

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email imn@oemg.ac.at, <http://www.oemg.ac.at/>

Redaktion:

J. Wallner (TU Graz, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
R. Tichy (TU Graz)
R. Winkler (TU Wien)

Ständige Mitarbeiter der Redaktion:

B. Gittenberger (TU Wien)
G. Eigenthaler (TU Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger:
Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr.
Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzen-
druck, 8044 Weinitzen.

© 2016 Österreichische Mathematische
Gesellschaft, Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903
<http://www.oemg.ac.at/>
email: oemg@oemg.ac.at

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-10401
email: sekr@oemg.ac.at

Vorstand:

M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Vorsitzender
B. Kaltenbacher (Univ. Klagenfurt): Stellvertretende Vorsitzende
J. Wallner (TU Graz): Herausgeber der IMN
C. Fuchs (Univ. Salzburg): Schriftführer
G. Schranz-Kirlinger (TU Wien): Stellvertretende Schriftführerin
A. Ostermann (Univ. Innsbruck): Kassier
B. Lamel (Univ. Wien): Stellvertretender Kassier
E. Buckwar (Univ. Linz): Beauftragte für Frauenförderung
G. Teschl (Univ. Wien): Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
M. Drmota (TU Wien)
H. Edelsbrunner (ISTA)
H. Engl (Univ. Wien)
H. Niederreiter (ÖAW)

P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
W. Schachermayer (Univ. Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
R. Tichy (TU Graz)
H. Zeiler (Wien)

Vorsitzende der Sektionen und ständigen Kommissionen:

W. Woess (Graz)
H.-P. Schröcker (Innsbruck)
C. Pötzsche (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
V. Bögelein (Salzburg)
I. Fischer (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)

Diese gehören statutengemäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 35,–
Bankverbindung: IBAN AT8312000 22910389200 bei der Bank Austria-Creditanstalt (BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques
Internationales

Nr. 233 (70. Jahrgang)

Dezember 2016

Inhalt

<i>Jonathan Eckhardt, Aleksey Kostenko and Gerald Teschl:</i> The Camassa-Holm Equation and The String Density Problem	1
<i>Martin Goldstern:</i> Unvollständigkeit: Logik, Informatik, Zahlentheorie, Geometrie, Analysis	25
<i>Leonhard Summerer:</i> Zehn Jahre Summer School Mathematik	49
Buchbesprechungen	53
Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft	57
Neue Mitglieder	59
Ausschreibung der Preise der ÖMG	61

Die Titelseite zeigt eine Triangulierung eines Kreistrings und steht symbolisch für das Gebiet der Cluster-Algebren. Für deren Definition und die damit zusammenhängenden Fries-Muster und Triangulierungen von Flächen sei auf S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces, I. Cluster complexes*. Acta Math. 201, 83–46, 2008, verwiesen.

The Camassa-Holm Equation and The String Density Problem

Jonathan Eckhardt, Aleksey Kostenko and Gerald Teschl

Universität Wien

The Camassa-Holm (CH) equation

$$u_t - u_{xxt} + 2\kappa u_x = 2u_x u_{xx} - 3uu_x + uu_{xxx}, \quad (1)$$

is an extensively studied nonlinear equation. It first appeared as an abstract bi-Hamiltonian partial differential equation in an article of Fuchssteiner and Fokas [39] but did not receive much attention until Camassa and Holm [15] (see also [16]) derived it as a nonlinear wave equation that models unidirectional wave propagation on shallow water and discovered its rich mathematical structure. In this context $u(x, t)$ represents the fluid velocity in the x direction at time t , and the real constant κ is related to the critical shallow water wave speed. Regarding the hydrodynamical relevance, we refer to the more recent articles [22, 52, 53]. Apart from this, the CH equation was also found in [25] as a model for nonlinear waves in cylindrical hyperelastic rods.

Since its discovery, the literature on the CH equation has been growing exponentially (at the moment, the paper by Camassa and Holm [15] has more than 2,400 citations in Google Scholar, 1,698 in Scopus and 1,016 in MathSciNet) and it is impossible to give a comprehensive overview here. In fact, our main focus in this review paper lies on understanding the CH equation and its so-called conservative solutions via the inverse scattering transform (IST) approach. It was noticed by Camassa and Holm that the CH equation is completely integrable in the sense that it enjoys a Lax pair structure and hence may be treated with the help of the IST approach in principal. The corresponding isospectral problem is a Sturm-Liouville problem of the form

$$-y'' + \frac{1}{4}y = zy\omega(\cdot, t), \quad (2)$$

where $\omega = u - u_{xx} + \kappa$ is known as the *momentum*. Using a simple change of variables (and dropping the time dependence for a moment), this spectral problem

can be transformed into the spectral problem for an inhomogeneous string

$$-f'' = zf\tilde{\omega}. \quad (3)$$

In the 1950's, M. G. Krein developed direct and inverse spectral theory for such strings, assuming that $\tilde{\omega}$ is a nonnegative, locally finite measure on $[0, L)$ for some $L \in (0, \infty]$. Of course, the original motivation of Krein was far from applications to nonlinear equations (see, for instance, [42, Appendix 3]). Unlike in the case for strings, applications to the CH equation make it necessary to deal not only with nonnegative but also with real-valued (signed) Borel measures, that is, with *indefinite strings*.

The structure of the present review is as follows: In the next section we give a brief historical account on the CH equation. Section 2 then discusses multi-soliton solutions for (1) in the case when $\kappa = 0$; the so-called multi-peakons. In the next two sections we touch upon the concepts of global conservative solutions and generalized indefinite strings. In Section 5, we overview recent progress in the understanding of the conservative CH flow as a completely integrable nonlinear flow. In the final section we provide an account on the long-time behavior of solutions to the CH equation.

1 The Camassa-Holm equation

Bi-Hamiltonian structure

In the rest of our paper, we will be mostly concentrated on the Cauchy problem for the CH equation on the line, that is, $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ (note that negative times are covered by the transformation $(x, t) \rightarrow (-x, -t)$, which leaves (1) invariant). Then the CH equation can be written in the equivalent form

$$u_t + uu_x + p_x = 0, \quad p(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|} \left(2\kappa u + u^2 + \frac{1}{2} u_x^2 \right) dy, \quad (4)$$

which is reminiscent of the 3-D incompressible Euler equations. The original derivation of (1) was obtained by approximating directly in the Hamiltonian for Euler's equations in the shallow water regime (see [15, 16]) and hence the CH equation inherits the Hamiltonian structure

$$m_t = - \left(2\kappa \partial + m \partial + \partial m \right) \frac{\delta \mathcal{H}_1[m]}{\delta m}, \quad m = u - u_{xx}, \quad (5)$$

where the Hamiltonian is given by

$$\mathcal{H}_1[m] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2 + u_x^2 dx. \quad (6)$$

This, in particular, implies that the H^1 Sobolev norm of u is a conserved quantity. In fact, the CH equation is bi-Hamiltonian [39, 15]. Namely, it can also be written in the following alternative form:

$$m_t = -(\partial - \partial^3) \frac{\delta \mathcal{H}_2[m]}{\partial m}, \quad \mathcal{H}_2[m] := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^3 + uu_x^2 + 2\kappa u^2 dx. \quad (7)$$

The latter leads to an infinite number of conserved quantities $\mathcal{H}_n[m]$, $n \in \mathbb{Z}$, which are defined recursively by

$$(\partial - \partial^3) \frac{\delta \mathcal{H}_{n+1}[m]}{\partial m} = \left(2\kappa \partial + m \partial + \partial m \right) \frac{\delta \mathcal{H}_n[m]}{\partial m}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Schemes for the computation of $\mathcal{H}_n$ can be found in [36, 51, 64, 76].

Geometric formulation

Equation (1) with $\kappa = 0$ can be interpreted as the geodesic flow on the group of diffeomorphisms of the line with the Riemannian structure induced by the H^1 right-invariant metric. This resembles the fact that the Euler equation is an expression of the geodesic flow in the group of incompressible diffeomorphisms (see [1, 28]). Equation (1) represents the equations of motion in Eulerian coordinates, while the geometric interpretation corresponds to rewriting (1) in Lagrangian coordinates. This connection turned out to be very useful in the qualitative analysis of solutions of the CH equation.

For $\kappa \neq 0$, the CH equation represents the equation for geodesics on the Bott-Virasoro group [72]. Let us also mention that the analogous correspondence for the Korteweg-de Vries (KdV) equation

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0 \quad (8)$$

was established in [75] (see also [57]). In fact, there is a very close connection between the KdV and the CH equations. First of all, the Virasoro group (a one-dimensional extension of the group of smooth transformations of the circle) serves as the symmetry group for these equations [57]. On the other hand, there is a Liouville correspondence between the CH and the KdV hierarchies [70], [63].

Dynamics of solutions

In this subsection we assume for simplicity that $\kappa = 0$. Note that the transformation $u(x, t) \rightarrow u(x - \kappa t, t) + \kappa$ reduces (1) to this case, but it does not preserve spatial asymptotics.

The Sobolev spaces are the natural phase spaces for the CH equation since the Hamiltonian $\mathcal{H}_1$ given by (6) is exactly the H^1 norm of the solution at time t .

One of the crucial differences between the CH and the KdV equations is the fact that the CH equation possesses both global solutions as well as solutions developing singularities in finite time. Moreover, the blow-up happens in a way which resembles wave breaking to some extent.

First of all, let us mention that the CH equation (1) is locally well-posed in H^s for any $s > 3/2$ (the first result was obtained by Escher and Constantin [18] and for further improvements see [66], [77]). The problem with global well-posedness stems from the fact that the Sobolev norms H^s are not controlled by the conservation laws if $s > 1$ and hence one cannot extend local solutions automatically to the whole line and in fact, the blow-up can occur in finite time. The singularity formation was first noticed by Camassa and Holm [15]. Moreover, it was shown in [18] that for any even initial data $u_0 \in H^3(\mathbb{R})$ with $u'_0(0) < 0$ the corresponding solution does not exist globally. In particular, this result shows that initial data with arbitrary small H^s norm may blow up in finite time. On the other hand, it was shown in [19] that the encountered blow-up looks as follows: the solution remains bounded but its slope becomes vertical in finite time, which resembles a breaking wave. Let us also mention that in certain situations it is possible to prove global existence. Namely, it was noticed in [18] that solutions are global for $u_0 \in H^s$ with $s > 3/2$ if the corresponding momentum $\omega_0 = u_0 - u''_0$ is a positive finite measure.

In contrast to classical solutions, weak solutions to the CH equation (4) are global although they are not necessarily unique anymore. In [82], Xin and Zhang proved the existence of global weak solutions for any $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$. It turns out that the positivity of the corresponding momentum plays a crucial role for the uniqueness of weak solutions. Namely, it was proved by Constantin and Molinet [24] that for $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ such that the corresponding momentum ω_0 is a positive finite measure on $\mathbb{R}$, a weak solution to (4) exists and is unique for all times. Moreover, in this case u is continuous with values in $H^1(\mathbb{R})$ and the quantities $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$ are conserved along the trajectories. In fact, the positivity of ω_0 provides a criterion for the uniqueness of weak solutions: McKean [69], [71] proved that a weak solution exists and is unique if $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ is such that the set $S_- := \{x \in \mathbb{R} : \omega_0(x) < 0\}$ lies wholly to the right of the set $S_+ := \{x \in \mathbb{R} : \omega_0(x) > 0\}$. Hence, either the forward or backward CH flow blows up in finite time if both sets S_+ and S_- have a nonzero Lebesgue measure. For further details and references we refer the reader to a survey by Molinet [73].

The Lax pair

The presence of infinitely many integrals of motion established in [39] indicates that the CH equation might be completely integrable. The latter was confirmed by Camassa and Holm [15] by finding the corresponding Lax pair. Indeed, the CH

equation can be formulated as the compatibility condition between

$$-y_{xx} + \frac{1}{4}y = zy\omega, \quad \omega = u - u_{xx} + \kappa \quad (9)$$

and

$$y_t = \frac{1}{2}u_x y - \left(\frac{1}{2z} + u \right) y_x, \quad (10)$$

that is, $y_{xxt} = y_{txx}$ holds if and only if u satisfies (1). Let us also mention that the CH equation gives a counterexample to the Painlevé integrability test [41].

The spectral problem (9) is a Sturm-Liouville problem. It very much resembles the 1-D Schrödinger spectral problem, $-y'' + qy = zy$, which serves as the isospectral problem for the KdV equation (8). However, the spectral parameter z is in the "wrong" place. Of course, under additional smoothness and positivity assumptions (for example $\kappa > 0$, $\omega \in C^2(\mathbb{R})$ and $\omega > 0$ on $\mathbb{R}$), the Liouville transformation

$$f(x) = \omega(x)^{1/4} y(x), \quad x(x) = x - \int_x^\infty \sqrt{\frac{\omega(s)}{\kappa}} - 1 ds, \quad (11)$$

converts (9) into the 1-D Schrödinger form

$$-f'' + Q(\cdot, t)f = zf, \quad Q(x, t) = \frac{\kappa \omega_{xx}(x, t)}{4 \omega(x, t)^2} - \frac{\omega(x, t) - \kappa}{4\omega(x, t)} - \frac{5\kappa \omega_x(x, t)^2}{16 \omega(x, t)^3}. \quad (12)$$

Hence, as for the KdV flow, in this case one can apply the well-developed inverse scattering theory for 1-D Schrödinger equations in order to integrate the CH flow using the IST approach (see, e.g., [3], [17], [20], [21]). The same trick can be used to investigate the CH equation on the circle [23]. However, the direct and inverse spectral theory for (9) without these additional (positivity and smoothness) assumptions has not been developed and we postpone its further discussion to Section 3.

Solitons

One of the most interesting features of the CH equation is the presence of solitons and the simplicity of their interaction when $\kappa = 0$ (see Section 2). For $\kappa > 0$, solitons are smooth but there is no closed form even for a one-soliton solution of the CH equation. However, the Liouville correspondence (11)–(12) allows to obtain a detailed description of multi-soliton solutions. Namely, as for the KdV equation, multi-soliton profiles are reflectionless potentials for (12) and one can employ this fact and the Liouville transform in order to get various representations of multi-soliton solutions (see, e.g., [54], [67], [68], [79]). Unfortunately, it is a difficult task to invert (11)–(12) and this fact (at least partially) explains the absence of a closed form for multi-soliton solutions.

Finally, notice that the one-soliton solution is a traveling wave, and a complete description of all weak traveling wave solutions to the CH equation (peakons, cuspons, stumpons, etc.) is given in [65] (see also [62]).

2 Multi-peakons and the moment problem

Soliton dynamics

In the dispersionless case $\kappa = 0$, the traveling wave solution called *peakon* is given by

$$u(x, t) = p e^{-|x - pt + c|},$$

where p and c are real parameters. It has a peak at $x_0(t) = pt - c$ and its height is equal to its speed (a positive peak travels to the right and a negative peak travels to the left). Since it obviously has a discontinuous first derivative at x_0 , it has to be interpreted as a suitable weak solution of (4) (see [4, 18, 24, 44]). It was noticed by Camassa and Holm [15] that the multi-soliton solution to the CH equation with $\kappa = 0$ is simply a linear combination of peakons

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N p_n(t) e^{-|x - q_n(t)|}, \quad (13)$$

where the coefficients p_n and q_n satisfy the system of ordinary differential equations

$$q'_n = \sum_{k=1}^N p_k e^{-|q_n - q_k|}, \quad p'_n = \sum_{k=1}^N p_n p_k \operatorname{sgn}(q_n - q_k) e^{-|q_n - q_k|}. \quad (14)$$

This system is Hamiltonian, that is,

$$\frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p_n}, \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q_n}, \quad (15)$$

with the Hamiltonian given by

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{n, k=1}^N p_n p_k e^{-|q_n - q_k|} = \frac{1}{4} \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2. \quad (16)$$

Before we proceed further, let us mention that the Hamiltonian system (15)–(16) is a special case of the Calogero-Françoise systems introduced in [13, 14]

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{n, k=1}^N p_n p_k G(q_n - q_k), \quad (17)$$

$$G(x) = a + b_+ \cos(\mathbf{v}x) + b_- \sin(\mathbf{v}|x|),$$

where a, b_+, b_- and v are arbitrary constants. Clearly, $a = 0, b_+ = 1$ and $b_- = v = i$ gives (16). Let us also mention that $a = 0, b_+ = \coth(1/2), b_- = 1$ and $v = i$ gives rise to periodic multi-peakons (see [5, 23]); the limiting case $G(x) = a + b|x| + cx^2$ is associated to the Hunter-Saxton equation (see [48, 49]).

The right-hand side in (14) is not Lipschitz if $q_n - q_k$ is close to zero and hence in this case, one cannot get existence and uniqueness of solutions of (14) by using the standard arguments. However, if we know in advance that all the positions stay distinct, then the right-hand side in (14) becomes Lipschitz and thus the Picard theorem applies. Let us also mention that the Calogero-Françoise flows are completely integrable in the Liouville sense, that is, there exist N integrals of motion in involution [14]. However, the classical Arnold-Liouville theorem is not applicable since the Hamiltonians (17) are not continuously differentiable whenever $b_- \neq 0$.

One of the most prominent features of multi-peakons is the fact that almost all qualitative properties of solutions to the CH equation can be seen just by considering multi-peakons, i.e., finite dimensional reductions (15)–(16) of the infinite dimensional Hamiltonian system (5)–(6). For example, the behavior of multi-peakon solutions crucially depends on whether all the heights p_n of the single peaks are of the same sign or not. Notice that the corresponding momentum is simply given by

$$\omega(\cdot, t) = 2 \sum_{n=1}^N p_n(t) \delta_{q_n(t)}. \quad (18)$$

So, ω is a positive measure precisely when all the heights are positive and in this case all the positions q_n of the peaks stay distinct, move to the right, and the system (14) allows a unique global solution [18, 24, 44]. Otherwise, some of the positions q_n of the peaks will collide eventually, which causes the corresponding heights p_n to blow up in finite time [15]. All this happens in such a way that the solution u in (13) stays uniformly bounded but its derivative develops a singularity at the points where two peaks collide. Let us demonstrate this by considering the interaction of two peakons.

