $\{(x_1,\ldots,x_8) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z}+\frac{1}{2})^8 \mid x_1+\cdots+x_8 \in 2\mathbb{Z}\}$ liegen. Letzteres tritt auf als die Menge der Ecken der Polyeder der regulären Parkettierung "5_{21}" des $\mathbb{R}^8$ durch 8-Simplizes und 8-Kreuzpolytope; die Titelseite zeigt das Coxeter-Dynkin-Diagramm dieser Parkettierung. Für Details und Zusammenhänge, insbesondere auch das Packungsproblem im $\mathbb{R}^{24}$, wird verwiesen auf den Originalartikel von Maryna Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8* (Ann. Math. 185 (2017), 1017–1033), und den Übersichtsartikel von H. Cohn, *A conceptual breakthrough in sphere packing* (Notices AMS, Februar 2017).

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 235 (2017), 1–16

Numerical methods for SDEs with drift discontinuous on a set of positive reach

Gunther Leobacher, Michaela Szölgyenyi
KFU Graz, ETH Zürich

Abstract. For time-homogeneous stochastic differential equations (SDEs) it is enough to know that the coefficients are Lipschitz to conclude existence and uniqueness of a solution, as well as the existence of a strongly convergent numerical method for its approximation. Here we introduce a notion of piecewise Lipschitz functions and study SDEs with a drift coefficient satisfying only this weaker regularity condition. For these SDEs we can construct a strongly convergent approximation scheme, if the set of discontinuities is a sufficiently smooth hypersurface satisfying the geometrical property of being of positive reach. We then arrive at similar conclusions as in the Lipschitz case. We will see that, although SDEs are in the center of our interest, we will talk surprisingly little about probability theory here.

1 Introduction

Stochastic differential equations (SDEs) are essential for many models in mathematical finance, risk theory, biology, physics, and chemistry. Usually, these equations cannot be solved explicitly. Hence, we are interested in finding numerical methods with positive convergence speed for solving them.
We consider general SDEs on the $\mathbb{R}^d$, which are of the form

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad X_0 = x\,, \tag{1}$$

with initial value $x \in \mathbb{R}^d$, drift coefficient $\mu : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, diffusion coefficient $\sigma : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times m}$, and m-dimensional standard Brownian motion W (thus adding

ISSN 0020-7926

noise to the ordinary differential equation). Little generality is lost, if we assume $m = d$, and we will do so throughout this article.

By a (strong) solution we mean a continuous stochastic process X that is adapted to the filtration generated by W and that satisfies

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s \tag{2}$$

for all $t \geq 0$ almost surely. The solution X is unique, if the paths of any other solution to (2) coincide with those of X almost surely.

The second integral in (2) is Itô's stochastic integral, the construction of which we will not repeat here. Suffice it to mention that for K from a suitable class of stochastic processes it holds that

$$\int_0^t K_s \, dW_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor 2^n t \rfloor - 1} K_{k2^{-n}} (W_{(k+1)2^{-n}} - W_{k2^{-n}}) \,,$$

reminding us of the Riemann integral (but with evaluation of the integrand only in the left boundary of small intervals). A particularity of Itô's integral is that there appears a correction term in the fundamental theorem of calculus, that is, for $X_t = X_0 + \int_0^t H_s ds + \int_0^t K_s dW s$ and for a sufficiently regular function $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)H_s ds + \int_0^t f'(X_s)K_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)K_s^2 ds \,.$$

This is known as Itô's formula. The rigorous construction of the stochastic integral gave meaning to the concept of a solution of an SDE. In addition to that Itô [4] proved that a unique solution to (1) exists, whenever μ and σ are Lipschitz-continuous.

Under the same assumptions Maruyama [12] proved that the Euler-Maruyama (EM) scheme

$$X_t^\delta = x + \int_0^t \mu(X_{\underline{s}}^\delta)ds + \int_0^t \sigma(X_{\underline{s}}^\delta)dW_s \,,$$

with $\underline{s} = j\delta$ for $s \in [j\delta, (j+1)\delta)$, $j = 0, \ldots, (T-\delta)/\delta$ (which reminds us of the Euler scheme for ordinary differential equations, but with an additional term corresponding to the stochastic integral) converges with strong order $1/2$. In general we say that a numerical approximation X^δ converges with strong order γ, if for any fixed $T > 0$, there exists a constant C such that for sufficiently small step-size $\delta > 0$ it holds that

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} \|X_t - X_t^\delta\|^2\Big)^{1/2} \leq C\delta^\gamma \,.$$

Higher order algorithms exist under stronger regularity conditions on the coefficients, most notably the Milstein method and stochastic Runge-Kutta schemes, see Kloeden and Platen [7].

The question of how to solve SDEs with irregular (non-globally Lipschitz) coefficients approximately is a very active topic of research. There is still a big gap between the assumptions on the coefficients of these equations under which strong convergence with convergence rate has been proven in the scientific literature, and the assumptions that equations in real-world applications satisfy.

In contrast to that, several delimiting results have been proven recently, stating that a certain SDE with relatively well-behaved (infinitely often differentiable) coefficients cannot be solved approximately in finite time, cf. Hairer et al. [3], Jentzen et al. [5], Müller-Gronbach and Yaroslavtseva [13], Yaroslavtseva [24]. However, there is still a big discrepancy between the assumptions on the coefficients under which convergence with strong convergence rate has been proven and the properties of the coefficients of the SDE presented in Hairer et al. [3].

Here we narrow the gap described above by settling convergence with positive convergence speed of a numerical method for d-dimensional SDEs with discontinuous drift and degenerate diffusion coefficient. First steps in this direction have previously been made by Ngo and Taguchi [16], who proved convergence of order up to $1/4$ of the Euler-Maruyama method for d-dimensional SDEs which have a discontinuous, bounded drift that satisfies a one-sided Lipschitz condition and a Hölder continuous, bounded, and uniformly non-degenerate diffusion coefficient. In Ngo and Taguchi [14, 15] they do not need the one-sided Lipschitz condition anymore, but the result only works for one-dimensional SDEs and relies on uniform non-degeneracy of the diffusion coefficient.

SDEs with discontinuous drift appear naturally when studying stochastic optimal control problems with bang-bang type optimal strategies, that is with strategies of the form $\mathbf{1}_{\mathcal{S}}(X)$ for a measurable set $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^d$. If in addition only a noisy signal of the underlying state process X is available, then filtering this signal leads to a degenerate diffusion coefficient and increases the dimension substantially. Examples can be found in Sass and Haussmann [20], Rieder and Bäuerle [18], Frey et al. [2], Leobacher et al. [11], Szölgyenyi [23], Shardin and Szölgyenyi [21], Shardin and Wunderlich [22].

The idea for tackling the problem is illustrated in Figure 1: to overcome the issues caused by a discontinuous drift coefficient, we want to find a transform G with the property that the coefficients of the transformed SDE for $G(X)$ are Lipschitz. Then we want to apply the EM scheme to that SDE, which converges with strong order $1/2$, to obtain an approximation of the solution to the transformed SDE. In the end, we want to transform back to obtain an approximation of the solution to the original SDE (1). In Figure 1, the set of discontinuities of the drift is illustrated by a smooth curve. Indeed, we need to make some assumptions to that end so that we can carry through our idea.

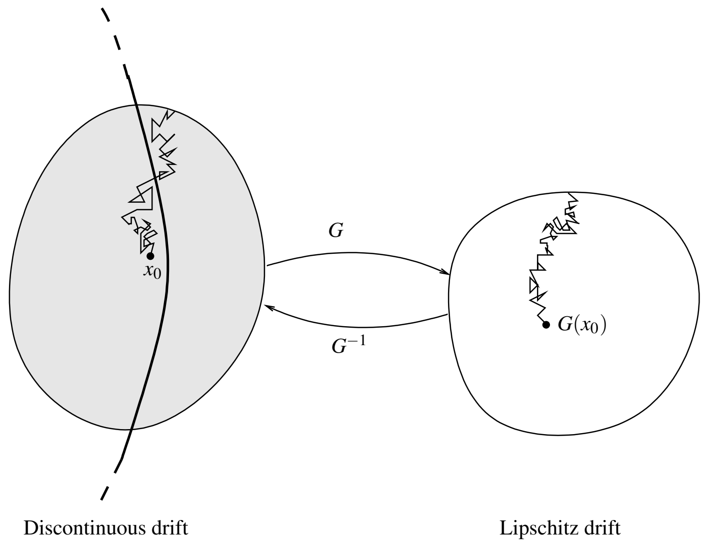


Figure 1: A sketch of the idea for the construction of our numerical method.

Thus, we have to solve the following tasks:

1. construct G and all prove necessary properties;
2. prove an existence and uniqueness result;
3. construct a numerical method using G (called GM) and prove convergence and convergence rate;
4. prove convergence and convergence rate for EM starting from GM.

We will start with presenting our results in dimension one, and subsequently we will show how these ideas can be extended to general dimension.

This is a review article; the results and examples presented here, can be found in Leobacher and Szölgyenyi [8, 9, 10].

2 Result in dimension one

In order to construct an appropriate $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, we have to know how such a transform acts on the coefficients: assuming existence of a solution X and also validity of Itô's formula for X and G we get

$$G(X_t) = G(x) + \int_0^t G'(X_s)\mu(X_s)ds + \int_0^t G'(X_s)\sigma(X_s)dW_s + \int_0^t \frac{1}{2}G''(X_s)\sigma(X_s)^2 ds\,.$$

Thus $Z = G(X)$ is the solution of an SDE with coefficients

$$\tilde{\mu}(Z) = G'(G^{-1}(Z))\mu(G^{-1}(Z)) + \frac{1}{2}G''(G^{-1}(Z))\sigma(G^{-1}(Z))^2\,,$$
$$\tilde{\sigma}(Z) = G'(G^{-1}(Z))\sigma(G^{-1}(Z))\,.$$

Hence, G maps $X \mapsto Z$ and it transforms μ,σ into $\tilde{\mu},\tilde{\sigma}$.

We see that if $G \in C^2$ – the classical assumption for Itô's formula – then $\tilde{\mu},\tilde{\sigma}$ are continuous, if and only if μ,σ are continuous. However if $G \in C^1$ and σ is continuous and non-zero, then we can offset jumps of μ with jumps of G''. So we can get continuous $\tilde{\mu}$ from discontinuous μ with a less smooth transform. Note that $\tilde{\sigma}$ is continuous in either case. Hence, we choose $G \in C^1$ to be able to eliminate the discontinuities from the drift. Note that we will have to verify that the heuristic application of Itô's formula above is valid, since the classical Itô formula holds for C^2 functions.

With this, we are able to relax the Lipschitz condition on the drift.

Definition 2.1. A function $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is called *piecewise Lipschitz*, if there are finitely many points $\xi_1 < \ldots < \xi_m$ such that the restriction of μ to each of the intervals $(-\infty,\xi_1),(\xi_m,\infty)$ and (ξ_k,ξ_{k+1}), $k = 1,\ldots,m-1$ is Lipschitz.

For the presentation here, we now assume that μ is piecewise Lipschitz with only one jump in ξ, but note that our result also holds for multiple jumps. Let

- μ be Lipschitz on $(-\infty,\xi)$ and (ξ,∞);
- $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be Lipschitz with $\sigma(\xi) \neq 0$.

Note that the last condition is by far weaker than uniform non-degeneracy, as for non-degeneracy one would need σ to be bounded away from 0 on the whole of $\mathbb{R}$.

We define the transform $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ by

$$G(x) = x + \alpha(x-\xi)|x-\xi|\phi\left(\frac{x-\xi}{c}\right) =: x + \alpha\bar{\phi}(x)\,, \tag{3}$$

where α, c are appropriate constants, and

$$\phi(u) = \begin{cases} (1+u)^3(1-u)^3 & \text{if } |u| \leq 1\,, \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

localizes the impact of G. If $0 < c < 1/6|\alpha|$, then $G' > 0$, and hence G is globally invertible. Furthermore, we can prove that G and G^{-1} are Lipschitz.

Setting $Z = G(X)$, we have

$$dZ_t = \tilde{\mu}(Z_t)dt + \tilde{\sigma}(Z_t)dW_t\,,$$

where

$$\tilde{\mu}(z)=\mu(G^{-1}(z))+\frac{1}{2}\alpha\bar{\phi}''(G^{-1}(z))\sigma(G^{-1}(z))^2+\alpha\bar{\phi}'(G^{-1}(z))\mu(G^{-1}(z))\,,$$
$$\tilde{\sigma}(z)=\sigma(G^{-1}(z))+\alpha\bar{\phi}'(G^{-1}(z))\sigma(G^{-1}(z))\,.$$

In order to offset the jump of μ in ξ by the jump of G'' (by construction also in ξ), we choose α as

$$\mu(\xi+)+\frac{1}{2}\alpha\bar{\phi}''(\xi+)\sigma(\xi)^2=\mu(\xi-)+\frac{1}{2}\alpha\bar{\phi}''(\xi-)\sigma(\xi)^2 \Longrightarrow \alpha=\frac{\mu(\xi-)-\mu(\xi+)}{2\sigma(\xi)^2}\,.$$

With this choice of α we have that $\tilde{\mu}$ is continuous.

Lemma 2.2 (Elementary but essential)**.** *Let $\tilde{\mu}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ be a function satisfying*

1. *$\tilde{\mu}$ is continuous;*
2. *$\tilde{\mu}$ is piecewise Lipschitz.*

Then $\tilde{\mu}$ is Lipschitz.

Altogether we have that the coefficients of the SDE for Z are Lipschitz.
Now, we are ready to prove the following theorem.

Theorem 2.3 (Leobacher and Szölgyenyi [8])**.** *Let μ be piecewise Lipschitz and let σ be Lipschitz and $\mu(\xi+)\neq\mu(\xi-)\Longrightarrow\sigma(\xi)\neq 0$.*
Then there exists a unique strong solution to the one-dimensional version of (1).

The proof works as follows:

- show that the SDE for $Z=G(X)$ has Lipschitz coefficients using Lemma 2.2;
- then by Itô's theorem, there exists a unique strong solution to this SDE;
- set $X=G^{-1}(Z)$ and apply Itô's formula to it, to see that

$$dX_t=\mu(X_t)dt+\sigma(X_t)dW_t\,.$$

So we have constructed a process X that solves our SDE. There is one issue that we have already mentioned above: $G^{-1}\notin C^2$. But in 1D, Itô's formula holds nevertheless, see [6, Problem 7.3].

As sketched in Figure 1 above, the transformation method in a natural way also leads to the following numerical scheme.

Algorithm 2.4 (Leobacher and Szölgyenyi [8])**.** Given μ,σ,x,T, and the step-size $\delta>0$,

1. precompute $G, G^{-1}, \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$;
2. solve $dZ=\tilde{\mu}(Z)dt+\tilde{\sigma}(Z)dW$, $Z_0=G(x)$ on $[0,T]$ using the EM method to obtain the EM approximation Z^δ;
3. compute the numerical approximation $\bar{X}_t=G^{-1}(Z_t^\delta)$, for $t\in[0,T]$.

