

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email imn@tuwien.ac.at, <http://www.oemg.ac.at/>

Redaktion:

J. Wallner (TU Graz, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
R. Tichy (TU Graz)
R. Winkler (TU Wien)

Ständige Mitarbeiter der Redaktion:

B. Gittenberger (TU Wien)
G. Eigenthaler (TU Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 25,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger:
Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr.
Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzen-
druck, 8044 Weinitzen.

© 2013 Österreichische Mathematische
Gesellschaft, Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

<http://www.oemg.ac.at/>

email: oemg@oemg.ac.at

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: sekr@oemg.ac.at

Vorstand des Vereinsjahres 2013:

M. Drmota (TU Wien): Vorsitzender
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Stellvertretender Vorsitzender
J. Wallner (TU Graz):
Herausgeber der IMN
B. Lamel (Univ. Wien): Schriftführer
A. Ostermann (Univ. Innsbruck):
Stellvertretender Schriftführer
G. Larcher (Univ. Linz): Kassier
P. Kirschenhofer (MU Leoben):
Stellvertretender Kassier
G. Schranz-Kirlinger (TU Wien):
Beauftragte für Frauenförderung
G. Teschl (Univ. Wien):
Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
U. Dieter (TU Graz)
H. Engl (Univ. Wien)
P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)

M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
L. Reich (Univ. Graz)
N. Rozsenich (Wien)
W. Schachermayer (Univ. Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
H. Strasser (WU Wien)
R. Tichy (TU Graz)
W. Wurm (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionsvorsitzende gehören statutengemäß dem Beirat an.

Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:

W. Woess (Graz)
G. Kirchner (Innsbruck)
C. Nowak (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
P. Hellekalek (Salzburg)
C. Krattenthaler (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 25,-
Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria-Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques
Internationales

Nr. 223 (67. Jahrgang)

August 2013

Inhalt

<i>Ernst Hairer and Christian Lubich: Long-term control of oscillations in differential equations</i>	1
<i>Rudolf Taschner: Zehn Jahre math.space: Mathematik wird zur „Öffentlichen Wissenschaft“</i>	17
<i>Stefan Götz und Franz Hofbauer: Die Exponentialfunktion als dynamisches System</i>	21
Buchbesprechungen	37
Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft	55
Neue Mitglieder	56

Die Titelseite illustriert ein Fast-Pi aus G. Maze, L. Minder: A new family of almost identities (<http://arxiv.org/abs/math/0409014>).

Long-term control of oscillations in differential equations

Ernst Hairer and Christian Lubich

Université de Genève and Universität Tübingen

Ordinary differential equations arise everywhere in science – Newton’s law in physics, N -body problems in astronomy and in molecular dynamics, engineering problems in robotics, population models in biology, and many more. Since their analytic solution can be obtained only in exceptional situations, one is usually restricted to numerical simulations and/or to qualitative investigations of the flow. This article reviews a recent technique – the modulated Fourier expansion – which permits to get insight into the long-term behaviour of numerical solutions of multi-value methods as well as of analytic solutions of highly oscillatory differential equations.

1 Two problems with high-frequency oscillations

We start with illustrating the main results of this survey by two typical situations. In the first example, high oscillations are due to the discretization, whereas in the second example oscillations are inherent in the differential equation.

Long-term integration of Hamiltonian systems with multistep methods.

We consider the equations of motion for a coupled triple pendulum in the plane as shown in the small figure. Due to the closed loop it is simpler to write them in Cartesian rather than in minimal coordinates. We denote the coordinates of the four mass points by Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , so that (assuming mass and gravity constant equal to one) the potential energy U is the sum of the vertical components, $U = e_2^T(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)$. The coordinates have to satisfy five constraints: The distance between the upper mass points and their suspension point is fixed, say equal to one, and the mass points are connected by massless rods of length one as shown in the small figure (initial position is