Example 1 (Two peakons). Consider the case $N = 2$ and assume that $q_1(0) < q_2(0)$. Introducing the new variables $Q = q_2 - q_1$ as well as $P = p_2 - p_1$ and noting that $Q > 0$ in a vicinity of zero, we can rewrite the system as

$$Q' = P(1 - e^{-Q}), \quad P' = \frac{P_0^2 - P^2}{2} e^{-Q},$$

where $P_0 \equiv p_1(t) + p_2(t)$ is a constant of motion. Notice also that

$$2H(p, q) = \frac{P_0^2 + P^2}{2} + \frac{P_0^2 - P^2}{2} e^{-Q} = P_0^2 - \frac{P_0^2 - P^2}{2} (1 - e^{-Q}) \equiv 2H_0^2. \quad (19)$$

Therefore, we get

$$P' = 2H_0^2 - \frac{P_0^2 + P^2}{2}, \quad Q' = 2P \frac{P_0^2 - 2H_0^2}{P_0^2 - P^2}. \quad (20)$$

One then easily obtains

$$P(t) = h_0 \frac{(P(0) + h_0)e^{h_0 t} + (P(0) - h_0)}{(P(0) + h_0)e^{h_0 t} - (P(0) - h_0)}, \quad h_0 = \sqrt{4H_0^2 - P_0^2}, \quad (21)$$

and

$$Q(t) = Q(0) + \log \left| \frac{\left(e^{h_0 t} - \frac{P_0 + h_0}{P_0 - h_0} \frac{P(0) - h_0}{P(0) + h_0} \right) \left(e^{h_0 t} - \frac{P_0 - h_0}{P_0 + h_0} \frac{P(0) - h_0}{P(0) + h_0} \right)}{\left(1 - \frac{P_0 + h_0}{P_0 - h_0} \frac{P(0) - h_0}{P(0) + h_0} \right) \left(1 - \frac{P_0 - h_0}{P_0 + h_0} \frac{P(0) - h_0}{P(0) + h_0} \right) e^{h_0 t}} \right|. \quad (22)$$

Clearly, P is discontinuous only if $(P(0) - h_0)(P(0) + h_0) > 0$ and in this case

$$P(t) \rightarrow -\infty \quad \text{as} \quad t \rightarrow t^\times := \frac{1}{h_0} \log \left(\frac{P(0) - h_0}{P(0) + h_0} \right). \quad (23)$$

Notice that

$$(P(0) - h_0)(P(0) + h_0) = P(0)^2 + P_0^2 - 4H_0^2 = (P(0)^2 - P_0^2)e^{-Q}$$

is positive only if $p_1(0)p_2(0) < 0$. Hence there are two distinct cases: If $p_1(0)p_2(0) > 0$, i.e., both peaks are of the same sign, then the solution is global and peaks never collide. If we have a peakon-antipeakon interaction, then the blowup happens at $t = t^\times$ given by (23) and in this case $P(t) = p_2(t) - p_1(t)$ tends to $-\infty$ and $Q(t) = q_2(t) - q_1(t)$ tends to zero as t approaches $t^\times$. $\diamond$

Complete integrability and the Stieltjes moment problem

It was noticed by Beals, Sattinger and Szmigielski [4] that similar to the finite Toda lattice on the line [74], the multi-peakon flow can be solved by using the solution of the Stieltjes moment problem [80]. More precisely, consider the corresponding spectral problem (9) with the moment ω given by (18) (we omit the time dependence):

$$-y'' + \frac{1}{4}y = zy\omega, \quad \omega = 2 \sum_{n=1}^N p_n \delta_{q_n}. \quad (24)$$

Without loss of generality, we can assume that $p_n \neq 0$ for all $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ and

$$-\infty < q_1 < q_2 < \dots < q_N < \infty.$$

Some function y is a solution of the differential equation (24) if it satisfies

$$-y'' + \frac{1}{4}y = 0 \quad (25)$$

away from the points $\{q_1, \dots, q_N\}$, together with the interface conditions

$$\begin{pmatrix} y(q_n+) \\ y'(q_n+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2zp_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(q_n-) \\ y'(q_n-) \end{pmatrix}, \quad n \in \{1, \dots, N\}. \quad (26)$$

The set of all values $z \in \mathbb{C}$ for which there is a nontrivial solution of the differential equation (24) that lies in $H^1(\mathbb{R})$ is referred to as *the spectrum* σ of the spectral problem (24). Note that in this case, the solution in $H^1(\mathbb{R})$ of this differential equation is unique up to scalar multiples. Since the measure ω has a compact support, for every $z \in \mathbb{C}$ one has spatially decaying solutions $\phi_{\pm}(z, \cdot)$ of (24) with $\phi_{\pm}(z, x) = e^{\mp \frac{x}{2}}$ for all x near $\pm\infty$. In particular, note that $\phi_{\pm}(\cdot, x)$ and $\phi'_{\pm}(\cdot, x)$ are real polynomials for each fixed $x \in \mathbb{R}$. The Wronski determinant of these solutions

$$W(z) = \phi_+(z, x)\phi'_-(z, x) - \phi'_+(z, x)\phi_-(z, x), \quad z \in \mathbb{C} \quad (27)$$

is independent of $x \in \mathbb{R}$ and vanishes at some point $\lambda \in \mathbb{C}$ if and only if the solutions $\phi_-(\lambda, \cdot)$ and $\phi_+(\lambda, \cdot)$ are linearly dependent. As a consequence, one sees that the spectrum σ is precisely the set of zeros of the polynomial W and, moreover, the spectrum σ of (24) consists of exactly N real and simple eigenvalues (see, e.g., [4]). Associated with each eigenvalue $\lambda \in \sigma$ is the quantity

$$\frac{1}{\gamma_{\lambda}} := \int_{\mathbb{R}} |\phi'_-(\lambda, x)|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} |\phi_-(\lambda, x)|^2 dx > 0, \quad (28)$$

which is referred to as the (modified) *norming constant* (associated with λ).

The central role in the inverse spectral theory for (24) is played by *the Weyl-Titchmarsh m -function*, which is defined by

$$\begin{aligned} M(z) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{z} \frac{W(\phi_+(z, x), e^{-x/2})}{W(\phi_+(z, x), e^{x/2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{W(\phi_+(z, x), e^{-x/2})}{zW(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (29)$$

M is a Herglotz-Nevanlinna function and it admits the partial fraction expansion:

$$M(z) = \sum_{\lambda \in \sigma} \frac{\gamma_{\lambda}}{\lambda - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (30)$$

On the other hand, taking into account the fact that $\phi_+(z, \cdot)$ solves the difference equation (24), it is also possible to write down a finite continued fraction expansion for M in terms of ω :

$$zM(z) - 1 = \frac{1}{-l_0 + \frac{1}{m_1 z + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{-l_{N-1} + \frac{1}{m_N z - \frac{1}{l_N}}}}}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (31)$$

where

$$m_n = 8 p_n \cosh^2 \left(\frac{q_n}{2} \right), \quad l_n = \frac{1}{2} \left(\tanh \left(\frac{q_{n+1}}{2} \right) - \tanh \left(\frac{q_n}{2} \right) \right). \quad (32)$$

Hereby, we set $q_0 = -\infty$ and $q_{N+1} = \infty$ for simplicity of notation.

In the case when all p_n are positive, the classical result of Stieltjes [80] (see also [55, §13]) recovers the coefficients (32) in terms of the spectrum σ and the corresponding norming constants $\{\gamma_\lambda\}_{\lambda \in \sigma}$. For that purpose, one needs to consider the Laurent expansion of $M(z)$ at infinity (taking into account the partial fraction expansion (30)):

$$M(z) - \frac{1}{z} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{z^{k+1}}, \quad |z| \rightarrow \infty; \quad s_k = \begin{cases} 1 + \sum_{\lambda \in \sigma} \gamma_\lambda, & k=0, \\ \sum_{\lambda \in \sigma} \lambda^k \gamma_\lambda, & k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (33)$$

Introducing the Hankel determinants

$$\Delta_{0,k} = |s_{i+j}|_{i,j=0}^k, \quad \Delta_{1,k} = |s_{i+j+1}|_{i,j=0}^k, \quad (34)$$

the formulas of Stieltjes read as follows

$$m_n = \frac{\Delta_{0,n}^2}{\Delta_{1,n-1} \Delta_{1,n}}, \quad l_{n-1} = \frac{\Delta_{1,n-1}^2}{\Delta_{0,n-1} \Delta_{0,n}}, \quad n \in \{1, \dots, N\}. \quad (35)$$

Since $s_k, k \in \mathbb{N}$ are the moments of a nonnegative measure $\rho = \delta_0 + \sum_{\lambda \in \sigma} \gamma_\lambda \delta_\lambda$, the Hankel determinants $\Delta_{0,n}$ are positive for all $n \in \{0, \dots, N\}$ (see [40], [80]). On the other hand, the Hankel determinants $\Delta_{1,n}$ are positive for all $n \in \{0, \dots, N\}$ if and only if the support of ρ is contained in $[0, \infty)$, i.e., the spectrum σ consists only of positive eigenvalues, which is further equivalent to the positivity of the measure ω . Introducing the time dependence

$$\dot{\gamma}_\lambda = \frac{1}{2\lambda} \gamma_\lambda, \quad \lambda \in \sigma,$$

one then can integrate the multi-peakon flow by using the Stieltjes solution of the moment problem (32)–(35) if all p_n are positive. Moreover, the formulas (31)–(35) remain true until the denominators in (35) become zero, that is, one can exploit Stieltjes solution of the moment to integrate the multi-peakon flow in the general case (see [4] for further details). One of the important observations made in [4] is that one of the Hankel determinants $\Delta_{1,n}$ vanishes exactly when two adjacent peakons collide.

3 Generalized indefinite strings

The direct and inverse spectral theory for the spectral problem (9) is of vital importance for investigating the CH equation by using the IST approach. Assume for a moment that ω is a locally finite measure on $\mathbb{R}$. A simple change of variables

$$x \mapsto x = x(x) = \frac{1}{2} \tanh(x/2), \quad x \in \mathbb{R}; \quad f(x) := \frac{y(x)}{2 \cosh(x/2)}, \quad (36)$$

transforms the spectral problem (9) into

$$-f'' = z f \tilde{\omega} \quad (37)$$

on the interval $(-1/2, 1/2)$, where the measure $\tilde{\omega}$ is given by

$$\int_{(0,x]} d\tilde{\omega}(s) = 4 \int_{(0,x]} \cosh^2(s/2) d\omega(s).$$

Notice that this change of variables also explains the coefficients in (32). In the case when $\tilde{\omega}$ is a nonnegative measure, (37) describes small oscillations of an inhomogeneous string with mass density $\tilde{\omega}$ and is known in the literature as *the string spectral problem*. Direct and inverse spectral theory for (37) with a nonnegative measure $\tilde{\omega}$ was developed by Krein in the early 1950's [55] and subsequently applied to study interpolation and filtration problems for stationary stochastic processes; see [27]. The first problem which appears in this context is *how to understand the differential equation (37) with measure coefficients?* Krein suggested to replace the differential equation by an integral equation, and as a result one can successfully develop the basic direct spectral theory for the string spectral problem (see, e.g., [27, 55]). In fact, this can be done for a much larger class of Sturm-Liouville type spectral problems [33].

The inverse spectral problem aims to recover the coefficients of the differential equation (in our case the measure $\tilde{\omega}$) from the spectral data. In order to explain the solution to the inverse spectral problem for strings, let us consider (37) on the interval $[0, L)$ assuming that $L \in (0, \infty]$ and $\tilde{\omega}$ is a nonnegative measure on $[0, L)$. The pair $S_+ = (L, \tilde{\omega})$ is called a string (L and $\tilde{\omega}$ are its length and mass distribution,

respectively). For a given string S_+ , let $c(z, x)$ and $s(z, x)$ be a fundamental system of solutions to (37) satisfying the following boundary conditions

$$c(z, 0) = s'(z, -0) = 1, \quad c'(z, -0) = s(z, 0) = 0.$$

These solutions are entire functions in z for every $x \in [0, L)$. Moreover, the limit

$$M(z) := \lim_{x \rightarrow L} -\frac{c(z, x)}{zs(z, x)} \quad (38)$$

exists and is finite for all $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. The function $M : \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ is called *the Weyl-Titchmarsh function of the string S_+* . It turns out that the function M is a Stieltjes function, that is, it is analytic on $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, $M(z^*) = M(z)^*$ and $\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im} M(z) \geq 0$ for all $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ and $M(z) \geq 0$ for all $z < 0$. Every Stieltjes function admits a unique integral representation which, in our case, reads as follows

$$M(z) = \tilde{\omega}(\{0\}) - \frac{1}{Lz} + \int_{(0, \infty)} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

where ρ is a nonnegative measure on $(0, \infty)$ such that the integral

$$\int_{(0, \infty)} \frac{d\rho(\lambda)}{1 + \lambda}$$

is finite. The measure ρ is called *the spectral measure of S_+* and it contains all the spectral information about S_+ . Notice that (38) defines a map from the set of all strings to the set of Stieltjes functions. A celebrated result of Krein states that this map is a bijection, that is, *every Stieltjes function M is the Weyl-Titchmarsh function of a unique string S_+* (see [27, 55, 59]). Moreover, this map is homeomorphic with respect to appropriate weak topologies. The proof of this result is based on the Krein-de Branges theory of Hilbert spaces of entire functions and can be found in [27].

There were many attempts to extend the results of Krein to the case when $\tilde{\omega}$ is a real-valued measure (see, e.g., [6, 7, 8, 9, 29, 56]) but only insufficient partial results were available in this case, even though applications to the CH equation demand to have such a generalization. One of the key problems in this context is the fact that the natural framework for Krein strings is the Hilbert space $L^2([0, L]; \tilde{\omega})$. However, the inner product is nonnegative precisely when the measure $\tilde{\omega}$ is nonnegative. Otherwise $L^2([0, L]; \tilde{\omega})$ becomes a *Krein space*, an indefinite inner product space [2]. In this respect, the spectral problem (37) is one of the basic toy models in the spectral theory of operators in Krein spaces (see [37, 38]). Notice that during the last three decades a lot of work has been devoted to the study of (37), due to its importance in numerous applications. We refer to [37, 38, 58] for further information and references.

Returning to the inverse spectral problem for indefinite strings, a first guess could suggest that instead of the class of Stieltjes functions one obtains the entire class of Herglotz-Nevanlinna functions. However, this is not the case as it turned out that the class of spectral problems (37) with real-valued Borel measures $\tilde{\omega}$ is too narrow in this respect, even for rational Herglotz-Nevanlinna functions (note that in the multi-peakon situation there are cases when the inverse problem cannot be solved). The deeper reason for why this fails in the real-valued case in some sense lies in the fact that the class of real-valued Borel measures is not closed with respect to a particular topology, whereas the class of nonnegative Borel measures is. Altogether, it does not seem very likely that there is a simple and concise description of the class of Weyl-Titchmarsh functions that arise from the spectral problem (37) with real-valued Borel measures $\tilde{\omega}$.

One way to overcome this problem by means of extending the class of spectral problems was suggested by Krein and Langer [60], who considered the modified differential equation

$$-f'' = zf\tilde{\omega} + z^2 f\tilde{\nu} \quad (39)$$

on an interval $[0, L)$, where $\tilde{\omega}$ is a real-valued Borel measure on $[0, L)$ and $\tilde{\nu}$ is a nonnegative Borel measure on $[0, L)$. In particular, they showed in [60] that indeed every rational Herglotz-Nevanlinna function arises as the Weyl-Titchmarsh function of such a spectral problem. However, the totality of all Weyl-Titchmarsh functions which are obtained in this way is still a proper subset of the class of Herglotz-Nevanlinna functions (see [61]).

Let us consider the set of all triplets $S = (L, \tilde{\omega}, \tilde{\nu})$, where $L \in (0, \infty]$, $\tilde{\omega} \in H_{\text{loc}}^{-1}[0, L)$ is a real-valued distribution on $[0, L)$ and $\tilde{\nu}$ is a nonnegative Borel measure on $[0, L)$. The corresponding differential equation (39) has to be understood in a suitable distributional sense in general (see [78] and also [31, 32]). Following [31], S is called an *indefinite generalized string*. It turns out that every Herglotz-Nevanlinna function can be realized as the Weyl-Titchmarsh function of a unique generalized string. More precisely, under the above assumptions on the coefficients, the spectral problem (39) admits a fundamental system of solutions $c(z, x)$ and $s(z, x)$ with similar properties as for Krein strings. Moreover, one can define the Weyl-Titchmarsh function via (38) for all $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, however, M is now only a Herglotz-Nevanlinna function, which admits the integral representation

$$M(z) = \tilde{\nu}(\{0\})z + c - \frac{1}{Lz} + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) d\rho(\lambda), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

with some $c \in \mathbb{R}$ and a nonnegative Borel measure ρ on $\mathbb{R}$ with $\rho(\{0\}) = 0$ for which the integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\rho(\lambda)}{1 + \lambda^2}$$

is finite. The main result in [31] states that *every Herglotz-Nevanlinna function is the Weyl-Titchmarsh function of a unique generalized indefinite string*. The proof

of this result is based on de Branges' solution of the inverse spectral problem for 2×2 canonical systems [26]. Let us also mention that in view of applications to the CH equation, the regularity of coefficients is exactly what is desired.

4 Global conservative solutions

Even though solutions of the CH equation (1) may blow up in finite time, it turned out that it is always possible to continue them globally in a reasonable weak sense [82]. Since such continuations are not unique anymore in general, one is led to impose additional constraints on them in order to guarantee uniqueness. Among all possible continuations, there are two (in some sense) extremal cases; *dissipative* continuations and *conservative* continuations. Whereas the former one postulates a loss of energy due to wave-breaking, the latter one requires the total energy of the solution (measured by the $H^1(\mathbb{R})$ norm) to be conserved.

Example 2 (*Peakon-antipeakon interaction*). Let us continue with Example 1. Assume for simplicity that $p_1(0) = -p_2(0) > 0$ and $q_1(0) = -q_2(0) < 0$. Notice that then $p_1(t) = -p_2(t)$, $q_1(t) = -q_2(t)$ for all $t \in (0, t^\times)$, which, in particular, implies that $u(\cdot, t)$ is odd for all $t \in (0, t^\times)$. Taking into account the formulas (20)–(22), one can show that $u(x, t) \rightarrow 0$ for all $x \in \mathbb{R}$ as $t \rightarrow t^\times$. On the other hand, one finds that

$$\int_{q_1(t)}^{q_2(t)} |u(x, t)|^2 + |u_x(x, t)|^2 dx = \frac{P(t)^2}{2} \left(1 - e^{-2Q(t)}\right) \rightarrow 4H_0^2 = 4H(p, q) \quad (40)$$

as $t \rightarrow t^\times$ (to this end, use (19) and notice that $Q(t) = 2q_2(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow t^\times$). The latter shows that in the limit, the whole energy concentrates at a single point. $\diamond$

In order for the Cauchy problems for these weak kinds of solutions to be well-posed, it is thus necessary to introduce an additional quantity μ , which measures the energy density of the solution. A solution now consists of a pair (u, μ) , where μ is a nonnegative Borel measure, whose absolutely continuous part is determined by u via

$$\mu_{ac}(B, t) = \int_B |u(x, t)|^2 + |u_x(x, t)|^2 dx, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (41)$$

for each Borel set $B \subseteq \mathbb{R}$. Within this picture, blow-up of solutions corresponds to concentration of energy (measured by μ) to sets of Lebesgue measure zero. Existence of such global dissipative and conservative solutions for initial data in $H^1(\mathbb{R})$ has been established in [10, 11, 45, 46, 47] by means of a generalized method of characteristics that relies on a transformation from Eulerian to Lagrangian variables. Let us also stress the fact that, within the Lagrangian viewpoint, the CH flow is fine for all times was noticed in [70].

5 Complete integrability

Although there is a multitude of further possibilities to guarantee uniqueness, the notion of *global conservative solutions* is the suitable one for our purposes, as it retains the completely integrable structure of the CH equation. In fact, it turns out that this kind of solution indeed allows an associated isospectral problem. Of course, an eligible modification of the isospectral problem (2) now also has to incorporate the singular part of μ (with respect to the Lebesgue measure) in some way. It will turn out that the appropriately generalized spectral problem is simply given by

$$-y'' + \frac{1}{4}y = zy\omega(\cdot, t) + z^2 y\mathfrak{v}(\cdot, t), \quad (42)$$

where $\mathfrak{v}$ denotes the singular part of the measure μ . Using the Liouville transform (36) it is not difficult to see that (42) is transformed to the following equation

$$-f'' = zf\tilde{\omega} + z^2 f\tilde{\mathfrak{v}},$$

on the interval $(-1/2, 1/2)$. The idea for considering this particular spectral problem goes back to work of Krein and Langer [60] on the indefinite moment problem and generalized strings, which carry not only negative mass but also dipoles. It is indeed interesting to observe the parallels between the developments described here in connection with conservative solutions of the CH equation and their work from the 1970s.

Example 3. Let us continue with Example 2. We observed in Section 2 that the multi-peakon flow can be solved by employing the solution of the Stieltjes moment problem. Let $M(\cdot, t)$ denote the Weyl-Titchmarsh function of the corresponding spectral problem at time $t \in [0, t^\times)$. Using (31) and (32), one then observes that

$$zM(z, t) \rightarrow zM(z, t^\times) := 1 + \frac{1}{-1/2 + \frac{1}{16H_0^2 z^2 + \frac{1}{-1/2}}} = \frac{4H_0^2 z^2}{1 - 4H_0^2 z^2},$$

for all $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ as $t \rightarrow t^\times$. First of all, note that the function $M(\cdot, t^\times)$ is a Herglotz-Nevanlinna function. Moreover, the function $M(\cdot, t^\times)$ is the Weyl-Titchmarsh function (in the sense of Section 2) for the quadratic spectral problem

$$-y'' + \frac{1}{4}y = z^2 \mathfrak{v}y,$$

where $\mathfrak{v} = 4H_0^2 \delta_0$. ◇

Conservative multi-peakons

A detailed description of global conservative multi-peakon solutions was given in [46]. Following [46], a global conservative solution (u, μ) of the CH equation is said to be a *multi-peakon solution* if for some $t_0 \in \mathbb{R}$, the measure $\mu(\cdot, t_0)$ is absolutely continuous and the function $u(\cdot, t_0)$ is of the form (13). For these solutions, at any time $t \in \mathbb{R}$, the quantities ω and $\mathfrak{v}$ are of the form

$$\omega(\cdot, t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \omega_n(t) \delta_{x_n(t)}, \quad \mathfrak{v}(\cdot, t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \mathfrak{v}_n(t) \delta_{x_n(t)}, \quad (43)$$

where $N(t) \in \mathbb{N}_0$, $x_1(t), \dots, x_{N(t)}(t) \in \mathbb{R}$ are strictly increasing, $\omega_n(t) \in \mathbb{R}$ and $\mathfrak{v}_n(t) \geq 0$ for $n = 1, \dots, N(t)$. In this case, the spectral problem (42) can be treated similarly to the multi-peakon case (see Section 2) with the only modification concerning the norming constants (cf. (28)) associated with an eigenvalue λ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_\lambda(t)} &:= \int_{\mathbb{R}} |\phi'_-(\lambda, x, t)|^2 dx \\ &+ \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} |\phi_-(\lambda, x, t)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |\lambda \phi_-(\lambda, x, t)|^2 d\mathfrak{v}(x, t). \end{aligned} \quad (44)$$

The first two trace formulas (see [30])

$$\sum_{\lambda \in \sigma} \frac{1}{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} d\omega, \quad \sum_{\lambda \in \sigma} \frac{1}{\lambda^2} = 2 \int_{\mathbb{R}} d\mu,$$

indicate that (42) might serve as an isospectral problem for the conservative CH flow (compare with (16)). And indeed, the main result in [30] states that *the pair (u, μ) is a global conservative multi-peakon solution of the CH equation if and only if the problems (42), (43) are isospectral with*

$$\dot{\gamma}_\lambda = \frac{1}{2\lambda} \gamma_\lambda, \quad \lambda \in \sigma. \quad (45)$$

Moreover, utilizing the solution of the indefinite moment problem given by Krein and Langer [60], it was proved in [30] that the conservative CH flow is completely integrable by the inverse spectral transform in the multi-peakon case. Let us also mention that the Krein-Langer solution of the indefinite moment problem plays the same role for the conservative multi-peakon flow as the solution to the Hamburger moment problem for the finite Toda lattice on the line (see [74]).