Theorem 2.5 (Leobacher and Szölgyenyi [8])**.** *Let μ be piecewise Lipschitz and let σ be Lipschitz and $\mu(\xi+)\neq\mu(\xi-)\Longrightarrow\sigma(\xi)\neq 0$.*
Then Algorithm 2.4 converges with strong order $1/2$.

The proof is straightforward: Maruyama [12] showed that for sufficiently small step-size $\delta>0$,

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}|Z_t-Z_t^\delta|^2\Big)^{1/2}\le C\delta^{1/2}\,.$$

Denote by $L_{G^{-1}}$ the Lipschitz constant of G^{-1}. We get

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}|X_t-\bar{X}_t|^2\Big)^{1/2}&=\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}|G^{-1}(Z_t)-G^{-1}(Z_t^\delta)|^2\Big)^{1/2}\\&\le L_{G^{-1}}\,\mathbb{E}\Big(|Z_t-Z_t^\delta|^2\Big)^{1/2}\le L_{G^{-1}}C\delta^{1/2}\,.\end{aligned}$$

The following theorem is of particular relevance for the practical implementation and efficiency of our algorithm and shows that in 1D our result is already quite satisfactory:

Theorem 2.6 (Leobacher and Szölgyenyi [8])**.** *We can define an alternative transform $\widehat{G}$ which fulfills all the necessary properties and which is piecewise cubic.*

The relevance of this theorem lies in the fact that for a piecewise cubic function the inverse can easily be computed explicitly.

3 Result in general dimension

Extending our results to the multidimensional setting poses several challenges:

1. introduce a notion of *piecewise Lipschitz* functions;
2. prove that piecewise Lipschitz + continuous implies Lipschitz;
3. find a transform G that makes the drift continuous;
4. show that G has a global inverse;
5. show that Itô's formula holds for G^{-1}.

In this section we will sketch how these challenges were addressed.

3.1 Piecewise Lipschitz functions on the $\mathbb{R}^d$

There is no unique or universally accepted notion of a piecewise Lipschitz function on a subset of the $\mathbb{R}^d$. Below we propose such a definition that generalizes the one-dimensional notion.

We call a continuous function $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}^d$ a *curve in A from* $\gamma(0)$ *to* $\gamma(1)$ and we denote by

$$\ell(\gamma) := \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| : n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < \ldots < t_n = 1 \Big\}$$

its (possibly infinite) length.

Definition 3.1. Let $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^d$. Define the *intrinsic metric* on A by

$$\rho(x,y) := \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ a curve in } A \text{ from } x \text{ to } y\}\,.$$

Here, the infimum over an empty set is defined as ∞.

Definition 3.2. A function $\mu\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$ is *piecewise Lipschitz*, if there exists a hypersurface Θ with finitely many connected components such that the restriction $\mu|_{\mathbb{R}^d\setminus\Theta}$ is Lipschitz w.r.t. the intrinsic metric on $\mathbb{R}^d\setminus\Theta$, and w.r.t. the Euclidean metric on $\mathbb{R}^m$.

In that case we call Θ an *exceptional set* for μ.

Note that the definition coincides with Definition 2.1 for $d = 1$. It shares also some basic and well-known properties with the elementary definition.

Proposition 3.3. *Let Θ be a hypersurface in $\mathbb{R}^d$ and let $\mu\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$ be a function such that $\mu|_{\mathbb{R}^d\setminus\Theta}$ is differentiable with bounded derivative.*
Then μ is piecewise Lipschitz with exceptional set Θ and

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^d\setminus\Theta:\rho(x,y)>0} \frac{\|\mu(x)-\mu(y)\|}{\rho(x,y)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d\setminus\Theta} \|\mu'(x)\|\,.$$

The following lemma is almost trivial in dimension one, but not so in general dimension:

Lemma 3.4. *Let $\mu\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$ be a function such that*

1. *μ is continuous;*
2. *μ is piecewise Lipschitz with exceptional set Θ;*
3. *Θ is such that for all $x, y \in \mathbb{R}^d\setminus\Theta$ and all $\eta > 0$ there exists a curve γ in the $\mathbb{R}^d$ from x to y such that $\ell(\gamma) < \|y-x\| + \eta$ and $\#(\gamma\cap\Theta) < \infty$.*

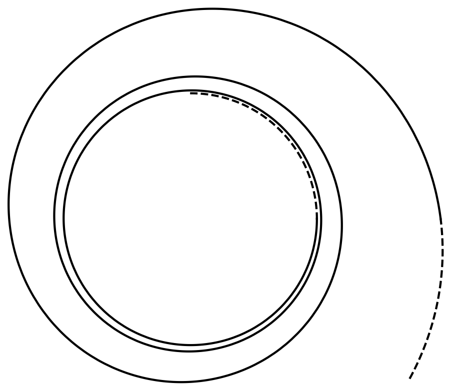


Figure 2: An example for a hypersurface with bounded derivative of the unit normal vector which is not of positive reach.

Then μ is Lipschitz (w.r.t. the Euclidean norm) with Lipschitz constant

$$L_\mu = \sup_{x,y \in \mathbb{R}^d \setminus \Theta : \rho(x,y) > 0} \frac{\|\mu(x) - \mu(y)\|}{\rho(x,y)} .$$

Lemma 3.4 differs from Lemma 2.2 essentially by item 3, which is trivially satisfied in dimension one by our definition of 'piecewise Lipschitz'.

Figure 2 shows an example of a two-dimensional C^∞-hypersurface (i.e. a curve) for which item 3 of Lemma 3.4 is not satisfied. The following notion will prove useful for this issue:

Definition 3.5. A subset $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ is of *positive reach*, if there exists $\varepsilon > 0$ such that for every $x \in \mathbb{R}^d$ with $d(x,\Theta) < \varepsilon$ there is a unique $p \in \Theta$ with $\|x - p\| = d(x,\Theta) := \inf\{\|x - \xi\| : \xi \in \Theta\}$.

If Θ has positive reach, then the projection map p which assigns to x its closest point $p(x)$ on Θ is a well-defined single-valued map on $\Theta^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : d(x,\Theta) < \varepsilon\}$ for some $\varepsilon > 0$. Examples of hypersurfaces having this property include hyperplanes and all compact C^2-hypersurfaces, which follows from the lemma in Foote [1], where it is also shown that the projection map p is in C^{k-1}, if Θ is in C^k. We will always assume that the set of discontinuities of the drift coefficient is of positive reach.

The projection map p will play a prominent role in the construction of the multivariate transform G.

One consequence of the positive reach property for Θ is that item 3 of Lemma 3.4 is automatically satisfied. This is the assertion of Leobacher and Szölgyenyi [9, Lemma 3.11], the proof of which is surprisingly technical. Another useful consequence is that the derivative of the unit normal vector is bounded, see Leobacher and Szölgyenyi [9, Lemma 3.10].

3.2 Definition of the transform and main results

Our choice of the transform G is

$$G(x) = x + \alpha(p(x))\tilde{\phi}(x)\,,$$

where

$$\tilde{\phi}(x) = (x - p(x)) \cdot n(p(x))\|x - p(x)\|\, \phi\left(\frac{\|x - p(x)\|}{c}\right).$$

This should be compared to the 1D analog, equation (3). In Leobacher and Szölgyenyi [9, Theorem 3.14 and Lemma 3.18] it is proven that under the assumptions of Theorem 3.7 below, c can always be chosen sufficiently small, so that G has a global inverse by Hadamard's global inverse function theorem [19, Theorem 2.2]. In 1D the constant α had the purpose of making sure that the jump of μ is offset by the jump of G''. In general dimension, α is defined on the hypersurface Θ:

$$\alpha(\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{\mu(\xi - hn(\xi)) - \mu(\xi + hn(\xi))}{2\|\sigma(\xi)^\top n(\xi)\|^2}\,, \qquad \xi \in \Theta\,. \tag{4}$$

Although α depends on the choice of the normal unit vector, it is readily checked that G does not.

We will need to make additional assumptions on μ and σ to guarantee existence and sufficient regularity of α and, a fortiori, of G.

It remains to show that Itô's formula holds for G^{-1}. This follows from the following special case of [17, Theorem 2.1].

Theorem 3.6 (Itô's formula)**.** *Let X be a d-dimensional Itô process and let $b : \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ be a C^2-function. Let furthermore $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ be C^2-functions such that the function $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by*

$$f(x) = f_1(x)\mathbf{1}_{x_d \le b(x_1,\dots,x_{d-1})} + f_2(x)\mathbf{1}_{x_d > b(x_1,\dots,x_{d-1})}$$

is in C^1. Then Itô's formula holds for X and f.

We have the following existence and uniqueness result.

Theorem 3.7 (Leobacher and Szölgyenyi [9]). *Let the following assumptions hold:*

- $\mu : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *is piecewise Lipschitz with exceptional set* Θ*;*
- $\Theta \in C^3$ *and has positive reach;*
- $\sigma : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$ *is Lipschitz and* $\|\sigma(\xi)^\top n(\xi)\|^2 \geq c_0 > 0$ *for all* $\xi \in \Theta$*;*
- μ, σ *are bounded on* Θ^ε *for some* $\varepsilon > 0$*;*
- μ, σ *are such that* α*, as described in* (4)*, is well-defined and has bounded derivatives up to order 3.*

Then there exists a unique strong solution to (1)*.*

We remark that the assumptions of Theorem 3.7 impose extra regularity on μ, σ only close to, and on Θ. Away from Θ we basically have the classical Lipschitz requirements. In analogy to the one-dimensional result, we have the following:

Theorem 3.8 (Leobacher and Szölgyenyi [9]). *Let the assumptions of Theorem 3.7 hold. Then, also in the multidimensional setting, Algorithm 2.4 converges with strong order* $1/2$*.*

3.3 Example

We apply our Algorithm 2.4 to solve an example of an SDE where the drift is discontinuous on the unit circle in the $\mathbb{R}^2$, i.e. the exceptional set $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, and the diffusion coefficient is degenerate. Let

$$dX_t = \mu(X_t^1, X_t^2)dt + \sigma(X_t^1, X_t^2)dW_t\,,$$

where

$$\mu(x_1,x_2) = \begin{cases} (1,1)^\top, & x_1^2 + x_2^2 > 1 \\ (-x_1,x_2)^\top, & x_1^2 + x_2^2 \leq 1\,, \end{cases}$$

$$\sigma(x_1,x_2) = \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Figure 3 shows the estimated L^2-error of GM for this example. We observe that GM shows the convergence behaviour we expect from our theoretical result, namely it converges as fast as $\delta^{1/2}$, i.e. the purple dotted line has the same slope as the yellow line. So in principle we could be satisfied. We have constructed the first numerical method that is proven to converge for a rather general class of SDEs with discontinuous drift and we have established its convergence speed.

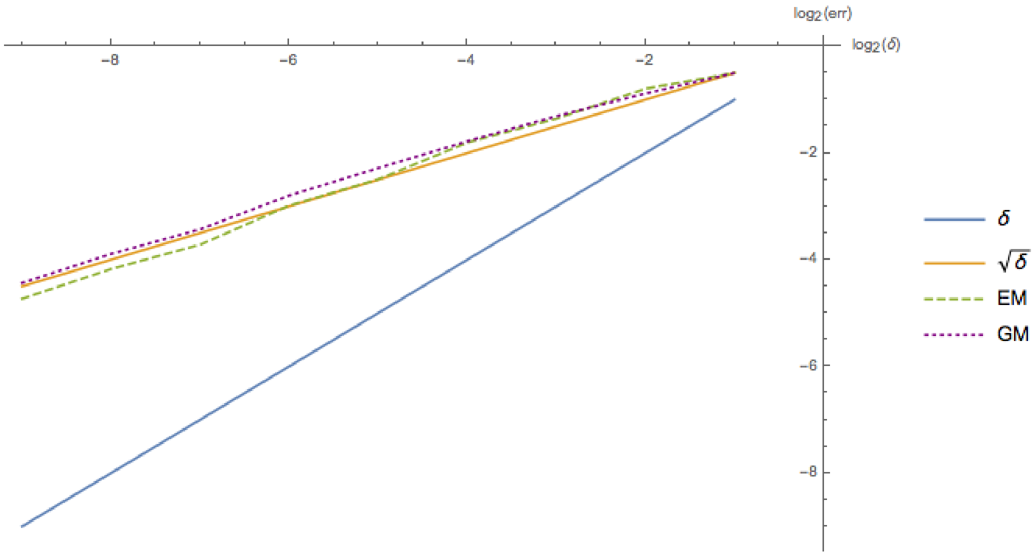


Figure 3: Estimated L^2-error of GM and EM.

However, GM has two shortcomings. First, it needs the geometrical structure of the set of discontinuities of the drift as an input. However, if for example the discontinuity stems from a discontinuous control policy in a stochastic optimal control problem, then this geometric structure for the optimal control is not explicitly known. Finding the discontinuity of a function numerically is a problem of high complexity on its own. Second, our method requires inversion of G in each step. In 1D the inverse can be calculated explicitly, see Theorem 2.6, but in general dimension, we have to resort to numerical inversion, which makes the calculation of a single path rather costly.

However, Figure 3 tells us even more. We observe that the green dashed line, which corresponds to the convergence speed of the EM method applied to our example, also has roughly the same slope as the yellow line. This means that for our example and our range of δ, the EM method seems to converge, too. To deal with the issues raised above, it would be desirable to prove a positive strong convergence rate for the EM method. This is what we are going to study in the next section.

4 Convergence of the EM method

We seek to estimate the mean square error of the EM approximation by considering the difference between GM and EM. Here, we only sketch the idea of the proof.

Let X^δ be the EM approximation of X. Using that $X = G(Z)$, that G^{-1} is Lipschitz, and that $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, we estimate the mean square error of the EM approximation:

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\|X_t - X_t^\delta\|^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\|G^{-1}(Z_t) - G^{-1}(G(X_t^\delta))\|^2\Big)$$
$$\leq 2L_{G^{-1}}^2\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\|Z_t - Z_t^\delta\|^2\Big) + 2L_{G^{-1}}^2\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\|Z_t^\delta - G(X_t^\delta)\|^2\Big).$$

With this we have decomposed the error into two error terms. The first term is the mean square error of the EM approximation of the solution to the transformed SDE. Since the transformed SDE has Lipschitz coefficients, the EM method converges with strong order $1/2$, i.e.