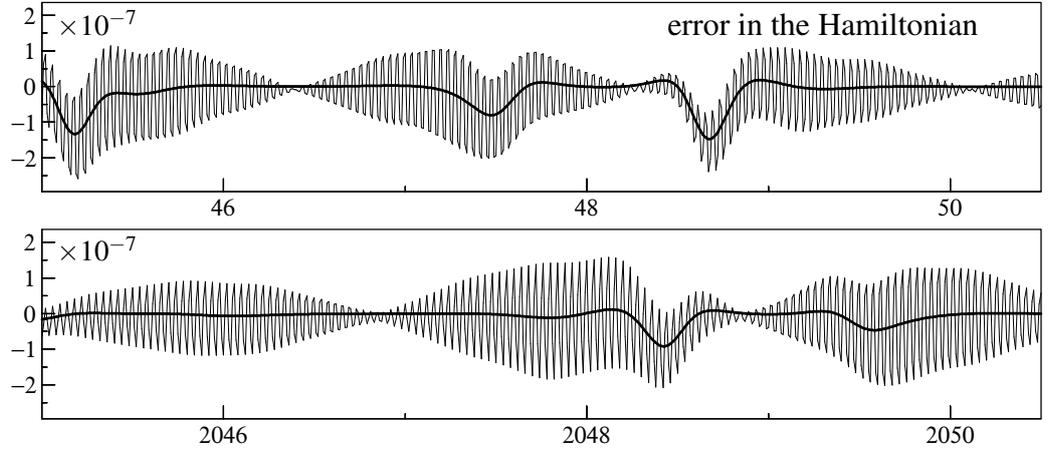


Figure 1: Numerical error in the Hamiltonian for the coupled triple pendulum problem as a function of time (two different intervals). The multistep method is applied with step size $h = 0.01$ and with two different starting approximations.

drawn in grey). We collect the coordinates of Q_1, \dots, Q_4 in a vector q , and we write the constraints as $g(q) = 0$ with a quadratic function $g : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^5$. Denoting by $G(q) = g'(q)$ the matrix of partial derivatives, the equations of motion for the time-dependent position vector $q(t) \in \mathbb{R}^8$ and the Lagrange multipliers $\lambda(t) \in \mathbb{R}^5$ are given by the differential-algebraic system (with dots denoting time derivatives)

$$\ddot{q} = -\nabla U(q) - G(q)^\top \lambda, \quad g(q) = 0 \quad (1)$$

with initial values $q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$.

For its numerical integration we choose the 4-th order multistep method

$$\begin{aligned} q_{n+4} - 2q_{n+3} + 2q_{n+2} - 2q_{n+1} + q_n &= \frac{h^2}{6} (7f_{n+3} - 2f_{n+2} + 7f_{n+1}) \\ 0 &= g(q_{n+4}), \end{aligned} \quad (2)$$

where h is the step size, $f_n = -\nabla U(q_n) - G(q_n)^\top \lambda_n$, and $q_n \approx q(nh)$ for $n = 0, 1, 2, \dots$. Starting approximations q_1, q_2, q_3 and λ_1, λ_2 are needed in addition to q_0 . They can be obtained by a one-step Runge-Kutta method from the initial values $q(0)$ and $\dot{q}(0)$. The application of the method is as follows: For given vectors $\{q_j\}_{j \leq n+3}$ and $\{\lambda_j\}_{j \leq n+2}$, one first inserts q_{n+4} into $g(q_{n+4}) = 0$ and computes λ_{n+3} by modified Newton iterations, and then q_{n+4} is obtained in an explicit manner. Approximations to the velocity $p = \dot{q}$ can be obtained by finite differences. For a fourth order method we use

$$p_n = \dot{q}_n = \frac{1}{12h} (8(q_{n+1} - q_{n-1}) - (q_{n+2} - q_{n-2})).$$

Figure 1 shows the total energy $H(q, p) = \frac{1}{2} p^\top p + U(q)$ along the numerical solution obtained with step size $h = 0.01$ on two time intervals (one in the beginning and the other much later). The thick smooth curve corresponds to very accurate starting approximations, whereas the highly oscillatory function corresponds to starting approximations that are obtained by the 2nd order implicit midpoint rule. The frequency of the oscillations is proportional to the inverse of the step size h .