General conservative solutions

In order to be able to treat general conservative solutions, we need to allow u to be an arbitrary function in $H^1(\mathbb{R})$, rendering ω a distribution in $H^{-1}(\mathbb{R})$, and $\mathfrak{v}$ to

be a nonnegative finite Borel measure on $\mathbb{R}$. Thus, the differential equation (42) has to be understood in a suitable distributional sense in general (see [78] and also [31, 32]). The associated spectrum is then again defined as the set of all those $z \in \mathbb{C}$ for which there is a solution of the differential equation (42) that belongs to $H^1(\mathbb{R})$.

For a given global conservative solution (u, μ) of the CH equation, one can indeed show that the spectrum associated with (42) is independent of time. Under the condition that the associated spectrum σ is a discrete set of nonzero reals that satisfies

$$\sum_{\lambda \in \sigma} \frac{1}{|\lambda|} < \infty, \quad (46)$$

one may prove existence of two (unique) solutions $\phi_{\pm}(z, \cdot, t)$ of the differential equation (42) with the spatial asymptotics

$$\phi_{\pm}(z, x, t) \sim e^{\mp \frac{x}{2}}, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

for every $z \in \mathbb{C}$ and $t \in \mathbb{R}$, generalizing the corresponding solutions from the multi-peakon case. These solutions are entire of genus zero when considered as a function of $z \in \mathbb{C}$. The asymptotic normalization implies that the solutions $\phi_{\pm}(z, \cdot, t)$ are square integrable near $\pm\infty$, but will not be square integrable near $\mp\infty$ in general. However, we see that some $z \in \mathbb{C}$ belongs to the spectrum σ , if and only if the functions $\phi_{-}(z, \cdot, t)$ and $\phi_{+}(z, \cdot, t)$ are linearly dependent. Thus for every $\lambda \in \sigma$ we may write

$$\phi_{+}(\lambda, x, t) = c_{\lambda}(t)\phi_{-}(\lambda, x, t), \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (47)$$

for some function c_{λ} . As in the case of multi-peakons in the previous section, it turns out that the time evolution of these spectral quantities and the norming constants is linear and simply given by

$$\dot{\gamma}_{\lambda} = \frac{1}{2\lambda}\gamma_{\lambda}, \quad \dot{c}_{\lambda} = -\frac{1}{2\lambda}c_{\lambda},$$

for every $\lambda \in \sigma$. Since one can show that the pair (u, μ) is uniquely determined by the spectrum σ and the corresponding sequence of norming constants $\{\gamma_{\lambda}\}_{\lambda \in \sigma}$, this implies that the transformation $(u, \mu) \mapsto \{\gamma_{\lambda}\}_{\lambda \in \sigma}$ maps the conservative CH flow on isospectral sets to a simple, explicitly solvable linear flow on $\mathbb{R}_{+}^{\sigma}$. This is reminiscent of the fact that the conservative CH flow can be viewed as a completely integrable infinite dimensional Hamiltonian system.

6 Long-time asymptotics

In the theory of linear partial differential equations a key role is played by dispersion which implies that waves decay over time as different plane waves travel at

different speeds leading to destructive interference. On the other hand, nonlinear partial differential equations lead to wave breaking and it thus came as a surprise when John Scott Russell in 1834 observed his famous *Wave of Translation* in a narrow channel. At that time his observation seemed to contradict generally accepted beliefs and it took another 37 years until Boussinesq (1871), Lord Rayleigh (1876) and finally Korteweg and his student de Vries (1895) supported his observation with mathematical theory. Despite these results, the real significance of solitons remained hidden for another century until Zabusky and Kruskal in 1965 used the KdV equation (8) to explain the Fermi-Pasta-Ulam experiment (another observation – this time in one of the first computer experiments – which originally seemed to contradict generally accepted beliefs). In fact, their numerical experiments suggested that any decaying initial wave profile of the KdV equation asymptotically splits into a finite number of solitons plus a dispersive tail. Hence the solitons were rendered from a peculiar solution into a central object. Moreover, many other integrable wave equations with soliton solutions were found and proving that decaying initial conditions asymptotically split into a sum of solitons over time became a major task known as soliton resolution conjecture (see [81] for a review).

Building on the inverse scattering transform discovered by Gardner, Greene, Kruskal and Miura, it was possible to give a detailed description of the long-time asymptotics for the KdV equation with decaying initial conditions. While first approaches required an *ansatz* for the asymptotic form of the solution, this was eventually overcome by Its (1981) who outlined how to complete an original idea by Manakov (1974). Finally, Deift and Zhou (1993) turned these ideas into a fully rigorous theory now known as nonlinear steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems. We refer to [43] for further historic details and an expository introduction to this method. See also the review [50] for further information.

This method also applies to the CH equation, but only when the constant κ and the momentum ω are strictly positive. Since this method is rather technical, even a brief overview is beyond the scope of this review and we refer to [12] for further details. Here we want to focus on the case $\kappa = 0$ when there is no dispersive tail and the solution splits into a pure (but infinite) sum of peakons. Despite the fact that this behavior was already expected from the original work of Camassa and Holm and emphasized as an important conjecture by McKean in [70], this corresponding peakon resolution conjecture for the CH equation remained open and was only solved by two of us in [34]. As already mentioned, the standard techniques developed so far did not apply in this situation, and a new approach was required. Here we will sketch a particularly simple method based on a novel coupling problem for entire functions [35].

For this purpose, suppose that (u, μ) is a global conservative solution of the CH equation. As always the starting point is the isospectral problem (42), where we

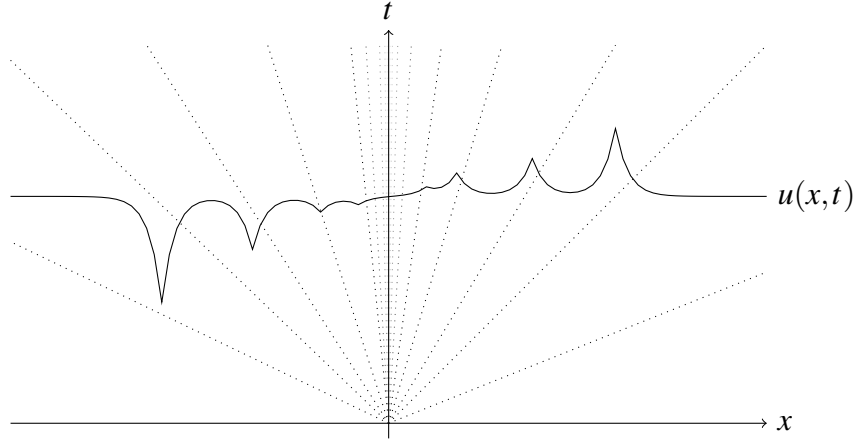


Figure 1: Each of the dotted lines $x = \frac{1}{2\lambda}t$ emanating from the origin and accumulating towards the t -axis corresponds to an eigenvalue $\lambda \in \sigma$ of the underlying isospectral problem. After long enough time, one can see that the solution u splits into a train of single peakons, each of which travels along one of the rays, with height and speed determined by the corresponding eigenvalue.

assume that the underlying spectrum satisfies the condition (46). With the principal notation from the previous section, we now proceed with a simple rescaling

$$\Phi_{\pm}(z, x, t) = e^{\pm \frac{x}{2\lambda}} \phi_{\pm}(z, x, t), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (48)$$

such that the coupling condition reads

$$\Phi_+(\lambda, x, t) = e^{x - \frac{t}{2\lambda}} c_{\lambda}(0) \Phi_-(\lambda, x, t), \quad \lambda \in \sigma, \quad (49)$$

and switch to a moving frame, letting $t \rightarrow \infty$ as $\eta := \frac{t}{2x}$ is kept constant. Now for every $\lambda \in \sigma$ with $\eta^{-1} > \lambda^{-1}$ we have that $e^{x - \frac{t}{2\lambda}} = e^{\frac{t}{2}(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\lambda})} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ and for every $\lambda \in \sigma$ with $\eta^{-1} < \lambda^{-1}$ we have that $e^{x - \frac{t}{2\lambda}} = e^{\frac{t}{2}(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\lambda})} \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$. Consequently, in the first case the coupling condition asymptotically reads $\Phi_+(\lambda, x, \infty) = 0$ and in the second case $\Phi_-(\lambda, x, \infty) = 0$. Finally, one uses the fact that the function

$$\frac{z \Phi_-(z, x, t) \Phi_+(z, x, t)}{W(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (50)$$

is the diagonal of the kernel of the Green's function of our isospectral problem and as such, a meromorphic Herglotz-Nevanlinna function. But it is a well-known result that for a meromorphic Herglotz-Nevanlinna function the poles and zeros are interlacing implying that in the limit as $t \rightarrow \infty$ the zeros of $\Phi_-(z, x, t) \Phi_+(z, x, t)$ will cancel with the zeros of $W(z)$, except for at most one in the case $\eta \in \sigma$. Hence

we can cancel these zeros from the picture and are asymptotically left with a coupling problem which has at most one coupling condition. Since such a problem can easily be solved explicitly, this leads to the following asymptotics (see [35])

$$u(x, t) = \sum_{\lambda \in \sigma} \frac{1}{2\lambda} e^{-|x - \frac{t}{2\lambda} + \xi_\lambda|} + o(1), \quad (51)$$

which hold uniformly for all $x \in \mathbb{R}$ as $t \rightarrow \infty$. The phase shifts ξ_λ appearing in this formula are given by

$$\xi_\lambda = \ln |c_\lambda(0)| + \sum_{k \in \sigma \setminus \{\lambda\}} \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{k} \right) \ln \left| 1 - \frac{\lambda}{k} \right|, \quad \lambda \in \sigma. \quad (52)$$

Therefore, the typical long-time behavior of the function u of our global conservative solution (u, μ) of the CH equation can be depicted as shown by Figure 1.

Acknowledgements. This research has been supported by the Austrian Science Fund (FWF) under Grants No. J3455 and P26060.

References

- [1] V. I. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **16**, 319–361 (1966).
- [2] T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Linear Operators in Spaces with an Indefinite Metric*, Wiley-Interscience, 1989.
- [3] R. Beals, D. H. Sattinger and J. Szmigielski, *Acoustic scattering and the extended Korteweg-de Vries hierarchy*, Adv. Math. **140**, no. 2, 190–206 (1998).
- [4] R. Beals, D. H. Sattinger and J. Szmigielski, *Multipeakons and the classical moment problem*, Adv. Math. **154**, no. 2, 229–257 (2000).
- [5] R. Beals, D. H. Sattinger and J. Szmigielski, *Periodic peakons and Calogero-Françoise flows*, J. Inst. Math. Jussieu **4**, no. 1, 1–27 (2005).
- [6] M. I. Belishev, *Inverse spectral indefinite problem for the equation $y'' + \lambda p(x)y = 0$ on an interval*, Funct. Anal. Appl. **21**, no. 2, 146–148 (1987).
- [7] C. Bennewitz, *On the spectral problem associated with the Camassa-Holm equation*, J. Nonlinear Math. Phys. **11**, no. 4, 422–434 (2004).
- [8] C. Bennewitz, B. M. Brown and R. Weikard, *Inverse spectral and scattering theory for the half-line left-definite Sturm-Liouville problem*, SIAM J. Math. Anal. **40**, no. 5, 2105–2131 (2008/09).

- [9] C. Bennewitz, B. M. Brown and R. Weikard, *Scattering and inverse scattering for a left-definite Sturm-Liouville problem*, J. Diff. Eqs. **253**, 2380–2419 (2012).
- [10] A. Bressan and A. Constantin, *Global conservative solutions of the Camassa-Holm equation*, Arch. Ration. Mech. Anal. **183**, no. 2, 215–239 (2007).
- [11] A. Bressan and A. Constantin, *Global dissipative solutions of the Camassa-Holm equation*, Anal. Appl. (Singap.) **5**, no. 1, 1–27 (2007).
- [12] A. Boutet de Monvel, A. Kostenko, D. Shepelsky and G. Teschl, *Long-time asymptotics for the Camassa-Holm equation*, SIAM J. Math. Anal. **41**, no 4, 1559–1588 (2009).
- [13] F. Calogero, *An integrable Hamiltonian system*, Phys. Lett. A **201**, 306–310 (1995).
- [14] F. Calogero and J. P. Francoise, *A completely integrable Hamiltonian system*, J. Math. Phys. **37**, 2863–2871 (1996).
- [15] R. Camassa and D. Holm, *An integrable shallow water equation with peaked solitons*, Phys. Rev. Lett. **71**, no. 11, 1661–1664 (1993).
- [16] R. Camassa, D. D. Holm and J. M. Hyman, *A new integrable shallow water equation*, Adv. Appl. Mech. **31**, 1–33 (1994).
- [17] A. Constantin, *On the scattering problem for the Camassa-Holm equation*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **457**, 953–970 (2001).
- [18] A. Constantin and J. Escher, *Global existence and blow-up for a shallow water equation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **26**, no. 2, 303–328 (1998).
- [19] A. Constantin and J. Escher, *Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations*, Acta Math. **181**, no. 2, 229–243 (1998).
- [20] A. Constantin and R. I. Ivanov, *Poisson structure and action-angle variables for the Camassa-Holm equation*, Lett. Math. Phys. **76**, 93–108 (2006).
- [21] A. Constantin, V. S. Gerdjikov, and R. I. Ivanov, *Inverse scattering transform for the Camassa-Holm equation*, Inverse Problems **22**, 2197–2207 (2006).
- [22] A. Constantin and D. Lannes, *The hydrodynamical relevance of the Camassa-Holm and Degasperis-Procesi equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **192**, no. 1, 165–186 (2009).
- [23] A. Constantin and H. P. McKean, *A shallow water equation on the circle*, Commun. Pure Appl. Math. **52**, 949–982 (1999).
- [24] A. Constantin and L. Molinet, *Global weak solutions for a shallow water equation*, Commun. Math. Phys. **211**, no. 1, 45–61 (2000).
- [25] H.-H. Dai, *Model equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney-Rivlin rod*, Acta Mech. **127**, 293–308 (1998).
- [26] L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1968.
- [27] H. Dym and H. P. McKean, *Gaussian Processes, Function Theory and The Inverse Spectral Problem*, Probability and Mathematical Statistics **31**, Academic Press, New York-London, 1976.
- [28] D. G. Ebin and J. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Ann. Math. **92**, 102–163 (1970).
- [29] J. Eckhardt, *Direct and inverse spectral theory of singular left-definite Sturm-Liouville operators*, J. Diff. Eqs. **253**, no. 2, 604–634 (2012).
- [30] J. Eckhardt and A. Kostenko, *An isospectral problem for global conservative multi-*

- peakon solutions of the Camassa-Holm equation*, Commun. Math. Phys. **239**, 893–918 (2014).
- [31] J. Eckhardt and A. Kostenko, *The inverse spectral problem for indefinite strings*, Invent. Math. **204**, no. 3, 939–977 (2016).
 - [32] J. Eckhardt and A. Kostenko, *A quadratic operator pencil associated with the conservative Camassa-Holm flow*, Bull. Soc. Math. France, to appear.
 - [33] J. Eckhardt and G. Teschl, *Sturm-Liouville operators with measure-valued coefficients*, J. Anal. Math. **120**, 151–224 (2013).
 - [34] J. Eckhardt and G. Teschl, *On the isospectral problem of the dispersionless Camassa-Holm equation*, Adv. Math. **235**, 469–495 (2013).
 - [35] J. Eckhardt and G. Teschl, *A coupling problem for entire functions and its application to the long-time asymptotics of integrable wave equations*, Nonlinearity **29**, 1036–1046 (2016).
 - [36] M. Fisher and J. Schiff, *The Camassa-Holm equation: conserved quantities and the initial value problem*, Phys. Lett. A **259**, 371–376 (1999).
 - [37] A. Fleige, *Spectral theory of indefinite Krein-Feller differential operators*, Mathematical Research, 98, Akademie Verlag, Berlin, 1996.
 - [38] A. Fleige, *The critical point infinity associated with indefinite Sturm-Liouville problems*, in *Operator Theory*, 395–429, Springer, Berlin, 2015.
 - [39] B. Fuchssteiner and A. S. Fokas, *Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries*, Phys. D **4**, no. 1, 47–66 (1981/82).
 - [40] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices. Vol. 2*, translated by K. A. Hirsch, Amer. Math. Soc., Chelsea Publishing, New York, 1959.
 - [41] C. Gilson and A. Pickering, *Factorization and Painlevé analysis of a class of nonlinear third-order partial differential equations*, J. Phys. A **28**, 2871–2888 (1995).
 - [42] M. L. Gorbachuk and V. I. Gorbachuk, *M. G. Krein’s Lectures on Entire Operators*, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 1997.
 - [43] K. Grunert and G. Teschl, *Long-time asymptotics for the Korteweg-de Vries equation via nonlinear steepest descent*, Math. Phys. Anal. Geom. **12**, 287–324 (2009).
 - [44] H. Holden and X. Raynaud, *A convergent numerical scheme for the Camassa-Holm equation based on multipeakons*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **14**, no. 3, 505–523 (2006).
 - [45] H. Holden and X. Raynaud, *Global conservative solutions of the Camassa-Holm equation – a Lagrangian point of view*, Commun. Partial Differential Equations **32**, no. 10-12, 1511–1549 (2007).
 - [46] H. Holden and X. Raynaud, *Global conservative multipeakon solutions of the Camassa-Holm equation*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **4**, no. 1, 39–64 (2007).
 - [47] H. Holden and X. Raynaud, *Dissipative solutions for the Camassa-Holm equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **24**, no. 4, 1047–1112 (2009).
 - [48] J. K. Hunter and R. Saxton, *Dynamics of director fields*, SIAM J. Appl. Math. **51**, 1498–1521 (1991).
 - [49] J. K. Hunter and Y. Zheng, *On a completely integrable nonlinear hyperbolic variational equation*, Phys. D **79**, 361–386 (1994).
 - [50] A. R. Its, *The Riemann-Hilbert problem and integrable systems*, Notices Amer. Math. Soc. **50**, no. 11, 1389–1400 (2003).