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\|Z_t - Z_t^\delta\|^2\Big) \leq C\delta.$$

For estimating

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq t\leq T}\|Z_t^\delta - G(X_t^\delta)\|^2\Big)$$

the crucial estimate is the one of the drift. For this the main tasks are:

- Estimating the probability of the event Ω_ε that during one step the distance between the interpolation of the EM method and the previous EM step becomes greater than some given $\varepsilon > 0$. Lemma 3.3 in [10] states that

$$\mathbb{P}(\Omega_\varepsilon) \leq C\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\|\sigma\|_\infty \delta^{1/2}}\right).$$

- Estimating the occupation time of the Euler-Maruyama approximation of X close to the hypersurface Θ by constructing a 1D process Y that has the same occupation time close to 0 as X^δ has close to Θ. The process Y is essentially a signed distance of X^δ from Θ. Again we make extensive use of the positive reach property of Θ, which guarantees regularity of a distance function. Theorem 2.7 in [10] says that

$$\int_0^T \mathbb{P}\left(\{X_s^\delta \in \Theta^\varepsilon\}\right) ds \leq C\varepsilon.$$

We are free to choose ε as a function of the step-size δ, and if we do so in an optimal way, we obtain the following convergence rate.

Theorem 4.1 (Leobacher and Szölgyenyi [10]). *Let the assumptions of Theorem 3.7 hold, and let μ,σ be bounded.*

Then the Euler-Maruyama method converges with strong order $1/4-\zeta$ *for arbitrarily small* $\zeta > 0$ *to the solution of SDE* (1).

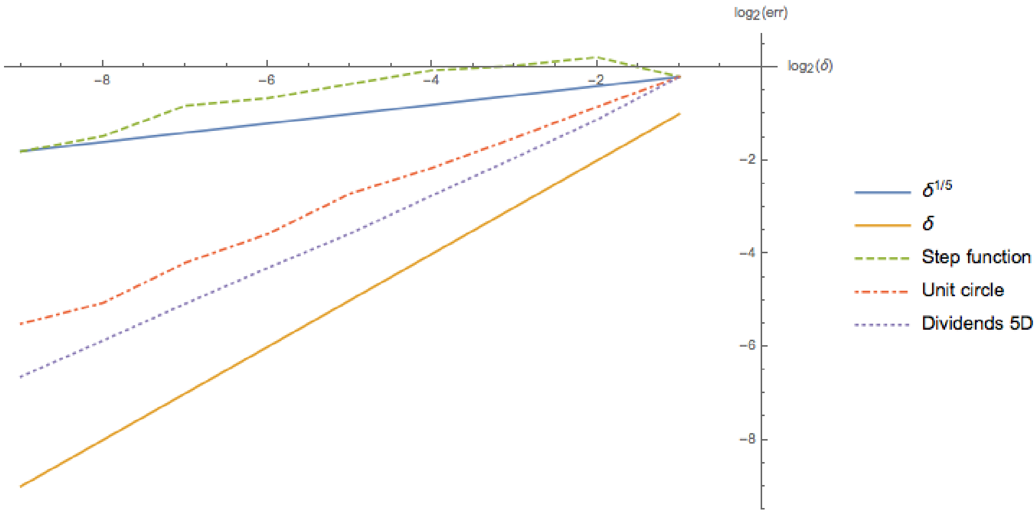


Figure 4: Estimated L^2-error of the EM approximation.

Now the question arises why one would apply EM instead of GM, since GM has a much higher convergence speed. However, as already mentioned at the end of Section 3, the computation of a single path with GM can be so slow, that obtaining comparable errors with GM can take more time for practical purposes. We refer to [10] for more details.

Figure 4 shows the estimated L^2-error of the EM approximation for three examples: one where the drift is a certain step-function, a five-dimensional example from insurance mathematics (Dividends 5D), and the example from above where the drift is discontinuous on the unit circle. We see that for the step-function example the convergence seems to be approximately as fast as $\delta^{1/4}$ for larger δ, but for smaller δ the slope of the dashed green line seems to become steeper. For the other two examples the EM method clearly converges at a higher rate for this example. This supports the claim from above that in many examples the EM method is the preferred choice.

Acknowledgements. G. Leobacher is supported by the Austrian Science Fund (FWF): Project F5508-N26, which is part of the Special Research Program *Quasi-Monte Carlo Methods: Theory and Applications*. M. Szölgyenyi is supported by the AXA Research Grant *Numerical Methods for Stochastic Differential Equations with Irregular Coefficients with Applications in Risk Theory and Mathematical Finance*. This article was written while M. Szölgyenyi was affiliated with the Institute of Statistics and Mathematics, Vienna University of Economics and Business, Welthandelsplatz 1, 1020 Vienna, Austria, and supported by the Vienna Science and Technology Fund (WWTF): Project MA14-031.

References

[1] R. L. Foote. Regularity of the Distance Function. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 92(1):153–155, 1984.

[2] R. Frey, A. Gabih, and R. Wunderlich. Portfolio Optimization under Partial Information with Expert Opinions. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 15(1), 2012.

[3] M. Hairer, M. Hutzenthaler, and A. Jentzen. Loss of Regularity for Kolmogorov Equations. *The Annals of Probability*, 43(2):468–527, 2015.

[4] K. Itô. *On Stochastic Differential Equations*. (Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 4), 1951.

[5] A. Jentzen, T. Müller-Gronbach, and L. Yaroslavtseva. On Stochastic Differential Equations with Arbitrary Slow Convergence Rates for Strong Approximation. *Communications in Mathematical Sciences*, 14(6):1477–1500, 2016.

[6] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (Graduate Texts in Mathematics, vol. 113). Springer-Verlag, second edition, 1991.

[7] P. E. Kloeden and E. Platen. *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations* (Stochastic Modelling and Applied Probability, vol. 23). Springer Verlag, 1992.

[8] G. Leobacher and M. Szölgyenyi. A Numerical Method for SDEs with Discontinuous Drift. *BIT Numerical Mathematics*, 56(1):151–162, 2016.

[9] G. Leobacher and M. Szölgyenyi. A Strong Order 1/2 Method for Multidimensional SDEs with Discontinuous Drift. *The Annals of Applied Probability*, 2017. Forthcoming, *arXiv:1512.02807*.

[10] G. Leobacher and M. Szölgyenyi. Convergence of the Euler-Maruyama method for multidimensional SDEs with discontinuous drift and degenerate diffusion coefficient. 2017. Submitted, *arXiv:1610.07047*.

[11] G. Leobacher, M. Szölgyenyi, and S. Thonhauser. Bayesian Dividend Optimization and Finite Time Ruin Probabilities. *Stochastic Models*, 30(2):216–249, 2014.

[12] G. Maruyama. Continuous Markov Processes and Stochastic Equations. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 4(1):48–90, 1955.

[13] T. Müller-Gronbach and L. Yaroslavtseva. On Hard Quadrature Problems for Marginal Distributions of SDEs with Bounded Smooth Coefficients. 2016. *arXiv: 1603.08686*.

[14] H. L. Ngo and D. Taguchi. On the Euler-Maruyama Approximation for One-Dimensional Stochastic Differential Equations with Irregular Coefficients. 2015. *arXiv: 1509.06532*. *IMA Journal of Numerical Analysis*, to appear.

[15] H. L. Ngo and D. Taguchi. Strong Convergence for the Euler-Maruyama Approximation of Stochastic Differential Equations with Discontinuous Coefficients. 2016. *arXiv:1604.01174*.

[16] H. L. Ngo and D. Taguchi. Strong Rate of Convergence for the Euler-Maruyama Approximation of Stochastic Differential Equations with Irregular Coefficients. *Mathematics of Computation*, 85(300):1793–1819, 2016.

[17] G. Peskir. A Change-of-Variable Formula with Local Time on Surfaces. *Séminaire de probabilités XL*, 1899:69–96, 2007.

[18] U. Rieder and N. Bäuerle. Portfolio Optimization with Unobservable Markov-Modulated Drift Processes. *Journal of Applied Probability*, 42:362–378, 2005.

[19] M. Ruzhansky and M. Sugimoto. On Global Inversion of Homogeneous Maps. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 5(1):13–18, 2015.

[20] J. Sass and U. Haussmann. Optimizing the Terminal Wealth under Partial Information: the Drift Process as a Continuous Time Markov Chain. *Finance and Stochastics*, 8:553–577, 2004.

[21] A. A. Shardin and M. Szölgyenyi. Optimal Control of an Energy Storage Facility Under a Changing Economic Environment and Partial Information. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 19(4):1–27, 2016.

[22] A. A. Shardin and R. Wunderlich. Partially Observable Stochastic Optimal Control Problems for an Energy Storage. *Stochastics*, 89(1):280–310, 2017.

[23] M. Szölgyenyi. Dividend Maximization in a Hidden Markov Switching Model. *Statistics & Risk Modeling*, 32(3-4):143–158, 2016.

[24] L. Yaroslavtseva. On Non-Polynomial Lower Error Bounds for Adaptive Strong Approximation of SDEs. 2016. *arXiv:1611.08073*. *Journal of Complexity*, to appear.

About the authors. Gunther Leobacher studied mathematics at the University of Salzburg, and finished his PhD in 2001 under the supervision of G. Larcher at Johannes Kepler University Linz. In 2002–2003 he was a Postdoc with L.G.C. Rogers at the University of Cambridge. In 2012 he became an associate professor at JKU Linz. In February 2017 he was appointed full professor of stochastics at the University of Graz.

Michaela Szölgyenyi studied mathematics at Johannes Kepler University Linz, and finished her PhD in 2015 under the supervision of G. Leobacher. Then she became a Postdoc with R. Frey at Vienna University of Economics and Business. From August 2017 she works at ETH Zürich in the research group of A. Jentzen.

Authors' addresses:

G. Leobacher.
Institute for Mathematics and Scientific Computing, University of Graz.
Heinrichstraße 36, A 8010 Graz.
email gunther.leobacher@uni-graz.at

M. Szölgyenyi.
Seminar for Applied Mathematics, ETH Zürich.
Rämistraße 101, CH 8092 Zürich.
email michaela.szoelgyenyi@sam.math.ethz.ch

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 235 (2017), 17–32

A Variational Approach to Porous Medium Type Equations

Verena Bögelein
Univ. Salzburg

Abstract. This survey article presents a variational approach to the existence of solutions to equations of Porous Medium type. More generally, this approach applies also to doubly nonlinear equations with a nonlinearity in u and Du, whose prototype is given by

$$\partial_t\big(|u|^{m-1}u\big) - \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) = 0,$$

where $m > 0$ and $p > 1$. The technique relies on a nonlinear version of the minimizing movement method. It is flexible enough to treat various more general evolutionary problems, such as obstacle problems, time dependent boundary data or problems with linear growth.

1 Variational Solutions

A classical problem in the Calculus of Variations is to minimize an integral functional of the type

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

in a prescribed class of functions $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, where Ω is a domain in $\mathbb{R}^n$. A prominent model functional is the so-called p-energy $\mathcal{F}[u] = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p \mathrm{d}x$, which corresponds to the integrand $f(x,u,\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p$. More generally, one can take any integrand $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ that is a Carathéodory function[1] and

[1] $f(\cdot,u,\xi)$ is measurable for any $(u,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ and $f(x,\cdot,\cdot)$ is continous for a.e. $x \in \Omega$

ISSN 0020-7926

satisfies the convexity and coercivity conditions[2]

$$\begin{cases} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \ni (u,\xi) \to f(x,u,\xi) \text{ is convex for a.e. } x\in\Omega, \\ f(x,u,\xi) \geq \nu|\xi|^p \text{ for } (x,u,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2}$$

for some $p > 1$ and $\nu > 0$. Then, for any prescribed Dirichlet boundary datum u_o in the Sobolev space $W^{1,p}(\Omega)$ there exists a minimizer u of the functional $\mathcal{F}$ in the class $W^{1,p}_{u_o}(\Omega) := u_o + W^{1,p}_0(\Omega)$, i.e. a function $u \in W^{1,p}_{u_o}(\Omega)$ satisfying

$$\mathcal{F}[u] \leq \mathcal{F}[v] \tag{3}$$

for any comparision function $v \in W^{1,p}_{u_o}(\Omega)$. The existence of the minimizer can be proven by the classical Direct Method of the Calculus of Variations. The underlying idea is to consider a minimizing sequence for the functional $\mathcal{F}$ and then pass to the limit by the use of the lower semicontinuity of the functional.

If the integrand f is regular enough, one can subsequently show that any minimizer of (1) in $W^{1,p}_{u_o}(\Omega)$ is a (weak) solution to the Cauchy-Dirichlet problem of the associated Euler-Lagrange equation (for simplicity we only consider integrands of the form $f(x,u,\xi) = f(\xi)$)

$$\begin{cases} \operatorname{div} D_\xi f(\nabla u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = u_o & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

In the model case of the above mentioned p-energy, $(4)_1$ is exactly the p-Laplace equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$. Vice versa, since f is convex, any (weak) solution to (4) is also a minimizer of the functional (1). The Euler-Lagrange equation above is an elliptic partial differential equation. The domain Ω of the solution is considered as a spatial domain. If we additionally consider a time variable, then we end up with a gradient flow. The associated parabolic Cauchy-Dirichlet problem reads as

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div} D_\xi f(\nabla u) = 0 & \text{in } \Omega_T, \\ u = u_o & \text{on } \partial_{\mathcal{P}}\Omega_T, \end{cases} \tag{5}$$

where u is now defined on the space time cylinder $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$, $T > 0$. The initial-boundary values u_o are stipulated on the parabolic boundary $\partial_{\mathcal{P}}\Omega_T := [\partial\Omega\times(0,T)] \cup [\overline{\Omega}\times\{0\}]$. As before, the derivatives in the diffusion part of the differential equation are only taken with respect to the spatial variable x. By now, there are several methods to prove the existence of (weak) solutions to the

[2] Various generalizations are possible. For instance, one can subtract lower order terms depending on x and u, or one can consider vector-valued minimizers and quasiconvex integrands.

parabolic Cauchy-Dirichlet (5); for instance Galerkin type methods, monotone operators, or minimizing movements. In general, the treatment of the diffusion term $\operatorname{div} D_\xi f(Du)$ is difficult, in the sense that when considering an approximating sequence the passage to the limit is delicate. Therefore, one usually has to assume a growth condition for the integrand f of the form $f(\xi) \le L(1+|\xi|^p)$ for some $L>0$ and any $\xi \in \mathbb{R}^n$. On the other hand, such a condition is not necessary in order to prove the existence of a minimizer of the elliptic variational functional (1). This is due to the fact that the lower semicontinuity of the functional (1) can be exploited in limiting processes. With this respect, the variational approach is much more flexible than the PDE approach. For this reason there is also the need for a variational approach to evolutionary problems. Such an approach promises a great potential for a more flexible existence theory on parabolic problems.