Question. Classical error estimates contain a term of the form $h^4 \exp(Lt)$ with $t = nh$, where L is the Lipschitz constant of the vector field, and they are useful only on small time intervals. Numerical experiments show that the energy is well conserved and the parasitic oscillations remain small and bounded over much longer time intervals. Can this be proved rigorously?

Adiabatic invariants for highly oscillatory differential equations. As a second example we consider a chain of mass points connected by alternating stiff and soft springs (Figure 2). We let Q_k denote the displacement from the position of rest of the k -th mass point, and we assume that the potential of the stiff springs is, accord-

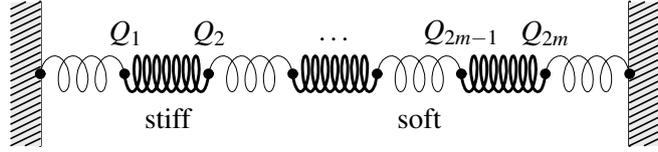


Figure 2: Chain of alternating stiff harmonic and soft nonlinear springs.

ing to Hook's law, proportional to the square of the increment due to compression or extension of the spring (with a large spring constant). The potential of the soft springs is assumed to be proportional to the fourth power of the increment (with a moderately sized spring constant). This leads to a Hamiltonian system with total energy (using $Q_0 = Q_{2m+1} = 0$)

$$H(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \dot{Q}_k^2 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \omega_j^2 (Q_{2j} - Q_{2j-1})^2 + \sum_{j=1}^m (Q_{2j+1} - Q_{2j})^4,$$

where the natural frequencies ω_j are assumed to be large. After a canonical change of coordinates, where $q_j = (Q_{2j} - Q_{2j-1})/\sqrt{2}$ represents the compression/extension of a stiff spring and $q_{j+m} = (Q_{2j} + Q_{2j-1})/\sqrt{2}$ its mean position, we obtain a Hamiltonian system of the form ($j = 1, \dots, m$)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j &= -\nabla_j U(q) \\ \ddot{q}_{j+m} &= -\nabla_{j+m} U(q). \end{aligned} \tag{3}$$

Here, $U(q)$ is the potential for the soft springs expressed in the new coordinates, and we use the notation $\nabla_j U(q)$ for the partial derivative of $U(q)$ with respect

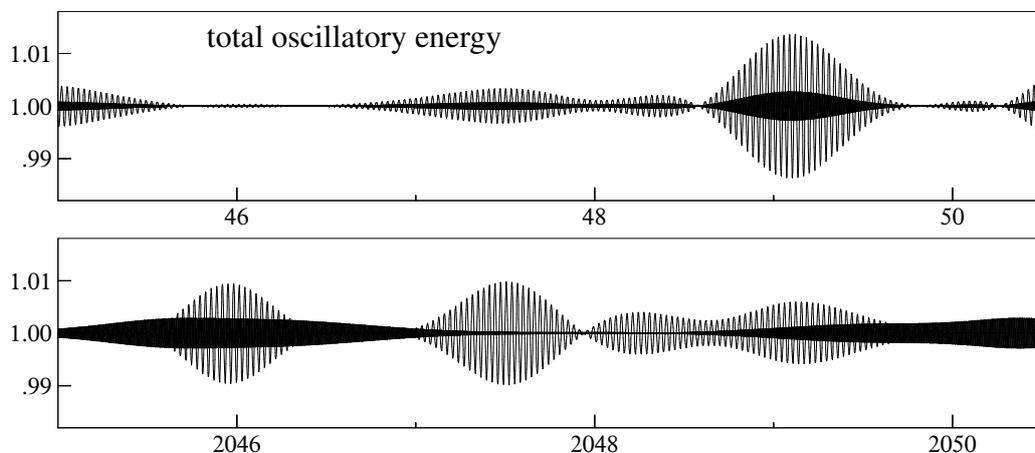


Figure 3: Total oscillatory energy for the chain of springs corresponding to frequencies proportional to 200 (thin curve) and to 1000 (thick curve).

to q_j . Neglecting the nonlinearity in (3), we are concerned with m decoupled harmonic oscillators corresponding to the m stiff springs. Their individual energy is

$$I_j(q_j, \dot{q}_j) = \frac{1}{2} (\dot{q}_j^2 + \omega_j^2 q_j^2),$$

and we let

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^m I_j(q_j, \dot{q}_j)$$

be the total oscillatory energy of the system, which is a conserved quantity in the absence of the soft springs. We are mainly interested in studying the influence of the soft springs to the long-time behaviour of $I(q, \dot{q})$.

