Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 25,–

Bankverbindung: Konto Nr. AT83-1200-0229-1038-9200, bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzendruck, 8044 Weinitzen.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903
http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-10401
email: *sekr@oemg.ac.at*

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 25,–

Bankverbindung: Konto Nr. AT83 1200022910389200 bei der Bank Austria–Creditanstalt (BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 229 (69. Jahrgang) **August 2015**

Inhalt

Die Titelseite zeigt dessins d'enfant, die zu Morphismen der Riemannschen Zahlenkugel in sich gehören.

Der Begriff des dessin d'enfant, wörtlich „Kinderzeichnung", wurde von Felix Klein in seinen *Vorlesungen über das Ikosaeder* unter der Bezeichnung „Linienzug" benutzt. Seinen modernen Namen erhielt er anlässlich seiner Wiederentdeckung durch Alexander Grothendieck im Jahr 1984. Für eine holomorphe Funktion f von einer Riemannschen Fläche X in die Riemannsche Zahlenkugel, die nur $0, 1, \infty$ als kritische Werte besitzt (Belyi-Morphismus), ist die dazugehörige Kinderzeichnung definiert als derjenige in X eingebettete bipartite Graph, dessen schwarze Knoten bzw. weiße Knoten bzw. Kanten insgesamt die Mengen $f^{-1}(0)$ bzw. $f^{-1}(1)$ bzw. $f^{-1}([0,1])$ formen. Es gibt eine Bijektion zwischen Klassen von kombinatorisch-isomorphen Zeichnungen einerseits und Klassen von isomorphen Belyi-Morphismen andererseits.

Literatur: Leonardo Zapponi. What is a Dessin d'Enfant? *Notices AMS* 50 (2003), 788–789.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 229 (2015), 1–11

John Forbes Nash Jr. 1928–2015

Karl Sigmund und Peter Michor
Universität Wien

Dramatische Wendungen hat es im Leben des John Nash überreichlich gegeben. Sie begleiteten den Helden des Hollywood-Blockbusters *A Beautiful Mind* bis zuletzt – bis zum tödlichen Verkehrsunfall am 23. Mai 2015, auf dem Heimweg von der Verleihung des Abelpreises, der größten Ehrung für ein mathematisches Lebenswerk.

Mikhail Gromov, ein anderer Abelpreisträger, nannte John Nash „den bemerkenswertesten Mathematiker in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts“. Und Louis Nirenberg, der den Abelpreis mit Nash teilte, meinte: „Wenn es so etwas gibt wie mathematisches Genie, dann denke ich an John Nash.“ – Schon der Einzeiler, der dem zwanzigjährigen Nash den Weg an die Universität von Princeton ebnete, lautete schlicht: „Er ist ein mathematisches Genie“.

John Forbes Nash Jr. war der Sohn eines Elektroingenieurs aus Bluefield, West Virginia. Seine erste Arbeit verfasste er mit fünfzehn, gemeinsam mit seinem Vater. Am Carnegie Institute of Technology in Pittsburgh absolvierte er von 1945 bis 1948 seine Studien als undergraduate. Er war introvertiert und wenig beliebt, aber keiner konnte sein stupendes Talent übersehen. Auf den ersten Blick vermöge er zwar nicht zu überzeugen, schrieb der mathematische Physiker John L. Synge, „aber seine äußerliche Unbeholfenheit wird mehr als kompensiert durch sein schnelles Verständnis, seine Originalität und seine Fähigkeit, den Kern eines Arguments zu erfassen, die alle in meiner Erfahrung einzigartig sind“. Weil Nash so schnell war, konnte er viel mehr Vorlesungen belegen als andere. Weil er dieselbe Geschwindigkeit auch bei anderen voraussetzte, konnte er seine Überlegungen nicht immer gut erklären. Aber es gäbe keinen Zweifel, hielt einer seiner Professoren fest, dass er eines Tages zu den besten Mathematikern des Landes zählen würde.

In den zwei Jahren seines Doktoratsstudiums in Princeton konnte Nash Vorlesungen von Artin, Siegel, Church, Lefschetz und Steenrod hören, Seite an Seite mit einigen der brillantesten Studenten seiner Generation, wie Milnor, Gale, Kuhn oder Shapley. Schon damals fiel auf, wie sehr er auf der Suche nach eigenen Wegen war. Er las wenig und produzierte unentwegt neue Gedanken. „Es war“, schrieb Milnor, „als wollte er, allein auf sich gestellt, die Mathematik von drei

ISSN 0020-7926

Jahrhunderten wiederentdecken.“

Zum Institute for Advanced Study war es nur ein Spaziergang. Dort konnten Nash und seine elitären Kommilitonen auf Einstein und Gödel treffen. Am meisten faszinierte sie aber John von Neumann, der mit gleicher Leichtigkeit in Operatortheorie, Hydrodynamik, mathematischer Logik, Numerik oder Informatik arbeitete. Knapp bevor Nash nach Princeton kam, war die zweite Auflage des Buchs von John von Neumann und Oskar Morgenstern über Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten erschienen und hatte gewaltiges Echo erweckt, bei Mathematikern ebenso wie bei Journalisten, Politikern und Militärs. Sie versprachen sich eine ganz neue Mathematik, die für rationales Handeln das leisten sollte, was die Infinitesimalrechnung für die Himmelsmechanik geleistet hatte. Doch zumeist ging es bei von Neumann und Morgenstern um Zweipersonen-Nullsummenspiele – was der eine gewinnt, verliert der andere. Bei den meisten wirtschaftlichen und sozialen Wechselwirkungen sind die Interessen aber nicht völlig entgegengesetzt, sondern bieten Raum sowohl für Wettbewerb als auch für Zusammenarbeit.

Fast auf Anhieb stellte der kaum zwanzigjährige John Nash die Spieltheorie auf den Kopf – oder besser gesagt, auf die Beine. Mit seinen Ideen, die „etwas von der Linie (im Sinn von Parteilinie) abwichen“, wie er später vermerkte, drang der Student ins Büro John von Neumanns vor. Der ließ ihn gar nicht ausreden. „Ach so, ein Fixpunktsatz“, sagte er. „Ist ja trivial.“ Ende des Interviews. Wenn John von Neumann mit „trivial“ meinte, dass die zugrundeliegende Mathematik ziemlich einfach war, hatte er recht. Aber der Begriff von Nash war geradezu revolutionär. Er wurde bald als „Nash-Gleichgewicht“ bekannt und gilt seither als der fundamentale Begriff bei der Analyse von Interessenkonflikten.

Betrachten wir irgendeine Wechselwirkung, an der mehrere Personen beteiligt sind – es kann ein Kartenspiel sein, eine Firmengründung oder ein Schusswechsel. Alle Teilnehmer werden versuchen, ein für sie möglichst vorteilhaftes Ergebnis zu erzielen. Dieses Ergebnis hängt aber auch davon ab, was die anderen tun. Wenn keine Person durch die einseitige Änderung ihres Verhaltens ihr Ergebnis verbessern kann, liegt ein Nash-Gleichgewicht vor. Dann hat kein Beteiligter einen Anreiz, davon abzuweichen. Das Erstaunliche ist nun, dass es immer so ein Nash-Gleichgewicht gibt – egal, wie die Wechselwirkung aussieht, wie viele Personen daran beteiligt sind, oder wie die Interessen dieser „Spieler“ liegen. Man muss nur „gemischte Strategien“ zulassen, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten zwischen den alternativen Verhaltensweisen eine Entscheidung treffen. Nash lieferte gleich drei Beweise seines Existenzsatzes. Alle beruhten, wie John von Neumann naturgemäß gleich erfasst hatte, auf Fixpunktsätzen: dem von Brouwer oder dem von Kakutani.

John Nash folgte dem Ratschlag seines Freunds David Gale, „eine Flagge aufzupflanzen“, und veröffentlichte eine anderthalb Seiten lange Arbeit in den *Proceedings der National Academy of Sciences*. Im letzten Absatz wird erwähnt, dass die Spezialisierung auf Zwei-Personen-Nullsummenspiele das „Haupttheorem“ des umfangreichen Wälzers von John von Neumann und Oskar Morgenstern liefert.

Etwas ausführlicher wurde das Thema in der Dissertation von John Nash behandelt, die er bei Alfred Tucker einreichte – immerhin siebenundzwanzig Seiten. Eine geraffte Fassung erschien in den *Annals of Mathematics*. Sie enthielt John Nashs grundlegende Unterscheidung zwischen kooperativen und nichtkooperativen Spielen: Letztere zeichnen sich dadurch aus, dass die Entscheidungen der Spieler unabhängig getroffen werden. Kooperative Spiele, die Kommunikation, Koalitionsbildung und Kontrakte zulassen, können immer auch als nichtkooperative Spiele modelliert werden, mit entsprechend mehr strategischen Alternativen. Als einziges Beispiel wird ein Pokerspiel mit drei Spielern behandelt, das Nash gemeinsam mit Shapley analysiert hatte, und auf das die beiden jungen Mathematiker in einer weiteren Arbeit zurückkamen, die in einem Band der *Annals of Mathematical Studies* erschien, der ganz der Spieltheorie gewidmet war.

Etwa um 1980 stellte sich heraus, dass spieltheoretische Methoden auch auf das Verhalten von nicht-rationalen Individuen angewandt werden können. Das führte zu einem neuen, „evolutionären“ Zweig der Spieltheorie. Interessanterweise stellte sich heraus, dass Nash diesen Zugang bereits in seiner Dissertation antizipiert hatte, was niemandem aufgefallen war, da die publizierte Fassung seiner Arbeit gerade diesen Absatz nicht enthielt.

In den frühen Fünfzigerjahren blühten unter dem Einfluss von John von Neumann und Oskar Morgenstern die axiomatischen Zugänge zu den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften richtiggehend auf, in zukunftsweisenden Arbeiten junger Mathematiker wie Ken Arrow, John Milnor, Lloyd Shapley oder eben auch John Nash. Dieser hatte zwar nur eine einzige wirtschaftswissenschaftliche Vorlesung belegt, und wusste daher auch nicht, dass sein Zugang zum wirtschaftlichen Gleichgewicht einen mehr als hundert Jahre alten Gedanken von Cournot wieder aufgriff, aber gerade diese Unbefangenheit erlaubte es ihm, neue Möglichkeiten zu erkennen.

Deutlich wurde das in seiner Arbeit zum *bargaining problem*. Am bemerkenswertesten daran ist vielleicht, dass erst Nash darin ein *Problem* sah. Es gibt bei derlei Fragen – wie etwa ein Gut aufgeteilt werden soll – zumeist ein Kontinuum von Verhandlungslösungen, bei denen sich keiner der beiden Personen verbessern kann, ohne der anderen zu schaden. Welche Verhandlungslösung erreicht wird, schien weitgehend willkürlich zu sein, die Übereinkunft letztlich eine Frage der Persönlichkeit. Nash stellte vier höchst einleuchtende Forderungen an eine „gerechte“ Übereinkunft und bewies, dass sie dadurch eindeutig festgelegt ist: Sie maximiert das Produkt des Nutzenzuwachses der beiden Spieler. Es stellte sich später heraus, dass andere, ebenso einleuchtende Forderungen zu anderen Lösungen des Verhandlungsproblems führen können. Eine Unzahl an theoretischen Untersuchungen griff den Zugang von Nash auf, und er selbst erweiterte ihn in einer späteren Arbeit, indem er Drohstrategien zuließ, aber das Wichtigste war getan. Einen großen Teil rationaler Entscheidungen konnte man nunmehr mit exakten, also mathematischen, Methoden analysieren.

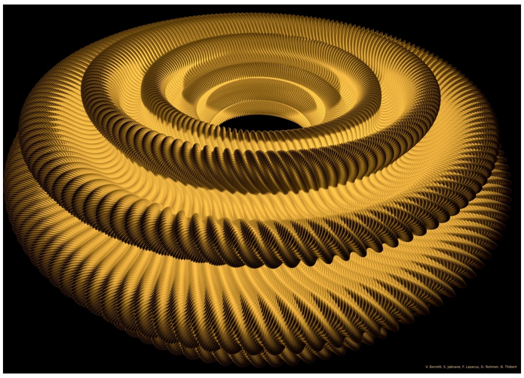
Nach seinem Doktorat begann Nash damit, seine Sommermonate mit anderen Spieltheoretikern am RAND Institute in Santa Monica zu verbringen, dem Prototypen aller Think tanks. In den frühen Jahren des Kalten Krieges erwartete sich das Pentagon viel von der Spieltheorie. Gemeinsam mit anderen jungen Mathematikern, darunter John Milnor, führte Nash einige spieltheoretische Experimente durch, die zu den ersten ihrer Art gehörten. Außerdem begann er sich in Kalifornien für Programmierung und theoretische Informatik zu interessieren und schrieb im Sommer 1954 ein damals unbeachtet gebliebenes, heute geradezu visionär wirkendes working paper über "Parallel Controlling", Jahre bevor die ersten Parallelrechner implementiert wurden.

In diesem Sommer wurde Nash von der Polizei wegen "indecent exposure" am Strand von Santa Monica festgenommen. Die Anklage wurde bald fallen gelassen, aber Nash wurde fortan als ein Sicherheitsrisiko gesehen und von der RAND Corporation kaltgestellt. Parallel dazu wandte er sich von Spieltheorie ab und anderen Gebieten zu. Er machte sich daran, zu beweisen, dass er zu weitaus anspruchsvollerer Mathematik fähig war als dem, was John von Neumann als „trivial“ abgetan hatte.

Schon als er seine Dissertation fertigstellte, rechnete Nash damit, dass sie zu simpel erscheinen mochte für die Anforderungen, die in Princeton an ein Doktorat in Mathematik gestellt werden. Er hatte daher noch eine weitere Arbeit auf Lager, die weitaus schwierigere Methoden und Problemlösungen erforderte. Er trug darüber beim Internationalen Mathematikerkongress von 1950 vor und veröffentlichte die Arbeit etwas später in den *Annals of Mathematics*. Nash bewies, dass jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit einer irreduziblen Komponente einer reellen algebraischen Varietät entspricht, also durch polynomiale Gleichungen beschrieben werden kann. Das führte ihn zur Definition von algebraischen Strukturen auf Mannigfaltigkeiten, die im Wesentlichen eindeutig bestimmt sind. Diese völlig unerwartete Verbindung von Differenzialgeometrie und algebraischer Geometrie hat später im Begriff der Nash-Funktionen und Nash-Mannigfaltigkeiten ihren Niederschlag gefunden.

Nach einem Jahr als Postdoc in Princeton ging John Nash 1951 als Instruktor ans MIT und machte dort in den Fünfzigerjahren Karriere, nur unterbrochen von Gastaufenthalten am Institut for Advanced Study und am Courant Institute. Am MIT fiel er durch sein arrogantes und kompetitives Wesen auf. Schließlich wurde es einem Kollegen zu bunt: „Wenn du wirklich so klug bist, warum löst du dann nicht das Einbettungsproblem?“ Und so löst John Nash das Einbettungsproblem. Er selbst hielt fest: „Ich tat es wegen einer Wette.“

Nash bewies, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit isometrisch in einen höherdimensionalen Euklidischen Raum eingebettet werden kann, jede Fläche etwa in glatter Weise in den $\mathbb{R}^{17}$ (später wurde daraus der $\mathbb{R}^5$). Das war ein völlig unerwartetes Resultat.



C^1-Einbettung des flachen Torus in den $\mathbb{R}^3$ (Borrelli et al. 2012).

Nash bewies es zunächst für C^1-Isometrien. Er zeigte sogar, dass die Mannigfaltigkeit wie ein Taschentuch, das man faltet, in eine beliebig kleine Kugel im euklidischen Raum der Kodimension 2 eingebettet werden kann. Kuiper hat dies später zu Kodimension 1 verbessert.

Gromov sagte, dass ihm der Satz von Nash zunächst ungefähr so überzeugend vorkam wie die Behauptung, man könne sich an den eigenen Haaren hochziehen. Aber „Nash bewies, dass es wirklich möglich ist, sich an den Haaren hochzuziehen". Schon im zweidimensionalen widerspricht es völlig der Intuition: Man kann etwa mit einem Zylinder einen Torus beliebig genau approximieren, ohne den Zylinder zu verzerren oder zu falten. Der grundlegende „Trick" bestand darin, nachzuweisen, dass jede Einbettung, die alle Distanzen verkleinert („short imbedding"), beliebig genau durch eine Isometrie approximiert werden kann, bei der unzählige winzige „Wellen" die Schrumpfung wieder kompensieren. Gromov hat Nashs Methode in seinem Buch *Partial Differential Relations* zur „konvexen Integration" verfeinert, die einen algorithmischen Zugang erlaubt.

Als Nächstes bewies Nash, dass die isometrische Einbettung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit C^k-Metrik auch C^k sein kann, mit $k = 3, \dots, \infty$. Die Dimension des euklidischen Raumes musste entsprechend größer gewählt werden: Bei kompakten Mannigfaltigkeiten $\frac{n}{2}(3n+11)$. Das war nun nicht mehr überraschend, aber der Beweis erwies sich als außerordentlich schwierig. Dazu muss man eine nichtlineare elliptische partielle Differentialgleichung lösen. Das Newtonsche Iterationsverfahren, das Nash anwandte, führt in jedem Schritt zu einem Verlust von Ableitungen: Man braucht Seminormen mit immer höheren Ableitungen. Dagegen setzt Nash in jedem Schritt einen Glättungsoperator ein: damit wird das Verfahren in jeder Seminorm kontraktiv. Jürgen Moser hat dies in einer späteren Arbeit als ein Theorem über inverse Funktionen formuliert, welches als *Nash-Moser Theorem* ein wesentliches Werkzeug für Analysis und dynamische Systeme wurde. Gromov hat es in seinem Buch *Partial Differential Relations* als "h-principle" formuliert: Formale Lösungen im Jet-Raum für nichtlineare elliptische Probleme können zu wirklichen Lösungen homotop deformiert werden. Gromov beweist in diesem Buch den glatten isometrischen Einbettungssatz mit besseren Dimensionsschranken als Nash. Matthias Günther gab 1989 einen sehr einfachen Beweis des glatten Riemannschen Einbettungssatzes mit wieder besseren Dimensionsschranken, indem er den nichtlinearen partiellen Differentialoperator mit dem Inversen des Laplace-Operators zusammensetzte und so den Verlust von Ableitungen vermied. Richard Hamilton hat 1982 das Theorem über implizite Funktionen von Nash und Moser im Rahmen von zahmen Fréchet-Räumen und zahmen glatten Abbildungen formuliert und damit später lokale Existenz und Eindeutigkeit des Ricci-Flusses gezeigt; dies wurde kurz danach von de Turck durch eine einfache Transformation auch ohne das Nash-Moser-Theorem bewiesen. Der Ricci-Fluss spielt eine überragende Rolle in Perelmans Beweis der dreidimensionalen Poincaré-Vermutung (und der Geometrisierungsvermutung von Bill Thurston).

Wie Nash selbst schrieb, halfen ihm mehrere seiner Kollegen bei der „heavy analysis“ für den Beweis des glatten isometrischen Einbettungssatzes, insbesondere Herbert Federer. In der Einleitung zu seiner Arbeit, die wieder in den *Annals* erschien, hielt Nash fest, dass der entscheidende Perturbationsprozess nicht nur für Einbettungssätze nützlich sein könnte, sondern möglicherweise eine allgemeine Methode darstellte, um partielle Differenzialgleichungen zu untersuchen.