To this aim, one first has to develop a variational formulation of the Cauchy-Dirichlet problem (5). The idea which has been performed in [11] goes back to Lichnewsky & Temam in [35], who introduced the notion of variational solutions to the time dependent minimal surface equation. In our context, the idea is as follows. We multiply (5) by $v-u$, for some $v \in L^2(\Omega_T) \cap L^p(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega))$ with $\partial_t v \in L^2(\Omega_T)$, integrate the result over Ω_T and integrate by parts. In this way, we obtain

$$\underbrace{\iint_{\Omega_T} \partial_t u(v-u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t}_{=:\,\mathrm{I}} + \underbrace{\iint_{\Omega_T} D_\xi f(\nabla u)\cdot\big(\nabla v - \nabla u\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t}_{=:\,\mathrm{II}} = 0.$$

By the convexity of $\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto f(\xi)$ we have

$$f(\nabla u) + D_\xi f(\nabla u)\cdot\big(\nabla v - \nabla u\big) \le f(\nabla v)$$

and hence

$$\mathrm{II} \le \iint_{\Omega_T} \big[f(\nabla v) - f(\nabla u)\big]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{6}$$

To treat I, we would like to shift the time derivative "∂_t" from u to v. This is achieved by adding and subtracting $\partial_t v$ as follows.

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \iint_{\Omega_T} \partial_t v(v-u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \iint_{\Omega_T} \partial_t (v-u)(v-u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \iint_{\Omega_T} \partial_t v(v-u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \tfrac12\|(v-u)(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac12\|v(0)-u_o\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

We have thus shown that any (weak) solution to (5) satisfies the variational inequality

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_T} f(\nabla u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \iint_{\Omega_T} f(\nabla v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t &+ \iint_{\Omega_T} \partial_t v\big(v-u\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &- \tfrac12\|(v-u)(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac12\|v(0)-u_o\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

for any $v \in L^2(\Omega_T) \cap L^p(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega))$ with $\partial_t v \in L^2(\Omega_T)$. This is exactly the parabolic counterpart of (3) we are looking for. The precise definition of variational solutions for general integrands $f(x,u,\xi)$ is as follows

Definition 1.1. Suppose that $f\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ is a variational integrand satisfying the convexity and coercivity assumption (2) and assume that $u_o \in L^2(\Omega)$. We identify

$$u \in C^0\big([0,T];L^2(\Omega)\big) \cap L^p\big(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega)\big),$$

as a *variational solution* associated to the Cauchy-Dirichlet problem (5), if and only if the variational inequality

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_T} f(x,u,\nabla u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \iint_{\Omega_T} f(x,v,\nabla v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{\Omega_T} \partial_t v\big(v-u\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ - \tfrac{1}{2}\|(v-u)(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\|v(0)-u_o\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{7}$$

holds true for any $v \in L^2(\Omega_T) \cap L^p(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega))$ with $\partial_t v \in L^2(\Omega_T)$. $\square$

Note that the initial condition $u(0) = u_o$ is incorporated in the variational inequality (7). Indeed, one can show that the variational inequality (7) implies that $u(0) = u_o$ in the $C^0 - L^2$-sense.

The advantage of the viewpoint, to interpret solutions of (5) as solutions of the associated variational inequality, is obvious: without any difficulty the concept of variational solution can be introduced for general energies of the type $f(x,u,Du)$. As in the classical Calculus of Variations this approach could lead to variational solutions for energies, for which the corresponding Euler-Lagrange equation, i.e. the associated parabolic equation, might not hold, as in the case of functionals with non-standard (p,q)-growth. Prototype integrands we have in mind are $f(x,Du) := a(x)|Du|^p + b(x)|Du|^q$ with $1 < p < q < \infty$ and $a(x)+b(x) > 0$ for $x \in \Omega$, or integrands with exponential growth such as $f(Du) := \exp\big[\frac{1}{2}|Du|^2\big]$. Also functionals with linear growth as the area integrand $f(Du) := \sqrt{1+|Du|^2}$ or the total variation can be incorporated in the framework of variational solutions, cf. [10, 15, 19]. In fact, for slightly more general integral functionals as considered here, variational solutions to gradient flows have been constructed by Bögelein & Duzaar & Marcellini in [11] by the so-called method of Elliptic Regularization; cf. [5, 18, 20, 21, 23, 37] and the references therein for related existence results. The method of Elliptic Regularization has been suggested by De Giorgi [25, 26] for the inhomogeneous wave equation. The conjecture has recently been solved by Serra & Tilli in [39]; see also [42] for a partial result. The method has also been applied in [1, 2, 36, 38, 41] for different types of parabolic partial differential equations. Our aim in this survey is to present a different, sometimes more flexible approach to the existence of variational solutions, the so-called *minimizing movements method* and its nonlinear counterpart.

2 Minimizing Movements Method

By now, the *minimizing movements method*, or *Rothe's method* is a standard tool in existence proofs and numerics for evolutionary problems. The overall strategy to construct a weak solution of the Cauchy-Dirichlet problem (5) is to perform a time discretization and to solve an elliptic (time independent) problem on each time slice. This yields a sequence of piecewise in time constant functions which, after passing to the limit, converges to a solution of the original problem. In the following we will outline the proof of the existence of variational solutions in the sense of Definition 1.1. We emphasize that the only assumptions on the integrand f are (2), exactly the ones from the elliptic case.

For an index $\ell \in \mathbb{N}$ we consider the times $t_i := ih_\ell$ where $h_\ell := T/\ell$ and $i \in \{0,\dots,\ell\}$. The idea now is to inductively select a sequence of minimizers $(u_i)_{i=1}^{\ell}$ to certain elliptic variational problems. Therefore, suppose that for some $i \in \mathbb{N}$

$$u_{i-1} \in L^2(\Omega) \cap W^{1,p}_{u_o}(\Omega)$$

has already been selected. If $i = 1$, we let $u_0 = u_o$. Then, we choose u_i as the minimizer of the variational functional (again for simplicity we consider $f(x,u,\xi) = f(\xi)$)

$$\mathbf{F}_i[v] := \int_\Omega f(Dv)\mathrm{d}x + \frac{1}{2h_\ell}\int_\Omega |u_{i-1} - v|^2 \mathrm{d}x \tag{8}$$

in the class of functions

$$v \in L^2(\Omega) \cap W^{1,p}_{u_o}(\Omega).$$

The existence of such a minimizer u_i is guaranteed by the classical Direct Method of the Calculus of Variations. Then, we define

$$u^{(\ell)} \colon \Omega \times (-h_\ell, T] \to \mathbb{R}$$

as the piecewise in time constant function

$$u^{(\ell)}(\cdot,t) := u_i \quad \text{for } t \in (t_{i-1}, t_i],\ i \in \{0,\dots,\ell\}. \tag{9}$$

Due to the minimizing property of the functions u_i (note that u_{i-1} is an admissible competitor for u_i), one can prove uniform energy bounds of the form

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega \big|u^{(\ell)}(t)\big|^2 \mathrm{d}x + \sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega f\big(Du^{(\ell)}(t)\big)\mathrm{d}x \le C, \tag{10}$$

and

$$\frac{1}{h_\ell^2} \iint_{\Omega_T} \big|u^{(\ell)}(t) - u^{(\ell)}(t-h)\big|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C, \tag{11}$$

where the constant C is independent of ℓ. In particular, due to the coercivity $(2)_2$ of f, (10) ensures that the sequence $\{u^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ is uniformly bounded in $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ and in $L^\infty(0,T;\mathrm{W}^{1,p}(\Omega))$. Therefore, by compactness we conclude that there exists a function

$$u \in L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \cap L^\infty\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big)$$

and a (not re-labelled) subsequence such that

$$u^{(\ell)} \xrightarrow{*} u \quad \text{weakly}^* \text{ in } \mathrm{L}^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \text{ and } \mathrm{L}^\infty\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big).$$

Furthermore, from the bound (11) for the difference quotient in time of $u^{(\ell)}$, we deduce for the time derivative of the limit function u that

$$\partial_t u \in L^2(\Omega_T).$$

Finally, we have to ensure that the limit function is indeed a variational solution to the Cauchy-Dirichlet problem (5). Here, we observe that $u^{(\ell)}$ is a minimizer of the functional

$$\mathbf{F}^\ell[w] := \iint_{\Omega_T} \Big[f(Dw) + \tfrac{1}{h_\ell}\big|w(t) - u^{(\ell)}(t-h_\ell)\big|^2 \Big] \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

in the class

$$w \in L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \cap L^\infty\big(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega)\big).$$

Testing with the admissible comparison map

$$w_s := u^{(\ell)} + s\big(v - u^{(\ell)}\big), \quad s \in (0,1),$$

with v as in Definition 1.1, we end up, after passing to the limit $s \downarrow 0$, with

$$\iint_{\Omega_T} f\big(Du^{(\ell)}\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \iint_{\Omega_T} \Big[f(Dv) + \tfrac{u^{(\ell)}(t) - u^{(\ell)}(t-h_\ell)}{h_\ell}\big(v - u^{(\ell)}\big) \Big] \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

For the left-hand side we obtain by lower semi-continuity

$$\iint_{\Omega_T} f(Du)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \liminf_{\ell\to\infty} \iint_{\Omega_T} f\big(Du^{(\ell)}\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Furthermore, by compactness we have that $u^{(\ell)} \to u$ strongly in $L^2(\Omega_T)$. Therefore, we are allowed to pass to the limit $\ell \to \infty$ in the right-hand side, with the result that

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_T} \tfrac{u^{(\ell)}(t) - u^{(\ell)}(t-h_\ell)}{h_\ell}\big(v - u^{(\ell)}\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\to \iint_{\Omega_T} \partial_t u(v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \iint_{\Omega_T} \partial_t v\big(v-u\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \|(v-u)(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v(0) - u_o\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

This shows that the limit function is indeed a variational solution in the sense of Definition 1.1. This roughly describes the main steps in the proof of

Theorem 2.1. *Assume that* (2) *is in force and that the initial and boundary values satisfy*

$$u_o \in L^2(\Omega) \quad \textit{and} \quad \int_\Omega f(x, u_o, Du_o)\mathrm{d}x < \infty.$$

Then there exists a variational solution

$$u \in C^0\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \cap L^p\big(0,T; W^{1,p}_{u_o}(\Omega)\big)$$

with $\partial_t u \in L^2(\Omega_T)$ *to the gradient flow* (5) *in the sense of Definition 1.1.*

This is exactly the parabolic counterpart of the classical theory in the Calculus of Variations we are looking for. As already mentioned, the result has been proved in [11] by Elliptic Regularization. The method of minimizing movements as described here has been used in [16] to prove existence of variational solutions to time dependent obstacle problems. By more sophisticated arguments Theorem 2.1 can be generalized in several directions, concerning variable boundary data, obstacle problems, time dependent domains, or the total variation flow, cf. [14, 15, 16, 17]. However, these generalizations are by far non-trivial, since the outlined minimizing movements method is just the starting point in the proof. The difficulty stems from certain mollification procedures which have to be performed if the data (boundary data or obstacle) are not smooth.

3 Doubly nonlinear equations

In [24] De Giorgi posed the question what could be the effect, if the second term in the functional $\mathbf{F}_i$ in (8) is modified. For instance, he suggested replacing the second term in $\mathbf{F}_i$ by $\frac{1}{\beta h^{\beta-1}} \int_\Omega |u_{i-1} - v|^\beta \mathrm{d}x$ for some $\beta \in (1,2]$ and conjectured that the resulting modified minimizing movements method leads to a solution of the differential equation

$$|\partial_t u|^{\beta-2}\partial_t u - \operatorname{div} D_\xi f(\nabla u) = 0.$$

This is a certain kind of doubly nonlinear equation, since it is nonlinear in the diffusion term and in the term containing the time derivative. For the integrand $f(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$ this conjecture has been proved by Gianazza & Savaré [27]. In this case, they obtained a solution to the differential equation

$$|\partial_t u|^{\beta-2}\partial_t u - \Delta u = 0.$$

This equation looks similar to the well known Porous Medium Equation ($m > 0$)

$$\partial_t\big(|u|^{m-1}u\big) - \Delta u = 0.$$

However, both equations behave in a different way, and it is not possible to transform one into the other. The Porous Medium Equation, however, is of particular interest since it possesses a wide spectrum of applications, for instance in fluid dynamics, soil science and filtration, cf. [6, 7, 8, 34, 40]. Note that in the applications usually non-negative solutions are relevant. Therefore, in the following we will always assume that u is non-negative, so that $|u|^{m-1}u = u^m$. More generally, in the following we will consider doubly nonlinear equations whose prototype is given by

$$\partial_t u^m - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0, \tag{12}$$

where $m > 0$ and $p > 1$. For $m = 1$ and $p = 2$, equation (12) reduces to the standard heat equation. For $m = 1$ and $p \in (1,\infty)$ the equation is known as the parabolic p-Laplace equation, while for $m \in (0,\infty)$ and $p = 2$ we are dealing with the Porous Medium Equation. For the doubly nonlinear equation the case $p-1 > m$ is commonly known as a *slow diffusion equation*, while the case $p-1 < m$ is named a *fast diffusion equation*, cf. [29]. The difference between them becomes apparent in the fact that slow diffusion equations allow solutions with compact support and perturbations propagate with finite speed, while in fast diffusion equations perturbations propagate with infinite speed, prohibiting compact support solutions. Moreover, doubly nonlinear equations can be subdivided into doubly degenerate parabolic equations ($p > 2$, $0 < m < 1$), singular-degenerate equations ($1 < p < 2$, $0 < m < 1$), degenerate-singular equations ($p > 2$, $m > 1$), and, finally, doubly singular equations ($1 < p < 2$, $m > 1$), cf. [29]. Despite their importance in applications and mathematics, a natural variational approach to the existence of solutions to the Porous Medium Equation has not been invented before.