- [51] R. I. Ivanov, *Extended Camassa-Holm hierarchy and conserved quantities*, Z. Naturforschung **61a**, 133–138 (2006).
- [52] D. Ionescu-Kruse, *Variational derivation of the Camassa-Holm shallow water equation*, J. Nonlinear Math. Phys. **14**, no. 3, 303–312 (2007).
- [53] R. S. Johnson, *Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves*, J. Fluid Mech. **455**, 63–82 (2002).
- [54] R. S. Johnson, *On solutions of the Camassa-Holm equation*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **459**, 1687–1708 (2003).
- [55] I. S. Kac and M. G. Kreĭn, *On the spectral functions of the string*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **103**, 19–102 (1974).
- [56] D. J. Kaup, *Evolution of the scattering coefficients of the Camassa-Holm equation, for general initial data*, Studies Appl. Math. **117**, 149–164 (2006).
- [57] B. Khesin and G. Misiołek, *Euler equations on homogeneous spaces and Virasoro orbits*, Adv. Math. **176**, 116–144 (2003).
- [58] A. Kostenko, *The similarity problem for indefinite Sturm-Liouville operators and the HELP inequality*, Adv. Math. **246**, 368–413 (2013).
- [59] S. Kotani and S. Watanabe, *Kreĭn's spectral theory of strings and generalized diffusion processes*, in Functional analysis in Markov processes (Katata/Kyoto, 1981), pp. 235–259, Lecture Notes in Math. **923**, 1982.
- [60] M. G. Kreĭn and H. Langer, *On some extension problems which are closely connected with the theory of Hermitian operators in a space Π_{κ} . III. Indefinite analogues of the Hamburger and Stieltjes moment problems*, I. Beiträge Anal. **14**, 25–40 (1979); II. Beiträge Anal. **15**, 27–45 (1980).
- [61] H. Langer and H. Winkler, *Direct and inverse spectral problems for generalized strings*, Integral Equations Operator Theory **30**, no. 4, 409–431 (1998).
- [62] J. Lenells, *Traveling wave solutions of the Camassa-Holm and Korteweg-de Vries equations*, J. Nonl. Math. Phys. **11**, 508–520 (2004).
- [63] J. Lenells, *The correspondence between KdV and Camassa-Holm*, Intern. Math. Res. Not. **2004**, 3797–3811 (2004).
- [64] J. Lenells, *Conservation laws of the Camassa-Holm equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 869–880 (2005).
- [65] J. Lenells, *Traveling wave solutions of the Camassa-Holm equation*, J. Diff. Eqs. **217**, 393–430 (2005).
- [66] Y. Li and P. Olver, *Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation*, J. Diff. Eqs. **162**, 27–63 (2000).
- [67] Y. Li and J. E. Zhang, *The multiple-soliton solution of the Camassa-Holm equation*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **460**, 2617–2627 (2004).
- [68] Y. Matsuno, *Parametric representation for the multisoliton solution of the Camassa-Holm equation*, J. Phys. Soc. Japan **74**, 1983–1987 (2005).
- [69] H. P. McKean, *Breakdown of a shallow water equation*, Asian J. Math. **2**, no. 4, 867–874 (1998).
- [70] H. P. McKean, *Fredholm determinants and the Camassa-Holm hierarchy*, Commun. Pure Appl. Math. **56**, 638–680 (2003).
- [71] H. P. McKean, *Breakdown of the Camassa-Holm equation*, Commun. Pure Appl. Math. **57**, 416–418 (2004).

- [72] G. Misiólek, *A shallow water equation as a geodesic flow on the Bott-Virasoro group*, J. Geom. Phys. **24**, 203–208 (1998).
- [73] L. Molinet, *On well-posedness results for the Camassa-Holm equation on the line: A survey*, J. Nonl. Math. Phys. **11**, 521–533 (2004).
- [74] J. Moser, *Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential – an integrable system*, in *Dynamical systems, theory and applications*, 467–497, Lecture Notes in Phys., Vol. 38, Springer, Berlin, 1975.
- [75] V. Ovsienko and B. Khesin, *Korteweg-de Vries superequations as an Euler equation*, Funct. Anal. Appl. **21**, 329–331 (1987).
- [76] E. Reyes, *Geometric integrability of the Camassa-Holm equation*, Lett. Math. Phys. **59**, 117–131 (2002).
- [77] G. Rodriguez-Blanco, *On the Cauchy problem for the Camassa-Holm equation*, Nonlinear Anal. **14**, 309–327 (2001).
- [78] A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, *Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Math. Notes **66**, no. 5-6, 741–753 (1999).
- [79] J. Schiff, *The Camassa-Holm equation: A loop group approach*, Phys. D **121**, 24–43 (1998).
- [80] T.-J. Stieltjes, *Recherches sur les Fractions Continues*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. **8**, no. 4, 1–122 (1894).
- [81] T. Tao, *Why are solitons stable?*, Bull. Amer. Math. Soc. **46**, no. 1, 1–33 (2009).
- [82] Z. Xin and P. Zhang, *On the weak solutions to a shallow water equation*, Commun. Pure Appl. Math. **53**, no. 11, 1411–1433 (2000).

Adresse der Autoren: Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A 1090 Wien.

Unvollständigkeit: Logik, Informatik, Zahlentheorie, Geometrie, Analysis

Martin Goldstern

Technische Universität Wien

1 Einleitung

Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz (1931) ist einer der wichtigsten Sätze in der Mathematischen Logik. Eine direkte Konsequenz aus diesem Satz ist die Tatsache, dass nicht nur die Peano-Axiome der Arithmetik „unvollständig“ sind (in dem Sinn, dass sich nicht alle wahren Sätze der Arithmetik aus ihnen herleiten lassen), sondern dass es überhaupt kein Axiomensystem für die Arithmetik gibt, das einerseits sinnvoll¹ und andererseits vollständig ist.

Eng verwandt mit dem Unvollständigkeitssatz ist die von Turing bewiesene Unentscheidbarkeit des Halteproblems: Es gibt keinen Algorithmus E , der für jeden vorgelegten Algorithmus X entscheiden kann, ob X in endlicher Zeit hält.

Im Laufe der Jahre wurde diese Sätze aus der Mathematischen Logik bzw. aus der Theoretischen Informatik mehrfach verwendet, um die Unlösbarkeit von gewissen mathematischen Problemen zu zeigen. Im Jahr 1970 bewies Yuri Matiyasevich (auch: Juri Matijassewitsch), dass Hilberts Zehntes Problem unlösbar ist: Es gibt keine Methode, mit der man von jeder vorgelegten diophantischen Gleichung feststellen kann, ob sie in den ganzen Zahlen lösbar ist.

Ähnliche Resultate gibt es in vielen anderen Gebieten der Mathematik, wie der Gruppentheorie oder der Topologie (eine Liste solcher Resultate findet man etwa in [Poo14]) und sogar in der Physik.

¹Genauer: entscheidbar oder zumindest semi-entscheidbar, was im nächsten Abschnitt definiert wird; ein Axiomensystem, das nicht zumindest semi-entscheidbar ist, kann man in der Praxis nicht verwenden.

Im vorliegenden Artikel sollen einige dieser Unvollständigkeits- bzw. Unentscheidbarkeitsresultate besprochen werden, zusammen mit Beweisfragmenten, die einen Einblick in die Methoden dieser Beweise geben.

Dank. *Ich danke Jakob Kellner für seine geduldigen Erklärungen zur Quantenphysik und für seine Hilfe bei der Formulierung des letzten Abschnitts in Teil 7.*

2 Berechenbare und semi-berechenbare Mengen

Eine Funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ heißt berechenbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der für jede Eingabe $n \in \mathbb{N}$ den Wert $f(n)$ in endlicher Zeit berechnet und dann hält. Diese informelle Definition kann präzisiert werden (siehe etwa Satz 4.5); die üblichen Formalisierungen führen aber alle auf den gleichen Begriff.²

Wichtig ist hier Folgendes: Wir können uns auf eine beliebige in der Praxis verwendete Programmiersprache beziehen, verlangen aber, dass der zugrundeliegende Computer, der das Programm ausführen soll, potentiell unendlich viel Platz hat und auch beliebig lang rechnen darf; die Rechenzeit darf auch länger als die erwartete Lebensdauer des Universums sein. Auch dürfen Eingaben beliebig lang (aber endlich) sein.

Unter einer partiellen Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ verstehen wir eine Funktion, die auf einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ definiert ist. (In dieser Sprechweise ist also jede totale Funktion auch eine partielle Funktion.)

Wir nennen eine partielle Funktion f berechenbar, wenn es ein Programm gibt, das zu jeder Eingabe $n \in \text{dom}(f)$ nach endlich vielen Schritten den Wert $f(n)$ liefert; bei einer Eingabe von $n \in \mathbb{N} \setminus \text{dom}(f)$ soll das Programm keine Ausgabe liefern und nie halten.

Oft ist es praktisch, die obigen Definitionen zu verallgemeinern: Statt der Menge $\mathbb{N}$ betrachten wir die Menge aller endlichen Strings oder Worte über einem endlichen Alphabet A (also aller endlichen Folgen, deren Einträge Elemente von A sind); die Menge aller Worte, die man aus den Buchstaben in A bilden kann, heißt A^* . Die Menge $\mathbb{N}$ können wir in unärer Darstellung als Spezialfall A^* mit einelementiger Menge A betrachten.

²Im Allgemeinen wird man die Berechenbarkeit einer Funktion dadurch beweisen, dass man explizit *einen* Algorithmus angibt, der sie berechnet. Aber im Prinzip muss nur die *Existenz* eines solchen Algorithmus gezeigt werden. So ist zum Beispiel die Antwort auf die Frage „Gilt die Goldbach-Vermutung?“ in trivialster Weise berechenbar, weil es zwei Algorithmen gibt, von denen genau einer die richtige Antwort auf diese Frage liefert. (Nämlich: Der eine der beiden Algorithmen gibt unabhängig von jeder Eingabe „Ja“ aus, der andere „Nein“.) Die Frage nach der Wahrheit der Goldbach-Vermutung wird also durch die bloße Existenz einer korrekten Antwort nicht gelöst. Sinnvoll ist die Frage nach der Berechenbarkeit einer Funktion offenbar nur dann, wenn ihr Definitionsbereich unendlich groß ist.

So können wir auch Funktionen betrachten, deren Argumente nicht nur Zahlen sind, sondern zum Beispiel (endliche!) Formeln oder Programme; alternativ (aber mühsamer) könnten wir Strings, Formeln oder Programme auch durch natürliche Zahlen codieren.

Definition 2.1. Unter einem *Problem* verstehen wir eine Teilmenge von $\mathbb{N}^k$ oder eine Teilmenge von $(A^*)^k$ für ein beliebiges endliches Alphabet A .

Jedes Element von $\mathbb{N}^k$ bzw. von $(A^*)^k$ heißt „Instanz“ des betrachteten Problems.

Ein Problem P zu „lösen“ heißt, einen Algorithmus anzugeben, der belegt, dass P entscheidbar ist (siehe 2.2); die Instanzen des Problems sind also die möglichen Eingaben für diesen Algorithmus.

Definition 2.2. Ein Problem $M \subseteq \mathbb{N}$ heißt entscheidbar (oder „lösbar“), wenn seine charakteristische Funktion $\chi_M : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ berechenbar ist (χ_M ist definiert durch $\text{dom}(\chi_M) = \mathbb{N}$, $\chi_M(n) = 1 \Leftrightarrow n \in M$).

Analog wird Entscheidbarkeit für Probleme $M \subseteq A^*$ oder auch $M \subseteq \mathbb{N}^k$ oder $M \subseteq (A^*)^k$ definiert.

Definition 2.3. Das Problem M heißt semi-entscheidbar, wenn seine partielle charakteristische Funktion $\tilde{\chi}_M$ berechenbar ist, wobei $\tilde{\chi}_M$ eine konstante Funktion sein soll, deren Definitionsbereich genau die Menge M ist.

Beispiele für Mengen, die semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar sind, werden wir in den nächsten Abschnitten kennenlernen: die Menge aller haltenden Programme, die Menge aller beweisbaren Formeln, die Menge aller wahren Σ_1 -Formeln, die Menge aller lösbaren diophantischen Gleichungen.

Die semi-entscheidbaren Mengen heißen auch „rekursiv aufzählbar“ (recursively enumerable, in neuerer Zeit auch computably enumerable), was durch Punkt (2) in der folgenden Charakterisierung motiviert wird:

Satz 2.4. Sei $A \subseteq \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) A ist semi-entscheidbar.
- (2) A ist Wertebereich einer berechenbaren totalen Funktion oder aber $A = \emptyset$.
- (3) A ist Projektion einer entscheidbaren Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. (Das heißt: Es gibt eine entscheidbare Teilmenge $C \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y (x, y) \in C\}$.)
- (4) A ist Σ_1 -Menge (siehe 4.4).

Den Name „semi-entscheidbar“ kann man durch folgende Charakterisierung motivieren:

Satz 2.5. Eine Menge $C \subseteq \mathbb{N}$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl C als auch $\mathbb{N} \setminus C$ semi-entscheidbar sind.

Beweisskizze. Die Implikation $\Rightarrow$ ist trivial. Zur Umkehrung: Wenn man die Programme, die $\tilde{\chi}_C$ (siehe Definition 2.3) und $\tilde{\chi}_{\mathbb{N} \setminus C}$ berechnen, auf einer beliebigen Eingabe n gleichzeitig laufen lässt, wird eines der beiden in endlicher Zeit halten; damit ist die Antwort auf die Frage „ $n \in C$?“ berechnet. $\square$

3 Das Halteproblem

Satz 3.1. *Die folgenden Mengen sind alle entscheidbar:*

- * (Für eine feste Programmiersprache³ S :) Die Menge aller syntaktisch korrekten Programme⁴ P in S .
- * (Für ein festes Programm P in S , festes k :) Die Menge aller Eingaben e , für die P bei Eingabe e nach höchstens k Schritten hält.
- * (Für festes S :) Die Menge aller Tripel (P, e, k) , sodass P bei Eingabe e nach höchstens k Schritten hält.

Satz 3.2. *Die folgenden Mengen sind alle semi-entscheidbar, aber im Allgemeinen nicht entscheidbar:*

- * (Für ein geeignet konstruiertes Programm P_0 in S :) Die Menge aller Eingaben e , für die P_0 bei Eingabe e nach endlich vielen Schritten hält.
- * (Für festes S :) Die Menge aller Programme P , sodass P (bei leerer Eingabe) nach endlich vielen Schritten hält.
- * (Für festes S :) Die Menge aller Paare (P, e) , sodass P bei Eingabe e nach endlich vielen Schritten hält; diese Menge heißt „Halteproblem“.

Beweisskizze. Dass die als entscheidbar beschriebenen Mengen tatsächlich entscheidbar sind, kann man leicht sehen, weil es offensichtliche Algorithmen gibt, die diese Problem lösen.⁵ Ebenso kann man Semi-Entscheidbarkeit durch explizite Algorithmen beweisen.

Die wesentliche Aussage ist jene, dass die oben erwähnten semi-entscheidbaren Mengen nicht entscheidbar sind; wir zeigen dies für die dritte der obigen Aussagen mit einem indirekten⁶ Beweis.

³Hier ist eine konkrete Programmiersprache aus der Praxis gemeint, nicht konstruierte Gegenbeispiele.

⁴Wir betrachten hier nur Programme, die (nur) zu Beginn eine Eingabe e akzeptieren, und die am Ende ihres Programmablaufs – wenn sie diesen überhaupt erreichen – den Wert einer Programmvariablen ausgeben, sonst aber keine Ausgabe haben.

⁵Man kann diese Algorithmen nicht nur explizit anschreiben, man kann auch beweisen, dass sie bei jeder Eingabe mit der richtigen Antwort halten.

⁶So wie Cantors Diagonalargument könnte man auch diesen Beweis zu einem direkten Beweis umformulieren: Es gibt eine explizite berechenbare Funktion, die jedem Programm Q ein Programm $R = R(Q)$ zuordnet, sodass Q das Halteverhalten von R nicht richtig voraussagen kann.

Angenommen, Q löst das Halteproblem (hält also insbesondere bei jeder Eingabe). Nun kann man ein neues Programm R schreiben, das Folgendes macht:

- * R erhält eine Eingabe e . Wenn e keine Beschreibung eines Programms ist, ist es egal, was R tut – sagen wir, R gibt die Antwort „hält“ aus.
- * Sonst: R ruft das Programm Q mit Eingabe (e, e) auf.
- * Wenn Q das Ergebnis „hält“ liefert, geht R in eine Endlosschleife; wenn aber Q das Ergebnis „hält nicht“ liefert, dann hält R .

Das Programm R kann bei Eingabe R also nur dann halten, wenn Q bei Eingabe (R, R) die Antwort „Hält nicht“ liefert; in jedem Fall liefert Q eine falsche Antwort, das heißt: Q löst das Halteproblem nicht. $\square$

4 Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Wir betrachten die folgende prädikatenlogische Sprache, die man verwenden kann, um (einfache) zahlentheoretische Aussagen zu formulieren.

Die Sprache⁷ der Peano-Arithmetik PA enthält (neben Variablen und logischen Zeichen, wie Junktoren, Quantoren, Klammern, Gleichheit) die Symbole

$$+ \quad \cdot \quad \uparrow \quad 0 \quad 1 \quad <$$

Dabei sind 0 und 1 Konstantensymbole, $+$ und $\cdot$ und $\uparrow$ sind zweistellige Operationssymbole, $<$ ist ein zweistelliges Relationssymbol. Statt $x \uparrow y$ schreiben wir üblicherweise x^y , statt $x \cdot y$ gelegentlich xy .

In dieser Sprache sind Quantifizierungen nur über natürliche Zahlen erlaubt, nicht über Mengen natürlicher Zahlen oder reelle Zahlen.⁸

Mithilfe dieser Symbole kann man nun in der üblichen Weise Terme (zum Beispiel $x^u + y^u$) und Formeln (zum Beispiel $\exists x \exists y \exists z (x^u + y^u = z^u) \wedge (0 < x \wedge 0 < y \wedge 1 + 1 < u)$) bilden.

Die Axiome von PA beschreiben die in der Sprache vorkommenden Operationen/Relationen induktiv. Die Addition wird etwa durch die Axiome

$$0 + 1 = 1, \quad \forall x : (x + 0 = 0), \quad \forall x \forall y : (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$$

⁷Aus Bequemlichkeit erlauben wir hier auch ein Symbol für die Exponentiation. In dem von Gödel betrachteten System gab es nur Addition und Multiplikation. Die Exponentiation erlaubt es, einige Überlegungen zu verkürzen.

⁸Über endliche Mengen oder Folgen natürlicher Zahlen kann man nur mithilfe von Umwegen sprechen, etwa indem man eine endliche Menge von natürlichen Zahlen als Bitfolge und somit wieder als Zahl codiert. So kann man etwa die Aussage „Es gibt eine endliche Menge M , die 1 enthält, mit der Eigenschaft E “ durch „Es gibt eine natürliche Zahl, die bei Division durch 4 Rest 2 (binär 10) oder 3 (binär 11) lässt und ...“ umschreiben.

beschrieben, ähnlich $\cdot$ und $\uparrow$. Die Relation $<$ kann man zum Beispiel⁹ durch die Axiome $\forall x \neg(x < 0)$ und $\forall x \forall y ((x < y + 1) \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$ charakterisieren. Weiters gehört zu den Axiomen von PA noch die unendliche Liste der Induktionsaxiome. Für jede Formel $\varphi(x, \vec{u})$ (mit $k + 1$ freien Variablen $x, u_1, \dots, u_k$) lautet das Induktionsaxiom so:

$$\forall \vec{u} : (\varphi(-, \vec{u}) \text{ ist induktiv} \rightarrow \forall x (\varphi(x, \vec{u}))),$$

wobei $\vec{u}$ eine Abkürzung für $u_1, \dots, u_k$ ist und „ $\varphi(-, \vec{u})$ induktiv“ eine Abkürzung für $\varphi(0, \vec{u}) \wedge \forall x (\varphi(x, \vec{u}) \rightarrow \varphi(x + 1, \vec{u}))$ sein soll.

Ein formaler Beweis aus den PA-Axiomen ist nun eine endliche Folge $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ von Formeln, wobei jede dieser Formeln entweder eines der genannten Axiome ist oder „offensichtlich“ wahr ist¹⁰, oder auf „offensichtliche Weise“ aus früheren Formeln folgt.¹¹

Analog kann man für eine beliebige entscheidbare oder auch nur semi-entscheidbare¹² Axiomenmenge T die Menge der aus T beweisbaren Sätze definieren.

Es gilt der folgende wichtige Satz, der aber angesichts seines einfachen Beweises nur den Namen „Anmerkung“ verdient.

Anmerkung 4.1. Sei T eine entscheidbare¹³ Menge von Axiomen (zum Beispiel $T := PA$). Dann ist die Menge aller aus T beweisbaren Formeln semi-entscheidbar.

Beweisskizze. Der folgende Algorithmus berechnet die partielle charakteristische Funktion der Menge der T -beweisbaren Formeln:

- (1) Lies die Eingabe φ .
- (2) $n := 1$.
- (3) Betrachte alle Axiome in T , die nur höchstens n Zeichen enthalten. (Die Liste aller dieser endlich vielen Axiome lässt sich in endlicher Zeit generieren, denn fast alle Axiome in T enthalten mehr als n Zeichen.)