Das wurde sein nächstes Arbeitsgebiet. Nash löste Hilberts 19. Problem, indem er zeigte, dass innerhalb einer wichtigen Klasse von partiellen Differenzialgleichungen die Lösung analytisch ist, wenn die Koeffizienten der Gleichung analytisch sind. Seine grundlegende Nash-Ungleichung erlaubte es, die Hölderstetigkeit der Lösungen nachzuweisen, aus der die gesuchten Regularitätseigenschaften folgen. Diese Ungleichung fügt sich ein in die Serie der Ungleichungen von Sobolev, Gagliardo-Nirenberg und anderer Interpolationsungleichungen, die heute zu den wichtigsten Werkzeugen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zählen. Nashs Arbeit über partielle Differenzialgleichungen, „Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations“, erwies sich als absolut fundamental, und viele Mathematiker betrachten sie als seinen wichtigsten Beitrag. Immer wieder fand Nash völlig neue Methoden, um die analytischen Schwierigkeiten, die sich ihm bei den Beweisen für die lokale Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit der Lösungen in den Weg stellten, niederzubügeln.

Nash war eben erst dreißig geworden. Die Fields-Medaille schien in Reichweite. Doch unabhängig von Nash, und sogar etwas früher, hatte der gleichaltrige Ennio de Giorgi über einen gänzlich anderen Zugang Hilberts 19. Problem auch gelöst. „Es scheint denkbar“, schrieb Nash später, „dass, wenn entweder de Giorgi oder Nash das Problem (der a priori Abschätzungen der Hölderstetigkeit) nicht geknackt hätte, dann der Alleinbesteiger des Gipfels mit der Fields Medaille ausgezeichnet worden wäre.“ So aber bekam sie keiner der beiden.

Trotzdem galt Nash bereits als Superstar der Mathematik. Die Zeitschrift *Fortune* feierte ihn als einen der vielversprechendsten Mathematiker seiner Generation. Er wurde „full professor“ am MIT. Er hatte eben geheiratet, eine schöne junge

John und Alicia Nash.

Physikerin namens Alicia De Larde, die bei ihm eine Vorlesung belegt hatte. Das junge Paar erwartete ein Kind. (Aus einer früheren Beziehung hatte Nash bereits einen Sohn.) Die Zukunft schien glänzend.

Doch dann kam es zur Tragödie. Nashs Verhalten, das immer schon rücksichtslos und eigenwillig gewesen war, begann seine Umgebung ernsthaft zu beunruhigen. Bald ließ es sich nicht mehr als exzentrisches Gehabe eines Genies abtun, oder entschuldigen als vorübergehende Folge intensivster Konzentration. Bei einem Vortrag, in dem Nash seine Ideen zur Lösung der Riemannschen Vermutung vorstellen wollte, konnte ihm niemand mehr folgen.

Wahnvorstellungen setzten ein. „Ich begann zu glauben, ein Mann von großer religiöser Bedeutung zu sein… Ich hörte so etwas wie Telefonanrufe in meinem Kopf, von Leuten, die meine Ideen ablehnten… Das Delirium war wie ein Traum, von dem ich niemals zu erwachen schien."

Nash fühlte sich von einer außerirdischen Verschwörung bedroht, gab seine Stellung am MIT auf und suchte in der Schweiz um politisches Asyl an, natürlich erfolglos. Er wurde deportiert, festgenommen, entmündigt, mehrmals gegen seinen Willen in Anstalten eingeliefert und Schockbehandlungen unterworfen. Seine Ehe wurde geschieden.

Viele Monate verbrachte John Nash in Spitälern, immer auf unfreiwilliger Basis, wie er später schrieb. „Als ich lang genug hospitalisiert war, verzichtete ich schließlich auf meine wahnhaften Hypothesen und sah mich wieder als ein Mensch in konventionelleren Umständen."

Das führte zu einer kurzfristigen Besserung, „einem Zwischenspiel", wie er es später in einer sonderbaren Wendung beschrieb, „von gewissermaßen erzwungener Rationalität". Während des Zwischenspiels besuchte er Grothendieck in Paris und verfasste eine höchst einflussreiche Arbeit über die Struktur von Singularitäten, die als Manuskript zirkulierte und erst dreißig Jahre später veröffentlicht wurde. In ihr entwickelte Nash eine Idee, die Hironaka als “Nash blowing-up transformation” ausarbeitete.

In den späten Sechzigerjahren kehrten die Wahnvorstellungen wieder zurück. Doch Nash gelang es nunmehr, Einlieferungen zu entgehen und „die direkte Aufmerksamkeit von Psychiatern“ zu vermeiden. Er war nach Princeton zurückgekehrt, streifte ziellos durch den Campus, ein tragischer Schatten seiner selbst, und hinterließ auf den Tafeln des mathematischen Instituts rätselhafte Botschaften. Für die Studenten war er „das Phantom von Fine Hall“.

Nash lebte wieder bei seiner geschiedenen Frau. Immer noch verkehrte er mit früheren Kollegen. Die Universität von Princeton stellte ihm Rechenzeit auf dem Großrechner zur Verfügung. Einige Studenten scharten sich um ihn – immerhin war er so etwas wie eine mathematische Legende.

Langsam gelang es Nash, seine Wahnvorstellungen intellektuell zu verwerfen. Später schrieb er: „Das wurde am deutlichsten mit der Abkehr von politisch orientiertem Denken als einer im Wesentlichen hoffnungslosen Vergeudung gedanklicher Arbeit.“

Seine Umwelt nahm nur zögernd die Genesung wahr. Nash wandte sich wieder der Wissenschaft zu, und begründete seine Hoffnung, trotz fortgeschrittenem Alters wieder etwas von bleibendem Wert zu erzielen, mit jener „Art Urlaub“ (wie er es bezeichnete), „den Jahren der partiellen Verblendung“. Seine bizarren Gedanken – etwa, dass er der Kaiser von Antarctica sei – schrieb er der Überarbeitung zu. „Wer außergewöhnliche Ideen entwickeln will, muss auf eine Weise denken, die nicht einfach bloß praktisch ist.“ Als er später gefragt wurde, wie er an seine absurden Wahnvorstellungen hatte glauben können, antwortete er: „Sie kamen mir genauso so wie meine mathematischen Ideen. Daher nahm ich sie ernst.“

Die Nachricht von der partiellen Genesung John Nashs machte die Runde. Nachdem sich Vertreter der Schwedischen Akademie durch Augenschein überzeugt hatten, dass Nash einen einigermaßen gefestigten Eindruck machte, erhielt er 1994 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften, gemeinsam mit Reinhard Selten und John Harsanyi.

Wie Nash bei einer kleinen, improvisierten Feier am Institute for Advanced Study erklärte, kam ihm der Preis nicht ungelegen: denn nun konnte sich sein Bankinstitut nicht mehr weigern, ihm eine Kreditkarte auszuhändigen. Auch sonst änderte sich das Leben von John Nash. „Wir halfen ihm zurück zum Tageslicht“, meinte der Obmann des Nobelpreiskomitees.

Der Direktor des IAS stellte eine junge Wissenschaftsjournalistin namens Sylvia Nasar an, die eine Biographie von John Nash schreiben wollte. *A Beautiful Mind* wurde ein Meisterwerk. Nash mochte das Buch nicht: Es enthielt zu viele schmerzhafte persönliche Informationen. Doch den 2001 entstandenen gleichnamigen Film von Ron Howard, mit Russell Crowe als Hauptdarsteller, schätzte er. Der Film erntete vier Oscars.

John Nash wurde zum prominentesten Mathematiker seiner Zeit. Mit nur dreizehn publizierten Arbeiten (ohne die Ankündigungen) hat er wichtige Teile der Mathematik geprägt – eine ähnliche Zahl wie bei Riemann, der elf Arbeiten zu Lebzeiten publizierte.

2001 heirateten John Nash und Alicia ein zweites Mal. „Second take! Wie ein Film", scherzte er. Er hielt Vorträge über seine Krankheit, so auch auf internationalen Psychiatriekongressen. Medikamentösen Therapien misstraute er und unterstrich immer wieder, seine Heilung ohne sie erreicht zu haben. Er erhielt einen Grant der National Science Foundation, um seine Untersuchungen über kooperative Spiele wieder aufzunehmen. In Sammelbänden wurden die richtungsweisenden Arbeiten seiner Jugendjahre wieder aufgelegt.

2004 kam eine Arbeit von Nash ans Licht, die er fünfzig Jahre früher verfasst hatte. Es war ein Vorschlag an die NSA für eine neue Klasse von Verschlüsselungen. Im Nachhinein konnte man darin Grundzüge moderner Chiffriermethoden entdecken. Bei der NSA hatte Nash damals keinerlei Resonanz gefunden. Die Behörde behauptete, die Unterlagen zu dem Verfahren niemals erhalten zu haben, und ließ die Korrespondenz ausklingen, vielleicht aus Unfähigkeit, vielleicht aus Misstrauen gegenüber dem jungen Sonderling, den die RAND Corporation als Sicherheitsrisiko einstufte und der in ungelenker Handschrift behauptete, kein „crank" und Kreisquadrierer zu sein, sondern Mathematiker. Nash begründete die Sicherheit seiner Verschlüsselung mit „computational hardness", Jahrzehnte bevor die entsprechende Komplexitätstheorie entwickelt wurde. Es klingt wie ein Vorgriff auf die heute gängigen kryptographischen Verfahren.

2015 erhielt John Nash den Abelpreis, gemeinsam mit Louis Nirenberg, den er schon in den Fünfzigerjahren am Courant Institute kennengelernt hatte. „Ihre Durchbrüche", so die Urkunde, „haben sich zu vielseitigen und robusten Techniken entwickelt, die wesentliche Werkzeuge für die Untersuchung von nichtlinearen partiellen Differenzialgleichungen wurden. Ihr Einfluss zeigt sich in allen Zweigen der Theorie."

Nach dem Heimflug von den mehrtägigen Feiern in Oslo trennten sich Nirenberg und Nash am Flughafen von New York. John Nash und seine Frau warteten vergeblich auf die Limousine, die sie abholen sollte. So nahmen sie ein Taxi nach Hause. Der Fahrer verlor die Kontrolle und prallte gegen eine Leitschiene. John und Alicia verstarben noch am Unfallort.

Publikationen von J.F. Nash

[1] J.F. Nash Jr. (mit J.F. Nash Sr.) (1945): Sag and tension calculations for wire spans using catenary formulas. Electr. Engineering 64 (10), 685–692.

[2] J.F. Nash Jr. (1950) Equlibrium points in *n*-person games. PNAS 36, 48–49.

[3] J.F. Nash Jr. (1950) Non-cooperative games. PhD Thesis, Princeton.

[4] J.F. Nash Jr. (mit L.S. Shapley) (1950) A simple three-person poker game. Ann. of Math. Studies 24, 105–116.
[5] J.F. Nash Jr. (1950) The bargaining problem. Econometrica 18, 155–162.
[6] J.F. Nash Jr. (1951) Non-cooperative games. Ann. Math. 54, 286–295.
[7] J.F. Nash Jr. (1952) Real algebraic manifolds. Ann. Math. 56, 405–421.
[8] J.F. Nash Jr. (1952) Real algebraic manifolds. Proc. Int. Congress Math 1950, 516–517.
[9] J.F. Nash Jr. (1953) Two-person cooperative games. Econometrica 21, 128–140.
[10] J.F. Nash Jr. (mit J.P. Mayberry und M. Shubik) (1953) A comparison of treatments of a duopoly situation. Econometrica 21, 141–154.
[11] J.F. Nash Jr. (mit C. Kalish, J. Milnor, E. Nebing) (1954) Some experimental n-person games. Decision Processes (Thrall, Coombs and Davis, eds.) Wiley, 301–327.
[12] J.F. Nash Jr. (1954) C^1-isometric imbeddings. Bull. AMS 60, 157.
[13] J.F. Nash Jr. (1954) C^1-isometric imbeddings. Ann. Math. 60, 383–396.
[14] J.F. Nash Jr. (1954) Results on continuation and uniqueness of fluid flow. Bull. AMS 60, 165–166.
[15] J.F. Nash Jr. (1954) The imbedding problem for Riemannian manifolds. Bull. AMS 60, 480.
[16] J.F. Nash Jr. (1955) A path space and the Stiefel-Whitney classes. PNAS 41, 320–321.
[17] J.F. Nash Jr. (1956) The imbedding problem for Riemannian manifolds. Ann. Math. 63, 20–63.
[18] J.F. Nash Jr. (1957) Parabolic equations. PNAS 43, 754–758.
[19] J.F. Nash Jr. (1958) Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math 80, 931–954.
[20] J.F. Nash Jr. (1962) Le problème de Cauchy pour les équations differentielles d'un fluide general. Bull. Soc. Math. France 90, 487–497.
[21] J.F. Nash Jr. (1966) Analyticity of solutions of implicit function problems with analytic data, Ann. Math. 84. 345–355.
[22] J.F. Nash Jr. (1995) Arc structure of singularities. Duke J. Math. 81, 31–38
[23] J.F. Nash Jr. (1995) Autobiographical essay. Les Prix Nobel 1994, Stockholm Norsteds Tryckeri
[24] J.F. Nash Jr. (mit H. Kuhn, J. Harsanyi, R. Selten, J. Weibull, E. van Damme und P. Hammerstein)(1995) The work of John F. Nash Jr. in game theory. Duke J. Math 81, 1–29
[25] J.F. Nash (2002) Ideal Money. Southern Economic Journal 69. 4–11
[26] J.F. Nash, R. Nagel, A. Ockenfels, R. Selten. (2012) The agencies method for coalition formation in experimental games. Proceedings of the National Academy of Sciences 109, 20358–20363.
[27] H. Kuhn und S. Nasar, eds (2002) The essential John Nash. Princeton UP

Literatur über John Nash:

[28] S. Nasar (1998) A beautiful mind. Simon and Schuster, New York (die wichtigste Quelle zur Biographie von John Nash. Eine Kurzfassung ist *http://press.princeton.edu/chapters/i7238.html*

[29] J. Milnor (1995) A Nobel Prize for John Nash. Math. Intelligencer 17, 11–17
[30] J. Milnor (1998) John Nash and ‘A beautiful mind’, Notices AMS 45, 1329–1332
[31] T. Siegfried (2006) A Beautiful Math: John Nash, Game Theory and the modern quest for a code of nature. Washington DC., Joseph Henry Press

Dokumente zum frühen John Nash

[32] (From the collections of the Seeley G. Mudd Manuscript Library, Princeton) *https://webspace.princeton.edu/users/mudd/Digitization/AC105/AC105_Nash_John_Forbes_1950.pdf*
[33] (Briefwechsel von John Nash mit der NSA) *https://www.nsa.gov/public_info/_files/nash_letters/nash_letters1.pdf*

Arbeiten zur Spieltheorie von John Nash

[34] A. Rubinstein (1995) John Nash: the Master of Economic Modelling. The Scandinavian Journal of Economics 97, 9–13
[35] J. Hofbauer (2000) From Nash and Brown to Maynard Smith: Equilibria, dynamics and ESS. Selection 1, 81–88.

Wichtige Ergänzungen zu den geometrischen und analytischen Arbeiten von John Nash sind:

[36] J. Moser (1966) A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations I, II. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 20, 265–315, 499–535.
[37] R. Hamilton (1982) The Inverse Function Theorem of Nash and Moser. Bull. AMS 7, 65–222.
[38] M. Gromov (1972) Partial Differential Relations. Ergebnisse 3,9, Springer-Verlag.
[39] M. Günther (1991) Isometric embeddings of Riemannian manifolds, Proc. Int. Congr. Math., Kyoto 1990, Vol. II, 1137–1143.

Populärwissenschaftliche Darstellungen der Einbettungssätze sind zahlreich; wir verweisen auf

[40] Every world in a grain of sand: John Nashs astonishing geometry. *http://theconversation.com/every-world-in-a-grain-of-sand-john-nashs-astonishing-geometry-42401*
[41] V. Borrelli, S. Jabrane, F. Lazarus, B. Thibert (2012): Flat tori in three-dimensional space and convex integration, Proc. of the National Acad. of Sciences
[42] Mathoverflow question and answers “The mathematical legacy of John Nash” *http://mathoverflow.net/q/207477/26935*
[43] *https://www.youtube.com/watch?v=RYH_KXhF1SY* (als Beispiel für einen guten Lehrfilm über die Einbettungssätze).

Adresse der Autoren: Karl Sigmund (email karl.sigmund@univie.ac.at) und Peter Michor (email peter.michor@univie.ac.at). Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 229 (2015), 13–26

From the Fundamental Theorem of Algebra to Kempe's Universality Theorem

Gábor Hegedüs, Zijia Li, Josef Schicho, Hans-Peter Schröcker
Obuda Univ., Austrian Acad. Sc., Univ. Linz, Univ. Innsbruck

This article provides a gentle introduction for a general mathematical audience to the factorization theory of motion polynomials and its application in mechanism science. This theory connects in a rather unexpected way a seemingly abstract mathematical topic, the non-unique factorization of certain polynomials over the ring of dual quaternions, with engineering applications. Four years after its introduction [9, 10], it is already clear how beneficial it has been to both fields [6, 12, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. In Section 1 we introduce the notion of motion polynomials and discuss their decomposition into products of linear motion polynomials. It can be used to synthesize linkages following a prescribed motion and is related to a variant of Kempe's Universality Theorem. We explain the relation to mechanism science in more detail in Section 2. In Sections 3 and 4 we present examples from linkage synthesis and discuss exceptional factorizations.

1 Motion polynomials and their factorizations

We denote by $\mathbb{H}$ the skew field of quaternions, generated by $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ over $\mathbb{R}$, with the well-known relations

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$$

The conjugate of a quaternion $q = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}$ is defined by $\overline{q} = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k$, the norm of q is $N(q) := q\overline{q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$. The scalar extension $\mathbb{DH} := \mathbb{D} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ by *dual numbers* $\mathbb{D} := \mathbb{R}[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2 \rangle$ is just a skew ring, the ring of *dual quaternions*. The conjugate of a dual quaternion $h = p + \varepsilon q$ is defined by $\overline{h} = \overline{p} + \varepsilon \overline{q}$. We also use $N(h)$ to denote the norm of h with $N(h) := h\overline{h} = N(p) + \varepsilon(p\overline{q} + q\overline{p}) \in \mathbb{D}$. The dual quaternion h is invertible if and only if $p \neq 0$.

ISSN 0020-7926

Denote by $\mathbb{S}$ the multiplicative subgroup of dual quaternions with nonzero real norm. Its elements may be written as $h = p + \varepsilon q$ where the quaternions p and q satisfy $p \neq 0$, $p\overline{q} + q\overline{p} = 0$. The latter equality is called the *Study condition.* The group $\mathbb{S}$ acts on $\mathbb{R}^3 = \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$ according to

$$x \mapsto \frac{px\overline{p} + p\overline{q} - q\overline{p}}{N(p)}. \tag{1}$$

Any such map is a *Euclidean displacement*. The rotational part is the well-known action $x \mapsto px\overline{p}/N(p)$ of the unit quaternion $pN(p)^{-1/2}$ on $\mathbb{R}^3$, the translational component is $(p\overline{q} - q\overline{p})/N(p)$. Equation (1) defines a *homomorphism* from $\mathbb{S}$ to the group $\mathrm{SE}(3)$ of Euclidean displacements. It is surjective and its kernel is the real multiplicative group $\mathbb{R}^*$.