4 Variational formulation for doubly nonlinear equations

Our aim in [12] was to follow the speculation of De Giorgi in [24] in order to construct variational solutions to Porous Medium type equations, or even more generally doubly nonlinear equations by a modified nonlinear minimizing movements type approach. To this aim, one first has to find a variational formulation of the Porous Medium Equation, respectively doubly nonlinear equation. In the following we consider the Cauchy-Dirichlet problem to the doubly nonlinear equation

$$\begin{cases} \partial_t u^m - \operatorname{div} D_\xi f(\nabla u) = 0 & \text{in } \Omega_T, \\ u = u_o & \text{on } \partial_{\mathcal{P}}\Omega_T, \end{cases} \tag{13}$$

where $u_o\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ is a non-negative initial-boundary datum. Similar to our approach in Section 1, we multiply $(13)_1$ by $v-u$, for some $v \in L^p(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega))$

with $\partial_t v \in L^{m+1}(\Omega_T)$ and $v(0) \in L^{m+1}(\Omega)$. Then, we integrate the result over Ω_T and subsequently integrate by parts to obtain

$$\underbrace{\iint_{\Omega_T} \partial_t u^m (v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t}_{=:\,\mathrm{I}} + \underbrace{\iint_{\Omega_T} D_\xi f(\nabla u)\cdot\big(\nabla v - \nabla u\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t}_{=:\,\mathrm{II}} = 0.$$

The term II is treated exactly as in (6). The computation for I is more complicated than before. Nevertheless, by the following computation we are able to produce a boundary term:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= -\iint_{\Omega_T} \big[u^m \partial_t v + u\partial_t u^m\big]\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega u^m v \mathrm{d}x\Big|_0^T \\
&= \iint_{\Omega_T} \partial_t v(v^m - u^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \iint_{\Omega_T} \big[v^m \partial_t v + u\partial_t u^m\big]\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega u^m v \mathrm{d}x\Big|_0^T \\
&= \iint_{\Omega_T} \partial_t v(v^m - u^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \underbrace{\int_\Omega \mathfrak{b}[u(T),v(T)]\mathrm{d}x}_{=:\mathfrak{B}[u(T),v(T)]} + \underbrace{\int_\Omega \mathfrak{b}[u(0),v(0)]\mathrm{d}x}_{=:\mathfrak{B}[u(0),v(0)]}.
\end{aligned}$$

Here, we have abbreviated

$$\mathfrak{b}[u,v] := \tfrac{1}{m+1}\big(v^{m+1} - u^{m+1}\big) - u^m(v-u) \geq 0.$$

In the case $m = 1$ the boundary term simplifies to

$$\mathfrak{b}[u,v] = \tfrac{1}{2}|u-v|^2,$$

so that in the variational inequality the usual $L^2(\Omega)$-boundary terms appear. For general integrands $f(x,u,\xi)$, these observations lead to the following

Definition 4.1. Suppose that $f\colon \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ is a variational integrand satisfying the convexity and coercivity assumption (2) and assume that $u_o \in L^{m+1}(\Omega)$ is non-negative. We identify a non-negative map

$$u \in C^0\big([0,T];L^{m+1}(\Omega)\big) \cap L^p\big(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega)\big)$$

as a *variational solution to the Cauchy-Dirichlet problem of the doubly nonlinear equation* (13), if and only if the variational inequality

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{B}[u(T),v(T)] + \iint_{\Omega_\tau} f(x,u,Du)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\qquad \leq \mathfrak{B}[u_o,v(0)] + \iint_{\Omega_\tau} \big[f(x,v,Dv) + \partial_t v\big(v^m - u^m\big)\big]\mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (14)
\end{aligned}$$

holds true for any non-negative map $v \in L^p(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega))$ with $\partial_t v \in L^{m+1}(\Omega_T)$ and $v(0) \in L^{m+1}(\Omega)$. □

This concept of solution can be seen as the natural extension of the notion of pseudo solutions given by Lichnewsky & Temam in [35] to the framework of doubly nonlinear equations. Similar to Definition 1.1, we note that also the variational inequality (14) implies that the initial condition $u(0) = u_o$ is taken in the $C^0 - L^{m+1}$-sense.

5 Variational approach to doubly nonlinear equations

Having the variational formulation from Definition (4.1) at hand, we are now in the position to explain our purely variational approach to the existence of doubly nonlinear equations by a modified nonlinear minimizing movements type approach. The key observation is that the second integral $\int_\Omega |u-v|^2 \mathrm{d}x$ in (8) is exactly the boundary term in the variational formulation (7). Therefore, a natural choice for a minimizing movement scheme for our doubly nonlinear equation could be the boundary term $\mathfrak{B}[u,v]$ from the variational inequality (14). Surprisingly enough, it turned out that in replacing $|u-v|^2$ by $\mathfrak{b}[u,v]$ in the minimizing movement scheme we indeed end up, after passing to the limit $\ell \to \infty$, with a variational solution to the doubly nonlinear equation (13). This yields the following existence result.

Theorem 5.1 ([12]). *Assume that* (2) *is in force and that the initial and boundary values* $u_o \colon \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *satisfy*

$$u_o \in L^{m+1}(\Omega) \quad \textit{and} \quad \int_\Omega f(x, u_o, Du_o)\mathrm{d}x < \infty.$$

Then there exists a variational solution

$$u \in C^0\big([0,T]; L^{m+1}(\Omega)\big) \cap L^p\big(0,T; W^{1,p}_{u_o}(\Omega)\big)$$

with $\partial_t u^{\frac{m+1}{2}} \in L^2(\Omega_T)$ *to the doubly nonlinear evolutionary equation in the sense of Definition 4.1.*

Note that the existence result in [12] is proved for even more general doubly nonlinear equations where in $(13)_1$ the first term $\partial_t u^m$ is replaced by $\partial_t b(u)$. The *nonlinearity* $b \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ is assumed to be continuous and piecewise C^1 on $(0,\infty)$ and to satisfy $b(0) = 0$ and

$$\ell \leq \frac{ub'(u)}{b(u)} \leq m,$$

for some $m \ge \ell > 0$. We emphasize that our method is flexible enough to treat time dependent lateral boundary data, $L^{m+1}(\Omega)$-initial data, problems with time-dependent obstacles, or even a fast diffusion variant of the time dependent minimal surface equation. This will be investigated in forthcoming articles.

At this point, some words on the history of the problem are in order. Concerning existence of solutions to doubly nonlinear evolutionary equations one has to mention the pioneering papers of Grange & Mignot [28] and Alt & Luckhaus [4], in which – amongst other things – the existence of weak solutions to quasilinear parabolic equations of the form

$$\partial_t b(u) - \operatorname{div} \mathbf{a}(b(u), Du) = \mathbf{f}(b(u)) \tag{15}$$

was established. In [4] the continuous nonlinearity b was assumed to satisfy $b(0) = 0$ and $b = \phi'$ for some convex C^1-function ϕ. The coefficients $\mathbf{a}(b(u), \xi)$ were assumed to be continuous in (u, ξ), to satisfy the ellipticity condition

$$\big(\mathbf{a}(b(u), \xi) - \mathbf{a}(b(u), \eta)\big)(\xi - \eta) \ge c|\xi - \eta|^p$$

for some exponent $1 < p < \infty$ and some constant $c > 0$, and a standard growth condition from above, essentially ensuring $(p-1)$-growth in the gradient variable. In the proof the time derivative $\partial_t b(u)$ was replaced by the backward difference quotient $\Delta_{-h} b(u)$. The corresponding elliptic problems for $h > 0$ are solved by a Galerkin procedure. For the passage to the limit $h \downarrow 0$ a certain compactness for the sequence $b(u_h)$ is crucial. The existence results of [4] and [28] have later been generalized to higher order doubly nonlinear equations on unbounded domains by Bernis [9].

A completely different approach to doubly nonlinear parabolic equations by methods from Convex Analysis has been suggested by Akagi & Stefanelli [3]. They consider the doubly nonlinear PDE

$$\partial_t b(u) - \operatorname{div} \mathbf{a}(Du) \ni \mathbf{f}, \tag{16}$$

where $b \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ and $\mathbf{a} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ are maximal monotone graphs. The graphs are required to fulfill polynomial growth of power $m > 0$ and $p > 1$; for example the choices $b(u) = u^m$ and $\mathbf{a}(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ cover the standard model (12). Instead of considering (16) the authors transform the equation to an equivalent dual problem for the unknown $v = b(u)$, which reads as $-\operatorname{div} \mathbf{a}(Db^{-1}(v)) \ni \mathbf{f} - \partial_t v$. For the porous medium equation one only changes the viewpoint in the sense that the nonlinearity is shifted from $\partial_t u^m - \Delta u = f$ to $\partial_t v - \Delta v^{\frac{1}{m}} = f$. The same transformation leads from the doubly nonlinear equation $\partial_t u^m - \operatorname{div}\big(|Du|^{p-2}Du\big) = f$ to the equation $\partial_t v - \operatorname{div}\big(|Dv^{\frac{1}{m}}|^{p-2}Dv^{\frac{1}{m}}\big) = f$. Now, let $B^* \colon W^{-1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ denote the solution operator to the nonlinear elliptic problem $h \mapsto w$, where w solves the Dirichlet problem $-\operatorname{div} \mathbf{a}(Dw) \ni h$ in Ω with $w\big|_{\partial\Omega} = 0$. Then, (16) can be re-formulated as $-B^*(f-\partial_t v)+b^{-1}(v)\ni 0$. In the case $\mathbf{a}=\mathrm{id}$ one has $B^*=(-\Delta)^{-1}$ and the described strategy reduces to the classical dual formulation of (16) in $W^{-1,2}(\Omega)$, cf. [22]. Having arrived at this stage, the main idea of Akagi & Stefanelli was, to construct solutions to the latter problem by Elliptic Regularization (Weighted Energy-Dissipation Functional approach). As already mentioned, in this approach the nonlinearity b and the coefficients $\mathbf{a}$ need to fulfill standard polynomial growth conditions.

Finally, we would like to mention that in [30, 31, 32] existence of solutions to doubly nonlinear equations has been proved by regularization and a priori estimates. Moreover, in the special case of the porous medium equation, Kinnunen & Lindqvist & Lukkari [33] employed Perron's method for the construction of solutions.

Our approach is completely different from all of the methods mentioned above. Instead of using the equation itself, or to pass to a dual problem we work directly with the variational formulation of the equation introduced in Definition 4.1. As already explained at the beginning of this section, the idea is to replace in (8) the second integral $\frac{1}{2h}\int_\Omega |u-u_{j-1}|^2\mathrm{d}x$ by $\frac{1}{h}\mathfrak{B}[u,u_{j-1}]$, i.e. we consider the functionals

$$\mathbf{F}_i[u]:=\int_\Omega f(x,u,Du)\mathrm{d}x+\tfrac{1}{h}\mathfrak{B}[u,u_{i-1}].$$

As before, starting with $u_0=u_o$, we inductively choose

$$u_i\in L^{m+1}(\Omega)\cap W^{1,p}_{u_o}(\Omega)$$

as the minimizer of the variational functional $\mathbf{F}_i$ in this function class. Then, we define the piecewise constant map $u^{(\ell)}\colon \Omega\times(-h_\ell,T]\to\mathbb{R}$ as in (9). At this point, we have to prove that in the limit $\ell\to\infty$ this sequence sub-converges to a variational solution. To this aim, we first show that the following uniform energy bounds hold true

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_\Omega \big[u^{(\ell)}(t)\big]^{m+1}\mathrm{d}x+\sup_{t\in[0,T]}\int_\Omega f\big(Du^{(\ell)}(t)\big)\mathrm{d}x\le C, \tag{17}$$

and

$$\frac{1}{h_\ell^2}\iint_{\Omega_T}\mathfrak{b}\big[u^{(\ell)}(t-h),u^{(\ell)}(t)\big]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C, \tag{18}$$

where the constant C is independent of ℓ. Although (17) and (18) look similar to (10) and (11), the passage to the limit is not obvious here. Indeed, as before, we conclude that that there exists a function

$$u\in L^\infty\big(0,T;L^{m+1}(\Omega)\big)\cap L^\infty\big(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega)\big)$$

and a (not re-labelled) subsequence such that

$$u^{(\ell)} \xrightarrow{*} u \quad \text{weakly}^* \text{ in } \mathrm{L}^\infty\big(0,T;L^{m+1}(\Omega)\big) \text{ and } \mathrm{L}^\infty\big(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega)\big).$$

On the other hand, (11) implies

$$\frac{1}{h_\ell^2}\iint_{\Omega_T}\Big|\big[u^{(\ell)}(t)\big]^{\frac{m+1}{2}} - \big[u^{(\ell)}(t-h)\big]^{\frac{m+1}{2}}\Big|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \le C,$$

i.e. a bound for the difference quotients in time of $[u^{(\ell)}]^{\frac{m+1}{2}}$, while (17) yields a bound for the spatial derivative of $u^{(\ell)}$. In this situation the standard compactness results do not apply, since the weak limits of $[u^{(\ell)}]^{\frac{m+1}{2}}$ and $u^{(\ell)}$ cannot readily by identified. Nevertheless, by a modification of the argument in [4, Lemma 1.9], we are able to prove that

$$\begin{cases} (u^{(\ell)})^{\frac{m+1}{2}} \to u^{\frac{m+1}{2}} & \text{strongly in } L^1(\Omega_T), \\ u^{(\ell)} \to u & \text{a.e. in } \Omega_T, \end{cases}$$

for a subsequence in the limit $\ell \to \infty$. This also allows us to prove the existence of the time derivative

$$\partial_t u^{\frac{m+1}{2}} \in L^2(\Omega_T).$$

At this point, it remains to prove that the limit function u is the variational solution we are looking for. To this aim, we observe that $u^{(\ell)}$ is a minimizer of the functional

$$\mathbf{F}^\ell[w] := \iint_{\Omega_T}\Big[f(Dw) + \tfrac{1}{h_\ell}\mathfrak{b}\big[u^{(\ell)}(t-h_\ell), w(t)\big]\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

in the class

$$w \in L^\infty\big(0,T;L^{m+1}(\Omega)\big) \cap L^\infty\big(0,T;W^{1,p}_{u_o}(\Omega)\big).$$

We now consider v as in Definition 4.1 and test with the admissible comparison map

$$w_s := u^{(\ell)} + s\big(v - u^{(\ell)}\big), \quad s \in (0,1).$$

After passing to the limit $s \downarrow 0$, we end up with

$$\iint_{\Omega_T} f\big(Du^{(\ell)}\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \iint_{\Omega_T}\Big[f(Dv) + \tfrac{[u^{(\ell)}(t)]^m - [u^{(\ell)}(t-h_\ell)]^m}{h_\ell}\big(v - u^{(\ell)}\big)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

For the left-hand side we obtain, as before, by lower semi-continuity

$$\iint_{\Omega_T} f(Du)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \liminf_{\ell\to\infty}\iint_{\Omega_T} f\big(Du^{(\ell)}\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

The second term is more difficult. Formally, we have

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_T} \tfrac{[u^{(\ell)}(t)]^m-[u^{(\ell)}(t-h_\ell)]^m}{h_\ell}\big(v-u^{(\ell)}\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\to \iint_{\Omega_T} \partial_t u^m(v-u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \iint_{\Omega_T} \partial_t v\big(v^m-u^m\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \mathfrak{B}[u(T),v(T)] + \mathfrak{B}[u_o,v(0)],\end{aligned}$$

in the limit $\ell \to \infty$. However, this is not allowed since we do not know that the time derivative $\partial_t u^m$ exists. Nevertheless, the formal argument can be developed to a correct proof by a quite delicate discrete integration by parts formula. This finally proves that the limit function is a variational solution in the sense of Definition 1.1. For the complete proof we refer to [12] and the survey article [13].

The advantages of this new approach are obvious: on the one hand it is possible to deal with integrands satisfying a non-standard growth condition. In such cases it is not clear whether or not the associated parabolic equation makes sense (due to the non-standard growth condition). On the other hand, in this setup it is quite easy to incorporate side conditions, for example obstacle conditions. The technique could also be modified to treat time dependent Dirichlet boundary conditions on the lateral boundary, or a Neumann type boundary condition. As already mentioned, functionals with linear growth could also be treated.