⁹Alternativ: $x < y \leftrightarrow \exists z(x + z = y \wedge z \neq 0)$.

¹⁰Das sind die sogenannten „logischen Axiome“, eine explizit gegebene unendliche Liste, in der etwa Formeln wie $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ für alle Formeln A und B , oder $\forall x (x = x)$ oder $(\forall x \varphi(x)) \rightarrow \varphi(1 + 1)$ stehen.

¹¹Hier kann man sich im Prinzip damit begnügen, den Modus Ponens als „offensichtliche Folgerung“ zu bezeichnen, das ist die Schlussregel „Aus $A \rightarrow B$ und A folgt B “. Um Beweise abzukürzen, kann man aber zusätzliche Schlussregeln einführen, wie etwa „Aus $A \rightarrow B \vee C$ und $A \rightarrow \neg B$ folgt $A \rightarrow C$ “.

¹²Ein Axiomensystem, das nicht zumindest semi-entscheidbar ist, ist nicht brauchbar; denn wie will man bei so einem Axiomensystem feststellen können, was ein Beweis ist?

¹³Oder auch nur semi-entscheidbare; der Beweis ist für entscheidbare Theorien eine Spur übersichtlicher.

- (4) Betrachte alle Beweise mit höchstens n Zeichen, die nur Axiome aus der Liste (3) enthalten. (Auch die Liste dieser Beweise lässt sich explizit generieren.)
 Kommt φ in diesen Beweisen vor? Wenn ja, dann gib „ φ ist T -beweisbar“ aus, STOP.
- (5) $n := n + 1$.
- (6) GOTO (3). □

Σ_0 -Mengen und Σ_1 -Mengen

Definition 4.2. Ein beschränkter Quantor ist ein Quantor der Form $\exists x < t(\dots)$ oder $\forall x < t(\dots)$, wobei t ein beliebiger Term ist, der allerdings die Variable x nicht enthalten darf. Ausführlicher kann man diese Formeln auch in der Form $\exists x(x < t \wedge \dots)$ bzw. $\forall x(x < t \rightarrow \dots)$ schreiben.

Definition 4.3. Unter einer Σ_0 -Formel (= beschränkte Formel) in der Sprache PA verstehen wir eine Formel, die entweder keine Quantoren enthält oder in der alle Quantoren beschränkt sind.

Beispiele für beschränkte Formeln sind etwa die Formeln

- * $\exists z < y + 1 (x * z = y) \vee (y = 0)$, abgekürzt „ x teilt y “ oder $x|y$
- * $1 < x \wedge \forall y < x (y|x \rightarrow y = 1)$, abgekürzt „ x ist prim“.

Der Wahrheitswert einer beschränkten geschlossenen¹⁴ Formel φ kann in endlicher Zeit ausgerechnet werden. Es gilt also:

- * Die Menge aller wahren Σ_0 -Formeln ist entscheidbar.

Eine Σ_0 -Menge ist eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}^k$, die durch eine Σ_0 -Formel definiert wird, also eine Menge der Form

$$M_\varphi := \{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k \mid \varphi(a_1, \dots, a_k)\}. \quad (\varphi \text{ beschränkt})$$

Ähnlich wie oben zeigt man leicht:

- * Jede Σ_0 -Menge ist entscheidbar.

Definition 4.4. Eine Σ_1 -Formel ist eine Formel der Form $\exists x\psi$, wobei ψ eine beschränkte Formel ist.

¹⁴ „Geschlossen“ heißt: ohne freie Variable; alle vorkommenden Variablen sind also durch Quantoren gebunden.

Da die Formel $\exists x_1 \exists x_2 \psi$ zu $\exists y (\exists x_1 < y \exists x_2 < y \psi)$ äquivalent¹⁵ ist, sind die Σ_1 -Formeln modulo Äquivalenz unter Existenzquantifizierungen abgeschlossen. Daher erweitert man die obige Definition oft, indem man statt einem Existenzquantor beliebig viele Existenzquantoren erlaubt.

Weiters gilt: Wenn ϕ, ψ Σ_1 -Formeln sind und t ein sinnvoller¹⁶ Term ist, dann sind die Formeln

$$\exists x \phi, \quad \exists x < t \phi, \quad \forall x < t \phi, \quad \phi \wedge \psi, \quad \phi \vee \psi$$

jeweils zu einer Σ_1 -Formel äquivalent (im Allgemeinen aber nicht die Formeln $\forall x \phi$ und $\neg \phi$).

Wir haben schon angemerkt, dass Σ_0 -Mengen entscheidbar sind.

Für geschlossene Σ_1 -Formeln bzw. für Σ_1 -Mengen kann die analoge triviale Überlegung nur Folgendes zeigen:

- * Die Menge aller wahren Σ_1 -Formeln ist semi-entscheidbar. (Es gibt einen offensichtlichen Algorithmus, der bei Eingabe einer wahren Σ_1 -Formel $\exists x \psi(x)$ in endlicher Zeit herausfindet, dass diese Formel tatsächlich wahr ist; man muss nämlich nur alle potentiellen x -Werte durchprobieren. Bei Eingabe einer falschen Σ_1 -Formel hält dieser Algorithmus nie.)
- * Jede Σ_1 -Menge ist semi-entscheidbar.

Weiters ist jede partielle Funktion, deren Graph durch eine Σ_1 -Formel beschrieben wird, berechenbar. Wenn nämlich $y = f(x)$ zur Formel $\exists z \psi(x, y, z)$ äquivalent ist, wobei ψ eine beschränkte Formel ist, dann gibt es einen offensichtlichen Algorithmus A , der bei vorgegebenem Wert $x := k$ im Definitionsbereich von f alle möglichen Werte für y und z durchprobiert, bis er den richtigen y -Wert und den richtigen „Zeugen“ z gefunden hat.

Nun gilt aber auch die Umkehrung:

Satz 4.5. *Sei $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ eine berechenbare partielle Funktion.*

Dann gibt es eine Σ_1 -Formel $\phi(x_1, \dots, x_k, y)$, sodass die Menge $\{(a_1, \dots, a_k, b) \mid \phi(a_1, \dots, a_k, b)\}$ genau der Graph von f ist.

(Diese Eigenschaft, die berechenbare Funktionen charakterisiert, könnte man auch als Definition der Berechenbarkeit verwenden.)

Diese Formel ϕ lässt sich auch explizit aus einem Program P , welches f berechnet, konstruieren: $\phi(\vec{x}, y) :=$ „Es gibt einen Programmablauf (codiert durch eine einzige Zahl z), welcher beschreibt, wie P den Wert y bei Eingabe $\vec{x}$ ausrechnet.“

¹⁵Natürlich nur, wenn die Variable y in ψ nicht frei vorkommt. Mit Äquivalenz ist hier die in PA beweisbare Äquivalenz gemeint.

¹⁶D.h. ein Term, der x nicht enthält

Da dieses z eine enorm große Zahl ist, können alle Quantoren, die in der Formulierung von „beschreibt, wie $P \dots$ ausrechnet“ vorkommen, durch z beschränkt werden.

Die Menge aller natürlichen Zahlen, die ein (bei leerer Eingabe) haltendes Programm beschreiben, ist einerseits eine Σ_1 -Menge bzw. semi-entscheidbar, wie man durch explizite Angabe eines Programms¹⁷ leicht nachweisen kann, aber sie ist nicht entscheidbar – dies folgt aus der Unentscheidbarkeit des Halteproblems. Daher sind Σ_1 -Mengen im Allgemeinen nicht entscheidbar.

Unter einer Π_1 -Menge verstehen wir das Komplement einer Σ_1 -Menge, unter einer Π_1 -Formel die Negation einer Σ_1 -Formel, oder äquivalent: eine Formel der Form $\forall x_1 \dots \forall x_k \psi$, wobei ψ eine Formel mit freien Variablen $x_1, \dots, x_k$ ist, in der nur mehr beschränkte Quantoren auftreten. Wohlbekannte Beispiele von geschlossenen Π_1 -Formeln sind etwa der große Fermatsche Satz oder die Goldbach-Vermutung. Auch die Riemannsche Vermutung ist äquivalent zu einer explizit angebbaren geschlossenen Π_1 -Formel; der Satz von Robin [Rob84] sagt nämlich, dass die Riemannsche Vermutung genau dann gilt, wenn für alle $n > 5040$ die Beziehung $\sigma(n)/n < e^\gamma \log \log n$ gilt; Letzteres ist zwar eine Aussage in den reellen Zahlen, lässt sich aber zu einer Π_1 -Aussage über die natürlichen Zahlen umformulieren, da die vorkommenden Konstanten e, γ und Funktionen $\sigma, \log$ explizit berechenbar sind.

Beweisbarkeit, Unvollständigkeit

Wenn ϕ eine geschlossene beschränkte Formel ist (zum Beispiel „5 ist prim“ oder „es gibt mindestens 7 Primzahlen“), dann kann man nicht nur berechnen, ob ϕ wahr¹⁸ oder falsch ist, man kann auch (mithilfe der PA-Axiome) entweder ϕ oder $\neg \phi$ beweisen.

Für Σ_1 -Formeln ist die Sache etwas komplizierter. Wenn eine Σ_1 -Formel $\exists x \psi(x)$ – wobei in ψ nur beschränkte Quantoren auftauchen – wahr ist, dann gibt es eine Zahl n , sodass die Σ_0 -Formel $\psi(n)$ (genauer: $\psi(1 + 1 + \dots + 1)$) wahr und somit auch beweisbar ist. Dann ist aber auch $\exists x \psi(x)$ beweisbar.

¹⁷Hier ist ein Grobentwurf eines Programms S , das die partielle charakteristische Funktion der Menge aller haltenden Programme P berechnet: 1. Lies die Eingabe P . 2. Simuliere das Verhalten eines Computers, auf dem das Programm P läuft, indem du in einer Schleife jeden Berechnungsschritt von P nachvollziehst; wenn P hält, dann gib „Hält“ aus.

Wenn nun ein Programm P nicht hält, dann wird S mit Eingabe P auch nicht halten und liefert daher kein Ergebnis.

¹⁸Mit „Wahrheit“ ist hier immer die Gültigkeit in den natürlichen Zahlen gemeint. Der Gödelsche Vollständigkeitssatz, um den es hier nicht geht, bezieht sich auf einen anderen Begriff, nämlich den der Allgemeingültigkeit. Er besagt, dass eine Formel, die in jeder Struktur gilt, auch aus den logischen Axiomen beweisbar sein muss.

Für falsche Σ_1 -Formeln φ scheint es zunächst unklar, ob sie alle in PA widerlegt werden können, d.h. ob PA ihre Negation beweisen kann. (Oder äquivalent, ob alle wahren Π_1 -Formeln in PA bewiesen werden können.) Die Beispiele des Fermatschen Satzes oder der Goldbachschen Vermutung machen es plausibel, dass so eine Widerlegung zumindest nicht trivial sein wird.

Tatsächlich gibt es wahre Π_1 -Formeln, die nicht in PA beweisbar sind. Dies ist bereits eine Version des *Gödelschen Unvollständigkeitssatzes*.

Satz 4.6. *Sei $\varphi(x) = \exists y \psi(x, y)$ eine Σ_1 -Formel. (Alle Quantoren in ψ sind also beschränkt, und die Menge $A_\varphi := \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$ ist semi-entscheidbar.)*

Wenn die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$ nicht entscheidbar ist, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

** $\neg\varphi(n)$, es gilt also $\forall y \in \mathbb{N} \neg\psi(n, y)$.*

** In PA ist die Aussage $\forall y \in \mathbb{N} \neg\psi(n, y)$ nicht beweisbar.*

Beweis. Die Menge B aller Zahlen n , für die $\neg\varphi(n)$ beweisbar ist, ist einerseits eine Teilmenge von $\mathbb{N} \setminus A_\varphi$, andererseits (laut Anmerkung 4.1) semi-entscheidbar. Da A_φ semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar ist, kann $\mathbb{N} \setminus A_\varphi$ aber nicht semi-entscheidbar sein (siehe 2.5).

Es gilt also $B \subsetneq \mathbb{N} \setminus A_\varphi$; jedes $n \in (\mathbb{N} \setminus A_\varphi) \setminus B$ erfüllt die Behauptung. $\square$

Aus der Existenz von semi-entscheidbaren aber nicht entscheidbaren Mengen (siehe Halteproblem, Satz 3.2) folgt also die Unvollständigkeit der Peano-Arithmetik und auch anderer Axiomensysteme.

Der *Zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz* findet durch eine sorgfältige Analyse des Beweises des ersten Unvollständigkeitssatzes sogar eine explizite Π_1 -Formel, die zwar wahr, aber in PA nicht beweisbar ist, nämlich eine zahlentheoretische Codierung des Satzes „PA ist konsistent“, das heißt, des folgenden Satzes:

Es gibt keinen PA-Beweis, der die Formel $0 \neq 0$ beweist.

Wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, gibt es aber auch explizite Π_1 -Formeln, die zahlentheoretischen Charakter¹⁹ haben, nämlich Formeln der Form „Das folgende diophantische Gleichungssystem ist unlösbar“.

Es lässt sich also explizit eine diophantische Gleichung (bzw. ein Gleichungssystem) konstruieren, das zwar keine ganzzahlige Lösung hat, dessen Unlösbarkeit im System PA aber nicht beweisbar ist.

Anmerkung 4.7. Man könnte vermuten, dass die Unvollständigkeitssätze nur eine Schwäche von PA darstellen und leicht „repariert“ werden können, indem man

¹⁹Oder *scheinbar* zahlentheoretischen Charakter, denn die zugrundeliegenden Gleichungssysteme sind ja nicht durch zahlentheoretische Überlegungen motiviert.

die gefundenen wahren, aber unbeweisbaren Sätze als „vergessene“ Axiome zum System PA hinzufügt.

Der Gödelsche Satz bezieht sich aber auf beliebige Axiomensysteme, solange diese nur erstens entscheidbar²⁰ sind und zweitens einige grundlegende Sätze über die natürlichen Zahlen beweisen können. Auch für stärkere Axiomensysteme (z.B. für mengentheoretische Axiome wie ZFC und die in der Mengenlehre untersuchten Erweiterungen von ZFC, die im Prinzip als Grundlage für alle mathematischen Beweise ausreichen) gilt der zweite Unvollständigkeitssatz: Die Konsistenz eines hinreichend starken entscheidbaren Systems T ist in T nicht²¹ beweisbar.

5 Anwendung 1: Diophantische Gleichungen

Das Zehnte Problem in Hilberts berühmter Liste lautet so:

Eine diophantische Gleichung mit irgend welchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlencoeffizienten sei vorgelegt: man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar

Man kann leicht überlegen, dass man aus einem Algorithmus für die Lösbarkeit in den ganzen Zahlen auch einen Algorithmus für die Lösbarkeit in den natürlichen²² Zahlen gewinnen könnte und auch umgekehrt. Wenn zum Beispiel $p(x, y)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist, so kann man aus den nichtnegativen Nullstellen von $p(x, y) \cdot p(-x, y) \cdot p(x, -y) \cdot p(-x, -y)$ die ganzzahligen Nullstellen von $p(x, y)$ gewinnen. Umgekehrt kann man mit dem Vier-Quadrate-Satz von Lagrange aus den ganzzahligen Nullstellen von $p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)$ die nichtnegativen Nullstellen von $p(x, y)$ berechnen.

Ähnlich kann man die Lösbarkeit eines Gleichungssystems (etwa $p(x, y) = 0$, $q(x, y) = 0$) auf die Lösbarkeit einer einzigen Gleichung ($p^2 + q^2 = 0$) zurückführen.

An dieser Stelle bietet sich eine Definition an: Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}^k$ „diophantisch“, wenn es eine natürliche Zahl $m \geq 0$ und ein Polynom $p(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}[\vec{x}, \vec{y}]$ mit $k + m$ Variablen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ gibt, sodass für alle $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ gilt:

²⁰Semi-Entscheidbarkeit oder schwächere Voraussetzungen an die Eigenschaft „ φ ist ein Axiom“ genügen auch.

²¹Hier muss man nicht einmal verlangen, dass die Axiome in T alle wahr sind, d.h. in den natürlichen Zahlen gelten. Man muss allerdings verlangen, dass T zumindest konsistent ist, also nicht die Formel $0 \neq 0$ beweist; eine inkonsistente Theorie würde jede Formel beweisen, insbesondere auch die Aussage „ T ist konsistent“.

²²Hingegen ist die Frage noch offen, ob die Lösbarkeit in den *rationalen Zahlen* ebenfalls unentscheidbar ist.

$$\vec{a} \in A \iff \exists \vec{b} \in \mathbb{N}^m : p(\vec{a}, \vec{b}) = 0,$$

wenn also die Elemente von A genau jene Parameter $\vec{a}$ sind, für die die Gleichung $p(\vec{a}, \vec{y}) = 0$ in den natürlichen Zahlen lösbar ist.

Weiters definiert man, dass eine (totale oder partielle) Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ diophantisch ist, wenn ihr Graph (eine Teilmenge von $\mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$) diophantisch ist.

Aus den obigen Überlegungen folgt, dass es für diese Definition egal ist, ob wir uns auf Lösbarkeit in den ganzen oder in den natürlichen Zahlen beziehen und ob wir an Gleichungen oder an Gleichungssystemen interessiert sind. Man sieht leicht die folgenden Eigenschaften von diophantischen Mengen:

- * Jede einelementige Menge $\{a\}$ ist diophantisch, ebenso wie jede Menge der Form $\mathbb{N} \setminus \{a\}$. (Das Aufstellen eines Gleichungssystems, welches diese Mengen beschreibt, ist eine Übungsaufgabe.)
- * Die Familie der diophantischen Mengen ist unter endlichen Schnitten und endlichen Vereinigungen abgeschlossen, denn wenn $A = \{n : \exists \vec{y} p(n, \vec{y}) = 0\}$ und $B = \{n : \exists \vec{z} q(n, \vec{z}) = 0\}$ diophantische Mengen sind, dann sind auch $A \cup B$ und $A \cap B$ diophantisch, was durch die Polynome $p \cdot q$ bzw. durch $p^2 + q^2$ belegt wird.
- * Wenn $A \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ diophantisch ist, dann ist auch die „Projektion“ von A (also die Menge $\{\vec{a} \in \mathbb{N}^k \mid \exists b \in \mathbb{N} : (\vec{a}, b) \in A\}$) eine diophantische Menge.

Es ist klar, dass jede diophantische Menge eine Σ_1 -Menge ist, da sie ja durch eine explizite Σ_1 -Formel definiert wird. Der Satz von Matiyasevich besagt nun, dass auch die Umkehrung gilt:

Satz 5.1. *Die diophantischen Mengen sind genau die Σ_1 -Mengen (äquivalent: die semi-berechenbaren Mengen).*

Eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ist genau dann berechenbar, wenn sie diophantisch ist.

Da es semi-berechenbare Mengen gibt, die nicht berechenbar sind, wird Hilberts Zehntes Problem dadurch negativ entschieden: Es gibt keinen Algorithmus, der für beliebige Eingabe eines diophantischen Gleichungssystems nach endlicher Zeit eine korrekte Antwort („ist lösbar“/„ist nicht lösbar“) liefert.

Codierung

Um das Halteproblem auch aus der Sicht der Zahlentheorie darstellen zu können, empfiehlt es sich, eine besonders primitive Programmiersprache zu betrachten. (Programme in höheren Programmiersprachen lassen sich in unsere Sprache übersetzen, werden aber ungebührlich lang.)

Wir betrachten eine Programmiersprache, in der nur endlich viele (aber beliebig viele) Variable erlaubt sind, die nur (beliebig große) natürliche Zahlen als Werte annehmen können. Weiters erlauben wir nur besonders einfache Anweisungen in unserem Programm, wie $x := 0$, $x := x + 1$, $x := x - 1$, sowie unbedingte und bedingte Sprunganweisungen. Ein Programm besteht aus einer Folge von endlich vielen Anweisungen.

Als Übungsaufgabe kann man sich überlegen, dass die Grundrechnungsarten in dieser Sprache durch Programme berechnet werden können, d.h., dass wir etwa $x := y + z$ als Abkürzung für eine gewisse endliche Folge²³ von Anweisungen sehen können.

Ein „Zustand“ so eines Programms besteht nun aus einem Tupel $(p, x, y, \dots, z)$, wobei p angibt, welche Anweisung als nächstes ausgeführt werden muss, und die Zahlen $x, y, \dots, z$ angeben, welche Werte die entsprechenden Programmvariablen haben.