This algebraic construction allows a geometric interpretation. Identify $\mathbb{DH}/\mathbb{R}^*$ with real projective space P^7 of dimension seven, denote by $\mathcal{S} \subset P^7 \colon p\overline{q} + q\overline{p} = 0$ the *Study quadric* and by E the three-space with equation $p = 0$. Then *Study's kinematic map* is the bijection $\mathrm{SE}(3) \cong \mathbb{S}/R^* \to \mathcal{S} \setminus E \subset P^7$ whose inverse maps $h = p + \varepsilon q$ to the Euclidean displacement given by (1).

The concept of motion polynomials arises by making the above group homomorphism parametric. More precisely, let $\mathbb{DH}[t]$ be the skew ring of univariate polynomials over $\mathbb{DH}$ in one variable t that commutes with all coefficients. For $C \in \mathbb{DH}[t]$, the conjugate polynomial $\overline{C}$ is obtained by conjugating all coefficients. If $C = P + \varepsilon Q$ with $P, Q \in \mathbb{H}[t]$, then we call P the primal part and Q the dual part. We say that $C \in \mathbb{DH}[t]$ is a *motion polynomial* if $N(C) := C\overline{C} \in \mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$ (a priori, the norm polynomial $N(C)$ is in $\mathbb{D}[t]$) and if its leading coefficient is invertible. For any $t_0 \in \mathbb{R}$ which is not a zero of $N(C)$, we can say that $C(t_0)$ is an element of $\mathbb{S}$, hence it acts on $\mathbb{R}^3$. Varying t_0, we get a motion, i.e. a parametrized curve of Euclidean displacements.

By virtue of (1), the trajectories of points during that motion are rational curves whence the motion itself is called *rational.* It is well-known that all motions with only rational trajectories have a polynomial parametrization with values in the Study quadric [14]. The motion polynomials do not constitute a multiplicative group. However, the quotient by $\mathbb{R}[t] - \{0\}$ is a group because the inverse of the class of a motion polynomial is precisely its conjugate. While kinematic or geometric properties of motion polynomials do not change if we multiply them with non-zero real polynomials, algebraic properties may be different. This observation will be important in Section 4.

Summarizing, we can state

Proposition 1. *Motion polynomials parametrize rational motions and the group of motion polynomials modulo $\mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$ is isomorphic to the group of rational motions. Via Study's kinematic mapping, motion polynomials (rational motions) correspond to rational curves on the Study quadric $\mathcal{S}$ with at most finitely many points in the three-space E.*

Since we want to use some version of the fundamental theorem of algebra later on, it is convenient to restrict attention to monic motion polynomials. As far as applications in kinematics are concerned, this is no loss of generality and can always be accomplished by a suitable coordinate change. The fundamental theorem speaks about factorization into linear polynomials, so it is time to clarify the kinematic nature of linear motion polynomials.

Proposition 2. *Every monic linear motion polynomial parametrizes either a rotation about a fixed axis in $\mathbb{R}^3$ or a translation in a fixed direction in $\mathbb{R}^3$.*

The converse is not true: there are monic motion polynomials parametrizing a rotation around a fixed axis that are not linear.

Example 1. The dual quaternion polynomial $C_1 = t - \mathbf{i}$ has norm $t^2 + 1$, hence it is a motion polynomial. It parametrizes a rotation around the first coordinate axis. Indeed, by (1) we have

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \mapsto & \frac{(t-\mathbf{i})(x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k})(t+\mathbf{i})}{t^2+1} \\ &= x_1\mathbf{i} + \Big(\frac{t^2-1}{t^2+1}x_2 + \frac{2t}{t^2+1}x_3\Big)\mathbf{j} + \Big(\frac{t^2-1}{t^2+1}x_3 - \frac{2t}{t^2+1}x_2\Big)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Setting $\varphi := 2\arctan t$, i.e., $\cos\varphi = (1-t^2)/(t^2+1)$, $\sin\varphi = 2t/(t^2+1)$, the assertion becomes apparent.

The dual quaternion polynomial $C_2 = (t-\mathbf{i})^2 = t^2 - 1 - 2\mathbf{i}t$ has norm $(t^2+1)^2$, hence it is a motion polynomial. It also parametrizes a rotation around the first coordinate axis. Indeed, it can be obtained by reparametrizing the first parametrization using the reparametrization function $t \mapsto (t^2-1)/(2t)$ and clearing denominators.

Example 2. The dual quaternion polynomial $C_3 = t - \varepsilon\mathbf{i}$ has norm t^2, hence it is a motion polynomial. The action on $\mathbb{R}^3$ is

$$x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \mapsto x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} + \frac{2\varepsilon\mathbf{i}}{t}.$$

This is a translation in the direction parallel to the first coordinate axis.

The following theorem is fundamental in the factorization theory of quaternion polynomials [7]:

Proposition 3. *Every monic polynomial $C \in \mathbb{H}[t]$ admits a factorization $C = (t - q_1)\cdots(t-q_n)$ with quaternions $q_1, \ldots, q_n$.*

For the proof, one uses a fundamental theorem for monic non-negative real polynomials: any such polynomial (it must be of even degree) has a unique factorization into monic non-negative real quadratic polynomials. This is an easy consequence of the fundamental theorem for complex polynomials. The norm polynomial $N(C)$ is a non-negative real polynomial and factors into the product of non-negative real quadratic polynomials. The Euclidean algorithm for polynomial division also works in the case of polynomials in $\mathbb{H}[t]$. If we take one of the non-negative quadratic factors of the norm, say $Q \in \mathbb{R}[t]$, then the polynomial remainder of C by Q is a linear quaternion polynomial or zero. In the first case, this linear polynomial can be factored out. In the second case, Q can be factored out.

A specialty in this context is that a generic polynomial $C \in \mathbb{H}[t]$ has precisely $n!$ different factorizations. Since the ring of quaternion polynomials is not commutative, permuting the factors no longer yields a factorization C. In other words the $n!$ factorizations differ essentially, whereas in the complex case all factorizations can be obtained as permutations of one. In this case we rather would think of just one factorization whose factors can be permuted.

Another word of caution concerns the polynomial division mentioned in the above sketch of the proof. Since $\mathbb{H}[t]$ is not commutative, we have left and right polynomial division, left and right quotients, and left and right remainders. It does not matter which direction we choose, but we have to choose one and stick to it. In the following we deal only with right polynomial division, right remainders, and consequently left quotients: ($C = \text{Quotient} \cdot D + \text{Remainder}$).

Let us pass from polynomials over $\mathbb{H}[t]$ to motion polynomials in $\mathbb{DH}[t]$ and try to factor the motion polynomial C. Like in the proof above, the norm is non-negative and, by the important defining property of motion polynomials, *real.* The quotient by one of the quadratic factors has degree at most one. But now, polynomial division might be problematic because the linear remainder polynomial is in general not monic and the leading coefficient might not be invertible. It is even possible that the remainder is constant, as in the example $C = t^2 + 1 + \varepsilon\mathbf{i}$ where we have $C\overline{C} = (t^2+1)^2$ and the remainder is $\varepsilon\mathbf{i}$.

However, in the generic case, everything is fine: the remainders will be linear with invertible leading coefficients and can be divided out. We can then construct step by step a factorization into linear factors by Algorithm 1 below. This genericity condition can be simplified as follows: For Algorithm 1 to work, it is sufficient that the primal part of C has no nontrivial real factors. The different factorizations come from the arbitrary choice of a quadratic factor M in Line 5 of the algorithm.

In fact, we have

Theorem 1 ([10]). *Algorithm 1 can be used to factor a motion polynomial $C = P + \varepsilon Q$, provided the primal part P has no real factors. In this case, $C = (t - h_1) \cdots (t - h_n)$ and for $i \in \{1, \dots, n\}$ each polynomial $t - h_i$ describes a rotation about a fixed axes. Moreover, all possible factorizations (in general $n!$) can be obtained in that way.*

As a consequence of Theorem 1 we have

Algorithm 1 (factorization of generic motion polynomials)

Input: Motion polynomial C, monic, primal part has no real factor.
Output: List $L = [h_1, \ldots, h_n]$ of generic motion polynomials such that $C = (t-h_1)\cdots(t-h_n)$.

```
F ← list of quadratic, irreducible factors of CC̄
D ← C
initialize L = [ ]                                   ▷ empty list
while F is not empty do
    choose M ∈ F
    write D = QM + R with deg R ≤ 1                  ▷ polynomial right division
    compute unique zero h of R
    prepend h to L
    D ← D′ where D = D′(t − h)                       ▷ polynomial right division
    delete M from F
end while
```

Corollary 1. *In general, a rational motion of degree n can be decomposed in at most $n!$ different ways into the product of rotations $t-h_1, \ldots, t-h_n$.*

The phrase "in general" in Corollary 1 refers to the absence of real factors in the primal part of C. If this requirement is not fulfilled, the statement is not true. In fact, all kinds of special behavior can be observed. It is interesting that these "exceptional" examples surprisingly often arise in natural applications of Theorem 1 to kinematics and mechanism science. We will return to this point a little later. But at first, we have to explain the relation between Theorem 1 and mechanism science.

2 Factorizations and linkages

Consider a generic motion polynomial C of degree two that parametrizes a planar motion (all trajectories are in the parallel planes). By Theorem 1, it admits two factorizations

$$C = (t-h_1)(t-h_2) = (t-k_1)(t-k_2)$$

with suitable dual quaternions h_1, h_2, k_1, k_2. This means that the motion parametrized by C can be generated in two ways as composition of two rotations with respective centers h_1, h_2 or k_1, k_2. Moreover, the two revolute joints at h_2 and k_2 can be rigidly connected without disturbing the motion C. This is illustrated in Figure 1 which depicts a planar four-bar linkage whose joints are labeled by the corresponding dual quaternions. The joints h_1 and k_1 are fixed, h_2 and k_2 can rotate about h_1 and k_1, respectively, but retain their distance. Planar four-bar linkages constitute the most important class of linkages for engineering

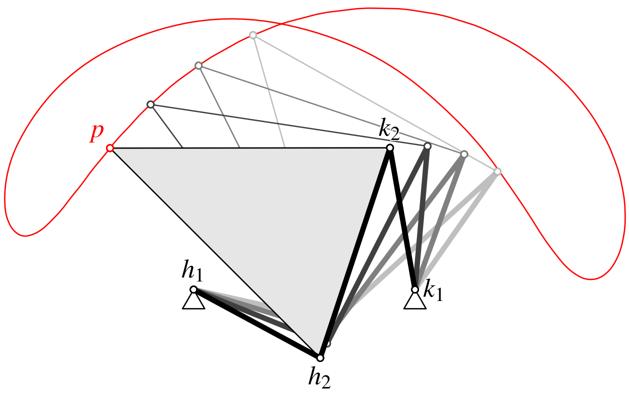


Figure 1: Anti-parallelogram linkage.

applications. Our case is special because the joints h_1, h_2, k_2, and k_1 form an anti-parallelogram.

If the motion polynomial C is not planar, a similar construction yields a spatial linkage, consisting of a closed loop of four skew revolute axes (Figure 2). Any two neighboring axes are rigidly connected, that is, they maintain their distance and angle throughout the motion. In contrast to the planar case, the one-dimensional mobility of such a structure is not obvious. A closed loop of four revolute joints is generically rigid. But the loops resulting from factorizations of quadratic motion polynomials move because of their algebraic construction.

Spatial four-bar linkages that move with one degree of freedom have been known for a long time [2, 3, 16]. There exists only one family of this linkage type and its members are referred to as “Bennett linkages”. So far, Bennett linkage have minor importance in applications but we shall see their theoretical significance later in this text. Moreover, they exhibit a fascinating geometry. A stunning example is the Wunderlich’s explanation of the Bäcklund transform of discrete asymptotic nets of constant Gaussian curvature by means of Bennett linkages [28].

By factorizing cubic motion polynomials, we can also construct spatial six-bar linkages with a one-dimensional mobility as in Figure 3. Their complete classification is a long-standing open problem in theoretical mechanism science. In spite of some recent progress [8, 11], a classification is currently still out of reach. At any rate, our approach yields new examples of spatial six-bar linkages [17, 18, 19] and the first viable synthesis procedure. We describe this in more details in the next section.

3 Linkage synthesis

An important application of motion polynomial factorization is *linkage synthesis,* the construction of a mechanical linkage to accommodate a certain task. Our approach is well suited to exact synthesis with prescribed poses, that is, the computation of linkages such that one link visits a finite number of prescribed poses.

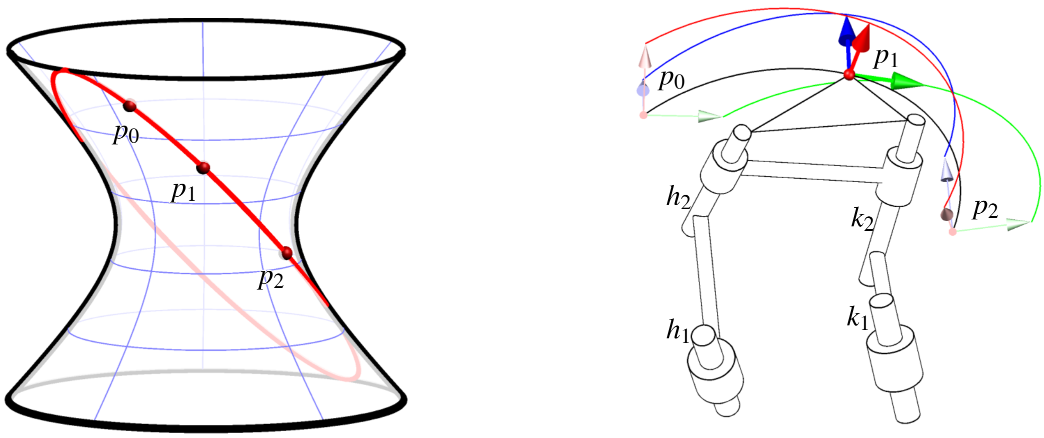


Figure 2: Three-pose synthesis of a four-bar linkage.

The word "pose" refers here to the position and orientation of a rigid body, that is, an element of SE(3).

Let us consider a simple example of a spatial four-bar linkage (Bennett linkage). Its coupler motion is given by a quadratic motion polynomial C. In the kinematic image space P^7, it parametrizes a conic section on the Study quadric $\mathcal{S}$. Conversely, a generic conic section on $\mathcal{S}$ gives rise to generic quadratic motion polynomials (differing only by admissible reparametrizations) and, via motion factorization, to a Bennett linkage. Thus, we can synthesize a Bennett linkage to three prescribed poses p_0, p_1, p_2. These poses are points on the Study quadric $\mathcal{S}$ where they span a plane. We compute a rational quadratic parametrization C of the intersection conic of this plane and $\mathcal{S}$ and factor it as $C = (t-h_1)(t-h_2) = (t-k_1)(t-k_2)$. The linear motion polynomials in these factorizations determine the fixed axes (h_1, k_1) and the moving axes (h_2, k_2), as illustrated in Figure 2.

Our synthesis procedure for Bennett linkages is elegant and simple but it is not the only available method. Other approaches include [4, 24, 25, 26, 27]. It extends, however, to linkages with more than four joints. We may, for example, synthesize six-bar linkages to four prescribed poses [12]. Here, the geometry is slightly more involved but still understandable via classical results. Four points p_0, p_1, p_2, p_3 in general position on the Study quadric $\mathcal{S}$ span a three-dimensional projective space. If this space intersects $\mathcal{S}$ in a ruled quadric, as in Figure 3, the four points can be interpolated by two one-parametric families of rational cubic curves. Each interpolating cubic can be factored and gives rise to several open chains with three revolute joints that can be combined to form a closed six-bar linkage. Here are a few further remarks on this construction:

- Closed loops of six revolute axes are, in general, rigid. In our case, they move because of their special algebraic construction.

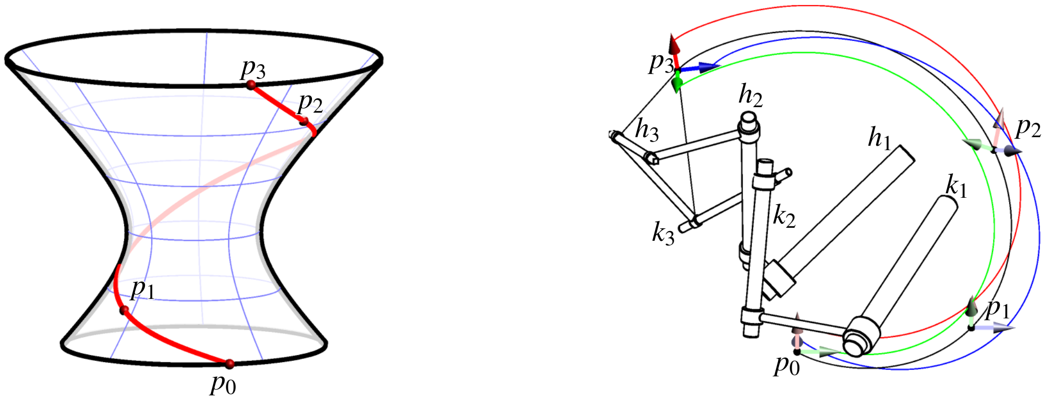


Figure 3: Four-pose synthesis of a six-bar linkage.

- There exist spatial six-bar linkages that have a one-parametric mobility but cannot be constructed by factorization of motion polynomials. The relative motions between two links are not all rational or, at least, do not have rational components.
- The above construction is the first viable synthesis procedure for spatial six-bar linkages. It may easily be generalized using a Hermite like interpolation scheme.

4 Exceptional factorizations and Kempe's Universality Theorem

Theorem 1 shows the existence of finitely many factorizations of generic motion polynomials. In this section we are concerned with non-generic situations where the primal part of the motion polynomial has real factors. In this case, Theorem 1 gives no information. The following examples demonstrate what can happen:

Example 3. The motion polynomial $C = (t-1)(t-\mathbf{j}) - \varepsilon((\mathbf{i}+\mathbf{k})t - 2\mathbf{k})$ can be factored as

$$C = (t-1-\varepsilon\mathbf{i})(t-\mathbf{j}-\varepsilon\mathbf{k}) = (t-\mathbf{j}-\varepsilon(\mathbf{i}+2\mathbf{k}))(t-1+\varepsilon\mathbf{k}).$$

The polynomial factors $t-1-\varepsilon\mathbf{i}$ and $t-1-\varepsilon\mathbf{k}$ parametrize, however, translations, not rotations. One may view this as a limiting case of the generic situation appearing in Theorem 1 in the sense that the two rotations degenerate to translations. It turns out that they can still be computed by Algorithm 1.