Acknowledgments. V. Bögelein has been supported by DFG project BO3598/1-1 „Evolutionsgleichungen mit p,q-Wachstum“.

References

[1] G. Akagi and U. Stefanelli. A variational principle for doubly non-linear evolution. *Appl. Math. Lett.* 23(9):1120–1124, 2010.

[2] G. Akagi and U. Stefanelli. Weighted energy-dissipation functionals for doubly non-linear evolution. *J. Funct. Anal.* 260(9):2541–2578, 2011.

[3] G. Akagi and U. Stefanelli. Doubly non-linear equations as convex minimization. *SIAM J. Math. Anal.*, 46(3):1922–1945, 2014.

[4] H. Alt and S. Luckhaus. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.*, 183(3):311–341, 1983.

[5] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures.* Second edition (Lectures in Mathematics ETH Zürich). Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[6] D.G. Aronson. Regularity properties of flows through porous media: The interface. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 37:1–10, 1970.

[7] G.I. Barenblatt. On some unsteady motions of a liquid and gas in a porous medium. (Russian) *Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat. Meh.*, 16:67–78, 1952.

[8] G.I. Barenblatt. On self-similar solutions of the Cauchy problem for a non-linear parabolic equation of unsteady filtration of a gas in a porous medium. (Russian) *Prikl. Mat. Meh.*, 20:761–763, 1956.

[9] F. Bernis. Existence results for doubly non-linear higher order parabolic equations on unbounded domains. *Math. Ann.*, 279(3):373–394, 1988.
[10] V. Bögelein, F. Duzaar, and P. Marcellini. Parabolic systems with p,q-growth: a variational approach. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 210(1):219–267, 2013.
[11] V. Bögelein, F. Duzaar, and P. Marcellini. Existence of evolutionary variational solutions via the calculus of variations. *J. Differential Equ.* 256: 3912–3942, 2014.
[12] V. Bögelein, F. Duzaar, P. Marcellini, and C. Scheven. Doubly non-linear equations of porous medium type: Existence via minimizing movements. Preprint, 2017.
[13] V. Bögelein, F. Duzaar, P. Marcellini, and C. Scheven. A variational approach to doubly non-linear evolutionary equations. In preparation.
[14] V. Bögelein, F. Duzaar, and C. Scheven. The total variation flow with time dependent boundary values. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 55:108, 2016.
[15] V. Bögelein, F. Duzaar, and C. Scheven. The obstacle problem for the total variation flow. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* 49(5):1143–1188, 2016.
[16] V. Bögelein, F. Duzaar, and C. Scheven. The obstacle problem for parabolic minimizers. *J. Evol. Equ.*, 2017. DOI:10.1007/S00028-017-0384-4
[17] V. Bögelein, F. Duzaar, C. Scheven, and T. Singer. Existence of variational solutions in non-cylindrical domains. Preprint, 2017.
[18] V. Bögelein, F. Duzaar, P. Marcellini, and S. Signoriello. Nonlocal diffusion equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 432(1):398–428, 2015.
[19] V. Bögelein, F. Duzaar, P. Marcellini, and S. Signoriello. Parabolic equations and the bounded slope condition. *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire* 34(2):355–379, 2017.
[20] V. Bögelein, F. Duzaar, P. Marcellini, and S. Signoriello. Parabolic equations and the bounded slope condition. *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 34(2):355–379.
[21] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North-Holland, 1973.
[22] H. Brezis, M.G. Crandall, and A. Pazy. Perturbations of non-linear maximal monotone sets in Banach space. *Comm. Pure Appl. Math.* 23:123–144, 1970.
[23] Y. Cai and S. Zhou, Existence and uniqueness of weak solutions for a non-uniformly parabolic equation. *J. Funct. Anal.* 257(10):3021–3042, 2009.
[24] E. De Giorgi. New problems on minimizing movements. In: J.-L. Lions, C. Baiocchi (Eds.), *Boundary value problems for partial differential equations and applications* (IMA Res. Notes. Appl. Math. vol. 29) Masson, Paris 1993, pp. 81–98.
[25] E. De Giorgi. Conjetture riguardanti alcuni problemi di evoluzione [Conjectures concerning some evolution problems] *Duke Math. J.* 81(2):255–268, 1996.
[26] E. De Giorgi. *Selected papers.* Springer-Verlag, Berlin, 2006 (edited by Luigi Ambrosio, Gianni Dal Maso, Marco Forti, Mario Miranda and Sergio Spagnolo).
[27] U. Gianazza and G. Savaré. Some results on minimizing movements. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5)* 18, 57–80, 1994.
[28] O. Grange and F. Mignot. Sur la résolution d'une équation et d'une inéquation paraboliques non linéaires. *J. Functional Analysis*, 11:77–92, 1972.
[29] A. V. Ivanov. Regularity for doubly non-linear parabolic equations. *J. Math. Sci.* 83(1):22–37, 1997.

[30] A. V. Ivanov and P. Z. Mkrtychyan. On the existence of Hölder-continuous generalized solutions of the first boundary value problem for quasilinear doubly degenerate parabolic equations. *J. Soviet Math.* 62(3):2725–2740, 1992.

[31] A. V. Ivanov, P. Z. Mkrtychyan and W. Jäger. Existence and uniqueness of a regular solution of the Cauchy-Dirichlet problem for a class of doubly non-linear parabolic equations. *J. Soviet Math.* 84(1):845–855, 1997.

[32] A. V. Ivanov, P. Z. Mkrtychyan and W. Jäger. Erratum to: Existence and uniqueness of a regular solution of the Cauchy-Dirichlet problem for a class of doubly non-linear parabolic equations. *J. Soviet Math.* 184(6):786–787, 2012.

[33] J. Kinnunen, P. Lindqvist, and T. Lukkari. Perron's method for the porous medium equation. *J. Eur. Math. Soc.* 18(12):2953–2696

[34] O.A. Ladyženskaja. New equations for the description of the motions of viscous incompressible fluids, and global solvability for their boundary value problems. (Russian) *Trudy Mat. Inst. Steklov.* 102:85–104, 1967.

[35] A. Lichnewsky and R. Temam. Pseudosolutions of the time-dependent minimal surface problem. *J. Differential Equations*, 30(3):340–364, 1978.

[36] A. Mielke and M. Ortiz. A class of minimum principles for characterizing the trajectories of dissipative systems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 14(3):494–516, 2008.

[37] A. Mielke and U. Stefanelli. Weighted energy-dissipation functionals for gradient flows. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 17(1):52–85, 2011.

[38] R. Rossi, G. Savaré, A. Segatti, and U. Stefanelli, A variational principle for gradient flows in metric spaces. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 349:1225–1228, 2011.

[39] E. Serra and P. Tilli. Non-linear wave equations as limits of convex minimization problems: proof of a conjecture by De Giorgi. *Ann. of Math. (2)* 175(3):1551–1574, 2012.

[40] R. Showalter and N.J. Walkington. Diffusion of fluid in a fissured medium with microstructure. *SIAM J. Math. Anal.*, 22(6):1702–1722, 1991.

[41] E. Spadaro and U. Stefanelli. A variational view at the time-dependent minimal surface equation. *J. Evol. Equ.* 11(4):793–809, 2011.

[42] U. Stefanelli. The De Giorgi conjecture on elliptic regularization *Math. Models Methods Appl. Sci.* 21: 1377–1394, 2011.

Author's address:

Verena Bögelein
Fachbereich Mathematik, Universität Salzburg
Hellbrunner Str. 34, 5020 Salzburg
email verena.boegelein@sbg.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 235 (2017), 33–39

Peter M. Gruber 1941–2017

Monika Ludwig, Christian Buchta
TU Wien, Univ. Salzburg

Am 7. März 2017 ist Peter Manfred Gruber, em.o. Professor der Technischen Universität Wien, verstorben. Er war seit 1966 Mitglied der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, in den Jahren 1978, 1980 und 1982 ihr Vorsitzender und zuletzt ein Ehrenmitglied. Im Folgenden finden Sie einen Nachruf, verfasst von M. Ludwig, und einen sehr persönlichen Text von C. Buchta.

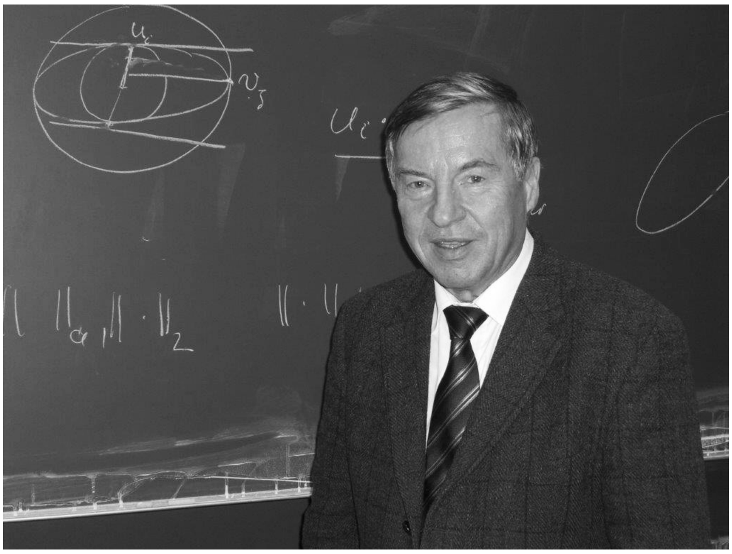
Nachruf auf Peter M. Gruber

Peter Gruber wurde 1941 in Klagenfurt geboren. An der Universität Wien und der University of Kansas studierte er Mathematik, in Wien schloss er 1966 sein Doktorat bei Nikolaus Hofreiter und Edmund Hlawka ab. Danach wechselte er als Assistent an die TU Wien. Im Jahr 1971 wurde er als Professor nach Linz berufen und kehrte 1976 wieder an die TU Wien zurück, als er einen Ruf auf den Lehrstuhl für Analysis erhielt. Bis zu seiner Emeritierung im Jahr 2009 leitete er die von ihm gegründete Forschungsgruppe für Konvexe und Diskrete Geometrie.

Seit seiner Doktorarbeit hat sich Peter Gruber mit der Geometrie der Zahlen beschäftigt. Er hat dort bedeutende Beiträge geleistet und zusammen mit Gerrit Lekkerkerker mit *Geometry of Numbers* (1987) das Standardwerk in diesem Gebiet geschrieben. Fragen der Zahlentheorie mit geometrischen Konzepten zu beschreiben und zu lösen, führte Peter Gruber ins Forschungsgebiet der konvexen und diskreten Geometrie, in dem er bis zuletzt mit großem internationalen Erfolg gearbeitet hat. Mit Jörg Wills hat er dazu das einflussreiche *Handbook of Convex Geometry* (1993) herausgegeben. Sein Opus magnum ist die Monographie *Convex and Discrete Geometry* (2007), in der seine Sicht der Konvexgeometrie in schöner und umfassender Weise dargestellt wird.

Im Laufe seines Lebens hatte Peter Gruber großen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik im In- und Ausland und speziell der Konvexgeometrie. Er hatte zahlreiche Schüler, sowohl im Sinne der Betreuung von Dissertationen, aber auch als Mentor und durch seine ideenreichen Arbeiten und mathematischen Vermutungen. Bei Tagungen und Seminaren hat er oft durch historische Bemerkungen dazu angeregt, auch klassische Probleme und Perspektiven nicht zu vergessen.

ISSN 0020-7926



Peter M. Gruber im Jahr 2010

An der TU Wien war Peter M. Gruber über viele Jahre für die Mathematikausbildungen der Studierenden im Maschinenbau, Wirtschaftsingenieurwesen, Verfahrenstechnik und Bauingenieurwesen zuständig. Er war stolz auf seine Lehrtätigkeit und hat oft gesagt, dass er mehr als 20.000 Studierenden die mathematische Denkweise nahegebracht hat.

Peter M. Gruber war seit 1991 wirkliches Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften und fühlte sich dieser Akademie sehr verbunden. Er war Ehrenmitglied bei der Accademia Nazionale in Modena, korrespondierendes Mitglied der Accademia Peloritana dei Pericolanti in Messina sowie der Bayerischen Akademie der Wissenschaften und auswärtiges Mitglied der Russischen Akademie der Wissenschaften. Er bekam zahlreiche Auszeichnungen, darunter 2001 das Ehrenkreuz für Wissenschaft und Kunst 1. Klasse und 2008 das Große Silberne Ehrenzeichen für Verdienste um die Republik Österreich. Die Universitäten Turin (2000), Siegen (2001) und Salzburg (2010) haben ihm Ehrendoktorate verliehen.

In der Forschungsgruppe für Konvexe und Diskrete Geometrie war Peter M. Gruber bis zuletzt sehr aktiv. Er wird uns als ein äußerst liebenswerter und wohlwollender Kollege in Erinnerung bleiben, der trotz viel harter Arbeit stets ein offenes Ohr für die Probleme anderer hatte. Wir werden ihn sehr vermissen.

Monika Ludwig

Ansprache[1] im Rahmen der Trauerfeier für Peter M. Gruber am 20. März 2017 in der Pfarrkirche Hinterbrühl

Liebe Isolde, lieber Bernhard, lieber Max, liebe Michi, lieber Bruder Bernhard, liebe Angehörige, Freunde und Weggefährten, sehr geehrte Frau Rektorin, liebe Kolleginnen und Kollegen!

Stellvertretend für Monika und alle Schüler von Peter sowie seine ehemaligen Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter bin ich hier, um Dank zu sagen. Wir sind von Peter in vielfältiger Weise gefördert worden. Als Erstes möchte ich Peters ausgeprägten Sinn für mathematische Qualität nennen sowie seine Fähigkeit, ein Empfinden für Qualität zu vermitteln. Als Nichtmathematikerin oder Nichtmathematiker tut man sich vermutlich schwer, sich etwas unter mathematischer Qualität vorzustellen. Ich möchte mich bemühen, in einigen Sätzen anzudeuten, worum es geht.