Die Abbildung f_P , die jedem solchen Zustand den „nächsten“ zuordnet, ist offensichtlich total²⁴ und berechenbar. Weiters ist die Abbildung g_P , die jedem Tupel $(x, \dots, z)$ das Resultat eines Programmlaufs mit diesen Eingabewerten zuordnet, eine partielle berechenbare Funktion; ein Programm, das g_P durch wiederholte Anwendung von f_P berechnet, ist ein *Interpreter*.

Beweisideen. Einen vollständigen und gut lesbaren Beweis des Satzes von Matiyasevich findet man zum Beispiel in [JM91]; insbesondere werden dort auch alle zahlentheoretischen Überlegungen, die hier übersprungen werden, vollständig ausgeführt. Eine kurze Übersicht des Beweises sowie einige Beweisfragmente sollen hier vorgestellt werden.

Zusammenfassung des Beweises. Wir gehen von einer semi-entscheidbaren Menge A aus. Wir nehmen an, dass wir bereits ein Programm P haben, das bei Eingabe von $n \in \mathbb{N}$ genau dann hält, wenn $n \in A$ gilt.

Wir wollen nun aus diesem Programm P (in der gerade vorgestellten Programmiersprache) eine Familie $G(P, n)$ von Gleichungssystemen konstruieren,²⁵ so dass $G(P, n)$ genau lösbar ist, wenn das Programm P mit Eingabe n terminiert. Schärfer: $G(P, n)$ wird höchstens eine Lösung haben (und nur wenn $n \in A$) und

²³konkret:

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1. $x := 0$ | 6. if $z = 0$ goto 10 |
| 2. if $y = 0$ goto 6 | 7. $z := z - 1$ |
| 3. $y := y - 1$ | 8. $x := x + 1$ |
| 4. $x := x + 1$ | 9. goto 6 |
| 5. goto 2 | 10. STOP |

²⁴Für das in der vorigen Fußnote angeführte Programm gilt etwa $f((3), a, b, c) = ((4), a, b - 1, c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $b > 0$; um sich auch um den Fall $b = 0$ zu kümmern, könnte man einen weiteren möglichen Wert UNDEF verwenden, mit $f((3), a, 0, c) = \text{UNDEF} = f(\text{UNDEF})$.

diese Lösung beschreibt den terminierenden Programmablauf von P bei Eingabe n .

Das Programm möge aus k Anweisungen bestehen und die Programmvariablen $R_1, \dots, R_k$ verwenden, wobei R_1 zu Beginn die Eingabevariable n enthält. (Im Gleichungssystem $G(P)$ wird es auch Variable geben; diese nennen wir Gleichungsvariable.)

Einen terminierenden Programmablauf kann man sich nun als eine Folge

$$\begin{array}{cccc} a_1 & r_{11} & \dots & r_{1k} \\ a_2 & r_{21} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_s & r_{s1} & \dots & r_{sk} \end{array}$$

vorstellen, wobei a_i die Nummer der Anweisung angibt, die im betrachteten Ablauf nach i Schritten ausgeführt wird, und das Tupel $(r_{i1}, \dots, r_{ik})$ die Werte angibt, die in den Programmvariablen nach i Schritten gespeichert sind.

Insbesondere wird $a_1 = 1$ gelten (das Programm beginnt in der ersten Zeile) und $r_{11} = n$ (Eingabewert), alle anderen r_{1k} haben den Wert 0.

Aus dem vorliegenden Programm kann man nun auf gewisse Beziehungen schließen, die zwischen diesen Werten gelten; etwa wird sehr oft einfach $a_{i+1} = a_i + 1$ gelten – außer in jenen Fällen, in denen die a_i -te Anweisung eine bedingte oder unbedingte Sprunganweisung ist. Weiters wird in vielen Fällen $r_{ij} = r_{i+1,j}$ gelten, weil die Anweisung mit Nummer a_i ja nur den Wert einer einzigen Programmvariablen ändern kann.

Diese Beziehungen wollen wir nun so in ein Gleichungssystem übersetzen, dass man aus der Lösung des Gleichungssystems wieder den Programmablauf extrahieren kann.

Unser Gleichungssystem müssen wir angeben, ohne das Programm laufen zu lassen; wir wissen also, wie viele Spalten die obige Matrix hat (Anzahl der Programmvariablen plus 1), und welche Werte in der ersten Spalte vorkommen können (Zeilennummern unseres Programms), aber nicht, wie viele Zeilen es geben wird.

In unserem Gleichungssystem $G(P, n)$ werden wir für jede Spalte j , die einer Programmvariablen zugeordnet ist, eine eigene Gleichungsvariable verwenden; der Wert w_j dieser Variablen in einer Lösung des Gleichungssystems wird alle in der Spalte vorkommenden Werte codieren, nämlich als Ziffern in der Darstellung von w_j in einer genügend großen Basis q .

Für die erste Spalte, wo die Programmzeilen codiert werden, verwenden wir (aus technischen Gründen) nicht eine einzige Gleichungsvariable, sondern k weitere

²⁵Tatsächlich wird das Gleichungssystem immer die selbe Struktur haben, mit n als Parameter. Nur eine der Gleichungen wird von n abhängen; wir werden bei Beschreibung der übrigen Gleichungen daher vom Gleichungssystem $G(P)$ sprechen.

Gleichungsvariable; in einer Lösung des Gleichungssystems werden diese Gleichungsvariable Werte haben, in deren q -ären Darstellung nur die Ziffern 1 und 0 auftreten. Die Ziffer 1 wird in der j -ten Variable genau dann an der i -ten Stelle auftreten, wenn im zu codierenden Programmablauf nach i Schritten die Anweisung mit der Nummer j erreicht wird.

Die Aufgabe besteht nun darin, ein Gleichungssystem anzugeben, das folgende Bedingungen erfüllt:

- * Jeder terminierende Programmablauf von P bei Eingabe $n \in A$ liefert eine Lösung des Gleichungssystems $G(P, n)$.
- * Aus jeder Lösung von $G(P, n)$ lässt sich ein terminierender Programmablauf von P bei Eingabe n ablesen. *(Ende der informellen Zusammenfassung)*

Die folgenden Ausführungen erklären einige Details dieser Konstruktion.

Als Vorbereitung muss man einige zahlentheoretische Sätze beweisen, um zu zeigen, dass (unter anderen) die folgenden Relationen bzw. Funktionen diophantisch sind:

- * Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division mit Rest (also sowohl ganzzahlige Division $\lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ als auch die modulo-Operation $(x, y) \mapsto x - \lfloor \frac{x}{y} \rfloor y$).
- * Die Funktionen $n \mapsto X_a(n)$, $n \mapsto Y_a(n)$, wobei $(X_a(n), Y_a(n))$ die n -te Lösung der Pellischen Gleichung $x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1$ ist. Dies erfordert am meisten Arbeit; man gewinnt dadurch eine diophantische Funktion, die exponentiell stark wächst.²⁶
- * Die Exponentialfunktion x^y und damit verwandte Funktionen wie Binomialkoeffizienten, bitweise logische Operationen (wie etwa die Operation $\wedge$, die aus zwei Zahlen x und y jene Zahl z konstruiert, deren Binärdarstellung an jeder Stelle i genau dann den Wert 1 hat, wenn sowohl x als auch y dort den Wert 1 haben) oder die Relation $x \prec_q y$: In der q -adischen Darstellung von x ist jede Ziffer kleiner als die entsprechende Ziffer in y .

Nun kann die Konstruktion des Gleichungssystems $G(P, n)$ beginnen.

Wir beschreiben im Folgenden ein Fragment von $G(P)$. Erstens wird es Variablen q und s geben; der Wert von s soll die Laufzeit des Programms sein, und „ $2^s = q$ “ (genauer: die Übersetzung dieser Relation in ein diophantisches Gleichungssystem) wird Teil von $G(P)$ sein.

²⁶Diese Arbeit kann man sich ersparen, wenn man sich mit dem schwächeren Resultat (siehe [DPR61], [Rob62]) begnügt, dass es keinen Algorithmus gibt, der entscheidet, ob eine vorgelegte exponentiell diophantische Gleichung lösbar ist; in einer exponentiell diophantischen Gleichung darf man neben den Ringoperationen auch die Exponentialfunktion $(x, y) \mapsto x^y$ (für $y \geq 0$) verwenden.

Wenn P aus k Anweisungen besteht, dann wird es in $G(P)$ unter anderem die Gleichungsvariablen $l_1, \dots, l_k$ geben; einem Programmablauf L entspricht dann eine Lösung, in der die i -te Stelle (in der Basis q) von l_j genau dann den Wert 1 hat, wenn im Programmablauf nach genau i Schritten die Anweisung j erreicht wurde. Wenn also in einem Programmablauf L die Anweisungen $1, 2, 3, 4, 2, 3, \dots$ durchlaufen werden, dann sieht man in den q -adischen Darstellungen der Lösungen dieses Muster:

$$\begin{array}{rcl} l_1 & = & \dots 000001 \\ l_2 & = & \dots 010010 \\ l_3 & = & \dots 100100 \\ l_4 & = & \dots 001000 \\ \dots & & \dots \end{array}$$

Weiters verwendet man, wenn in P die Programmvariablen $R_1, \dots, R_n$ vorkommen, Gleichungsvariable $r_1, \dots, r_n$.

Um sicherzustellen, dass man tatsächlich aus jeder Lösung des Gleichungssystems einen Programmablauf ablesen kann, verwendet man die folgenden Gleichungen:

- * $l_1 \wedge l_2 = 0; l_1 \wedge l_3 = 0; \dots; l_{k-1} \wedge l_k = 0$. (Zusammen mit der nächsten Gleichung stellt dies sicher, dass es in einer Lösung von $G(P)$ jedem i genau ein j gibt, sodass die i -te q -ärstelle von l_j gleich 1 ist.)
- * $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k = q^s - 1$. Hier ist s eine weitere Variable, die die Laufzeit des Programms abschätzen soll; durch weitere Gleichungen muss man sicherstellen, dass s einen genügend großen Wert erhält.
- * Falls die j -te Anweisung keine Sprunganweisung (und nicht die Anweisung STOP) ist, so muss nach der j -ten Anweisung die $j+1$ -te ausgeführt werden. Dies wird durch die Gleichung $ql_j \prec_q l_{j+1}$ garantiert, die in ausführlicherer Form besagt: „Wann immer die i -te Stelle von l_j gleich 1 ist (was anzeigt, dass nach i Schritten die Anweisung j erreicht wurde), dann muss die $i+1$ -te Stelle von l_{j+1} auch 1 sein“. (Allerdings nicht „genau dann, wenn“, weil ja die $j+1$ -te Anweisung auch durch einen Sprung erreicht werden könnte.)
- * Für unbedingte Sprunganweisungen ($\text{goto}(j)$) kann man den vorigen Punkt in offensichtlicher Weise modifizieren.
- * Für bedingte Sprunganweisungen ($\text{if } R_i = 0 \text{ goto } (j)$) findet man kompliziertere Gleichungen, die auch die Werte der Variablen r_i berücksichtigen.

Seien $R_1, \dots, R_n$ die im Programm P verwendeten Variablen. In einem Programmablauf L nehme R_1 nach dem j -ten Schritt den Wert $n_{1,j}$ an. (Da in jedem Schritt der Wert um höchstens 1 erhöht wird, gilt nach s Schritten also $n_{1,s} \leq s$.) Wir kodieren diesen Ablauf in eine einzige Zahl²⁷ $r_1 := \sum_{j \leq s} n_{1,j} q^j$. Analog soll der Wert

²⁷Das ist nicht ganz richtig. Um Überläufe zu verhindern, sollte man eine größere Basis verwenden.

der Variable r_i (in einer Lösung des noch fertig zu beschreibenden Gleichungssystems $G(P)$) die Werte beschreiben, die die Variable R_i während des Programmablaufs annimmt.

Wenn etwa die Anweisung $R_2 := R_2 + 1$ in der dritten und zehnten Zeile des Programms vorkommt (aber sonst nirgends), und die Anweisung $R_2 := R_2 - 1$ nur in der 20. Zeile, dann wird durch die Gleichung

$$r_2 = r_2 q + (l_3 + l_{10} - l_{20})q$$

sichergestellt, dass sich die $i + 1$ -te Stelle von r_2 genau dann von der i -ten Stelle unterscheidet (und zwar um ± 1), wenn nach i Schritten die dritte, zehnte oder 20. Anweisung erreicht wurde.

Für die Variable R_1 , die vereinbarungsgemäß zu Beginn des Programmablaufs die Eingabe n und am Ende des Programmablaufs die Ausgabe enthalten möge, muss man diese Gleichung noch modifizieren; dies liefert die einzige Gleichung unseres Systems $G(P, n)$, die tatsächlich von n abhängt. Einige weitere buchhalterische Details (wie die Verhinderung von Über- oder Unterläufen) überspringen wir hier. Insgesamt erhält man so zu jedem Programm P und jeder Eingabe n ein Gleichungssystem $G(P, n)$, sodass $G(P, n)$ genau dann in den natürlichen Zahlen lösbar ist, wenn P bei Eingabe n hält. Jeder Algorithmus, der (wie von Hilbert erhofft), entscheidet, welche diophantischen Gleichungssysteme lösbar sind, könnte also verwendet werden, um das Halteproblem zu lösen. Einen solchen Algorithmus kann es also nicht geben. $\square$

Anwendung 5.2. Die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen ist entscheidbar, a fortiori also semi-entscheidbar, somit also auch diophantisch. Es gibt also ein Polynom $q(x, \vec{y}) = q(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}[x, \vec{y}]$, welches die folgenden Eigenschaften hat:

- * Für alle Primzahlen $p \in \mathbb{P}$ ist die Gleichung $q(p, \vec{y}) = 0$ in den natürlichen Zahlen lösbar, d.h.: Es gibt ein Tupel $\vec{a}_p$, sodass $q(p, \vec{a}_p) = 0$ gilt.
- * Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$ ist die Gleichung $q(n, \vec{y}) = 0$ in den natürlichen Zahlen nicht lösbar, d.h.: Für alle $\vec{b}$ gilt die Ungleichung $q(n, \vec{b})^2 \geq 1$.

Daher ist das Polynom $\tilde{q}(x, \vec{y}) := (1 - q(x, \vec{y})^2) \cdot x$ in folgendem Sinn ein „Primzahlpolynom“: Jede Primzahl tritt als Wert von $\tilde{q}$ auf; umgekehrt ist jeder²⁸ positive Wert von $\tilde{q}$ eine Primzahl.

Diese Anwendung hat natürlich keine praktische Bedeutung; schon für kleine Primzahlen p müsste man einen unmäßig großen Wert $\vec{a}$ einsetzen, um $\tilde{q}(p, \vec{a}) = p$ zu erhalten.

²⁸Wenn man die Argumente $x, \vec{y}$ aus den natürlichen Zahlen wählt. Mit einem gemäß dem Satz von Lagrange modifizierten Polynom kann man diese Einschränkung ignorieren.

6 Weitere Anwendungen

Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz liefert auch in anderen Gebieten Schranken für die potentiell möglichen Resultate. In diesem Abschnitt werden zwei solche „Anwendungen“ kurz präsentiert.

Das Wortproblem für Gruppen

In der erststufigen Sprache der Gruppentheorie²⁹ verwendet man neben den logischen Zeichen und unendlich vielen Variablen $x_1, x_2, \dots$ nur die Operationssymbole $*$, $^{-1}$ und 1 ; „Gruppenterme“ setzt man aus den Variablen und den Operationssymbolen in der üblichen Weise zusammen: $x, (x * 1 * (x * y)^{-1})$, etc. Gewisse einfache Fakten der Gruppentheorie (wie etwa $\forall x (x * x = 1) \rightarrow \forall x \forall y (x * y = y * x)$) lassen sich in dieser Sprache formulieren und auch beweisen.

Das *Wortproblem für Gruppen* fragt nach einem Algorithmus, der alle Fragen der folgenden Form richtig beantworten kann:

Gegeben sei eine endliche Menge $\{s_1 = t_1, \dots, s_k = t_k\}$ von Gleichungen zwischen Gruppentermen sowie eine weitere Gleichung $s = t$.

*Folgt (in jeder Gruppe) die Gleichung $s = t$ aus den Gleichungen $s_1 = t_1, \dots, s_k = t_k$? Mit anderen Worten: Wenn wir Gruppenterme als Elemente der von $\{x_1, x_2, \dots\}$ frei erzeugten Gruppe betrachten: Muss der kleinste Normalteiler N , der alle Terme $s_i * t_i^{-1}$ enthält, auch den Term $s * t^{-1}$ enthalten?*

Formal kann man das Wortproblem als Menge von Tupeln $(s_1, t_1, \dots, s_k, t_k, s, t)$ betrachten.

Satz 6.1. *Das Wortproblem für Gruppen ist unlösbar. Mit anderen Worten: Die Menge aller Tupel $(s_1, t_1, \dots, s_k, t_k, s, t)$, für die die Gleichung $s = t$ aus der Konjunktion aller $s_i = t_i$ folgt, ist nicht entscheidbar.*

Dies kann man beweisen, indem man jedem Programm P durch eine berechenbare Funktion W eine Instanz $W(P) = (s_1, t_1, \dots, s_k, t_k, s, t)$ des Wortproblems zuordnet, sodass P genau dann hält, wenn die durch $W(P)$ beschriebene Frage mit „ja“ beantwortet werden kann.

(Alternativ: Jeder geschlossenen Σ_1 -Formel ϕ in der Sprache PA ordnet man eine Instanz $W(\phi)$ zu, sodass ϕ genau dann gilt, wenn die Antwort auf $W(P)$ „ja“ lautet.)

²⁹Die Gruppentheorie als Gebiet der Mathematik verwendet Begriffe, die sich nicht direkt in Logik erster Stufe darstellen lassen, wie zum Beispiel die Begriffe „einfach“, „direktes Produkt“, etc. Wir betrachten hier also nur ein kleines Fragment der Gruppentheorie.

Jeder Algorithmus, der das Wortproblem entscheidet, würde damit auch das Halteproblem entscheiden bzw. zeigen, dass jede semi-entscheidbare Menge entscheidbar ist; so einen Algorithmus kann es also nicht geben.

Pflasterung der Ebene

Gegeben sei ein unendlicher Vorrat von Puzzlesteinen, wobei aber nur endlich viele Formen $f_1, \dots, f_k$ auftreten mögen, und von jeder Form unendlich viele Steine vorhanden sind. (Wir betrachten nur polygonale Steine, deren Eckpunkte rationale Koordinaten haben.) Kann man die ganze Ebene mit diesen Steinen überdecken? (Gemeint ist hier eine Überdeckung ohne Überlappungen, also eine Partition der Ebene in Gebiete, die alle eine der erlaubten Formen $f_1, \dots, f_k$ haben.)

Satz 6.2. *Das Pflasterungsproblem (tiling problem) ist unlösbar. Das heißt: Es gibt keinen Algorithmus, der zu jeder endlichen Eingabe $f_1, \dots, f_k$ berechnet, ob die Ebene mit Steinen dieser Form überdeckt werden kann.*

Äquivalent: Die Menge aller Beschreibungen von Tupeln $(f_1, \dots, f_k)$, die eine Pflasterung erlauben, ist nicht entscheidbar.

Wiederum kann man dies beweisen, indem man (mithilfe einer berechenbaren Funktion) das Halteproblem oder ein anderes unentscheidbares Problem auf das Pflasterungsproblem zurückführt.

7 Anwendung $n + 1$: Physik

Man könnte sich vorstellen, eine physische Maschine zu bauen, auf der die oben beschriebenen Programme ausgeführt werden können. Für ein Programm mit k Variablen brauchen wir k Register, das sind potentiell unendlich große Behälter, in denen die jeweils aktuellen Werte der Programmvariablen gespeichert werden, etwa durch kleine Kugeln, die aus einem potentiell unendlich großen Vorrat geschöpft werden. Weiters braucht unsere Maschine einen Zähler, der auf die Nummer der jeweils aktuellen Programmzeile zeigt, sowie eine Vorrichtung, die (abhängig vom Zustand des Zählers und möglicherweise abhängig von der Existenz von Kugeln im i -ten Register) den Zähler aktualisiert und gegebenenfalls eine Kugel zu einem Register hinzufügt oder von dort entfernt. Schließlich brauchen wir noch einen getakteten Antrieb, der in jeder Zeiteinheit eine Anweisung der Maschine abarbeitet bzw. nach Abarbeiten der letzten Anweisung ein Signal „Stop“ erzeugt.