Example 4. We consider the motion polynomial $C = t^2 + 1 + \varepsilon(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}t)$ with $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$, $a^2 + b^2 > 0$. It parametrizes the curvilinear translation along an ellipse with semi-axis lengths a and b. If $a \neq b$, a straightforward computation shows that C admits no factorization of the form $C = (t-h_1)(t-h_2)$ with linear

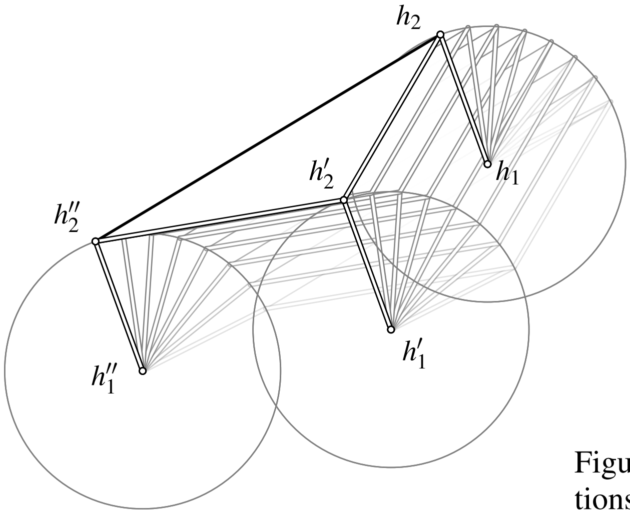


Figure 4: Three different factorizations of a circular translation.

motion polynomials $t - h_1$ and $t - h_2$. If, however, $a = b$ (circular translation), even infinitely many factorizations exist, namely

$$h_1 = \mathbf{k} - \varepsilon(f\mathbf{i} + (a+g)\mathbf{j}), \quad h_2 = -\mathbf{k} + \varepsilon(f\mathbf{i} + g\mathbf{j}), \tag{2}$$

with $f, g \in \mathbb{R}$. They have a very clear geometric explanation. The motion in question is a circular translation and can be generated by infinitely many parallelogram linkages (Figure 4). Each leg corresponds to one factorization of the form (2).

Existence of exceptional situations demonstrate that the factorization theory over $\mathbb{DH}[t]$ is more complicated but also more interesting than the theory over $\mathbb{H}[t]$. Moreover, situations with no or infinitely many factorization arise surprisingly often in engineering applications of motion polynomial factorization. Many important rational motions are not amenable to straightforward factorization via Algorithm 1. Still, it is possible to factor these motions but at the cost of raising the number of factors (the degree of the motion polynomial). Recall that for any non-zero polynomial $R \in \mathbb{R}[t]$ the motion polynomials C and CR parametrize the same motion. Thus, one may try to find a real polynomial R such that CR admits a factorization.

In engineering applications, revolute joints are preferred over translational joints. Hence, we focus on factorizations with revolute joints only. In this case, a necessary requirement is that the motion parametrized by C is bounded, i.e., all trajectories are bounded rational curves. We also say that the motion polynomial C itself is *bounded.* Indeed, we have

Theorem 2. *For every bounded motion polynomial C there exists a real polynomial R such that CR admits a factorization $CR = (t - h_1) \cdots (t - h_m)$ with rotation polynomials $t - h_1, \ldots, t - h_n$. The degree of R is bounded by the maximal degree of a real factor of the primal part of C.*

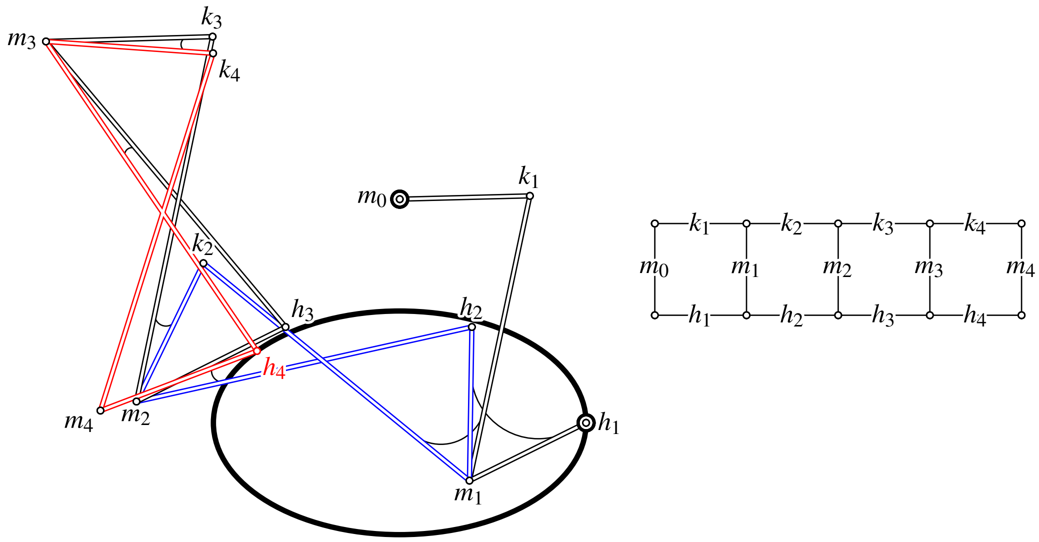


Figure 5: Linkage to generate an elliptic translation and corresponding link graph.

Theorem 2 has been proved in [6] for the planar case and in [22] for the general case. The proofs are constructive so that factorizations can be effectively computed. The main ingredients are variants of the Euclidean algorithm for polynomial division over the (dual) quaternions and the solution of quadratic equations with real coefficients over quaternions [13]. It is worth noting that infinitely many factorizations exist if $\deg R > 0$.

As an application of Theorem 2, consider the elliptic translation appearing in Example 4. There exists a quadratic real polynomial R such that CR admits the factorization $CR = (t - h_1)(t - h_2)(t - h_3)(t - h_4)$. From this, we construct an (admittedly complicated) linkage to generate an elliptic translation (Figure 5):

- The linkage consists of four anti-parallelograms ($h_i m_i k_i m_{i-1}$ for $i \in \{1,2,3,4\}$).
- Six angles ($\sphericalangle(h_i, m_i, h_{i+1})$, $\sphericalangle(k_i, m_i, k_{i+1})$, for $i \in \{1,2,3\}$) are kept constant during the motion. In other words, we have a chain of anti-parallelograms, where each anti-parallelogram "follows" its predecessor.
- The rigid body attached to the connection of m_4 and h_4 performs the elliptic translation. The point h_4 "draws" the indicated ellipses.

Figure 5 also shows a more abstract representation of the same linkage. In this "link graph", each vertex represents a link (a rigid connection between revolute joints) and each edge represents a joint. Two vertices are connected, if the corresponding links share a joint. The linkage of Figure 5 was constructed by augmenting the given factorization (h_1, h_2, h_3, h_4) with one additional joint m_0 and

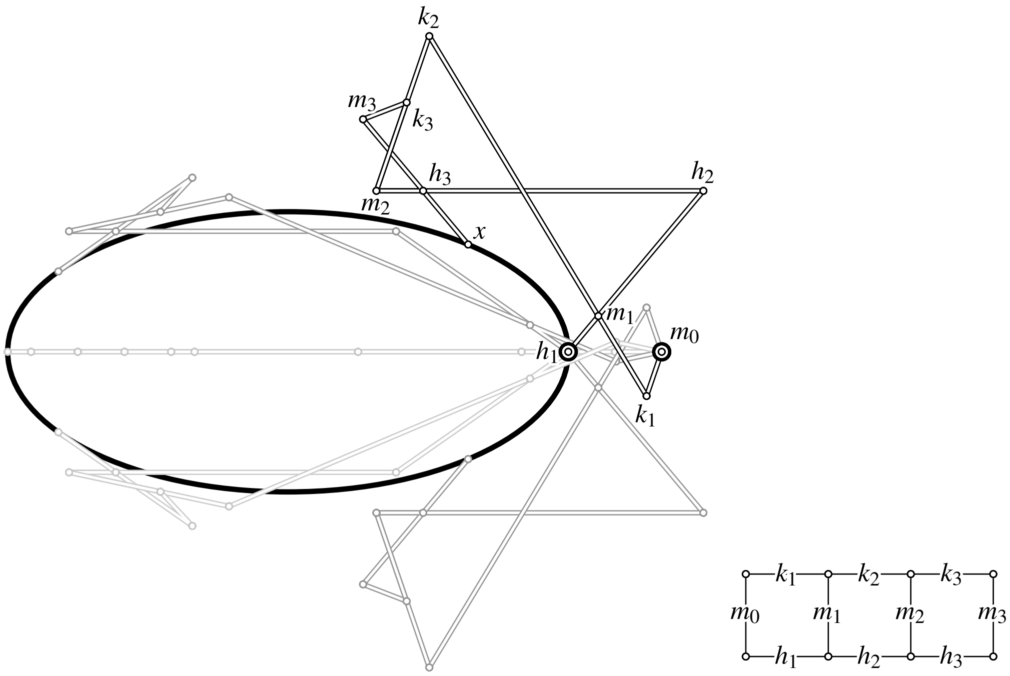


Figure 6: Linkage to draw an ellipse and link graph.

then successively computing the remaining joints by solving the recursion

$$(t - m_{i-1})(t - h_i) = (t - k_i)(t - m_i), \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \tag{3}$$

with the aid of Algorithm 1. We call this computation of k_i and m_i from m_{i-1} and h_i a *Bennett flip.* This name comes from the fact that in the spatial case the involved dual quaternions determine the axes of a Bennett linkage. In the planar case, a Bennett flip generates anti-parallelograms.

Figure 6 presents a refinement of this construction. Instead of multiplying C with a polynomial $R \in \mathbb{R}[t]$, we right multiply it with the linear polynomial $H := t - \mathbf{k} \in \mathbb{H}[t]$ such that the product CH admits a factorization. Of course, C and CH parametrize different motions but the fixed points of H (points of the third coordinate axis) retain their trajectories. Hence, we obtain a linkage that is capable of drawing the prescribed ellipse. The triples of collinear joints come from the fact that the constant angles in the linkage of Figure 5 are straight for the linkage of Figure 6. The motion of the link connecting m_3 and h_3 is no longer an elliptic translation and generic trajectories are of degree greater than two.

It is a yet unpublished result that one can always find a polynomial $H \in \mathbb{H}[t]$ such that CH admits a factorization. Using the Bennett flip technique, one can then construct a (in general) spatial linkage with prescribed trajectories. The anti-parallelograms of Figure 6 become Bennett linkages and the additional freedom we gain by multiplying with a quaternion polynomial $H \in \mathbb{H}[t]$ instead of a real polynomial $R \in \mathbb{R}[t]$ can be used to reduce the number of anti-parallelograms.

The constructions of this section are not restricted to ellipses but can be generalized to arbitrary rational space curves. First let D denote a rational curve of degree d in the Euclidean 3-space. Then consider a motion polynomial C that parametrizes a rational motion with trajectory D, for example the curvilinear translation along D. Using the algorithm of Theorem 2 we arrive at a factorization of CR as $(t-h_1)\ldots(t-h_m)$. This gives us an open chain of m revolute joints representing our motion polynomial C. Using Bennett flips as in (3), we can construct linkages with only revolute joints that draw arbitrary (bounded) rational curves.

This is not a new result. By a celebrated theorem of mechanism science (Kempe's Universality Theorem [5, 15]), any bounded portion of an algebraic curve can be drawn by a linkage. Our approach shows that in the rational case the number of necessary links and joints decreases dramatically. The asymptotic bound for rational curves is linear in the curve degree n while the currently best known bound for general algebraic space curves is cubic [1]. Moreover, our general construction behaves quite well in important low-degree cases. The linkage in Figure 6 has only ten joints while the ellipse linkage in Kempe's construction requires as much as 235 joints. Often it is possible to further reduce the number of joints so that engineering applications come into reach. For example, only seven joints are necessary to generate the so-called Darboux motion, a spatial motion where all trajectories are ellipses in non-parallel planes [20, 21].

5 Conclusion

Motion polynomial factorization is an algebraic theory with surprising relations to mechanisms science. The interplay between both disciplines is beneficial to both. Algebra can provide solutions to hitherto inaccessible engineering problems and requirements of applications led to interesting algebraic questions. Our current work focuses on both the details of a version of Kempe's Universality Theorem for rational space curves with emphasis on a low number of links and joints and further applications of motion polynomial factorization to engineering problems.

Acknowledgments

This work was supported by the Austrian Science Fund (FWF): P 26607 (Algebraic Methods in Kinematics: Motion Factorization and Bond Theory).

References

[1] T. G. Abbott, *Generalizations of Kempe's universality theorem*, Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2008.

[2] G. T. Bennett, *A new mechanism*, Engineering **76** (1903), 777–778.

[3] G. T. Bennett, *The skew isogramm-mechanism*, Proc. London Math. Soc. **13** (1913–1914), no. 2nd Series, 151–173.

[4] K. Brunnthaler, H.-P. Schröcker, and M. Husty, *A new method for the synthesis of Bennett mechanisms*, Proceedings of CK 2005, International Workshop on Computational Kinematics (Cassino), 2005.

[5] E. D. Demaine and J. O'Rourke, *Geometric folding algorithms: Linkages, origami, polyhedra*, Cambridge University Press, 2007.

[6] M. Gallet, C. Koutschan, Z. Li, G. Regensburger, J. Schicho, and N. Villamizar, *Planar linkages following a prescribed motion*, arXiv:1502.05623.

[7] B. Gordon and T. S. Motzkin, *On the zeros of polynomials over division rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **116** (1965), 218–226.

[8] G. Hegedüs, Z. Li, J. Schicho, and H.-P. Schröcker, *The theory of bonds II: Closed 6R linkages with maximal genus*, J. Symbolic Comput. **68** (2015), no. 2, 167–180.

[9] G. Hegedüs, J. Schicho, and H.-P. Schröcker, *Construction of overconstrained linkages by factorization of rational motions*, Latest Advances in Robot Kinematics (J. Lenarčič and M. Husty, eds.), Springer, 2012, pp. 213–220.

[10] G. Hegedüs, J. Schicho, and H.-P. Schröcker, *Factorization of rational curves in the Study quadric and revolute linkages*, Mech. Machine Theory **69** (2013), no. 1, 142–152.

[11] G. Hegedüs, J. Schicho, and H.-P. Schröcker, *The theory of bonds: A new method for the analysis of linkages*, Mech. Machine Theory **70** (2013), 407–424.

[12] G. Hegedüs, J. Schicho, and H.-P. Schröcker, *Four-pose synthesis of angle-symmetric 6R linkages*, ASME J. Mechanisms Robotics **7** (2015), no. 4.

[13] L. Huang and W. So, *Quadratic formulas for quaternions*, Appl. Math. Lett. **15** (2002), no. 15, 533–540.

[14] B. Jüttler, *Über zwangläufige rationale Bewegungsvorgänge*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. II **202** (1993), no. 1–10, 117–232.

[15] A. B. Kempe, *On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by linkwork*, Proc. London Math. Soc. (1876), 213–216.

[16] J. L. Krames, *Zur Geometrie des Bennett'schen Mechanismus*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. II **146** (1937), 145–158.

[17] Z. Li, *Sharp linkages*, Advances in Robot Kinematics (J. Lenarčič and O. Khatib, eds.), Springer, 2014, pp. 131–138.

[18] Z. Li and J. Schicho, *Classification of angle-symmetric 6R linkages*, Mechanism and Machine Theory **70** (2013), 372–379.

[19] Z. Li and J. Schicho, *Three types of parallel 6R linkages*, Computational Kinematics (F. Thomas and A. Perez Gracia, eds.), Mechanisms and Machine Science, vol. 15, Springer Netherlands, 2014, pp. 111–119.

[20] Z. Li, J. Schicho, and H.-P. Schröcker, *Spatial straight line linkages by factorization of motion polynomials*, arXiv:1410.2752.

[21] Z. Li, J. Schicho, and H.-P. Schröcker, *7R Darboux linkages by factorization of motion polynomials*, Accepted for publication in the Proceedings of the 14th IFToMM World Congress 2015.
[22] Z. Li, J. Schicho, and H.-P. Schröcker, *Factorization of motion polynomials*, arXiv:1502.07600.
[23] Z. Li, J. Schicho, and H.-P. Schröcker, *The rational motion of minimal dual quaternion degree with prescribed trajectory*, arXiv:1504.05428.
[24] A. J. Perez, *Analysis and design of Bennett linkages*, Ph.D. thesis, University of California, Irvine, 2004.
[25] C. H. Suh, *On the duality in the existence of R-R links for three positions*, ASME J. Mechanical Design **91** (1969), no. 1, 129–134.
[26] L.-W. Tsai and B. Roth, *A note on the design of revolute-revolute cranks*, Mech. Machine Theory **8** (1973), no. 1, 23–31.
[27] G. R. Veldkamp, *Canonical systems and instantaneous invariants in spatial kinematics*, Journal of Mechanisms **2** (1967), no. 3, 329–388.
[28] W. Wunderlich, *Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. II **160** (1951), no. 2, 39–77.

Authors' addresses:

Gábor Hegedüs. Applied Mathematical Institute, Antal Bejczy Center for Intelligent Robotics, Obuda University, 1032 Budapest, Hungary. email hegedus.gabor @nik.uni-obuda.hu

Zijia Li. Johan Radon Institute for Computational and Applied Mathematics, Austrian Academy of Sciences, 4040 Linz, Austria. email zijia.li@oeaw.ac.at

Josef Schicho. Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University Linz, Schloss Hagenberg, 4232 Hagenberg, Austria. email josef.schicho@risc.jku.at

Hans-Peter Schröcker. Unit Geometry and CAD, University of Innsbruck, 6020 Innsbruck, Austria. email hans-peter.schroecker@uibk.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 229 (2015), 27–41

Interview with Louis Nirenberg

Allyn Jackson
American Mathematical Society

Louis Nirenberg received the 2015 Abel prize together with John Nash. We are grateful to the American Mathematical Society and to Professor Nirenberg for permission to reprint the following interview which appeared in Notices AMS 49/4 (April 2002) 441–449.

Early Experiences

Notices: *What were your early experiences with mathematics?*

Nirenberg: I always liked mathematics in school. My father was a Hebrew teacher, and he wanted me to learn Hebrew. But I foolishly resisted. I went to Hebrew school for a while, and that didn't take, and he tried to give me lessons, but that didn't take either. Then a friend of his gave me private lessons, and that man liked mathematical puzzles. So half of the so-called Hebrew lessons were spent on mathematical puzzles.

Louis Nirenberg

I went to a very good high school in Montreal called Baron Byng High School. It was full of bright students. It was during the Depression, and to be a high school teacher was considered a very good job, so there were good teachers who were very devoted. I especially liked the physics teacher, who actually had a Ph.D. in physics. His courses made me think that I might want to be a physicist. I didn't even know that there was such a career as "mathematician". I knew you could be a math teacher, but I didn't know you could be a mathematician.

When I finished high school, I decided I

ISSN 0020-7926 — Österr. Math. Gesellschaft

Introduction to the Notices *interview*

Louis Nirenberg is one of the outstanding analysts of the twentieth century. He has made fundamental contributions to the understanding of linear and nonlinear partial differential equations and their application to complex analysis and geometry.

He was born on February 28, 1925, in Hamilton, Ontario, Canada. After receiving his bachelor's degree from McGill University in 1945, he went to New York University as a graduate student, obtaining his M.S. in 1947 and his Ph.D. in 1949, under the direction of James Stoker. Nirenberg then joined the faculty of NYU and was an original member of the Courant Institute of Mathematical Sciences. After spending his entire academic career at Courant, he retired in 1999.

Nirenberg received the AMS Bôcher Prize in 1959 for his work on partial differential equations. In 1982 he was the first recipient in mathematics of the Crafoord Prize, established by the Royal Swedish Academy of Sciences in areas not covered by the Nobel Prizes. In 1995 he received the National Medal of Science, the United States' highest honor for contributions to science.

The following is the edited text of an interview with Nirenberg, conducted on December 8, 2001, by Notices senior writer and deputy editor Allyn Jackson. The assistance of Dieter Kotschick, Ludwig-Maximilians-Universität München, is gratefully acknowledged. – A. J.

would do mathematics and physics. At that time one could do a major in both, which I did at McGill University. I graduated in 1945, just when the war ended.