Ein Komponist schafft Musik, ein Architekt baut ein Haus, ein Schriftsteller verfasst ein Gedicht, ein Mathematiker produziert ein Theorem – worunter man eine Aussage versteht, die immer und überall gilt und zu der es ein Argument gibt, warum sie richtig ist. Im Fall der Musik kann man die Qualität hören, und folglich lässt sich Konsens darüber herstellen, dass die Schöpfungen Schuberts, wie sie uns gerade vom Arnold-Schönberg-Chor dargeboten wurden, qualitativ hochwertiger sind als das Lied ‚Alle meine Entlein', dargeboten von einer Kindergartengruppe. Wenn Sie jedoch jemandem, der noch nie Musik gehört hat, erklären müssten, worum es geht und was den Unterschied ausmacht, wäre das nicht so einfach. Sie könnten sagen, dass durch Atemluft Töne produziert werden, und dass es darauf ankommt, dass das mehrere Personen gleichzeitig und in gleichartiger Weise tun. Aber das würde jemandem, der noch nie Musik gehört hat, nicht wirklich helfen, eine Vorstellung vom Unterschied zu entwickeln und so zu einem Verständnis für musikalische Qualität zu gelangen. In ähnlicher Weise ist es schwierig, jemandem, der nicht sehen kann, den Unterschied zwischen exzellenter und bedeutungsloser Architektur zu erklären. Um ein Gedicht Rilkes zu würdigen und den Unterschied zu dem zu erkennen, was ein bedeutungsloser Hobbydichter schafft, muss man die deutsche Sprache beherrschen. Beherrscht man sie nicht, ist es ein langer Weg, sich damit so weit vertraut zu machen, dass man die Qualität eines Werkes von Rilke erfassen kann.

Um die Qualität eines mathematischen Theorems beurteilen zu können, bedarf es jedenfalls eines langen Prozesses des Sich-vertraut-Machens mit der Mathematik durch ein Studium. Doch auch ein abgeschlossenes Mathematikstudium ist noch kein Garant dafür, Qualität beurteilen zu können. Demgegenüber besteht unter den wirklich Kundigen weitgehend Einvernehmen darüber, was qualitativ hochwertige Mathematik ist und was nicht.

[1] Die Ansprache wurde frei gehalten und im Nachhinein aus dem Gedächtnis sinngemäß aufgeschrieben.

Das von Peter vermittelte Empfinden für Qualität scheint mir der Hauptgrund für die erfolgreichen Laufbahnen seiner Schüler zu sein. Weil ich weiß, damit in seinem Sinne zu handeln, möchte ich nun die Namen einiger Personen nennen, die zu Peters Arbeitsgruppe gehört haben. Es handelt sich dabei bloß um eine exemplarische Aufzählung.

Johannes Höbinger, Assistent von Peter zu Beginn seiner Tätigkeit als Professor, wurde Direktor in der Erste Bank, ursprünglich Erste österreichische Spar-Casse. Gerhard Ramharter wurde Professor an der TU Wien. Josef Müller hat eine Stelle als Mathematiker in einem Großkonzern für Krankenhaustechnik. Hartwig Sorger ist Vorstandsdirektor in der Raiffeisen-Pensionskasse. Monika Ludwig wurde auf einen Lehrstuhl in New York berufen und von dort als Nachfolgerin von Peter zurück an die TU Wien; Peter hatte gezittert und gebangt, ob ihr die TU Wien eine ressourcenmäßige Ausstattung anbieten könne, sodass sie jenseits aller Emotionen den Lehrstuhl in New York unter rationalen Gesichtspunkten aufgeben konnte. Es war dann eine der großen Freuden in seinem Leben, dass die Berufung gelang und so der Weiterbestand der Arbeitsgruppe in seinem Sinne gesichert war. Matthias Reitzner wurde auf einen Lehrstuhl an der Universität Osnabrück berufen; Martin Henk, der zwar bei Jörg Wills in Siegen promoviert hatte, aber dann eine Zeit lang zum engeren Kreis der Arbeitsgruppe gehörte, auf einen Lehrstuhl an der Universität Magdeburg und später von dort auf einen Lehrstuhl an der TU Berlin. Chuanming Zong hat einen Lehrstuhl an der angesehensten chinesischen Universität in Peking inne.

Monika Ludwigs Schüler Franz Schuster ist bereits selbst Professor an der TU Wien. Thomas Wannerer, ein Schüler von Franz Schuster und im mathematischen Sinn also ein Urenkel von Peter, wurde kürzlich – noch nicht dreißigjährig – auf eine Professur an der Universität Jena berufen. Der erste Ururenkel Peters wird also nicht lange auf sich warten lassen.

Für die Beurteilung der Qualität einer mathematischen Arbeit wird nicht nur das aufgestellte Theorem als relevant angesehen, sondern auch, ob das Argument, warum es gilt, besonders originell, überraschend oder geschickt ist und ob man dafür eine gute neue Idee braucht.

Unter diesem Gesichtspunkt möchte ich kurz über eine Begebenheit berichten, die mehr als dreißig Jahre zurückliegt. Um nach der Promotion eine Chance auf eine weitergehende akademische Laufbahn zu haben, muss man möglichst schnell eine ausreichende Zahl von Publikationen schaffen, um sich habilitieren zu können. In dieser Situation stieß ich auf die Veröffentlichung eines amerikanischen Kollegen, der eine bestimmte Frage in zwei Spezialfällen beantworten konnte. Wie die Antwort im allgemeinen Fall aussieht, war die dem Artikel inhärente offene Frage. Ich war in der Lage, die Antwort zu geben, und legte die Lösung in einem Manuskript dar, das ich voller Begeisterung Peter präsentierte. Peter blätterte das Manuskript durch. Er hatte die Fähigkeit, sich von einem mathematischen Manuskript mit all seinen Formeln so schnell einen Überblick zu verschaffen wie jemand anderer vom Inhalt der Tageszeitung. Dann sagte er: ‚Ich will dich nicht enttäuschen, aber du fragst mich ja. Also ich würde das an deiner Stelle nicht publizieren. Man braucht einen technischen Apparat – du beherrscht den technischen Apparat. Man braucht die Kraft, den auftretenden komplizierten Formeln gewachsen zu sein – du hast die Kraft. Was sonst? Eine wirklich neue Idee braucht man nicht. Schmeiß es weg. Du hast es nicht notwendig, so etwas zu publizieren.‘

In diesem Zusammenhang: Ich habe mit Peter oft darüber gesprochen, ob er in seinem Leben etwas anders machen würde, wenn er die Zeit zurückdrehen könnte und die Möglichkeit hätte, Entscheidungen nochmals zu treffen. Mathematik studieren? Keine Frage, das würde er jedenfalls wieder so machen. Wissenschaftliche Laufbahn? Jedenfalls. Konvexgeometrie als Arbeitsgebiet? Auch das hat er als richtige Entscheidung angesehen. Wie auch die Frau Rektorin vor mir erwähnt hat, war diese Entscheidung ja auch insofern bemerkenswert, als er seine wissenschaftliche Laufbahn an der TU Wien am Algebra-Institut begonnen hatte. Es war für ihn auch sehr befriedigend, später Professor an der TU Wien zu sein. Er hat oft davon gesprochen, dass er im Laufe seiner Tätigkeit an der TU Wien eine fünfstellige Zahl Technik-Studierender geprüft hat. Die Prüfungen waren ja schriftlich und mündlich und vor allem die mündlichen Prüfungen mit einem ungeheuren Zeit- und Energieaufwand verbunden. Doch die Beteiligung an der Technikerinnen- und Technikerausbildung gab ihm das gute Gefühl, etwas Nützliches für den Staat zu leisten, wofür er gern in Kauf nahm, weniger Zeit für wissenschaftliche Arbeit zu haben, als das an einer klassischen Universität der Fall gewesen wäre. Die einzige Sache, die er anders machen würde, wenn er die Zeit zurückdrehen könnte: Er hätte weniger publiziert. Rückblickend wäre es ihm lieber gewesen, wenn die eine oder andere Arbeit nicht erschienen wäre. Er war der Meinung, man solle nur das Allerbeste publizieren, zu dem man imstande ist, und nicht den Gesamteindruck dadurch verschlechtern, dass neben den herausragenden Arbeiten auch weniger spektakuläre vorhanden sind.

Diese Einstellung steht in einem auffallenden Spannungsverhältnis zur Leistungsmessung im gegenwärtigen Wissenschaftsbetrieb, wo eine besonders hohe Zahl an Publikationen als besonders gute Leistung angesehen wird, ungeachtet dessen, ob und welche Bedeutung diese Arbeiten für die Weiterentwicklung des Fachs haben, und wo ‚Zitierst-du-mich-zitier-ich-dich-Clubs‘ einzig und allein dazu dienen, Zitationszahlen in die Höhe zu treiben. Ich würde das hier nicht ansprechen, wenn ich nicht sicher wüsste, dass Peter in diesem Punkt eine sehr dezidierte Überzeugung hatte, auch wenn er sich in seiner freundlichen und zurückhaltenden Art öffentlich dazu nicht äußerte.

Peters sehr klare Vorstellungen davon, was bedeutend oder unbedeutend, interessant oder uninteressant ist, hatten großen Einfluss auf die Weiterentwicklung des Gebiets. Manches, das traditionellerweise zur Konvexgeometrie gehörte, aber seiner Einschätzung nach nicht qualitativ hochwertig und geeignet war, das Ansehen der Konvexgeometrie innerhalb der Mathematik zu mehren, wurde zurückgestellt. Zugleich wurden Brücken zu Gebieten geschlagen, die ihm zukunftsträchtig erschienen; eines der Mittel dazu war die Einladungspolitik insbesondere zu den Oberwolfacher Tagungen, wo er zusammen mit Rolf Schneider und Jörg Wills über lange Zeit großen Einfluss hatte. Ein anderes Mittel war die Auswahl der Gäste, die nach Wien eingeladen wurden.

Durch sein starkes Engagement und sein großes Geschick in Bezug auf die Einladung von Gästen haben auch wir, seine Schüler und Mitarbeiter, sehr profitiert. Mir ist erst später bewusst geworden, welcher Gewinn es für uns war, dass die Crème de la Crème der Fachvertreter weltweit bei Peter ein und aus ging. In seinem Wirken wurde er durch Isolde in hervorragender Weise unterstützt. Die Gäste wurden auch nach Hause eingeladen und von Isolde exzellent bewirtet. Die Leistung Isoldes kann gar nicht hoch genug eingeschätzt werden. Die zahllosen privaten Einladungen haben zu einer freundlichen, von gegenseitiger Wertschätzung geprägten Atmosphäre innerhalb der Community beigetragen, die bis in die Gegenwart weiterwirkt. Dabei ist auch zu berücksichtigen, dass damals die Kinder noch klein waren und Isolde voll berufstätig. Über manche Zeiträume gab es wöchentlich einen Gastvortrag, dem eine aufwendige Abendeinladung im Hause Gruber folgte.

Große Unterstützung hatten Peter und die ganze Arbeitsgruppe auch durch seine langjährige Sekretärin Edith Rosta. Sie fing als junges Mädel bei ihm an, war jedoch von allem Anfang an in der Lage, durch ihre Einsatzfreude und ihre Solidarität zur guten Atmosphäre in der Arbeitsgruppe prägend beizutragen. Sie war für Peter die beste Sekretärin, die man sich nur vorstellen konnte.

Abschließend danke ich besonders jenen, die eine weite Reise auf sich genommen haben, um hier anwesend zu sein. Für Peters russische Freunde war zu deren Bedauern die Zeit zu kurz, um Ausreisevisa zu erhalten. Sie haben ein Kondolenzschreiben geschickt, aus dem ich nun einige Passagen vorlesen möchte: "[...] The passing of Peter is the real loss for us, for Peter's colleagues and friends. We had the happiness to have known Peter Gruber, as a brilliant mathematician, an absolutely wonderful person, and a trusted friend. We had the happiness to have felt the hospitality and friendliness of Peter and of all your family when we were in Vienna, in your home. We were happy to take your family in Moscow in summer 2003, when Peter was invited to Moscow to receive the Diploma of the foreign member of the Russian Academy of Sciences. Peter did a lot for the cooperation between Russian and Austrian mathematicians. The name of Peter Gruber is well-known to Russian mathematical community. His book on Geometry of Numbers, translated into Russian, is widely used in universities. Peter had many friends in our country. [...]" Das Kondolenzschreiben ist unterzeichnet von Sergey Novikov, Victor Buchstaber, Nikolay Dolbilin und Arkadii Maltsev.

Peter war der einzige österreichische Mathematiker, der jemals in die Russische Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde.

Auch Chuanming Zong wollte zur heutigen Feier anreisen, doch auch in seinem

Fall war die Zeit zu kurz, ein Ausreisevisum aus China zu erhalten. Stellvertretend für ihn steht hier der Kranz mit den bunten Blumen und den Schleifen mit der Aufschrift „In ehrendem Andenken – Chuanming Zong“.

Zuletzt möchte ich Herrn Professor Ortner und dem Arnold-Schönberg-Chor für die Gestaltung der heutigen Feier danken. Ich gehe davon aus, dass ich damit auch im Sinne der Familie von Peter handle. Die Gestaltung der Feier hätte passender nicht sein können. In der Stimmung, in der wir hier ankamen, wurden wir durch das erste Lied angesprochen: ‚Wohin soll ich mich wenden, wenn Gram und Schmerz mich drücken?‘ Und ein paar Takte später haben wir gleich die Antwort bekommen: ‚Zu Dir, zu Dir, o Vater, [...] Du heilest jeden Schmerz.‘ Mich hat auch berührt, dass das ausgeteilte Liederblatt mit ‚Auferstehungsmesse‘ überschrieben ist, und nicht etwa mit ‚Totenmesse‘ oder ‚Totengottesdienst‘. Wir dürfen uns also auf ein Wiedersehen freuen. Bis dahin, lieber Peter, mach’s gut auf der nächsten Etappe, die wir nun getrennten Weges bewältigen müssen. Und nochmals danke für alles.

Christian Buchta

Buchbesprechungen

T. A. Garrity: Electricity and Magnetism for Mathematicians. A Guided Path from Maxwell's Equations to Yang-Mills. Cambridge University Press, 2015, xiv+282 S. ISBN 978-1-107-43516-2 P/b $ 39,99.

The concepts of gauge theory in physics and of principal bundles and connections in differential geometry have originally been developed independently at about the same time. Realizing that these are essentially equivalent gave rise to a very fruitful exchange of ideas and mutual influence, which led to spectacular outcomes like Donaldson's landmark result on the structure of simply connected, smooth four-manifolds. Still, many mathematicians working on differential geometry are only vaguely aware of the input that comes from physics.

The book under review provides an introduction to some of the relevant ideas from physics requiring only a very modest mathematical background. Indeed, only basic analysis and linear algebra are required to follow the presentation, while some material on manifolds and differential geometry is contained in the text. Starting the most elementary formulation of Maxwell's equations and their solutions describing electromagnetic waves, the author moves to special relativity. To allow for experimental observations, the connection to Lagrangean mechanics is made. Combining these ideas then leads to the formulation of Maxwell's equations in the language of differential forms. In the last part of the book, some basics about quantization and the general concept of gauge theories are discussed.

Given the length of the book and the fact that quite a bit of mathematics is developed in the text, too, one of course cannot expect a complete discussion of the topics from physics that are addressed. Indeed, in most cases only the main ideas are sketched and many facts have simply to be accepted by the reader. Still I had the impression that the author has done a very good job in conveying many of the basic ideas from physics. Thus the book is very useful, not only for beginners, but also for people who already know the mathematical side of the story.