For a numerical experiment we consider the situation of Figure 2 with three stiff springs ($m = 3$), and we let their frequencies be

$$\omega_1 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \omega_2 = \frac{2}{\varepsilon}, \quad \omega_3 = \frac{1.002}{\varepsilon}, \quad (4)$$

so that there is an exact resonance between the first two frequencies and a near resonance with the third one. We choose zero initial values except $q_1(0) = 1/\omega_1$, $q_4(0) = 1$, $\dot{q}_1(0) = 1$, and $\dot{q}_4(0) = 1.5$, so that the initial oscillatory energy is $I(q(0), \dot{q}(0)) = 1$. In Figure 3 we plot the total oscillatory energy as function of time (once on an interval of length 5.5 close to $t = 50$ and once close to $t = 2050$) for two different values of ε . The thin curve corresponds to $\varepsilon = 1/200$ and the thicker curve to $\varepsilon = 1/1000$. We observe high oscillations (frequency proportional to ε^{-1} and amplitude proportional to ε) around the constant value 1.

Question. Neglecting the potential $U(q)$ in (3) the oscillatory energy $I(q(t), \dot{q}(t))$ is an exact invariant of the system. Standard perturbation arguments using Gronwall's inequality yield the near-preservation of the oscillatory energy on intervals

of length $O(\varepsilon^{-1})$. This near-preservation is observed on much longer time intervals. Can this be proved rigorously?

2 Modulated Fourier expansion

Figures 1 and 3 show similar phenomena although they originate from completely different problems. We observe different time scales – high frequency oscillations superposed on a smooth slow motion. In this section we present the technique of modulated Fourier expansions, which gives much insight into the long-time behaviour for both problems.

Modulated Fourier expansion for linear multistep methods. For second order differential equations we consider linear multistep methods of the form

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j q_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}, \quad (5)$$

where $f_n = f(q_n)$ for problems $\ddot{q} = f(q)$, and $f_n = -\nabla U(q_n) - G(q_n)^\top \lambda_n$ with λ_n determined by $g(q_n) = 0$ for constrained Hamiltonian systems (1). We denote the generating polynomials of the coefficients of (5) by

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \zeta^j, \quad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^k \beta_j \zeta^j.$$

For $h \rightarrow 0$ the multistep method (5) becomes a linear difference equation, whose solution is a linear combination of ζ_j^n where $\rho(\zeta_j) = 0$. Due to the nonlinearity in the right-hand side of (5) this cannot remain true for $h > 0$. Nevertheless, it is natural to approximate the numerical solution by an expression (called modulated Fourier expansion) of the form

$$q_n \approx y(t) + \sum_{j \in I} \zeta_j^n z_j(t), \quad t = nh, \quad (6)$$

where $y(t)$ and $z_j(t)$ are h -dependent smooth functions in the sense that, together with all their derivatives, they are bounded uniformly for $0 < h \leq h_0$. The index set I corresponds to the roots of $\rho(\zeta)$ that are different from 1. For constrained Hamiltonian systems (1) it turns out that in addition to the roots of $\rho(\zeta)$, the index set I has to contain also the non-zero roots of $\sigma(\zeta)$. For the study of the long-time behaviour of linear multistep methods one has to

- study properties of the function $y(t)$, which will be an approximation to the exact solution $q(t)$ of the differential equation,
- control the parasitic components $z_j(t)$. They should remain bounded and small over long time intervals.