Notices: *How was the mathematics at McGill at that time?*

Nirenberg: The training was pretty good. I guess the most prominent mathematician there at the time was Gordon Pall, who was in number theory. He was really an inspiration to the students around him. But I had planned to do theoretical physics. I'll tell you the story of how I went into mathematics. When I graduated, the war had finished in Europe but was still on in Japan. In Canada, the science students were not drafted, and that's why I wasn't in the armed services. In the summer of 1945, I got a job at the National Research Council of Canada in Montreal. They were working on atomic bomb research. Richard Courant's older son was there, Ernst Courant. Ernst had recently married a girl from Montreal whom I knew, and she was working there too. One day

L. Nirenberg at the time of receiving his B.Sc. from McGill University, 1945.

she said, "We're going down to New York for the weekend, to see Ernst's father." I had read part of Courant-Hilbert, so I knew about Courant. I said, "Could you ask him to recommend a place where I might study theoretical physics?" I knew nothing about where to apply or what to do. She came back and said she'd talked to Courant about me, and he had suggested I get a master's in mathematics at New York University, where he was, and then maybe go on to do physics. So I went down for an interview, and I met him and Friedrichs. They were very kind and offered me an assistantship. Then I stayed in mathematics.

Notices: *Was it the Courant Institute at that time?*

Nirenberg: No, it was just the Graduate Mathematics Department of New York University. The department was tiny, but there were several very good fellow students. Some of us who got Ph.D.'s there stayed, like Harold Grad, Joe Keller, Peter Lax, and Cathleen Morawetz. Peter Lax's wife, Anneli, was a student there when I arrived. She was the first person I met when I came there as a student. It was a remarkable group of people.

Richard Courant, A Complicated Man

Notices: *What are your impressions of Courant?*

Nirenberg: I remember him very well. He was a complicated man; he isn't easy to summarize. He was enormously intelligent and terrific with young people. He loved to be with young people and was very encouraging. As a teacher he was good when he prepared, which was seldom, but I enjoyed his classes. Very often on the weekend he would invite some graduate students to his home, which was in New Rochelle. I discovered that one of the reasons was to weed his garden.

Courant was a great lover of music, as was his whole family. They often played chamber music at home, and sometimes I attended concerts. The story went that when Courant hired somebody, he would ask if the person played an instrument. If so, the person had a better chance of being hired. But if the instrument was piano – no, because Courant played the piano. Probably the story isn't true, but that was the story at the time.

Some of the other students were closer to Courant than I was. Kurt Friedrichs was a big influence – I would say the major influence – on me in mathematics. His view of mathematics very much formed my view. I started with Friedrichs as an adviser, and he gave me a problem in operator theory. I thought about it for a while, but I didn't get anywhere. Some months later Jim Stoker suggested a problem in geometry. Stoker was my official adviser, and he was a very kind man. But I actually talked more with Friedrichs than I did with Stoker during the time I was working on the thesis. So I was really closer to Friedrichs.

Notices: *What was Friedrichs's view of mathematics that influenced you?*

Nirenberg: I'd have trouble saying. When you were trying to resolve something, it didn't matter so much whether you would prove it was true or false. The thing was to understand the problem. Also, Friedrichs was a great lover of inequalities, and that affected me very much. The point of view was that the inequalities are more interesting than the equalities, the identities. I also liked the things he did in partial differential equations, which I followed very closely. But he did other things, in quantum theory, operator theory, shock wave theory. When I was a graduate student, I felt that what Friedrichs was doing was where the action was. So I went to him to do a thesis, but in the end I didn't do the thesis with him.

Notices: *What was the problem you worked on in your thesis?*

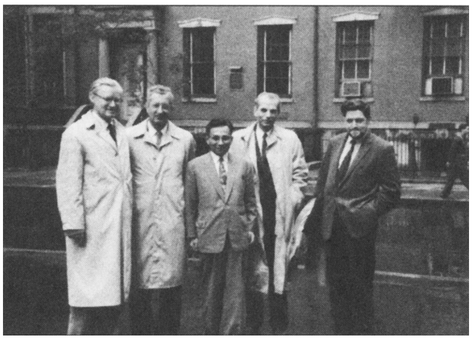
Nirenberg: It was a problem that Hermann Weyl had worked on, a problem in geometry. Weyl had solved it partly, and what I did was complete the proof. Hans Lewy solved it in the analytic case. You're given a Riemannian metric on the 2-sphere, having positive Gauss curvature, and the question is, can you embed this 2-sphere isometrically into 3-space as a convex surface? Weyl worked on it, around 1916 I think, and had made some crucial estimates. One needed some more estimates before one could finish the problem. What I did was to get the additional estimates, essentially using ideas of C. B. Morrey. Morrey's work was a very big influence on me, and later I got to know him. He was a very nice man. He didn't have many joint papers, but we did write one paper together. Morrey understood a lot of things, but he was hard to understand. I remember a story I heard. He ran a seminar every year at Berkeley. One year, the semester started, and the seminar met for the first time. He said, "Well, I'll use the same notation as last year."

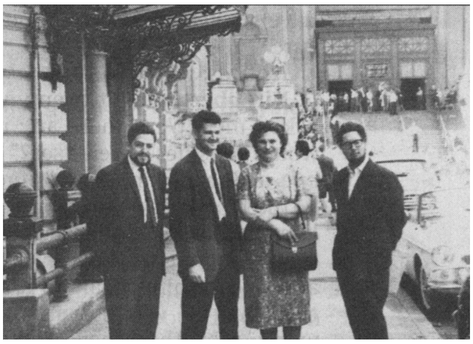
Notices: *So if you weren't in the seminar last year, too bad?*

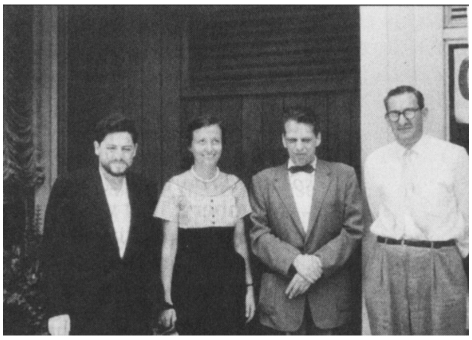
Nirenberg: You'd have to catch up. I once attended a conference in Pisa, and Morrey was there. A number of people gave a series of talks, and of course we spoke English; we didn't know Italian. When Morrey spoke he had a strong Ohioan accent, and the Italians found him very hard to understand. And he would use expressions like, "Well, if you try this kind of technique, you'll never get to second base." They had no idea what this referred to. They called him "The Sheriff". During the meeting the local newspaper published some photos from the lectures. There was a photo of Morrey standing at a blackboard lecturing, and the caption read, "Professor Nirenberg from New York University." Morrey saw this and said, "That's not Nirenberg! Those are my formulas!"

Notices: *In your later work did you follow up on your thesis on the embedding problem in greater generality?*

Nirenberg: No. The work on the embedding problem involved nonlinear partial differential equations. That's how I got into partial differential equations. After that I worked essentially in partial differential equations connected to other things.







Top Left: New York City, ca. 1953. Left to right: K. O. Friedrichs, J. Stoker, M. Nagumo, F. John, L. Nirenberg.

Top Right: Left to right: L. Nirenberg, P. Lax, O. Oleinik, F. Treves.

Photo at Left: Left to right: L. Nirenberg, C. Morawetz, L. Bers, M. Protter, 1960s.

There is still a local embedding problem that has been open for maybe 150 years. If you're given a Riemannian metric in a neighborhood of the origin in the plane, can you embed that isometrically as a piece of surface in $\mathbb{R}^3$? The general case is still open. If the metric is analytic, the answer is yes; you use the Cauchy-Kowalevsky theorem. If the curvature of the metric is strictly positive, the equations you get are elliptic, and again the answer is yes. If the curvature is strictly negative, the equations are hyperbolic; again the answer is yes. But if the curvature can change sign or might have a zero, then the problem is more difficult. Years later I gave a case of the problem to a graduate student, who did a beautiful thesis. He solved the problem in case the curvature vanishes at some point, but where its gradient is not zero. He solved that case in a beautiful paper. His name is Chang Shou Lin. He also worked on the case where the curvature is nonnegative but might have a zero. Other people have worked on this too.

Notices: *Going back to Morrey, what did he work on?*

Nirenberg: One of his famous papers, which he did around 1932 or 1933, was to solve one of Hilbert's problems, which Hilbert had formulated in two dimensions. Morrey proved the analyticity of the solution of the nonlinear variational problem. The n-dimensional problem was done in 1957 independently by De Giorgi and Nash. De Giorgi did it first.

Notices: *You knew [John] Nash. There was one year when he hung around the Courant Institute.*

Left: Nirenberg with wife Susan and children Lisa and Marc, Spain, 1962. *Right:* With Joe Kohn around 1965.

Nirenberg: He was officially visiting Princeton, but his girlfriend – I think they were not yet married at the time, but I don't quite remember – lived in New York. So he spent a lot of time in New York, and he hung around the Courant Institute a lot. I knew him pretty well that year. That's the year when he did the paper connected with the De Giorgi paper.

Notices: *Were you the one who suggested that problem to Nash?*

Nirenberg: I think Sylvia Nasar writes that in her biography of Nash, but I don't remember. I would say it's likely, because it was a problem that I was interested in and had tried to solve. I knew lots of people were interested in this problem, so I might have suggested it to him, but I'm not absolutely sure.

Notices: *What did you make of him at the time?*

Nirenberg: About twenty years ago somebody asked me, "Were there any mathematicians you would consider as geniuses?" I said, "I can think of one, and that's John Nash." I first heard of him when he did his paper on the isometric embedding problem, and I studied that paper. I found that to be a remarkable paper. I met him after he had done it, and I heard him speak on it at a meeting in Seattle. When he was hanging around Courant and working on the other problem, he would come around and ask questions like, "Do you think such-and-such inequality might be true?" Sometimes the inequalities weren't true. I wasn't sure he was getting anywhere. But then in the end, he did it. He had a remarkable mind. He thought about things differently from other people.

Pure versus Applied?

Notices: *How do you see the relationship between so-called "pure" and "applied" mathematics?*

Nirenberg: That was one of the nice things about the Courant Institute – and very much due to Courant and Friedrichs – that there was hardly any difference between pure and applied. There was just mathematics, and people were interested in both pure problems and applied problems and didn't distinguish so much. There was a period when I was a graduate student when a number of people – Friedrichs, Stoker, Hans Lewy, Fritz John – worked on the theory of water waves. But the work was analysis, meaning partial differential equations or complex analysis.

Courant also was a great believer that you must not only do research, you must also teach. That's very different from, say, the Russian or Soviet system, where there were many institutes where people just did research and didn't teach. Courant always thought that was very bad. In fact, the young people at Courant taught less than the older people. In general the atmosphere is terrific at Courant. The graduate students are very fond of the place. There's a very warm relationship between the faculty and the students.

Notices: *You spent 1951–52 in Europe. Where did you go?*

Nirenberg: I went to Zürich, to see Heinz Hopf, and I also went to Göttingen. This was arranged by Courant. I went first to Zürich, and then my wife and I went to Göttingen. She was very unhappy to be there, and we stayed only a month in Göttingen and then went back to Zürich.

Notices: *Why was she so unhappy?*

Nirenberg: Just the idea of being in Germany. Both of us were not so happy with the idea, but Courant had arranged it, and we thought we should do it. In fact, she went back to Zürich a little before I did.

When I was in Göttingen, Carl Ludwig Siegel invited me to dinner, and he served white asparagus. I had never had white asparagus before, which I found delicious. I was told the next day he complained, "Nirenberg ate all the asparagus!" But I didn't have much contact with Siegel. Jürgen Moser was a student at the time I was there. He was a student of Franz Rellich, and, in fact, when I was there I spoke more with Rellich than with other people.

In Zürich I attended Hopf's lectures. He was my favorite lecturer for many years. He spoke absolutely gorgeous, musical German. He gave a wonderful course in geometry, and I later attended a course he gave at Courant. I kept up my interest in geometry, although I didn't work so much in geometry. In Zürich I also attended lectures by Nevanlinna and van der Waerden, who were at the University of Zürich. van der Waerden was giving a course in Riemann surface theory, which he then made into a book. At that time I could speak a little German, but since then I haven't spoken German, so I've forgotten. Yiddish was my first language, so it wasn't hard to pick up some German, and I still speak Yiddish a little and can understand it almost perfectly. I also met Hermann Weyl, but he wasn't teaching, he was just living in Zürich. I attended some lectures of Pauli in relativity theory. I found him hard to understand.

Newlander-Nirenberg Theorem

Notices: *Around 1957 you worked on the integrability problem with your student Newlander. How did that paper come about?*

Nirenberg: That happened in an interesting way. I heard of the problem from two people, first from André Weil. He said, "Ah, you people in partial differential equations! You're not working on the important problems! Here is an important problem that we need in complex analysis. Why aren't you working on that?" And later Chern brought the problem to my attention. So I thought, okay, let's have a stab at that. So I suggested to Newlander that we work on it.

The problem, a local one, is this: In $\mathbb{R}^{2n}$, can one recognize the Cauchy-Riemann operators if they are given in some arbitrary coordinate system? For $n = 1$, the long-known answer is yes. For $n > 1$, there are necessary integrability conditions, and these turn out to be sufficient. In the problem you have, sort of, Cauchy-Riemann equations with some extra terms. The idea was to get rid of those terms one at a time. In the simplest case we first looked at, there was just one extra term, and Newlander had the idea of how to get rid of that term. Then we worked together on the more general case, first in two complex dimensions. I was sure that everything would work in higher dimensions, but then when it came to writing it down, we discovered that the idea didn't work in higher dimensions. We then came up with a different proof, which got rid of everything at the same time, but by making a fully nonlinear transformation of the whole problem. But I was drawn to the problem because of André Weil and Chern.

Notices: *They were right, because this turned out to be an important result.*

Nirenberg: Yes, it's a very natural question, and the result has been used. I find it interesting that in recent years Gromov and others have done fantastic things with nonintegrable structures.

Notices: *Where is Newlander now?*

Nirenberg: He got a job in Seattle, but he had some psychological problems and he couldn't teach. After a few months he gave up his job and gave up mathematics. He moved to his hometown, Denver, Colorado, and we were in touch every New Year's for a number of years, but now I've lost touch with him. I don't know where he is. He stopped mathematics shortly after the Ph.D. thesis. That was the only paper he ever wrote. He was a very bright guy, but he had problems.

Notices: *Was he your first student?*

Nirenberg: No, my first student was Walter Littman. He's at the University of Minnesota and works in partial differential equations. I've had quite a number of students, about forty-five. I had a colleague at Courant, Wilhelm Magnus, and he was marvelous with students. Once he said to me, "You know, I don't mind writing a student's thesis. I object when they come to check on my rate of progress."

Notices: *You had a couple of especially influential papers with Agmon and Douglis. Can you say a little bit about these papers and why they have been influential?*

Nirenberg: In the theory of second-order elliptic equations, there was famous work done by Schauder. Douglis and I decided we would like to extend the Schauder theory to higher-order equations. So we did that first for so-called interior estimates, meaning away from the boundary. Then we started working on the case on boundaries, and we discovered that Agmon was also working on that. So we thought the three of us could collaborate. The collaboration with Agmon was mainly by mail, because he wasn't at Courant then. This was shortly after the work of Calderón-Zygmund on L^p theory, and we knew that the Calderón-Zygmund theory could extend easily to interior estimates in L^p, so we thought we should do that up to the boundary also. And that was a lot of work. We decided to do it in general because we figured these estimates would be useful to people working in partial differential equations. Indeed, that's been the case; they have been useful. Douglis was also a student at Courant, but he left shortly after he got his Ph.D. We were good friends for many years.

Mathematical Taste

Notices: *When you were at Courant, people would come and talk to you about the problems they were working on.*

Nirenberg: One reason was that I was very good at catching mistakes. I'm no longer good at that. I don't catch my own mistakes anymore! I have to be very careful and check everything I do. But I was very good at catching mistakes, so people came for that reason. They would show me a proof to have it checked because I had a good nose for mistakes.

Notices: *Then out of these conversations also came collaborations.*

Nirenberg: Sometimes, yes.

Notices: *What would guide you in choosing what to work on? What kinds of things would interest you about problems you would hear about?*

Nirenberg: I myself don't understand so very well. I remember meeting a young Frenchman years ago, and he had been trying to do research for several years. He asked me, "How do you do research? How do you start on a problem?" I said, "Well, sometimes it happened to me that I read a paper and I didn't like the proof. So I started to think about something that might be more natural, and very often


Left: International Congress in Stockholm, 1962. Front row: M. Stone, J. Moore, N. Wiener. Second row: Nirenberg center (with glasses). To his (physical) left, H. Hopf. *Right:* Receiving the Crafoord Prize, Stockholm 1962, with Mrs. Crafoord and the King of Sweden.

this led to some new work." Then I asked him, "What about your case?" He said, "I never found a proof I didn't like." I thought, "This is hopeless!"

Notices: *Did you then give him a few proofs you thought were especially bad?*

Nirenberg: No.

Notices: *There is a question of taste there.*

Nirenberg: Yes, taste plays a very important role in mathematics. Some mathematicians I think have very good taste, others I am not so drawn to the kind of problems they work on. Taste is very important, and it's very hard to define or even to describe.

Notices: *But what usually appeals to you? A general theoretical question? Or a specific problem?*

Nirenberg: I greatly admire people who develop theories in mathematics, but I am not one of those. I am more of a problem solver. I hear a problem, and if it appeals to me, I work on it. I remember the work I did with Joe Kohn on pseudo-differential operators. We were trying to extend his work on regularity of the so-called $\bar{\partial}$-Neumann problem to other degenerate problems. We were trying to work with singular integral operators, and we seemed to need facts about products and commutators of singular integral operators, which were then not in the literature. We said, "Well, we'll try and develop what we need." That's how we did the work that we then called pseudo-differential operators – by the way, the name "pseudo-differential operators" is due to Friedrichs. We needed this for a specific problem. But in the case of the work with Agmon and Douglis – there we felt we should develop the general estimates for the general systems under general boundary conditions because we thought those estimates would be useful.

Notices: *You said you are problem oriented and you choose problems that appeal to you. Can you say what the appeal is, or which type of problem appeals to you?*

Nirenberg: That's hard. Inequalities, certainly. I love inequalities. So if somebody shows me a new inequality, I say, "Oh, that's beautiful, let me think about it," and I may have some ideas connected with it.

Let me say a word about the paper with Luis Caffarelli and Bob Kohn on Navier-Stokes equations. There was a paper of I. M. Sheffer, a mathematician at Rutgers who had very interesting results on the dimension of possible singularities. One day I was walking through Chinatown with Caffarelli and Bob Kohn, and I said, "You know, we should study that paper. Why don't we study it together?" So that's how that came about – we decided to study Sheffer's paper.

Notices: *The Millennium Prize Problem about the Navier-Stokes equations asks whether or not the solutions have singularities. How do you see this problem?*

Nirenberg: It's a great problem. I think it will be settled in the not-too-distant future, one way or another. I won't bet which way it will go. Maybe twenty years ago – before I had done the work on the Navier-Stokes problem – I asked Jean Leray which way he thought it would go. He didn't predict. He was a great mathematician and greatly influenced me. I first met him at the International Congress at Harvard in 1950. He had also worked on the isometric embedding problem, and I couldn't understand his paper, so I made an appointment to talk about it with him. We met in his office at Harvard for one or two hours. He was extremely kind, but I never understood that paper.

Notices: *With the Navier-Stokes problem, do you think that the existing methods in PDE are enough to eventually crack it, or is some new idea needed?*

Nirenberg: My feeling is one needs more harmonic analysis. But I haven't worked on it since the work we did in our paper.