Das Verhalten einer solchen Maschine M könnte man im Prinzip im Rahmen der klassischen Newtonschen Physik beschreiben (wenn man bereit ist, die notwendigerweise unphysikalischen Phänomene dieser Abstraktion zu akzeptieren, wie

die potentiell unendliche Menge an Kugeln und die potentiell unendliche Energie, die benötigt wird, um diese zu bewegen).

Aus den vorigen Abschnitten folgt nun, dass es keinen Algorithmus gibt, der bei einer vorgelegten Beschreibung $B(M)$ entscheidet, ob die Maschine M in endlicher Zeit zum „Stop“ kommt. Insofern ist die Physik also „unentscheidbar“.

Es gab schon mehrere Arbeiten, die die Unentscheidbarkeit von anderen (möglicherweise „natürlicheren“) physikalischen Szenarien gezeigt haben, insbesondere in der Relativitätstheorie und in der Quantenphysik.

Im Folgenden skizzieren wir ein vor Kurzem erschienenenes Resultat aus der Festkörperphysik: In [CPGW15] wird eine „Unvollständigkeit“ in der Physik gezeigt, nämlich dass das Verhalten von gewissen physikalischen Modellen für Festkörper nicht voraussagbar ist.

Wir beginnen mit einer sehr informellen Übersicht:

Wir betrachten ein zweidimensionales Gitter $M(\alpha, L)$ der Größe $L \times L$ von identischen Teilchen und wir postulieren (in Abhängigkeit vom reellen Parameter α) eine Wechselwirkung zwischen benachbarten Teilchen. (Zwischen je zwei benachbarten Teilchen gibt es immer die gleiche Wechselwirkung, zwischen nicht benachbarten Teilchen keine Wechselwirkung.) Für große Werte von L (z.B. $L = 10^{10}$) beschreibt dieses Gitter ein makroskopisches zweidimensionales Objekt aus L^2 vielen Teilchen; die Eigenschaften dieses Objekts lassen sich mit quantenphysikalischen Methoden aus den postulierten Wechselwirkungen bestimmen. Insbesondere kann das Modell „gapless“ oder „gapped“ sein, eine quantenphysikalische Eigenschaft (siehe weiter unten), die wichtige Implikationen für „klassische“ Eigenschaften aus der Physik des 19. Jahrhunderts hat, zum Beispiel die elektrische oder thermische Leitfähigkeit von $M(\alpha, L)$.

Im Prinzip kann man zwar für jedes unserer Modelle $M(\alpha, L)$ diese Eigenschaften berechnen (insbesondere, ob $M(\alpha, L)$ gapless ist oder nicht). Tatsächlich sind die Rechnungen für große L aber zu aufwendig, als dass man sie konkret durchführen könnte. Oft kann man allerdings einen sinnvollen Limes für $L \rightarrow \infty$ definieren und dessen Eigenschaften berechnen.

Auch in unseren Modellen wird es einen in natürlicher Weise definierten Limes $M(\alpha, \infty) := \lim_{L \rightarrow \infty} M(\alpha, L)$ geben, und die Eigenschaften (z.B. die Leitfähigkeit) von $M(\alpha, L)$ „konvergieren“ zu denen von $M(\alpha, \infty)$.

Nun wird in [CPGW15] aber gezeigt, dass man eine explizite Folge (α_n) von algebraischen Zahlen finden kann, sodass die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} : M(\alpha_n, \infty) \text{ ist gapped}\}$$

zwar semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar ist.³⁰

³⁰Die physikalische Relevanz des Ergebnisses scheint sehr beschränkt, denn physikalisch ist

Aus Satz 4.6 folgt nun, dass es eine Zahl n geben muss, sodass $M(\alpha_n, \infty)$ zwar gapless ist, dies aber nicht in PA beweisbar ist. Ähnlich wie in Anmerkung 4.7, kann man eine analoge Überlegung auch für stärkere Axiomensysteme aussprechen:

Obwohl die Folge $(\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ sehr explizit gegeben ist, muss es (für jedes mathematische Axiomensystem S , wie etwa ZFC) Zahlen n geben, sodass das Modell $M(\alpha_n, \infty)$ zwar gapless ist, diese Tatsache im System S nicht gezeigt³¹ werden kann.

(Ende der informellen Übersicht)

Mehr Details zum quantentheoretischen Modell

Man stelle sich ein quadratisches Gitter von insgesamt $L \times L$ gleichen Teilchen vor. Der „Zustand“ jedes einzelnen Teilchens wird durch einen Vektor in einem Hilbertraum H über $\mathbb{C}$ beschrieben; wir betrachten ein theoretisches Modell, in dem dieser Hilbertraum endliche Dimension d hat. (Ein Beispiel dafür: Wir interessieren uns nur für den Spin-Zustand des Teilchens und ignorieren Ort/Impuls. Wenn wir etwa, wie beim Elektron, nur die zwei Werte $\pm \hbar/2$ zulassen, ist der betrachtete Hilbertraum zweidimensional.) Die Dimension d bleibt im Folgenden konstant, während wir uns dafür interessieren, was mit $L \rightarrow \infty$ passiert.

Die Energie eines einzelnen Teilchens wird durch den Hamilton-Operator $h_1 : H \rightarrow H$ beschrieben. Dieser hat d Eigenwerte, und eine Messung projiziert den Zustand in einen der Eigenräume; der zugehörige Eigenwert ist das Ergebnis der Messung.

Wir postulieren eine Wechselwirkung zwischen zwei benachbarten Teilchen, und zwar nur zwischen diesen; die Energie dieser Wechselwirkung wird ebenfalls durch einen Operator $h : H \otimes H \rightarrow H \otimes H$ beschrieben.

Der Zustand eines Paares wird durch ein Element im Tensorprodukt $H \otimes H$ (ein Hilbertraum der Dimension d^2) beschrieben, die Gesamtenergie ist die Summe der beiden Einzelenergien und der Wechselwirkungsenergie. Mit anderen Worten, der Energieoperator hat die Form $h_1^a + h_1^b + h$, wobei h_1^a als h_1 auf dem Teilraum des ersten Teilchens wirkt (und als Identität auf dem zweiten Teilraum), und h_1^b analog für das zweite Teilchen.

nicht der Fall $L \rightarrow \infty$ interessant, sondern der Fall, dass L „makroskopisch groß“ wird. In der Physik rechnet man aber stattdessen mit dem Grenzwert für $L \rightarrow \infty$, weil die Erfahrung und physikalische Intuition zeigen, dass in der Praxis der Wert $L = 10^{10}$ de facto dasselbe Ergebnis liefert wie $L \rightarrow \infty$.

Der Unterschied zwischen $L = 10^{10}$ und $L \rightarrow \infty$ ist also in der Praxis nicht interessant; in unseren Überlegungen zur Unentscheidbarkeit geht es hingegen genau um diesen Unterschied, denn das Problem für $L = 10^{10}$ ist in unserem Sinne „entscheidbar“. Die eigentliche physikalische Frage hat also im Prinzip eine geringere Komplexität als die mathematische Abstraktion.

³¹Man beachte, dass es hier um die prinzipielle Beweisbarkeit geht, und nicht um die Frage, ob ein Beweis in einer bestimmten Zeit, wie etwa der Lebensdauer des Universums, gefunden oder auch nur formuliert werden kann.

Der gemeinsame Zustand aller $L \times L$ vielen Teilchen wird durch ein Element des $d^{L \times L}$ -dimensionalen Tensorprodukts beschrieben. Die Gesamtenergie wird durch den Operator h_L beschrieben (die Summe von $L \times L$ vielen Versionen von h_1 und von h für alle Paare von benachbarten Teilchen), der aber nun $d^{L \times L}$ Eigenwerte hat. Für $L \rightarrow \infty$ konvergiert die Menge S_L der Eigenwerte gegen das Spektrum S_∞ des Hamiltonoperators h_∞ auf einem unendlichdimensionalen Hilbertraum.

Von besonderem Interesse ist in der Physik die Frage nach dem unteren Rand dieses Spektrums. Das Spektrum ist abgeschlossen und nach unten beschränkt (es gibt keine negative Energie) und hat daher einen kleinsten Wert $\lambda_0(h_\infty)$. Für jedes $L \in \mathbb{N}$ definieren wir ebenfalls $\lambda_0(h_L)$ als den kleinsten Eigenwert von h_L .

In dem konstruierten Modell $M(\alpha)$ kann es (abhängig von der postulierten Wechselwirkung zwischen benachbarten Atomen, die vom Parameter α abhängt) für $L \rightarrow \infty$ nur die folgenden zwei Szenarien geben:

- * gapless: λ_0 ist ein Häufungspunkt des Spektrums von h_∞ , und stärker: Es gibt ein $c > 0$ sodass für alle $\varepsilon > 0$ gilt: Für fast alle L bilden die Eigenwerte im Intervall $[\lambda_0(h_L), \lambda_0(h_L) + c]$ ein ε -Netz. (Das heißt: die Vereinigung $\bigcup_{\lambda \text{ ist Eigenwert}} (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ überdeckt das gesamte Intervall.)
- * gapped: Es gibt ein $\delta > 0$, sodass für fast alle L der Abstand zwischen dem kleinsten Eigenwert von h_L und dem nächstgrößeren immer $\geq \delta$ ist.

Diese Eigenschaften haben physikalische Auswirkungen, zum Beispiel auf die Leitfähigkeit des betrachteten Gitters.

In der Arbeit [CPGW15] wird nun gezeigt, dass man zu jedem Programm P eine Folge $(M(\alpha_n) : n \in \mathbb{N})$ von Modellen konstruieren kann, sodass Folgendes gilt:

- (1) Die α_n sind algebraische Zahlen, und die Funktion $n \mapsto \alpha_n$ ist explizit berechenbar.³²
- (2) P hält bei Eingabe n genau dann, wenn $M(\alpha_n)$ gapped ist.

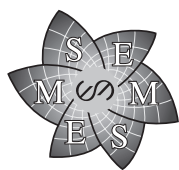
So lässt sich das Halteproblem auf ein Problem der theoretischen Physik reduzieren, welches somit auch als unentscheidbar nachgewiesen ist.

³²Wir haben Berechenbarkeit nur für Funktionen mit Werten in $\mathbb{N}$ oder A^* definiert; gemeint ist hier, dass die Funktion f bei Eingabe von n eine explizite Beschreibung von α_n liefert, etwa durch Angabe der Koeffizienten des Minimalpolynoms p_{α_n} sowie durch weitere (endliche) Information über die Lage von α_n in der Menge aller Nullstellen von p_{α_n} .

Literatur

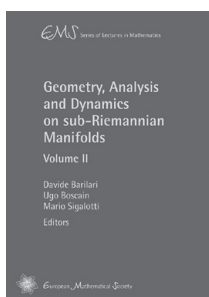
- [CPGW15] Toby Cubitt, David Perez-Garcia, and Michael M. Wolf. Undecidability of the spectral gap. *Nature*, 528:207–211, 2015.
- [DPR61] Martin Davis, Hilary Putnam, and Julia Robinson. The decision problem for exponential diophantine equations. *Ann. of Math. (2)*, 74:425–436, 1961.
- [JM91] J. P. Jones and Y. V. Matijasevič. Proof of recursive unsolvability of Hilbert’s tenth problem. *Amer. Math. Monthly*, 98(8):689–709, 1991.
- [Poo14] Bjorn Poonen. Undecidable problems: a sampler. In *Interpreting Gödel*, pages 211–241. Cambridge Univ. Press, 2014.
- [Rob62] Julia Robinson. The undecidability of exponential Diophantine equations. In *Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1960 Internat. Congr.)*, pages 12–13. Stanford Univ. Press, 1962.
- [Rob84] G. Robin. Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 63(2):187–213, 1984.

Adresse des Auteurs: Institut für diskrete Mathematik und Geometrie, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstr. 8–10/104, 1040 Wien.



New books published by the European Mathematical Society

20% discount for individual members
of the EMS, member societies or
societies with a reciprocity agreement



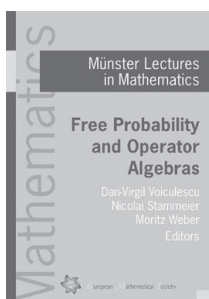
Geometry, Analysis and Dynamics on sub-Riemannian Manifolds. Volumes I and II (EMS Series of Lectures in Mathematics)

Davide Barilari (Université Paris 7 Denis Diderot, Paris, France), Ugo Boscin (École Polytechnique, Palaiseau, France) and Mario Sigalotti (École Polytechnique, Palaiseau, France), Editors

Volume I ISBN 978-3-03719-162-0. 2016. 332 pages. Softcover. 17 x 24 cm. 44.00 €

Volume II ISBN 978-3-03719-163-7. 2016. 307 pages. Softcover. 17 x 24 cm. 44.00 €

Sub-Riemannian manifolds model media with constrained dynamics: motion at any point is only allowed along a limited set of directions, which are prescribed by the physical problem. In the last twenty years, sub-Riemannian geometry has emerged as an independent research domain, with extremely rich motivations and ramifications in several parts of pure and applied mathematics. The aim of the lectures collected here is to present sub-Riemannian structures for the use of both researchers and graduate students.

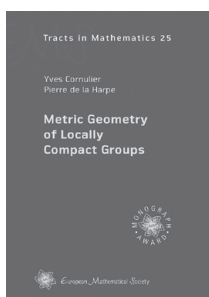


Free Probability and Operator Algebras (Münster Lectures in Mathematics)

Dan-Virgil Voiculescu (University of California, Berkeley, USA), Nicolai Stammeier (University of Oslo, Norway) and Moritz Weber (Universität Saarbrücken, Germany), Editors

ISBN 978-3-03719-165-1. 2016. 148 pages. Softcover. 17 x 24 cm. 32.00 €

Free probability is a probability theory dealing with variables having the highest degree of noncommutativity, an aspect found in many areas (quantum mechanics, free group algebras, random matrices etc). Thirty years after its foundation, it is a well-established and very active field of mathematics. These lecture notes arose from a master-class in Münster, Germany and present the state of free probability from an operator algebraic perspective. In order to make it more accessible, the exposition features a chapter on basics in free probability, and exercises for each part. This book is aimed at master students to early career researchers familiar with basic notions and concepts from operator algebras.



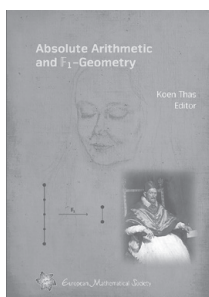
Yves Cornuier (Université Paris-Sud, Orsay, France) and Pierre de la Harpe (Université de Genève, Switzerland) Metric Geometry of Locally Compact Groups (EMS Tracts in Mathematics, Vol. 25)

ISBN 978-3-03719-166-8. 2016. 241 pages. Hardcover. 17 x 24 cm. 62.00 €

The main aim of this book is the study of locally compact groups from a geometric perspective, with an emphasis on appropriate metrics that can be defined on them. The approach has been successful for finitely generated groups, and can favourably be extended to locally compact groups. Parts of the book address the coarse geometry of metric spaces, where 'coarse' refers to that part of geometry concerning properties that can be formulated in terms of large distances only. This point of view is instrumental in studying locally compact groups.

Basic results in the subject are exposed with complete proofs, others are stated with appropriate references. Most importantly, the development of the theory is illustrated by numerous examples.

The book is aimed at graduate students and advanced undergraduate students, as well as mathematicians who wish some introduction to coarse geometry and locally compact groups.



Absolute Arithmetic and $\mathbb{F}_1$ -Geometry

Koen Thas (University of Gent, Belgium), Editor

ISBN 978-3-03719-157-6. 2016. 404 pages. Hardcover. 17 x 24 cm. 68.00 €

It has been known for some time that geometries over finite fields, their automorphism groups and certain counting formulae involving these geometries have interesting guises when one lets the size of the field go to 1. On the other hand, the nonexistent field with one element, $\mathbb{F}_1$, presents itself as a ghost candidate for an absolute basis in Algebraic Geometry to perform the Deninger–Manin program, which aims at solving the classical Riemann Hypothesis. This book, the first of its kind in the $\mathbb{F}_1$ -world, covers several areas in $\mathbb{F}_1$ -theory, and is divided into four main parts – Combinatorial Theory, Homological Algebra, Algebraic Geometry and Absolute Arithmetic.

Each chapter is carefully written by experts, and besides elaborating on known results, brand new results, open problems and conjectures are also met along the way. The diversity of the contents, together with the mystery surrounding the field with one element, should attract any mathematician, regardless of speciality.

Zehn Jahre Summer School Mathematik

Leonhard Summerer

Univ. Wien

Seit dem Jahr 2006 bieten die Universitäten Wien und Innsbruck gemeinsam eine Sommerschule für Schülerinnen und Schüler an, die sich in den Ferien gerne mit Mathematik beschäftigen, im Hinblick auf ihre Studienwahl in Kontakt mit der Universität treten möchten und dabei noch gerne eine Ferienwoche mit ebenfalls mathematisch interessierten Gleichaltrigen verbringen wollen. Dabei steht im Unterschied zur Mathematikolympiade nicht das Lösen von schwierigen Mathematikaufgaben im Vordergrund, sondern ein anderer Aspekt der Mathematik, nämlich das Entwickeln, Ausarbeiten und Anwenden von Theorien, die über den Lehrplan der Schulmathematik hinausgehen. Kommunikation und Diskussion sind dazu ein wesentlicher Bestandteil und werden durch das gewählte Format bestmöglich gefördert.

Soviel zur Konzeption der Sommerschule. Die konkrete Umsetzung bedarf neben sorgfältiger Vorbereitung auch einer effizienten Bekanntmachung des Angebots: Alljährlich ist die Bewerbung der Veranstaltung eine Herausforderung, aber die überragend positiven Beurteilungen durch die Teilnehmerinnen und Teilnehmer rechtfertigen den Aufwand allemal. Bereits im ersten Jahr war der Start mit 14 Teilnehmern so erfolgreich, dass sich viele gleich für den nächsten Sommer wieder angemeldet haben.

Die wichtigsten Daten der seither jährlich stattfindenden *Summer School Mathematik* im Überblick:

- *Veranstalter*: Fakultät für Mathematik der Universität Wien und Institut für Mathematik der Universität Innsbruck.
- *Organisator*: Ao. Prof. Dr. Leonhard Summerer.
- *Zielgruppe*: mathematikinteressierte Schülerinnen und Schüler ab der 12. Schulstufe.
- *Veranstaltungsort*: bisher Bundesschullandheime Saalbach-Hinterglemm und Mariazell.



Das Bundesschullandheim Saalbach-Hinterglemm; Eindrücke von der Sommerschule.

- *Zeitraum*: eine Woche (Sonntag bis Samstag) im August.
- *Kosten*: derzeit 240 Euro pro Person für sechs Tage Vollpension inkl. Versicherung, Mathematik- und Freizeitprogramm.
- *Modus*: sechs verschiedene Vortragende an sechs Tagen zu unterschiedlichen Themen jeweils am Vormittag, am Nachmittag und Abend gemeinsame Freizeitgestaltung nach Wunsch (Wandern, Baden, Gesellschaftsspiele, Hochseilgarten, Fussball, Hockey, Tischtennis, Klettern, ...)

Die breite Palette an mathematischen Themen, die in den vergangenen Jahren in den Vorträgen und Workshops vertreten waren, umfasst Interpolationsverfahren, Kodierungstheorie, Dreiecksgeometrie, komplexe Zahlen und die Formel $e^{2\pi i} - 1 = 0$, große Gleichungssysteme und Matrizen, Kettenbrüche und Approximation durch rationale Zahlen, den *page rank*-Algorithmus, Chaos und Fraktale, den Eulerschen Polyedersatz, Primzahlen und Faktorisierungsalgorithmen, Lineare Optimierung, Wahrscheinlichkeitstheorie, Quantencomputer, Fouriertransformation. Diese Liste ist bei weitem nicht vollständig. Da sich viele Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die noch nicht maturiert haben, ein zweites und manchmal ein drittes mal anmelden, kommen Themenwiederholungen frühestens nach drei Jahren vor. Doch nicht nur die Vortragsthemen, auch die Vortragenden sind nicht immer dieselben. So haben bisher gut 20 Mathematiker einen kleinen Teil ihres Arbeitsgebiets in Vorträge verpackt und so einen Einblick in die vielfältige Welt

der Mathematik gewährt. Als kleines Beispiel sei hier der Inhalt des Vortrags über Kettenbrüche kurz vorgestellt.