A. Čap (Wien)

M. Kriele, J. Wolf: Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012, x+374 S. ISBN 978-3-642-25805-3 P/b € 39,95.

Das vorliegende Buch bietet dem Leser einen methodisch fundierten Zugang zum wertorientierten Risikomanagement, einem fachübergreifenden Aufgabengebiet, das sowohl Komponenten aus dem Controlling und als auch dem Aktuariat umfasst. Die Autoren setzen die Schwerpunkte des Buchs im Risikokapital und der Kapitalallokation, in der Erfolgsmessung und der wertorientierten Steuerung. Es wird außerdem der Zusammenhang zu regulatorischen Entwicklungen (bspw. KonTraG oder Solvency 2) hergestellt.

Zunächst wird allgemein der Risikomanagementprozess erläutert. Ausgehend von Risikomaßen (etwa Value-at-Risk) sowie Copulas, folgt danach die Risikokapitalberechnung, Kapitalallokation und Erfolgsmessung. Dies mündet schließlich in der wertorientierten Unternehmenssteuerung und wird durch aufsichtsrechtliche Fragestellungen abgerundet. Im Anhang sind R-Skripts u.a. für Solvency II-Berechnungen angeführt.

Mittlerweile gibt es bereits eine Neuauflage des Buchs, die auch auf die aktuellen rechtlichen Entwicklungen eingeht.

Zusammenfassend bietet das Buch sowohl eine gute Einführung als auch einen entsprechenden Überblick über die Thematik des Risikomanagements in Versicherungsunternehmen (unter Berücksichtigung von Solvency II-Aspekten). Es beinhaltet sowohl fundierte theoretische Grundlagen als auch etliche Aspekte aus der praktischen Anwendung in Versicherungsunternehmen. Es kann daher sowohl für die Lehre als auch für die Praktiker in Versicherungsunternehmen empfohlen werden.

M. Predota (Wien)

I. Lankham, B. Nachtergaele, A. Schilling: Linear Algebra as an Introduction to Abstract Mathematics. World Scientific, New Jersey, 2016, xv+198 S. ISBN 978-981-4723-77-0 P/b £ 24,–.

Die Autoren geben eine Einführung in die Lineare Algebra, die bis zum Spektralsatz und der Singulärwertzerlegung normaler Matrizen reicht. Zielgruppe sind Studienanfänger; das Buch wäre sicher auch für manch begabten Schüler geeignet. Voraussetzungen zur Lektüre braucht man eigentlich keine, außer vielleicht eine gewisse Vertrautheit mit linearen Gleichungen.

Es ist erklärtes Ziel der Autoren, dem Leser eine behutsame Einführung in die Denkweise der Mathematik zu geben, weg von der „Rezept-Rechnerei“ die man aus Schule oder undergraduate calculus kennt. Beweise sind ausführlich und sehr explizit geführt, der Stoff wird anhand einer Vielzahl von Beispielen und Übungsaufgaben illustriert, motiviert und ergänzt. Besonders hervorzuheben ist die ganz der Intention des Buchs entsprechende, explizite Trennung der Übungsaufgaben in Rechenaufgaben und Beweis-Aufgaben.

Das Buch ist eine äußerst gelungene und in höchstem Maße empfehlenswerte Darstellung, die dem unerfahrenen – aber „denk-willigen“ – Leser eine lebendige Einführung in die Lineare Algebra und die Mathematik als solches gibt. Mir persönlich war es eine wirkliche Freude, in dem Buch zu schmökern. Den Autoren gelingt es stets, an der richtigen Stelle und zum richtigen Zeitpunkt mit dem Finger auf das Wesentliche zu zeigen.

H. Woracek (Wien)

H. Menzer, I. Althöfer: Zahlentheorie und Zahlenspiele. Sieben ausgewählte Themenstellungen. De Gruyter, Berlin, 2014, xi+383 S. ISBN 978-3-486-72030-3 P/b € 34,95.

Das ist die zweite Auflage des Buchs, die jedoch wesentlich erweitert wurde. So kamen zwei weitere Kapitel (Kapitel 6 und 7) hinzu. Die ersten fünf Kapitel decken die üblichen klassischen Themen der elementaren Zahlentheorie ab. So werden unter anderem die Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ (Kapitel 1), der Fundamentalsatz der Arithmetik (Kapitel 2), Kettenbrüche (Kapitel 3), elementare, analytische Zahlentheorie (Kapitel 4) und quadratische Reste (Kapitel 5) behandelt. Eines der Highlights in diesem ersten Teil ist ein Beweis der Transzendenz von e sowie ein Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes. Was ich jedoch vermisst habe, war mehr zum Thema zur Verteilung von Primzahlen, insbesondere den Satz von Tschebyschow oder die Sätze von Mertens, die auch gut in das 4. Kapitel gepasst hätten.

Die letzten zwei Kapitel sind in der zweiten Auflage neu hinzugekommen und behandeln das Thema von Zahlenspielen. So wird etwa sehr detailliert das Nim-Spiel und die Gewinnstrategie von Bouton diskutiert.

Alles in allem ein sehr schönes und lesenswertes Buch, das im ersten Teil einen sehr guten Überblick über die elementare Zahlentheorie und im zweiten Teil einen ersten Blick auf Zahlenspiele bietet. Die Beweise sind sehr ausführlich geführt, und die Beweisstrategie wird immer sehr genau dargelegt. Somit ist das Buch für einen Anfänger gut geeignet und zu empfehlen.

V. Ziegler (Salzburg)

T. Müller-Gronbach, E. Novak, K. Ritter: Monte Carlo-Algorithmen. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012, ix+324 S. ISBN 978-3-540-89140-6 P/b € 29,95.

Monte Carlo-Verfahren zählen (auch aufgrund der entsprechenden Rechnerleistungen) zu den wichtigsten Simulationsmethoden, die sowohl in der Forschung als auch in der Praxis angewandt werden. Das vorliegende Buch beginnt mit einer allgemeinen Einführung in die dafür benötigten wichtigsten Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorien speziell der Zufallszahlen. Es folgt eine grundlegende Darstellung von Algorithmen allgemein und der Monte Carlo-Methode.

Nach diesen Einführungen zeigen die Autoren verschiedene einfachere und komplexere Simulationsbeispiele. Es folgen die Grenzwertsätze der Stochastik und die Hoeffding-Ungleichung. Nachdem nun das wichtigste Handwerkzeug zur Verfügung steht, werden Simulationen von Verteilungen erläutert (z.B. die Inversionsmethode). Die Simulation stochastischer Prozesse führt zur Optionsbewertung im Black-Scholes-Modell sowie den Ruinwahrscheinlichkeiten im Cramér-Lundberg-Modell.

Im nächsten Abschnitt werden verschiedene Varianzreduktionstechniken erläutert (etwa antithetic sampling oder importance sampling). Schließlich wenden sich die Autoren noch der Markov Chain Monte Carlo-Methode und der numerischen Integration zu.

Das Buch ist gut aufgebaut und gibt eine gute Einführung inkl. praktischer Anwendungsbeispiele der Monte Carlo-Verfahren und ist speziell als gutes Begleitbuch für Lehrveranstaltungen sowie als Nachschlagewerk geeignet.

M. Predota (Wien)

M. Olsson: Algebraic Spaces and Stacks. (AMS Colloquium Publications, Vol. 62.) American Mathematical Society, Providence, RI, 2016, ix+298 S. ISBN 978-1-4704-2798-6 H/b \$ 99,–.

Das vorliegende Buch soll eine Einleitung in die Themen *algebraic spaces* und *stacks* geben. In den ersten drei Kapiteln werden dem Leser genug Hintergrundkenntnisse über Grothendieck-Topologien und Kategorientheorie (insbesondere über Situs) vermittelt, um den Rest des Buchs zu verstehen. Das vierte Kapitel behandelt die Abstiegstheorie (descent theory), welche eine der Hauptmotivationen war, um algebraische Räume und *stacks* zu studieren und zu entwickeln. In den nächsten drei Kapiteln werden algebraische Räume eingeführt und ihre wichtigsten Eigenschaften diskutiert. Danach folgen drei weitere Kapitel über *stacks* mit deren wichtigsten Eigenschaften. Die letzten drei Kapitel kann man als das Herzstück dieses Werks betrachten; in diesen abschließenden Kapiteln wird gezeigt, wie man diese sehr abstrakten Begriffe und Definitionen verwenden kann, um neue Erkenntnisse zu gewinnen. So ist in den Kapiteln 11 und 13 das Hauptthema *moduli spaces* and *stacks*. Insbesondere wird in Kapitel 11 der Satz von Keel-Mori behandelt und im Kapitel 13 die Konstruktion von Delinge und Mumford der *moduli stacks* von algebraischen Kurven von gegebenem Geschlecht beschrieben.

Das Buch ist für Forscher und fortgeschrittene Studenten mit grundlegende Kenntnisse in algebraischer Geometrie gedacht (in etwa auf dem Niveau von Hartshornes berühmtem Buch). Das vorliegende Buch bietet auf jeden Fall eine gute Einführung in diese sehr schwierige und abstrakte Materie. Da auch die Literatur zu diesem Thema noch recht dünn gesät ist, dient dieses Buch sicher als eine primäre Quelle, um sich in dieses Thema einzuarbeiten. Das Buch ist gut geschrieben, und etliche Beispiele und Übungen helfen, die Begriffe besser zu verstehen und zu verinnerlichen.

V. Ziegler (Salzburg)

A. Quatember: Datenqualität in Stichprobenerhebungen. Eine verständnisorientierte Einführung in Stichprobenverfahren und verwandte Themen. (Statistik und ihre Anwendungen) Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014, ix+155 S. ISBN 978-3-642-39605-2 P/b € 20,55.

Das vorliegende Buch gibt eine Einführung in Stichprobenverfahren, Schätzmethoden sowie weitere Aspekte, welche die Datenqualität in Stichprobenverfahren beeinflussen; ein Schwerpunkt wird dabei auf die entsprechende Anwendung gelegt. Der Text ist durch viele Beispiele ergänzt, was speziell für Einsteiger in die Thematik hilfreich ist.

Aufgebaut ist das Buch sehr klassisch: Beginnend mit einer Einführung in die Stichprobentheorie, folgen etliche Schätzverfahren zur Klumpenauswahl sowie geschichteter und zweistufiger uneingeschränkter und größenproportionaler Zufallsauswahl und schließlich nichtzufälligen Auswahlen.

Wie schon erwähnt, ist das Buch für Anfänger sehr gut geeignet; auch als Nachschlagewerk ist es anwendbar.

M. Predota (Wien)

K. Schüller: Statistik und Intuition. Alltagsbeispiele kritisch hinterfragt. Springer Spektrum, Berlin/Heidelberg 2015, xvi+294 S.ISBN 978-3-662-47847-9 P/b € 15,41.

Das flüssig geschriebene Sachbuch zeigt anhand kurzweiliger Exkursionen, welche Ankerpunkte die Statistik im gesellschaftlichen und persönlichen Umgang mit Unsicherheit bietet. Stellenweise erinnert es an Walter Krämers Klassiker *So lügt man mit Statistik* oder Andreas Quatembers Sammelsurium *Statistischer Unsinn*, es hebt sich jedoch durch seine Aktualität von diesen Werken ab. Bei der Lektüre hallen unentwegt Schlagzeilen der letzten Jahre wider, welche die Autorin analysiert, relativiert und falsifiziert. Treffsicher räumt sie dabei mit vielen Vorurteilen auf – auch mit jenen, die das statistische Handwerk selbst betreffen.

Nach einleitenden Worten werden je sieben Fallbeispiele aus den fünf Bereichen *Politik und Weltgeschehen*, *Wirtschaft und Unternehmen*, *Wissen und Technik*, *Gesundheit und Ernährung* sowie *Gesellschaft und Leben* diskutiert. Jede der insgesamt 35 Kapitelüberschriften beginnt mit einem Fragewort und ist oft provokant formuliert. Es wird beispielsweise erklärt, *Warum Schwermetall nicht reich macht*, *Warum Frauen Vorstände verlassen* oder *Warum Monogamie im Trend liegt*. Der Autorin gelingt es, die jeweils thematisierte Problematik – etwa die Vertauschung von Prozent mit Prozentpunkten, das unbedachte „Umkehren“ bedingter Wahrscheinlichkeiten oder die Verwechslung von Korrelation und Kausalität – lebhaft auf den Punkt zu bringen. Fast schon spielerisch führt sie den Leser und die Leserin an statistische Methoden und Begriffe wie etwa die Lorenz-Kurve, Scheinkorrelation oder bedingte Häufigkeit heran; dabei setzt sie wenig Vorwissen voraus. Die Balance zwischen gerade noch zulässiger Vereinfachung und notwendiger

Komplexität gelingt ihr in aller Regel mit Bravour. Die Kapitel werden mit weiterführenden Quellen ergänzt, was Lehrenden in Schulen und tertiären Bildungseinrichtungen, die einzelne Kapitel aufgreifen und für den Unterricht verwenden möchten, zugutekommt.

Das letzte Kapitel ist dem statistischen *Handwerkszeug* gewidmet; es versucht, elementare Begriffe wie etwa Lage- und Streuungsmaße, Testen und Schätzen oder Konfidenzintervalle zugänglich zu erklären. Die Autorin nimmt dabei Vereinfachungen in Kauf, die vereinzelt zu Ungenauigkeiten führen; so wird etwa einer konkreten Realisation eines Konfidenzintervalls eine Überdeckungswahrscheinlichkeit zugewiesen, was (im üblichen frequentistischen Paradigma) nur für ein als Zufallsvariable aufgefasstes Konfidenzintervall gilt. An einzelnen Stellen sind etwas unglückliche Tippfehler zu finden.

Statistik und Intuition kann kein einführendes Werk in angewandte Statistik ersetzen; in meinem persönlichen Kanon wider den Postfaktizismus hat es jedoch bereits einen Fixplatz.

G. Kastner (Wien)

Neue Mitglieder

Simon Breneis – Vöcklabruck. geb. 1999. Teilnehmer an der internationalen Mathematikolympiade 2015–2017, Student der Mathematik. email *simon.breneis@gmx.at*.

Laurenz Kohlbach – Wolfsberg. geb. 2000. Dritter der österreichischen Mathematikolympiade 2017 + IMO-Teilnehmer, Bronzemedaillengewinner bei der MEMO 2016. email *laurenz@kohlbach.at*.

Herbert Landwehr – Freiburg im Breisgau. geb. 1952. Steuerberater. email *herbert.landwehr@merise.de*.

Stephen Moore – Univ. Linz. geb. 1984. Master und Doktorat an der Johannes Kepler-Universität Linz. email *stephen.moore@ricam.oeaw.ac.at*.