Notices: *But your result is about the best that's been done.*

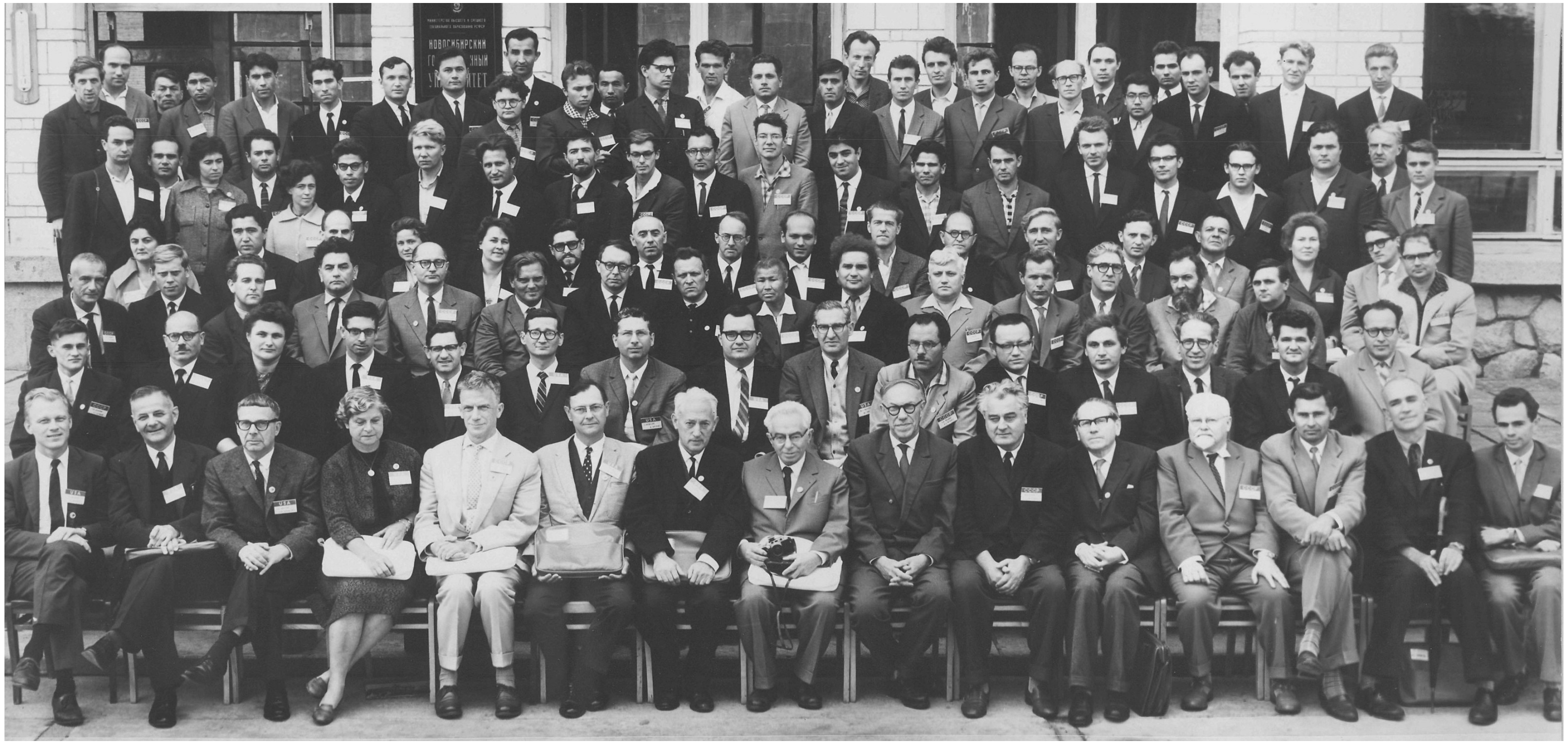
Nirenberg: About the nature of the singularities, yes.

Notices: *It's strange that the problem is so open, that one isn't leaning one way or the other.*

Nirenberg: When I was working on it, I sometimes felt one way, sometimes I felt the other way. At the moment I don't have any particular feeling about which way it should go.

Mathematical Vision

Nirenberg: In 1963 there was a joint Soviet-American meeting in Novosibirsk on partial differential equations. That was one of the best meetings I ever went



Joint Soviet-American Conference in Partial Differential Equations in Novosibirsk, USSR, August 1963. L. Nirenberg provided partial identification of those pictured in photo above.* *Front row* (left to right): J. Moser, A. Zygmund, L. Ahlfors, N. Brunswick, S.L. Sobolev, C.B. Morrey, C. Loewner, R. Courant, M.A. Lavrent'ev, I. Vekua, S. Bergman, A.N. Tikhonov, G.I. Marchuk, D. Spencer, A. Dynin. *Second row*: [T.I. Zelenyak], M.G. Krein, O.A. Oleinik, H. Weinberger, H. Grad, M. Schechter, J. Douglas, F. Browder, M.H. Protter, [A.D. Myshkis], Ju. M. Berezanskii, [V.A. Il'in], A.P. Calderón, P.D. Lax, E.B. Dynkin. *Third row*: A.Ja. Povzner, [B.L. Rozhdestvenskiy], P.E. Sobolevskii, [G. N. Agaev, B. N. Panaioti], B.V. Shabat, [L.D. Kudryavtsev, G.D. Suvorov, T.I. Amanov, P.P. Belinskii], S. Krein, [I.D. Sofronov], R. Richtmeyer. [A.A. Lyapunov, S.K. Godunov, L.I. Kamynin]. *Fourth row*: [E.I. Obolashvili, M.S. Salakhitdinov], R. Finn, [two interpreters], L. Nirenberg, [G.M. Komladze, M.K. Fage, B.R. Vainberg, L.V. Ovsyannikov, L.I. Volkovysskij, I.I. Danilyuk,] M. Vishik, [S.M. Nikol'skii, V.N. Maslennikova], Yu.V. Egorov. *Fifth row*: M. Agranovich [A.P. Nizhnik] N. Vvedenskaya L. Volevich T. Venttsel [A.M. Il'in, D. Sidorov, Ya.A. Roitberg, T.G. Golenopol'skij, I.A. Shishmarev, Ya.S. Bugrov, –, Yu.L. Rodin, A.V. Sychev, V.S. Ryaben'kii, O.V. Besov, S.V. Uspenskii, V.G. Dulov, –, V.K. Ivanov, S.N. Kruzhkov]. *Sixth row*: V.A. Solonnikov, M.A. Lavrent'ev, [A.K. Gerasimov, –, N.E. Tovmasyan, A.D. Dzhuraev, P.I. Lizorkin, T.D. Dzhuraev, V.G. Maz'ya, –, V.S. Buslaev, G. Salikhov, V.M. Babich] L. Faddeev, [A.I. Koshelev], M.S. Birman. [S.I. Pokhozhaev, – Didenko, A.I. Prilepko, –, A.M. Moltchanov, –, –, –, Yu.I Gil'derman, –, L.G. Mikhailov, Yu.V. Sidorov. **Editor's note:* Text and names in square brackets added on the occasion of this reprinting].

Moscow, 1988, at a conference organized by "refuseniks".

to. I met many Soviet colleagues and made friends, and we've remained friends to this day. Afterwards several of us went to Moscow for a few days and attended Gelfand's famous seminar. It goes on for hours, with different speakers, and Gelfand interrupts the speakers to make comments and ask questions. When we returned to New York, Friedrichs said, "You know, we should run a seminar like that, and we could take turns playing Gelfand."

Gelfand is still active, doing research, running a seminar, and working with different people. It's just incredible – he is now 88 years old. I saw him just a few weeks ago. He's always been the sort of person who sparks ideas, and then other people carry them out. Whenever I saw him in Moscow, he would ask me, "What do you consider important now in mathematics? What are the future directions?" These were questions I could never answer. It was always embarrassing to me, because I never think in those terms. But he does think in those terms.

Notices: *You would have things you were working on then. But you didn't necessarily think that that would be the future direction?*

Nirenberg: No, one doesn't know. And I don't have such a vision of mathematics as he does.

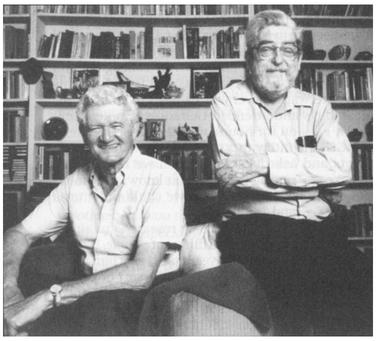
Notices: *But do you think his vision has been good and accurate?*

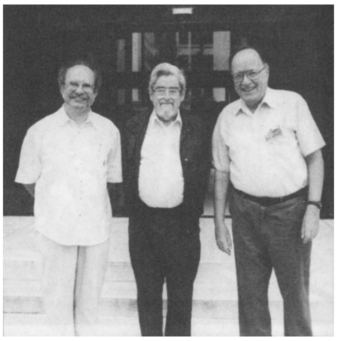
Nirenberg: Oh yes, I think he has remarkable vision. He's worked on so many different things, and he helped develop so many different fields.

Notices: *Do you know of other mathematicians who have that kind of vision?*

Nirenberg: Maybe André Weil had that kind of vision. Perhaps Hirzebruch, Atiyah, Milnor, Smale.

This reminds me of a story I heard about von Neumann. Somebody once asked him, "Today, how much of all of mathematics can a mathematician know?" He replied, "Uh – two-thirds."





Left: Nirenberg with colleague Peter Lax, 1999. *Right:* With Haim Brezis and Joe Kohn, Taiwan, September 2000.

The Joy of Collaboration

Notices: *You wrote one paper with Fritz John.*

Nirenberg: I think I was the first person he wrote a paper with. He then wrote several with Klainerman, towards the end of his life, but mostly he worked by himself. He never followed any fashion. In fact, he always would apologize, "Oh, I haven't read this, I haven't read that." But he created fashions, because he had such wonderful ideas, and people then followed his ideas and developed what he did. He was very independent, at the same time very modest.

The paper I wrote with Fritz John started when he came to me and said, "I believe such-and-such inequality should be true" and that something should be in L^p. I was able to prove that, and then he improved what I had done. So we wrote a joint paper.

Notices: *This was the paper in which you defined BMO [bounded mean oscillation].*

Nirenberg: Yes. That was the only paper I had with him. He was a wonderful mathematician – extremely deep and original.

Notices: *How did he come upon the problem you worked on together?*

Nirenberg: He did several papers in elasticity theory, and it was one problem in particular that came up.

Notices: *How have the BMO spaces been used subsequently?*

Nirenberg: They have been used in harmonic analysis and in martingale theory. More and more in analysis people are working on something called VMO – which I call the son or daughter of BMO – vanishing mean oscillation. That's due to Donald Sarason at Berkeley, and it's turned out to be an extremely useful tool. A few years ago I did a paper with Haim Brezis in which we extended degree theory to mappings belonging to VMO.

Photos left to right: Nirenberg with Jürgen Moser; with Yan Yan Li and Chang-Shou Lin in Taiwan, Sept. 2000; with Irene and Luis Cafarelli.

I've worked with several French mathematicians and written lots of papers with Brezis and Henri Berestycki. And a lot of papers with Luis Caffarelli.

Notices: *What is Caffarelli like as a mathematician?*

Nirenberg: Fantastic intuition, just remarkable. We haven't worked together for several years now, but when we worked together, I had a hard time keeping up with him. He somehow immediately sees things that other people don't see, but he has trouble explaining them. He says things and writes very little, so when we were working at the board, I would always say, "Luis, please write more, write down more." Once I said to him, "Luis, to use a Biblical expression, 'Where is it written?' " Somebody said he once heard a talk in which Luis proved something in partial differential equations – using nothing! Just somehow out of thin air, he can come up with ideas. He's really fantastic – and a very nice person.

I must say all the people I've worked with have been extremely nice. It's one of the joys of working with colleagues. For instance, Peter Lax – although we wrote only one paper together, he seems like a brother to me. He was a big influence on me. He always knew more mathematics than I did. I learned a lot from him. Speaking of collaborating, let me just mention a few other people I enjoyed working with very much. I wrote several papers with François Treves, and they were a great pleasure. We worked on certain classes of equations that came out of work of Hans Lewy – equations that have no solutions at all, even locally. We wrote several papers on this problem. That was fun. I would like to mention also David Kinderlehrer, Joel Spruck, and Yan Yan Li. I wrote one paper with Philip Hartman that was elementary but enormous fun to do. That's the thing I try to get across to people who don't know anything about mathematics, what fun it is! One of the wonders of mathematics is you go somewhere in the world and you meet other mathematicians, and it's like one big family. This large family is a wonderful joy.

Allyn Jackson is senior writer and deputy editor of the Notices. Her e-mail address is axj@ams.org. All photographs in this article are courtesy of Louis Nirenberg.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 229 (2015), 43–52

Fußpunktdreiecke

Berthold Schuppar
TU Dortmund

1 Einleitung

Fällt man von einem Punkt S der Ebene die Lote auf die Seiten eines Dreiecks ABC, dann bilden die Lotfußpunkte ein neues Dreieck (Abb. 1). Diese *Fußpunktdreiecke* sind in der Elementargeometrie wohlbekannt; das herausragende Resultat ist der *Satz von Wallace*: Wenn S auf dem Umkreis des Dreiecks liegt, dann liegen die drei Lotfußpunkte auf einer Geraden, d.h. das Fußpunktdreieck ist entartet (Abb. 2). Diese Gerade heißt dann *Simson-Gerade* zum Punkt S. Der Beweis ist eine schöne Anwendung des Umfangswinkelsatzes, vgl. [5, S. 143f]. Ein weiteres klassisches Resultat bezüglich des Flächeninhalts der Fußpunktdreiecke ist eher der analytischen Geometrie zuzurechnen (vgl. Abschnitt 4). Im Folgenden wird gezeigt, dass die Fußpunktdreiecke bei einem festen Dreieck ABC beliebige Formen annehmen können, und bei der Untersuchung des Zusammenhangs *ähnlicher* Fußpunktdreiecke ergibt sich eine überraschende Verbindung mit dem Feuerbachschen Neunpunktekreis.

Die Intention der folgenden Ausführungen ist jedoch nicht nur, ein bekanntes Problem der Elementargeometrie aufzuwärmen und mit weiteren Aspekten zu ergänzen, sondern auch und vor allem die Rolle der Dynamischen Geometrie Software (abgekürzt DGS; z.B. GeoGebra) herauszustellen. Selbst der Satz von Wallace kann mithilfe von DGS wiederentdeckt werden, und aus der dynamischen Interpretation der Figuren ergeben sich zahlreiche weitere Beobachtungen. Somit dient DGS vorrangig als heuristisches Hilfsmittel zum Aufstellen und Bestätigen bzw. Widerlegen von Vermutungen. Nach wie vor bleibt es natürlich den Benutzern vorbehalten, die Figuren zu analysieren, Fragen zu stellen und die Vermutungen zu beweisen.

Bezeichnungen: ABC sei ein beliebiges, aber festes Dreieck, S ein beliebiger Punkt der Ebene; die Fußpunkte der Lote von S auf die Geraden BC, AC und AB heißen D, E und F (sie liegen jeweils den Punkten A, B, C gegenüber). S heißt der *Urpunkt* des Fußpunktdreiecks DEF (vgl. Abb. 1). Die Winkel in beiden Dreiecken

ISSN 0020-7926

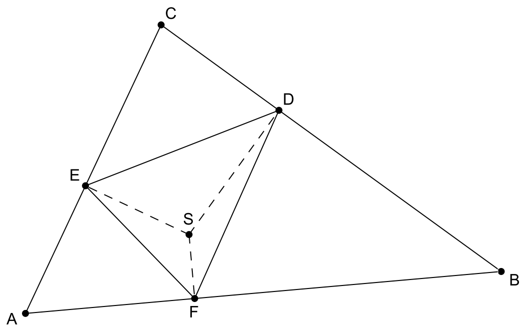


Abbildung 1: Fußpunktdreieck.

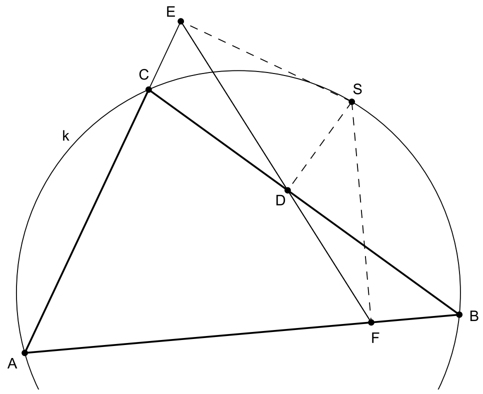


Abbildung 2: Zum Satz von Wallace.

werden den Scheitelpunkten entsprechend mit α, β, ..., φ bezeichnet. Zudem sei k der Umkreis des Dreiecks ABC.

2 Kann man Fußpunktdreiecke beliebiger Form erzeugen?

Beobachtung: Schon wenn man S innerhalb des Umkreises k bewegt, dann kann jeder Winkel des Dreiecks ΔABC jedes Maß zwischen $0°$ und $180°$ annehmen, das ist besonders deutlich zu sehen, wenn S auf einem Durchmesser von k läuft; wenn z.B. dieser Durchmesser die Seite AB schneidet, dann variiert φ kontinuierlich zwischen $0°$ und $180°$.

Es sei jetzt das Maß eines Winkels im Fußpunktdreieck, etwa von φ, fest vorgegeben. Wo liegen die Urpunkte S, für die φ dieses Maß annimmt? Gesucht ist die *Ortslinie* dieser Punkte. Experimentell kann man finden: Es ist vermutlich ein Kreisbogen über AB. Wenn man S gezielt an einen solchen Kreisbogen bindet, dann kann man die Vermutung durch eine Messung des Winkels bestätigen. Außerdem zeigt sich, dass für den Umfangswinkel $\sphericalangle ASB$ dieses Bogens (dessen Größe sich natürlich auch nicht ändert) Folgendes gilt:

Wenn S innerhalb des Umkreises k liegt, dann ist $\sphericalangle ASB = \gamma + \varphi$.

Beweis: (Bezeichnungen vgl. Abb. 3): S liege innerhalb von ΔABC. Das Viereck $AFSE$ ist ein Sehnenviereck (mit Durchmesser AS), somit ist $\sphericalangle EFS = \alpha_1$, denn beide Winkel sind Umfangswinkel über der gleichen Sehne ES im Umkreis dieses Sehnenvierecks. Analog gilt $\sphericalangle DFS = \beta_1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASB &= 180° - \alpha_2 - \beta_2 = 180° - (\alpha - \alpha_1) - (\beta - \beta_1)\\ &= 180° - \alpha - \beta + \alpha_1 + \beta_1 = \gamma + \sphericalangle EFS + \sphericalangle DFS\\ &= \gamma + \varphi.\end{aligned}$$

Liegt S außerhalb von ΔABC (also „unterhalb" von AB), dann muss man den Beweis leicht modifizieren; in diesem Fall ist $\sphericalangle ASB = \gamma + \varphi$ überstumpf.