Dabei wird zunächst das Verfahren erklärt, das es ermöglicht, eine reelle Zahl in einen Kettenbruch zu entwickeln:

Sei $\xi \in \mathbb{R}$ beliebig. Setze $\xi =: a_0 + \xi_1^*$, wobei $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \xi_1^* < 1$. Falls $\xi_1^* = 0$, so endet der Prozess. Ist $\xi_1^* \neq 0$, so definiere $\xi_1 := 1/\xi_1^*$. Nun wird dieses Verfahren mit ξ_1 anstelle von ξ wiederholt und induktiv fortgesetzt. Dies liefert eine Darstellung von ξ der Gestalt

$$\xi = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}} =: [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots],$$

was anhand von einfachen Beispielen überprüft wird. Die meisten erfassen schnell, dass die endlichen Kettenbrüche genau den rationalen Zahlen entsprechen und dass für diese die Darstellung zweideutig ist.

Als nächstes wird die Frage diskutiert, wofür eine solche Darstellung denn gut ist, wo doch die Dezimaldarstellung viel praktischer zum Rechnen ist. Damit kommt *Approximation* ins Spiel. Anhand der Näherungsbrüche für Zahlen wie e oder π wird der Begriff des n -ten Näherungsbruchs p_n/q_n von ξ eingeführt, der durch Abbrechen der Kettenbruchentwicklung an der n -ten Stelle entsteht. In natürlicher Weise wird so die Güte einer Approximation erklärt und der folgende Satz gezeigt:

Satz von Dirichlet: *Sei ξ irrational. Dann gibt es unendlich viele gekürzte Brüche p/q mit*

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Eine anschließende 20 minütige Gruppenarbeit soll den Zusammenhang zwischen der Periodizität der Kettenbruchentwicklung und Lösungen von quadratischen Gleichungen aufzeigen. Die Resultate werden dann vorgetragen und gemeinsam besprochen. Kuriositäten, wie etwa die am schlechtesten approximierbare irrationale Zahl, der Goldene Schnitt $(1 + \sqrt{5})/2$, oder die spezielle Bauart der Kettenbruchentwicklungen der Wurzeln ganzer Zahlen runden den Vortrag ab und geben Anlaß, weiter über das Thema nachzudenken.

Basierend auf nunmehr zehnjähriger Erfahrung hat sich herausgestellt, dass die aktive und intensive Auseinandersetzung mit Mathematik in einer ungezwungenen Atmosphäre, das Zusammensein mit Gleichgesinnten und das Eröffnen von Perspektiven für die weitere Ausbildung die wichtigsten Faktoren für den Erfolg der Summer School sind. Dieser lässt sich objektiv an der grossen Zahl von Teilnehmerinnen und Teilnehmern messen, die danach ein Mathematikstudium absol-

viert haben, viel mehr aber an der guten Stimmung während der gesamten Veranstaltungswoche, bei der auch die Freizeit nicht zu kurz kommt.

Da die Bewerbung der Veranstaltung wohl die Achillesferse des gesamten Projekts darstellt, darf an dieser Stelle der Hinweis auf die nächste Summer School, die vom 20. bis zum 26. August 2017 in Saalbach-Hinterglemm stattfinden wird, nicht fehlen, ebenso wenig wie die Bitte um Bekanntmachung und Verbreitung dieser Information. Die zugehörige Ausschreibung wird ab Februar 2017 unter

<http://mathematik.univie.ac.at/mathe-studieren/infos-fuer-schuelerinnen/aktivitaeten-fuer-schuelerinnen>

(Webseiten der Fakultät für Mathematik der Universität Wien) zu finden sein. Für weitere Auskünfte und Anregungen stehe ich gerne zur Verfügung, auch innovative Vorschläge zur Weiterentwicklung der Summer School oder für Vortragsthemen sind herzlich willkommen.

Adresse des Autors: Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A 1090 Wien. email leonhard.summerer@univie.ac.at.

Buchbesprechungen

<i>O. Lablée</i> : Spectral Theory in Riemannian Geometry (A. ČAP)	53
<i>O. Deiser</i> : Analysis 2 (G. LETTL)	54
<i>W. Kühnel</i> : Differential Geometry. Curves – Surfaces – Manifolds (O. RÖSCHEL)	54
<i>B. M. Landman, A. Robertson</i> : Ramsey Theory on the Integers (T. STOLL)	55
<i>J. Spencer</i> : Asymptopia (T. STOLL)	56

O. Lablée: Spectral Theory in Riemannian Geometry. (EMS Textbooks in Mathematics) EMS, Zürich, 2015, ix+187 S. ISBN 978-3-03719-151-4 H/b € 38,–.

This book offers a nice introduction to spectral geometry, which emphasizes the functional analytic aspects of the topic. The reader is assumed to have a solid background in functional analysis and differential calculus.

After a short introduction, the main part of the book starts with a detailed discussion of abstract spectral theory of self adjoint operators on Hilbert spaces. After a short chapter on the fundamentals of Riemannian geometry, the basic properties of the Laplacian on a compact Riemannian manifold and of its spectrum are studied. These are then applied to obtain explicit descriptions of the spectrum of the Laplacian in simple examples and qualitative results on the spectrum on general compact manifolds. In a short chapter, the author then discusses a result of G. Courtois, which relates properties of the spectrum to the capacity of subsets.

The last part of the book is devoted to the discussion of inverse problems in spectral geometry. This in particular contains discussions of both J. Milnor's 1964 example of isospectral tori in dimension 16, which are not isometric, and P. Bérard's method of transplantation, which leads to examples of polygonal planar domains, which are isospectral but not isometric.

A. Čap (Wien)

O. Deiser: Analysis 2. Springer Spektrum (Mathematik f. d. Lehramt), Springer, Berlin, Heidelberg, 2012, 398 S. ISBN 978-3-642-34173-1 P/b € 23,35.

Dieses Lehrbuch entwickelte sich aus Vorlesungen des Autors an der TU München für Studierende des Lehramts an Gymnasien. In Fortsetzung des ersten Bandes, der thematisch bis zur Differentialrechnung reeller Funktionen reicht, behandelt dieses Werk die Abschnitte 1. *Integration*, 2. *Topologische Grundbegriffe*, 3. *Mehrdimensionale Differentiation*, 4. *Überblickswissen Fourier-Reihen*, 5. *Überblickswissen Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 6. *Überblickswissen Mehrdimensionale Integration*.

Dem Autor gelingt es hervorragend, durch Erklärungen und motivierende Beispiele das Interesse an der jeweiligen Thematik zu wecken und dann den Stoff mathematisch genau und dennoch verständlich darzustellen. So verstärkt sich beim Leser der Eindruck, dass diese mathematische Begriffswelt durchaus auch für angehende Lehrer interessant und notwendig ist.

Exemplarisch möchte ich einige Kapitel näher beleuchten: Das Kapitel „Integration“ arbeitet mit dem Riemann-Darbouxschen Integralbegriff und diskutiert sehr ausführlich die verschiedenen Aspekte des Integrierens. Der Hauptsatz wird für stetige Integranden bewiesen, und es wird angegeben, wie der Beweis auf Regelfunktionen erweitert werden kann. Auch die Bedeutung des Lebesgue-Integrals wird diskutiert.

Die topologischen Grundbegriffe werden im Rahmen eines metrischen Raumes entwickelt. Der Rezensent fragt sich, ob die 30 Seiten lange, ausführliche Behandlung der 1-dimensionalen Topologie wirklich das Verständnis des Lesers fördert, da viele Begriffe ja erst im 2- oder höher-dimensionalen ihre geometrische Bedeutung erkennen lassen. Ungewöhnlich sind auch die Graphiken auf Seite 133–134, die nicht die Normkugeln der p -Norm, sondern deren „Quotienten“ zur Euklidischen Norm zeigen.

Das Thema Gewöhnliche Differentialgleichungen wird mit etlichen einfachen Beispielen motiviert, dann werden die wichtigsten Begriffe vorgestellt und schließlich der Satz von Picard-Lindelöf bewiesen.

Diese Buch stellt eine ausgezeichnete Grundlage für eine Analysis-Vorlesung für Lehramtsstudenten dar und sollte auf jeder entsprechenden Literaturliste als Empfehlung aufscheinen.

G. Lettl (Graz)

W. Kühnel: Differential Geometry. Curves – Surfaces – Manifolds. (Student Mathematical Library, Vol. 77) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2015, xii+403 S. ISBN 978-1-4704-2320-9 P/b \$ 49.

This is the third edition of a successful textbook on differential geometry. This new edition is a corrected and updated version of the previous English and German

versions of the book. The field it covers is sometimes summarized under the name *classical differential geometry* – here presented in modern notation and language. Its eight chapters are devoted to: Notations and prerequisites, curves in $\mathbb{R}^n$, the local theory of surfaces, the intrinsic geometry of surfaces, Riemannian manifolds, the curvature tensor, spaces of constant curvature and Einstein spaces.

Various examples (including solutions) and figures help understanding the essential concepts of differential geometry. I wholeheartedly recommend this textbook to undergraduate students and to anybody who is interested in differential geometry. I myself enjoy this excellent textbook a lot using it for lectures on differential geometry at Graz University of Technology.

O. Röschel (Graz)

B. M. Landman, A. Robertson: Ramsey Theory on the Integers. (Student Mathematical Library, Vol. 73) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014, xx+384 S. ISBN 978-0-8218-9867-3 P/b \$ 57,–.

Ramsey theory is, as the authors put it, “the study of the preservation of properties under set partitions”. It is a topic of modern combinatorics that is easily accessible on an elementary level to undergraduate students but where problems can get complicated very quickly and are sometimes even intractable. This excellent book provides a complete and elementary introduction to the topic and is suitable for a wide audience. Also, it gets its readers to cutting-edge problems.

The authors present the material from the point of view of the three classical theorems in Ramsey theory (and its variants): van der Waerden’s theorem (colourings and monochromatic arithmetic progressions; Chapters 2–7), Schur’s theorem (colourings and monochromatic solutions to $x + y = z$; Chapter 8), Rado’s theorem (colourings and monochromatic solutions of homogeneous linear equations; Chapter 9). The final chapter (Chapter 10) presents several other topics that are within the aim of the book’s title (e.g., monochromatic sums, patterns in colourings, zero-sums). Each chapter ends with a set of exercises, a set of research problems and a set of carefully annotated references. Research problems that the authors think most difficult are marked by an asterisk which can serve as a guide for students and researchers.

The second edition of “Ramsey theory on the integers” is a well updated and expanded version of its first edition from 2003: It includes some new chapters such as those on rainbow Ramsey theory, Ramsey properties of polynomial progressions and generalizations of the Erdős-Ginzberg-Ziv theorem (colourings and zero-sums), among others. The bibliographic list now contains 405 entries (first edition: 275 entries).

T. Stoll (Nancy)

J. Spencer: Asymptopia. (Student Mathematical Library, Vol. 71.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014, xiv+183 S. ISBN 978-1-4704-0904-3 P/b \$ 39,—, € 36,—.

The book gives a gentle introduction to the world of Asymptopia (estimates of large quantities) and shows its many facets in number theory, probability, graph theory, geometry, combinatorial games and algorithms. Nothing more than a first year calculus course is needed to appreciate all the technical details in this lovely book. Some exercises are given along the way with their solutions.

Starting off with an unusual proof of the infinity of primes and a step-by-step sharpening in Stirling's formula (Chapter 1), Joel Spencer (with Laura Florescu) first gets to "Big Oh, Little Oh, and All That" (Chapter 2). Integration in Asymptopia (Chapter 3) is a widely used concept when there is no precise integration (Gaussian tail, integrals with logs and high trigonometric powers). Chapter 4 shows how to make the transition between sums and integrals, and gives an application of the approximation of harmonic numbers to a combinatorial game called the "prisoners game". Binomial coefficients inherit many of the subtleties that one encounters in Asymptopia. The author explains how to estimate the quantities depending on the size of the parameters (Chapter 5). Chapter 6 is dedicated to the number of labeled unicyclic graphs on n vertices (i.e., connected graphs on n vertices with precisely n edges). Erdős Magic (or, more formally, the probabilistic method) is applied to Ramsey numbers in Chapter 7. The following two chapters treat large deviations and the Chernoff bound (Chapter 8) as well as elementary estimates in the theory of prime numbers (Chapter 9). "Asymptotic geometry" (Chapter 10) deals with the number of points on the convex hull of n random points, and "Algorithms" (Chapter 11) treats asymptotic estimates for quantities that are defined via recurrences such as those coming from sorting algorithms. Finally, Chapters 12 and 13 present a Potpourri (the law of iterated logarithms, the coupon collector problem and the threshold of connectivity in Erdős-Rényi random graphs) and provide a glimpse of "Really Big Numbers".

T. Stoll (Nancy)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Mitgliederdatenbank und Abwicklung von Mitgliedsbeiträgen

Auf unserer Homepage <http://www.oemg.ac.at/> steht allen Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft die online-Mitgliederdatenbank zur Verfügung. Die zentralen neuen Funktionen sind:

- Möglichkeit der Kontrolle bzw. Änderung der eigenen Daten, vor allem der Zustelladresse.
- Einsicht in den Status von Rückständen und Guthaben betreffend den Mitgliedsbeitrag für die ÖMG und allfällige Abonnements der Jahresberichte bzw. der Semesterberichte der Deutschen Mathematikervereinigung.

Um diese Funktionalität nutzen zu können, muss uns eine gültige email-Adresse bekannt sein. Bitte geben Sie uns diese gegebenenfalls unter (email oemg@oemg.ac.at) bekannt.

Automatische Auswertung von Zahlungen: Zahlungen an die ÖMG werden so weit wie möglich automatisch ausgewertet. Dazu ist es wichtig, dass Sie folgende Informationen beim Ausfüllen des Erlagscheins bzw. beim Online-Banking beachten und das Feld „Verwendungszweck“ nach dem folgenden Muster ausfüllen:

Vorname Nachname: MB, DMV, SEM, SP

Stimmt der Name mit dem Kontoinhaber überein, so kann er entfallen; ansonsten ist der vollständige Name (ohne Titel) wichtig, damit wir die Zahlung zuordnen können. Der Schlüssel nach dem Namen gibt an, wie die Zahlung verwendet werden soll:

MB: Mitgliedsbeitrag für die ÖMG (EUR 35,—)

DMV: Bezug der Jahresberichte der DMV (EUR 26,—)

SEM: Bezug der Semesterberichte der DMV (EUR 26,—)

SP: ein etwaiger Rest, der als Spende betrachtet werden soll.

Fehlen diese Angaben, so gehen wir von **MB** (Mitgliedsbeitrag) aus. In jedem Fall wird ein Kontoeingang zunächst verwendet, um einen etwaigen Rückstand auszugleichen. Wurde zu viel überwiesen, so wird der Rest als Guthaben verbucht,

und im nächsten Jahr wird der Mitgliedsbeitrag automatisch vom Guthaben abgezogen. Es ist also möglich, den Mitgliedsbeitrag für mehrere Jahre im Voraus zu bezahlen. Ein Guthaben kann auf Anfrage natürlich auch rücküberwiesen werden.

Mahnungen. Bisher wurde die Zusendung der Hefte der IMN erst sehr spät nach dem letzten Bezahlen eines Mitgliedsbeitrags eingestellt. Ein Mitgrund für diese Vorgangsweise ist, dass die Mitglieder die Aufforderung zur Zahlung des Mitgliedsbeitrags erst am Ende des Jahres erhalten haben. Wir haben daher vor, die Mitglieder bereits mit dem Augustheft der IMN um das Bezahlen des Beitrags für das Folgejahr zu bitten und sie im Dezemberheft noch einmal daran zu erinnern. Haben Sie Ihre email-Adresse bekannt gegeben, werden Sie automatisch daran erinnert.

(Gerald Teschl)

Neue Mitglieder

Andras Batkai, Dr.habil. – Pädagogische Hochschule Vorarlberg. geb. 1972. Doktorat in Tübingen (2000), Habilitation an der ELTE Budapest (2007). Nach verschiedenen Positionen und Gastaufenthalten ab 2009 Humboldt-Stipendiat und ab 2014 Gastprofessor an der Univ. Wuppertal. Seit Kurzem Tätigkeit an der PH Vorarlberg. email *andras.batkai@ph-vorarlberg.ac.at*.

Verena Bögelein, Univ.Prof. Dr. – Salzburg. geb. 1978. 2007 Abschluss des Doktoratsstudiums in Mathematik an der Univ. Erlangen-Nürnberg, 2012 Habilitation ebendort. Seit 2014 Professorin für Mathematik an der Univ. Salzburg. email *verena.boegelein@sbg.ac.at*.

Tobias Oberkofler – Imst. geb. 1997. Matura 2016 am Bundesrealgymnasium Imst 2016. Schülerpreisträger der ÖMG im Jahr 2016. email *tobi99@gmx.at*.

Marc Olschok, Dr. – Duisburg. geb. 1964. 1984–1993 Studium der Mathematik, Physik und Informatik an der Univ. Kaiserslautern, 2005–2010 Promotionsstudium an der Univ. Brno. Webseite <http://is.muni.cz/www/183259>, email *marc.olschok@gmail.com*.

Anja Ungersböck – Neunkirchen. geb. 1998. Matura 2016 am BG/BRG Neunkirchen, derzeit Studentin an der Fachhochschule der WKW in Wien. 2016 Schülerpreisträgerin der ÖMG. email *anja_ungersboeck@a1.net*.

Michael Wallner, Dip.-Ing. – Siccardsburggasse 40/120, 1100 Wien. geb. 1987. 2008–20013 Studium der Technischen Mathematik an der TU Wien, 2011–2012 Studium Computational Mathematics with Modelling, Brunel Univ. London, seit 2013 Doktoratsstudium an der TU Wien. <http://dmg.tuwien.ac.at/mwallner>, email *michael.wallner@tuwien.ac.at*.

Ausschreibung der Preise der ÖMG

Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2017

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2017 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematikerinnen oder Mathematiker, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind und welche einen wesentlichen Teil ihrer Arbeiten in Österreich erbracht haben. Dabei soll die Promotion mindestens zwei bis maximal zehn Jahre zurückliegen (Überschreitungen sind möglich bei Kindererziehungszeiten und bei nachweislichen Präsenz- oder Zivildienstzeiten).

Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten habilitierten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen. Der Vorschlag muss in elektronischer Form bis spätestens 14. März 2017 beim Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung; 2. Publikationsliste; 3. Wissenschaftlicher Lebenslauf.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine Begutachtungskommission den Preisträger oder die Preisträgerin aus. Der Preis ist mit 1.000 € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird der Preisträger oder die Preisträgerin eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er oder sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Michael Oberguggenberger, Universität Innsbruck. email michael.oberguggenberger@uibk.ac.at.

Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2017

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2017 wieder zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2015 oder 2016 eine Diplom- oder Masterarbeit (im Folgenden als Masterarbeit bezeichnet) bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Masterarbeiten ist ein Abschluss eines Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Doktoratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlossenen

Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss in elektronischer Form bis spätestens 14. März 2017 beim Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Ein Exemplar der als besonders hochqualifiziert bewerteten mathematischen Masterarbeit bzw. Dissertation; 2. Zwei begründete Bewertungen dieser Arbeit; 3. Einen Lebenslauf des Kandidaten bzw. der Kandidatin einschließlich einer kurzen Beschreibung des Studienablaufs.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachungskommission die Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500 € dotiert. Jeder Preisträger erhält eine Urkunde. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er bzw. sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Michael Oberguggenberger, Universität Innsbruck. email michael.oberguggenberger@uibk.ac.at.

Ausschreibung der Schülerinnen- und Schülerpreise der ÖMG 2017

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft zeichnet herausragende vorwissenschaftliche Arbeiten, die 2016 oder 2017 an österreichischen Schulen entstanden sind, und die einen starken Bezug zu Mathematik oder Darstellender Geometrie aufweisen, mit Preisen aus. Diese Arbeiten müssen in elektronischer Form, als PDF-Datei, bis 10. Juli 2017 bei der ÖMG einlangen und werden von einer Jury begutachtet.

Die Verfasserinnen und Verfasser jener Arbeiten, die im Zuge dieser Begutachtung durch die Jury ausgewählt werden, werden zu einem Kurzvortrag eingeladen, in dem sie ihre Arbeit präsentieren können. Anschließend erfolgt die Preisverleihung. Die Präsentationen und die Preisverleihung der prämierten Arbeiten finden im Herbst 2017 zu einem noch festzusetzenden Termin statt.

Die ÖMG bittet alle ihre Mitglieder sowie die Leserinnen und Leser der IMN, potentiell Interessierte von dieser Einladung zu informieren und Schulen zur Teilnahme zu ermuntern.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Michael Oberguggenberger, Universität Innsbruck. email michael.oberguggenberger@uibk.ac.at.