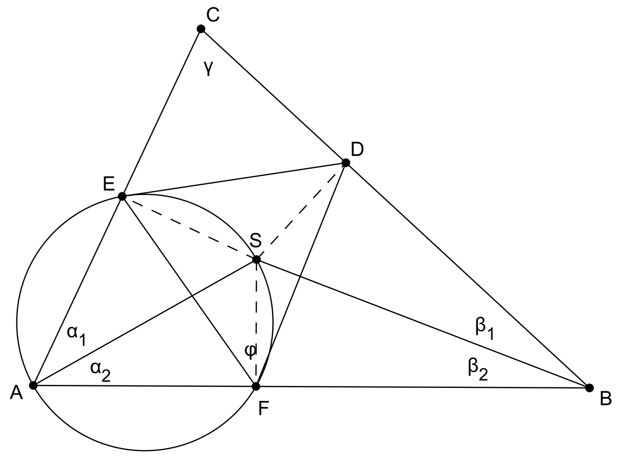


Abbildung 3: Berechnung des Winkels ASB.

Ganz ähnlich kann man zeigen: Wenn S außerhalb des Umkreises k liegt, dann ist $\sphericalangle ASB = |\gamma - \varphi|$.

Übrigens gilt in diesem Fall immer $\varphi < \gamma$, wenn S „oberhalb" von AB liegt (d.h. auf der gleichen Seite wie C), sodass die Differenz $\gamma - \varphi$ positiv ist; andernfalls ist $\varphi > \gamma$ und $\sphericalangle ASB = \varphi - \gamma$.

Sonderfälle: Liegt S auf dem Bogen AMB, dann ist $\varphi = \gamma$ und $\sphericalangle ASB = 2\gamma$ (Mittelpunktswinkel zu γ). Ebenso ist $\varphi = \gamma$, wenn S auf der Geraden AB, aber nicht zwischen A und B liegt; hier ist offenbar $\sphericalangle ASB = 0°$.

Wir können also jetzt das folgende Ergebnis formulieren: Die gesuchte Ortslinie besteht i.A. aus zwei Kreisbögen über AB zu den Umfangswinkeln $\gamma + \varphi$ und $|\gamma - \varphi|$. Diese Kreisbögen liegen oberhalb des Bogens AMB, wenn $\varphi < \gamma$ ist, sowie unterhalb dieses Bogens, wenn $\varphi > \gamma$ („oberhalb" bedeutet wie oben: auf der gleichen Seite wie C). In jedem Fall liegt einer der beiden Bögen der Ortslinie innerhalb, der andere außerhalb von k.

Die zwei Kreisbögen sind invers zueinander bezüglich der Kreisspiegelung an k. Denn beide schneiden k unter dem Winkel φ (das folgt aus dem Satz vom Sehnen-Tangenten-Winkel, vgl. Abb. 4); man weiß jedoch, dass die Kreisspiegelung einen Kreisbogen über AB wieder auf einen Kreisbogen über AB abbildet; da sie zudem winkeltreu ist, muss der äußere Kreisbogen das Bild des inneren sein (und umgekehrt).

Zurück zur Ausgangsfrage: Kann man Dreiecke beliebiger Form als Fußpunktdreiecke erzeugen? Sind zwei Winkelmaße vorgegeben, etwa von ε und φ, dann konstruiere man die entsprechenden Bogenpaare zu ε über AC sowie zu φ über AB; die beiden Bögen innerhalb von k schneiden einander in einem Punkt S, die Bögen außerhalb von k in einem Punkt S'. Diese beiden Punkte erzeugen jeweils ein Fußpunktdreieck DEF bzw. $D'E'F'$ mit den Winkeln ε bei E bzw. E' und φ bei F bzw. F'. Zudem sind die beiden Urpunkte S und S' invers zueinander bezüglich der Kreisspiegelung an k. (Die Ecken der beiden Fußpunktdreiecke sind jedoch *nicht* invers zueinander!).

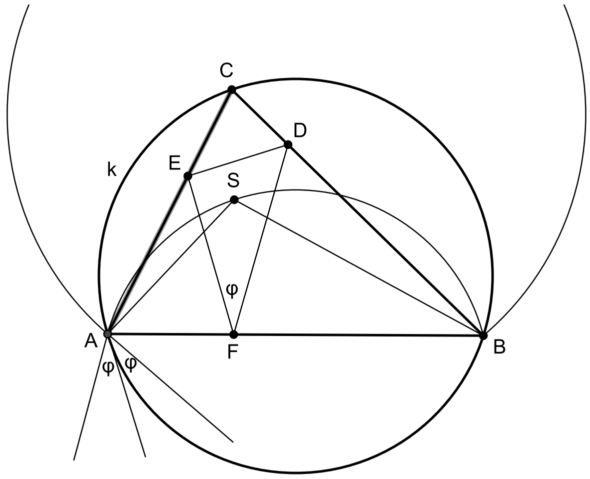


Abbildung 4: Inverse Kreisbögen.

3 Ähnliche Fußpunktdreiecke

Das letztgenannte Ergebnis kann man auch so formulieren: *Ist S ein beliebiger Urpunkt und S' sein Bild unter der Kreisspiegelung an k, dann sind die beiden Fußpunktdreiecke ähnlich zueinander*. (Beispiel siehe Abb. 5.) Dieser Satz wird auch in [1, §362] bewiesen, allerdings auf eine andere Art.

Das Ähnlichkeitsverhältnis kann man wie folgt bestimmen: Das Viereck $AFSE$ ist ein Sehnenviereck mit Durchmesser AS, daher gilt nach dem erweiterten Sinussatz:

$$|EF| = |AS| \cdot \sin(\alpha).$$

Analog im Sehnenviereck $AF'S'E'$:

$$|E'F'| = |AS'| \cdot \sin(180^\circ - \alpha).$$

Weil die Sinuswerte gleich sind, folgt daraus:

$$|E'F'| : |EF| = |AS'| : |AS|.$$

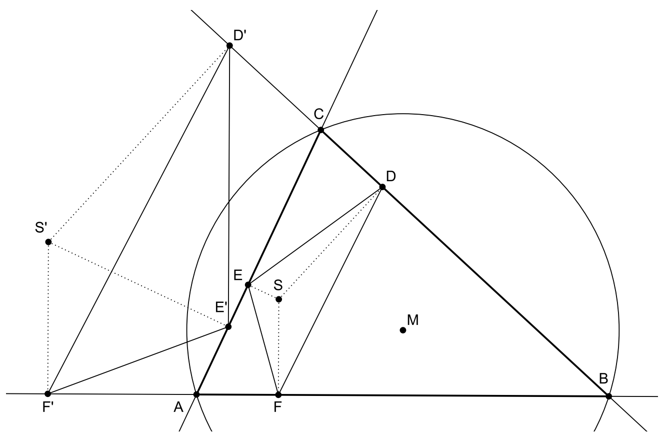


Abbildung 5: Ähnliche Fußpunktdreiecke.

Nun ist das Verhältnis $|AS'| : |AS|$ für alle Punkte A auf dem Inversionskreis k konstant (das ist eine fundamentale Eigenschaft der Kreisspiegelung). Ist insbesondere T der Punkt auf k zwischen S und S', so gilt (vgl. Abb. 6):

$$|AS'| : |AS| = |TS'| : |TS| = |MT| : |MS|.$$

Mit anderen Worten: Der Umkreis k ist der Apolloniuskreis des Punktepaares S, S' zum Teilverhältnis $x := |MT| : |MS|$ (das gilt unabhängig vom speziellen Wert von x).

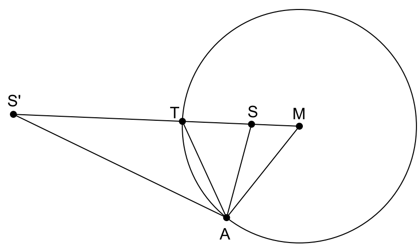


Abbildung 6: Zur Kreisspiegelung.

Man hätte auch auf diese Art die Ähnlichkeit der beiden Fußpunktdreiecke beweisen können, denn offenbar kann man genauso für die anderen Paare korrespondierender Seiten das Verhältnis ihrer Längen ausrechnen, und es ergibt sich immer der gleiche Wert, nämlich x.

Offensichtlich sind die Dreiecke DEF und $D'E'F'$ *gegensinnig* ähnlich (vgl. Abb. 5). Dann gibt es eine *Streckspiegelung*, die ΔDEF auf $\Delta D'E'F'$ abbildet. Ihre Bestimmungsstücke sind *Achse* s und *Zentrum* Z, wobei Z auf s liegt; die Streckspiegelung ist die Verkettung der Spiegelung an s und der Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor x (die Reihenfolge der Verkettung ist egal). Die Achse ist der geometrische Ort der *inneren Teilungspunkte* von Strecken PP' zum Teilverhältnis x (P beliebig, P' sein Bild unter der Streckspiegelung); das Zentrum Z ist Fixpunkt und liegt daher auf allen Apolloniuskreisen der Punktepaare P, P' zum Teilverhältnis x. Beide Bestimmungsstücke sind also mit begrenztem Aufwand konstruierbar. (Z ist auch einfacher konstruierbar, wenn man zu einem Punkt P auf der Achse s den Bildpunkt P' kennt, nämlich als *äußerer Teilungspunkt* von PP' zum Teilverhältnis x.)

Konstruiert man nun eine solche Figur mit DGS und zeichnet insbesondere die Ortslinie von Z bei Variation des Urpunkts S, dann zeigt sich ein überraschendes Bild. Der optische Eindruck ist so überzeugend, dass man die Beobachtung gleich als Satz formulieren kann; der anschließende Beweis manifestiert dann nicht mehr, *dass* es so ist, sondern klärt die Frage, *warum* es so ist.

Satz. *Die Punkte S, S' seien invers zueinander bezüglich der Kreisspiegelung am Umkreis k von ΔABC, und es sei T der Punkt auf k zwischen S und S'. Dann gilt für die von S und S' erzeugten Fußpunktdreiecke (vgl. Abb. 7):*

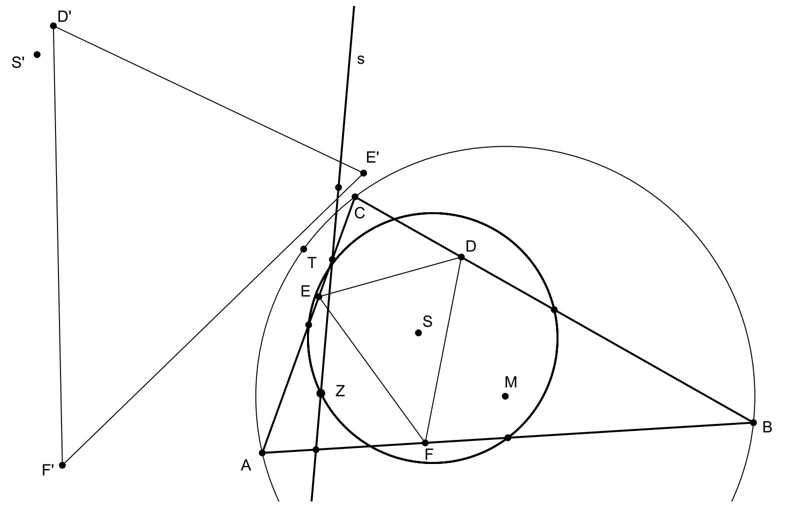


Abbildung 7: Streckspiegelung: Achse s und Zentrum Z; Ortslinie der Zentren.

1. *Die Achse s der Streckspiegelung, die ΔDEF auf $\Delta D'E'F'$ abbildet, ist die Simson-Gerade von T;*
2. *das Zentrum Z der Streckspiegelung liegt auf dem Feuerbachschen Neunpunktekreis.*

Die Beweisidee fußt auf den o. g. Eigenschaften der Streckspiegelung: Die inneren *Teilungspunkte* der Strecken DD', EE', FF' zum Teilverhältnis x definieren die Achse s, und das Zentrum Z ist der gemeinsame Punkt ihrer Apolloniuskreise. Aus der Analyse der daraus entstehenden Figur ergibt sich der folgende Beweis, der in dieser kompakten Form (leider) nicht mehr den Weg der Beweis-*Findung* wiedergibt.

Beweis. Wir gehen davon aus, dass die Gerade MT weder parallel noch senkrecht zu einer Seite von ΔABC ist (vgl. die Anmerkungen im Anschluss an den Beweis).

Wir untersuchen zunächst exemplarisch das Punktepaar F, F'. Es sei K der Schnittpunkt der Geraden MT und AB; weiterhin sei I der Fußpunkt des Lotes von T auf AB. Wir betrachten die Streckspiegelung ζ mit Zentrum K, die T auf I abbildet. ζ ist dadurch eindeutig bestimmt (ihre Achse ist die Winkelhalbierende von $\sphericalangle TKI$). Sie bildet die Gerade MT auf die Gerade AB ab und umgekehrt (vgl. Abb. 8).

Alle Dreiecke PKP' mit P auf AB oder auf MT und $P' = \zeta(P)$ sind offenbar ähnlich zueinander, denn sie haben einen gemeinsamen Winkel bei K, und die diesem Winkel anliegenden Seiten haben das gleiche Verhältnis. Da $I = \zeta(T)$ und $TI \perp AB$, sind all diese Dreiecke rechtwinklig (mit dem rechten Winkel beim Bildpunkt P'). Umgekehrt gilt: Ist P ein Punkt auf AB (bzw. auf MT) und ist Q der Lotfußpunkt von P auf MT (bzw. auf AB), dann ist $Q = \zeta(P)$.

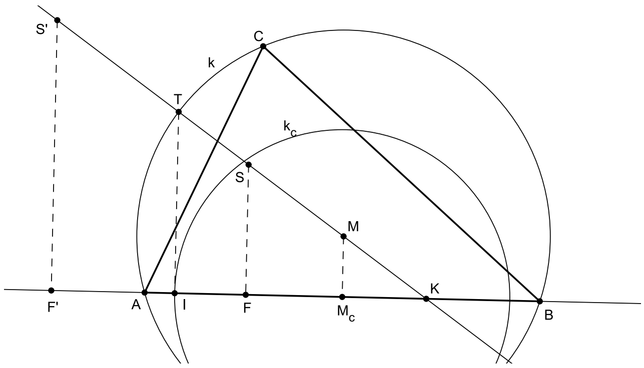


Abbildung 8: Zur Streckspiegelung ζ.

Die Behauptung wird jetzt in vier Schritten bewiesen:

(a) SS' wird von T innen im Verhältnis x geteilt. Die Punkte S, T, S' werden unter ζ auf die Fußpunkte F, I, F' der jeweiligen Lote auf AB abgebildet; da ζ das Teilverhältnis erhält, wird auch FF' von I innen im Verhältnis x geteilt. Folglich liegt I auf der gesuchten Achse s. Andererseits ist I per definitionem ein Punkt auf der Simson-Geraden von T.

Das gilt analog für die anderen Punktepaare DD', EE' und für die zugehörigen Lotfußpunkte von T auf die Seiten BC und AC, also ist s die Simson-Gerade von T; damit ist 1. bewiesen.

(b) Der Umkreis k ist, wie oben gesagt, der Apolloniuskreis von SS' zum Teilverhältnis x, unabhängig von der speziellen Lage von S, d.h. für alle möglichen Werte von x.
Es sei nun k_c der Kreis durch I mit der Seitenmitte M_c von AB als Zentrum (vgl. Abb. 8). Offenbar ist $M_c = \zeta(M)$, und nach Definition gilt $\zeta(T) = I$, also wird k von ζ auf k_c abgebildet. Somit ist k_c der Apolloniuskreis von FF', und zwar wieder für alle möglichen Werte von x. (Die Lage von k_c hängt nur von T ab).
Gleiches gilt für die analog konstruierten Kreise k_a, k_b bezüglich der Punktepaare DD', EE'; das gesuchte Zentrum Z ist ihr gemeinsamer Punkt, somit ist Z wie auch die Achse s nur von T abhängig. D.h., wenn man S auf einem festen Durchmesser MT von k bewegt, dann bleibt nicht nur s, sondern auch Z unverändert. Wir können also jetzt von den speziellen Fußpunktdreiecken absehen und betrachten nur noch zu einem beliebigen Punkt T auf k die Simson-Gerade sowie die drei wie oben konstruierten Kreise.

(c) Es seien O, P, Q die Lotfußpunkte von A, B, C auf die Gerade MT. Aus den eingangs genannten Eigenschaften von ζ folgt, dass $O = \zeta(A)$ und $P = \zeta(B)$, daher liegen O und P auf k_c (vgl. Abb. 9).
Analog ergibt sich: P und Q liegen auf k_a; O und Q liegen auf k_b.
Folgerung: Je zwei der drei Apolloniuskreise schneiden einander außer in Z in einem der Lotfußpunkte O, P oder Q.

(d) Wir nehmen jetzt die Kreise k_b und k_c: Sie schneiden einander in O und Z.

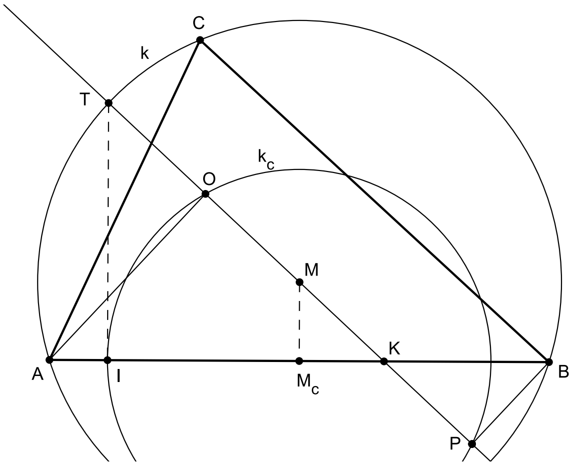


Abbildung 9: Lotfußpunkte von A, B auf TM.

Die Schnittpunkte zweier Kreise sind symmetrisch zur Geraden durch ihre Mittelpunkte; ist also σ die Spiegelung an der Geraden M_bM_c, dann gilt $\sigma(O) = Z$. Nun ist $\sphericalangle AOM = 90°$, also liegt O auf dem Thaleskreis k_T über der Strecke AM (vgl. Abb. 10). $\sigma(k_T)$ ist aber der Feuerbachsche Neunpunktekreis, denn M_b und M_c sind Fixpunkte von σ, liegen also auch auf $\sigma(k_T)$, und weiterhin ist $A' := \sigma(A)$ der Höhenfußpunkt auf der Seite BC (vgl. Abb. 11). Da O auf k_T liegt und $\sigma(O) = Z$ ist, folgt daraus schlussendlich die Behauptung 2.: Z liegt auf dem Feuerbachkreis. $\square$

Anmerkungen über spezielle Lagen von Z (die ersten beiden betreffen die singulären Fälle, die im Beweis ausgeschlossen sind; aus Platzgründen sei auf separate Beweise verzichtet):

1. Wenn die Gerade MT eine Mittelsenkrechte in ΔABC ist, dann ist Z der Mittelpunkt der betreffenden Seite (der zugehörige Apolloniuskreis schrumpft dann zu einem Punkt).
2. Ist MT parallel zu einer Seite von ΔABC, dann ist Z der Mittelpunkt des Höhenabschnitts zu dieser Seite.
3. Wenn MT durch einen Eckpunkt von ΔABC geht, dann ist Z der Höhenfußpunkt zu dieser Ecke.

Somit haben alle neun konstituierenden Punkte des Feuerbachschen Kreises eine besondere Bedeutung in diesem Kontext.

Wenn man T auf dem Umkreis k bewegt, dann bewegt sich Z auf dem Feuerbachkreis *gegenläufig* mit der gleichen Bahngeschwindigkeit, d.h. wegen des Verhältnisses 2:1 der Radien macht Z einen vollen Umlauf, wenn T einen Halbkreis beschreibt. (Offenbar gehört zu einem Punkt T auf k dasselbe Zentrum wie zu seinem Gegenpunkt.)

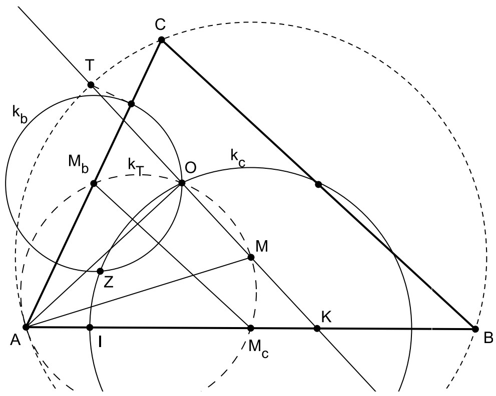


Abbildung 10: Schnittpunkte zweier Apolloniuskreise.

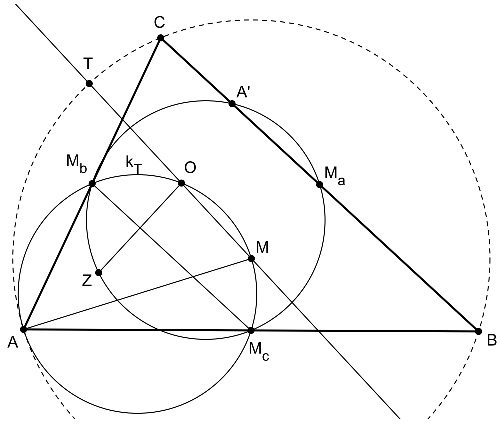


Abbildung 11: Feuerbachscher Kreis.

4 Weitere Resultate und Beobachtungen

Einige Beispiele für spezielle Fußpunktdreiecke:

— Ist der Urpunkt S gleich dem Umkreismittelpunkt M, dann ist ΔDEF das Mittendreieck, somit ähnlich zu ΔABC; dazu gibt es kein ähnliches „äußeres“ Fußpunktdreieck, da M bei der Kreisspiegelung nicht abgebildet wird. Außerdem ist es, wie sich herausstellt (s.u.), das flächengrößte Fußpunktdreieck für Urpunkte S innerhalb des Umkreises.

— Ist S der Inkreismittelpunkt, so ist ΔDEF das Inkreis-Berührpunktdreieck, d.h. die Abstände von den Seiten des Dreiecks ABC sind gleich groß.

— Wenn S der Höhenschnittpunkt ist, dann ist ΔDEF das Höhenfußpunktdreieck, das vor allem durch die folgende Eigenschaft bekannt geworden ist: Unter allen einbeschriebenen Dreiecken in einem spitzwinkligen ΔABC ist es dasjenige mit dem kleinsten Umfang.

Ein weiteres klassisches Resultat ist zu erwähnen, das auch gut durch DGS-Experimente motiviert werden kann. Wir haben in Abschnitt 3 gesehen: Wenn man den Urpunkt S radial zum Umkreis k bewegt, d.h. auf einem festen Durchmesser MT, dann bleiben einige Eigenschaften der Figuren unverändert (Achse und Zentrum der Streckspiegelung). Gibt es auch Invarianten, wenn man S *konzentrisch* zum Umkreis bewegt? In der Tat, wenn auch vielleicht nicht unmittelbar zu sehen: Der *Flächeninhalt* der Fußpunktdreiecke DEF bleibt konstant. Somit hängt er nur vom Abstand $|MS|$ ab, und wenn man eine kleine Wertetabelle aufstellt, dann kann man sogar die folgende Formel vermuten (r sei der Umkreisradius):

$$F_{\Delta DEF} = \frac{1}{4} \cdot F_{\Delta ABC} \cdot \left| 1 - \frac{|MS|^2}{r^2} \right|.$$

Dieses Problem wurde 1823 von Gergonne formuliert und anschließend von Querret und Sturm gelöst (vgl. [2, pp. 28, 280, 286]; zitiert nach [3, p. 144]). Was die

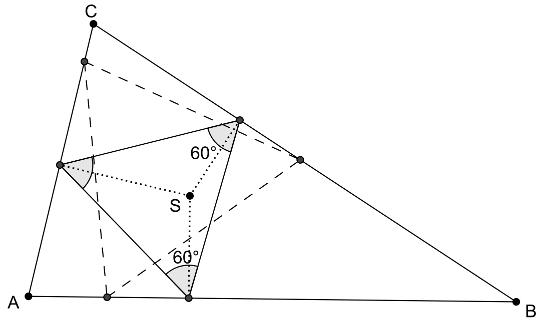


Abbildung 12: Gleichseitige einbeschriebene Dreiecke.

Lösungsmethoden betrifft, ist es wohl der *analytischen* Geometrie zuzuordnen; jedenfalls hat es sich bisher einer elementargeometrischen Lösung hartnäckig widersetzt. J. Steiner hat das Resultat wie folgt verallgemeinert: Für ein beliebiges Polygon ist die Ortslinie der Punkte S, für die die Fußpunkt-Polygone einen konstanten Flächeninhalt haben, ein Kreis (vgl. [4]).

Abschließend noch ein kleines elementares Problem: Zu einem beliebig gegebenen Dreieck ABC kann man einbeschriebene *gleichseitige* Dreiecke finden; es ist eine schöne, auch heuristisch interessante Aufgabe, solche zu konstruieren. Es gibt sehr viele davon, und wenn man die Konstruktion mit DGS geschickt ausführt, d.h. so, dass man die gesuchten gleichseitigen Dreiecke DEF (bei festem ΔABC) auch variieren kann, dann findet man ein kleinstes unter ihnen, und es stellt sich heraus: Es ist ein Fußpunktdreieck. (Das ist deutlich zu sehen, wenn man jeweils die Senkrechten in D, E, F auf den Seiten von ΔABC konstruiert: Sie treffen einander dann in einem Punkt.)

Man kann das gleichseitige Fußpunktdreieck auch *konstruieren*, und zwar nach dem in Abschnitt 2 skizzierten Muster (zwei $60°$-Winkel vorgeben); dass diese Konstruktion immer ein *einbeschriebenes* Dreieck ergibt, d.h. mit den Eckpunkten *zwischen* den Ecken von ΔABC, ist nicht von vornherein klar, aber es scheint so zu sein. Jedenfalls ist es, wie wir wissen, eindeutig bestimmt, wenn der Urpunkt S innerhalb des Umkreises liegen soll. Abb. 12 zeigt ein Beispiel; zum Vergleich ist ein anderes gleichseitiges Dreieck einbeschrieben (gestrichelt). Die Frage ist nun: *Warum* ist es das *kleinste* einbeschriebene gleichseitige Dreieck? Hat der zugehörige Urpunkt noch eine andere Bedeutung?

Literatur:

[1] Altshiller-Court, N.: College Geometry. 2nd ed. New York 1952; Barnes & Noble
[2] Ann. math. pures et appliquées 14 (1823)
[3] Simon, M.: Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert. Leipzig 1906; Teubner
[4] Steiner, J.: Einige geometrische Sätze. J. reine angew. Math. 1 (1826), S. 38–52
[5] Wittmann, Erich Ch.: Elementargeometrie und Wirklichkeit. Braunschweig/Wiesbaden 1973; Vieweg

Buchbesprechungen

E. Brunner: Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte. (Mathematik im Fokus) Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014, xii+126 S. ISBN 978-3-642-41863-1 P/b € 20,55.

Begründen und Beweisen gehört zu den zentralen mathematischen Kompetenzen und Tätigkeiten. Die Schweizer Autorin setzt sich primär mit dem schulischen Begründen und Beweisen auseinander, gibt aber auch einen Einblick in die dahinterliegenden vielschichtigen kognitiven Prozesse und ergänzt ihre Ausführungen durch zahlreiche Beispiele aus der Praxis.

Das vorliegende Buch ist recht gut gelungen, allerdings hat das Thema Beweisen und Begründen meiner Erfahrung nach derzeit in österreichischen Schulen (offensichtlich im Gegensatz zur Schweiz) noch nicht einen so großen Stellenwert; die Zentralmatura sollte aber hier etwas ändern.

Die Inhalte sind meines Erachtens aber vor allem auch nützlich für die Lehre und mathematische Servicelehre am Beginn des Studiums.

G. Schranz-Kirlinger (Wien)

F. Colonius, W. Kliemann: Dynamical Systems and Linear Algebra. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 158). American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014, xv+284 S. ISBN 978-0-8218-8319-8 H/b \$ 67 € 54,–.

Classical Linear Algebra provides an effective toolbox to determine the asymptotic behavior of (linear) autonomous dynamical systems, as well as to understand the structure of their state space. However, since eigenvalues are of no use when dealing with explicitly time-dependent systems of e.g. ergodic or random type, the question for an ambient "Nonautonomous Linear Algebra" becomes interesting and relevant.

The textbook at hand covers a variety of methods from Linear Algebra and beyond to analyze linear systems in continuous and discrete time, both autonomous (Part I) and nonautonomous (Part II). Written by two experts in the field it cannot deny the influence of Ludwig Arnold's school.

The first part "Matrices and Linear Dynamical Systems" (of course) treats the real Jordan normal form and introduces Lyapunov exponents at an early stage as substitute for eigenvalue real parts resp. moduli. Further chapters are devoted to the conjugacy of linear flows, chain transitivity and linear systems on the projective space and on Grassmannians.

In Part II nonautonomous systems are understood as skew-product flows. The classical Floquet theory is covered for ordinary differential and invertible difference equations. A short chapter introduces attractors and their Morse decomposition for general nonlinear systems. Immediate applications to topological linear flows are given via Selgrade's theory, the Morse spectrum and its relation to Lyapunov exponents. One highlight of the book is the Multiplicative Ergodic Theorem (MET, for short). It is prepared in a chapter on ergodic theory introducing

Birkhoff's and Kingman's Subadditive Ergodic Theorem. The given proof of the MET in discrete time is based on singular values, exterior powers and the Goldsheid-Margulis metric. One also finds the deterministic MET and the Furstenberg-Kesten Theorem.

The book contains various applications ranging from the Mathieu equation to robust linear systems, bilinear control systems and a random linear oscillator. Each chapter closes with notes, references and exercises. However, the Sacker-Sell spectral theory plays a very inferior role. With regard to its importance when dealing with irregular and nonlinear systems it is unfortunate that not even the corresponding paper is cited.

In conclusion, the book is nicely written and relevant for advanced students and mathematicians working on dynamical systems. Colleagues interested to teach a master's level course exclusively devoted to linear systems will surely benefit. One might miss a nonlinear theory, but it is well prepared.

Ch. Pötzsche (Klagenfurt)

M. Haugk, L. Fritsche: Quantenmechanik für Ahnungslose. Eine Einstiegshilfe für Studierende. Mit 21 Abbildungen. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 2012, viii+98 S. ISBN 978-3-7776-2136-4, P/b € 24,80.

Bei Quantenmechanik denkt man zugleich auch an mystische Deutungen wie Schrödingers Katze. Man hat die „Phänomene“ zu akzeptieren, aber zu begreifen sind sie eigentlich nicht. Die Autoren dieses Büchleins wollen mit einem alternativen Ansatz die Phänomene der Quantentheorie entmystifizieren und verstehbar machen. Behandelt werden Unschärferelation, Doppelspaltversuch, Tunneleffekt, Spin, Verschränkung u.a. Ganz ohne „überraschende“ Postulate kommen die Autoren allerdings auch nicht aus (z.B. „virtuelle Teilchen“, S. 33) Der Titel des Buchs ist etwas irreführend: Ganz ahnungslos sollten die Leserinnen und Leser nicht sein, Physikwissen etwa im Umfang einer universitären Einführungsvorlesung sowie Kenntnisse in Vektoranalysis sollten jedenfalls vorhanden sein.

M. Kronfellner (Wien)

E. Kowalski: An Introduction to the Representation Theory of Groups. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 155.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014, vi+432 S. ISBN 978-1-4704-0966-1 H/b $ 79 € 63,50.

Das Buch von Kowalski bietet dem Leser eine faszinierende Einführung in die Theorie der Gruppendarstellungen. Anhand von vier wiederkehrenden Beispielen (Dirichletscher Primzahlsatz, Wasserstoffatom, „Wörter“ und dem Satz von Burnside) wird die Beschäftigung mit dieser Theorie dem Leser schmackhaft gemacht. Nach einer motivierenden Einleitung und zwei eher technischen Kapiteln widmet sich der Autor spezielleren Themen. So wird im langen Kapitel 4 die Darstellung endlicher Gruppen diskutiert. Unter anderem wird die Auflösbarkeit von Gruppen, quasi-zufällige Gruppen und Dirichlet-Charaktere behandelt. Danach folgt ein Kapitel über Darstellungen kompakter Gruppen und den Satz von Peter-Weyl, gefolgt von einem Kapitel über deren Anwendungen. Unter anderem werden die quantenmechanischen Zustände des Wasserstoffatoms ausführlich beschrieben und hergeleitet. Das letzte Kapitel gibt noch einen Überblick über die Darstellungstheorie nicht kompakter Räume und den Phänomenen, die in diesem Fall auftreten können.

Insgesamt ist das Buch von Kowalski ein sehr gelungener Einstieg in die recht komplexe Darstellungstheorie. Der Autor ist sehr bemüht, durch viele verschiedene und auch für sich interessante Beispiele diesen Einstieg sehr spannend zu gestalten. Das andere große Plus ist, dass der Autor sehr bedacht darauf ist, die Ideen, die der Darstellungstheorie zugrunde liegen, zu vermitteln und nicht nur Fakten aufzuzählen. Zum Bedauern des Besprechers verzichtet der Autor auf eine ausführlichere Behandlung der Darstellungstheorie von Liegruppen bzw. Lie-Algebren, was jedoch das einzige Manko ist.

V. Ziegler (Salzburg)

J. Stillwell: Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit. Eine mathematische Reise zu den vielseitigen Auswirkungen der Unendlichkeit. Aus d. Engl. übersetzt von R. Girgensohn). Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014, xii+236 S. ISBN 978-3-642-37843-0 P/b € 25,69.

Der Untertitel *Eine mathematische Reise zu den vielseitigen Auswirkungen der Unendlichkeit* fasst den Inhalt des Buchs sehr gut zusammen. Es ergründet die Konsequenzen, die sich ergeben, wenn man die Unendlichkeit mit seinem endlichen Verstand akzeptiert. Dabei wird nur sehr wenig vorausgesetzt, was über die Schulmathematik hinausgeht.

Das Ziel des Autors war aber auch, zu zeigen, dass Mengenlehre und Logik ein nahtloses Ganzes bilden und sich gegenseitig befruchten. Zwei Persönlichkeiten, die im Zusammenhang mit der Unvollständigkeit nicht so allgemein bekannt sind, nämlich Emil Post und Gerhard Gentzen, wird entsprechend Raum gegeben.

Historische Hintergründe schließen die Kapitel ab (Das Diagonalargument, Ordinalzahlen, Berechenbarkeit und Beweis, Logik, Arithmetik, Natürliche unbeweisbare Aussagen, Axiome der Unendlichkeit). Insgesamt ein recht gut gelungenes Werk mit Inhalten, die bekannt sind, aber auch vielen überraschenden Konsequenzen aus der Unendlichkeit.

G. Schranz-Kirlinger (Wien)

G. Teschl: Mathematical Methods in Quantum Mechanics. With Applications to Schrödinger Operators. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 157.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014, xiv+358 S. ISBN 978-1-4704-1704-8 H/b $ 67,00, € 54,–.

Das vorliegende Buch bietet eine sehr schöne Einführung in die mathematischen Methoden der Quantenmechanik. Das Buch ist in drei Teile aufgeteilt: Der erste Teil, "Mathematical foundations of quantum mechanics", ist kurz gesagt eine Einführung in die Spektraltheorie von unbeschränkten Operatoren und in die Störungsrechnung. Im Teil 2, "Schrödinger operators", wird dann ein stärkerer Bezug zu physikalischen Konzepten hergestellt. So werden in diesem Teil z.B. die klassischen Operatoren der Quantenmechanik (Orts-, Impuls- und Drehmomentoperator) diskutiert, die Spektraltheorie auf die Untersuchung des Wasserstoffatoms angewandt und die mathematische Streutheorie behandelt. Der dritte Teil, "Appendix", liefert eine Kurzeinführung in die Maßtheorie.

Das Buch ist mit sehr viel Bedacht geschrieben, und es wird nur ein minimales Grundwissen aus der Analysis vorausgesetzt (keine Funktionalanalysis oder Maßtheorie). Auf der anderen Seite ist es sehr kompakt geschrieben und kommt schnell auf den Punkt. Leider bleiben dem Leser dadurch viele interessante physikalische Zusammenhänge verborgen. Dessen ungeachtet bietet dieses Buch auf jeden Fall einen gelungenen Einstieg für Studenten in den mittleren Semestern in diesen interessanten und schönen Teil der mathematischen Physik.

V. Ziegler (Salzburg)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

START-Preise 2015 für Mathematikerinnen und Mathematiker

Am 8. Juni 2015 gab der Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung die Gewinner der heurigen START-Preise bekannt. Darunter sind Christoph Aistleitner (TU Graz, dzt. Univ. Linz, *Probabilistische Methoden in Analysis und Zahlentheorie*) und Caroline Uhler (IST Austria, *Probabilistische Graphische Meodelle: Theorien und Anwendungen*). Die ÖMG gratuliert herzlich zu diesem großen Erfolg.

Persönliches

Am 19. Juni 2015 wurde das Österreichische Ehrenkreuz für Wissenschaft und Kunst I. Klasse an Frau Prof. Inge Troch verliehen. Die ÖMG gratuliert ihrer langjährigen Kassierin herzlich zu dieser Auszeichnung.

Neue Mitglieder

Annegret Burtscher, Dr. – Univ. Bonn. Endenicher Allee 60, D 5311 Bonn. geb. 1983. 2014 Doktorat an der Univ. Wien und der Université Perre et Marie Curie, 2014 Riemann Postdoc fellow, Univ. Hannover, seit 2015 Postdoc am Mathematischen Institut der Univ. Bonn. email *burtscher@math.uni-bonn.de*;

Gregor Kastner, DI MMag Dr. – WU Wien. geb. 1981. Studium der Technischen Mathematik, der Informatik (TU Wien), des Lehramts in Mathematik, Informatik und Sport (Univ. Wien). 2014 Doktorat (Univ. Linz). email *gregor.kastner @wu.ac.at*.

Philipp Kügler, Prof. Dr. – RICAM, Wien. geb. 1975. Doktorat 2003 an der Univ. Linz, bis 2008 Assistent am Institut f. Industriemathematik, seit 2009 Leiter der RICAM-Biogruppe, und seit 2013 Professor für Mathematik an der Univ. Hohenheim in Stuttgart. email *philipp.kuegler@uni-hohenheim.de*.

Günther Of, Ass.Prof. Dr. – TU Graz. geb. 1976. 1996–2001 Studium der Mathematik an der Universität Stuttgart, 2006 Promotion, seit 2006 tätig an der TU Graz *http://www.numerik.math.tugraz/∼ofgr*, email *of@tugraz.at*.

Klaudia Singer, Mag. – KFU Graz. geb. 1964. Studium der Mathematik und Physik, Tätigkeit als AHS-Lehrerin und Lehrende an der Pädagogischen Hochschule Steiermark, derzeit Koordinatorin für Fachdidaktik Mathematik an der KFU Graz. email *klaudia.singer@uni-graz.at*.