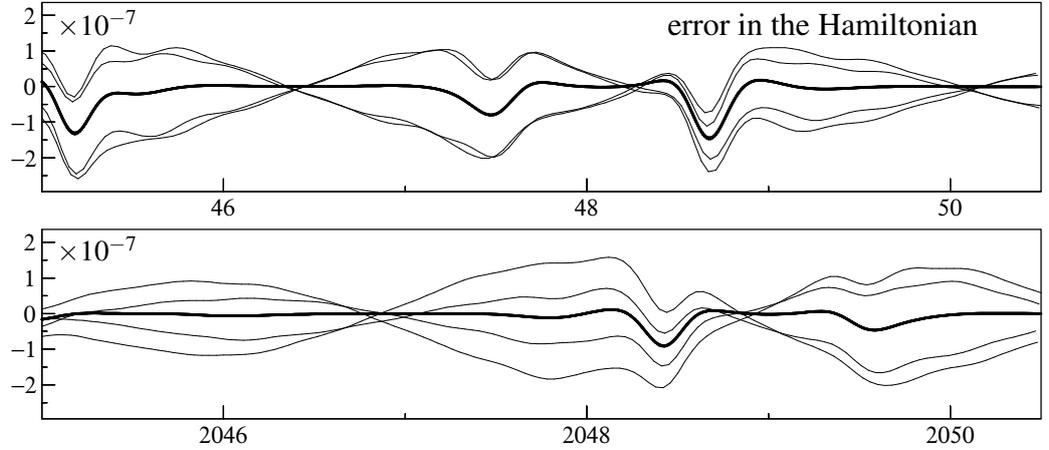


Figure 4: Numerical error in the Hamiltonian for the coupled triple pendulum problem with data as in Figure 1. Every fourth approximation is connected by a line, which gives four curves for each starting approximation.

Let us illustrate the above expansion for the numerical solution of the example of Section 1. There we have applied a multistep method with $\rho(\zeta) = (\zeta - 1)^2(\zeta^2 + 1)$ and $\sigma(\zeta) = (7\zeta^3 - 2\zeta^2 + 7\zeta)/6$. An analysis of the functions $z_j(t)$ shows that those corresponding to zeros of $\sigma(\zeta)$ are by a factor of h smaller than those corresponding to the roots of $\rho(\zeta) = 0$. We thus have

$$q_n \approx y(t) + i^n z_1(t) + (-i)^n z_2(t),$$

where, for real data, $y(t)$ is a real function and $z_2(t)$ is the complex conjugate of $z_1(t)$. To get an impression of the perturbation functions $z_j(t)$ we connect every fourth approximation: $q_{4n} \approx y(t) + 2\Re z_1(t)$ at $t = 4nh$, $q_{4n+1} \approx y(t) + 2\Im z_1(t)$ at $t = (4n+1)h$, $q_{4n+2} \approx y(t) - 2\Re z_1(t)$ at $t = (4n+3)h$, and finally $q_{4n+3} \approx y(t) - 2\Im z_1(t)$ at $t = (4n+3)h$. This yields four smooth curves instead of one highly oscillating curve that is obtained by connecting all q_n .

We apply the linear multistep method (2) to the coupled triple pendulum problem with the same step size and the same starting approximations as in Figure 1. Figure 4 shows the error in the Hamiltonian $H(q_n, p_n)$, where every fourth approximation is connected by a line. For the accurate starting approximation the function $z_1(t)$ is so small that all four curves coincide and give the function $H(y(t), \dot{y}(t))$ (thick curve). For the starting approximations obtained by the implicit midpoint rule we can clearly distinguish four curves that approximate

$$H\left(y(t) \pm 2\Re z_1(t), \dot{y}(t) \pm 2\Re \dot{z}_1(t)\right), \quad H\left(y(t) \pm 2\Im z_1(t), \dot{y}(t) \pm 2\Im \dot{z}_1(t)\right).$$

This experiment illustrates that the functions $z_j(t)$ of the modulated Fourier expansion are as smooth as the approximation $y(t)$, and it encourages the study of (6) for getting insight into the long-time behaviour of multistep methods.

Modulated Fourier expansion for perturbed harmonic oscillators. The motion of a chain of mass points connected by alternating stiff and soft springs leads to a highly oscillatory differential equation, which is of the form

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\nabla_j U(\mathbf{q}), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (7)$$

where $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, q_n)$ with $q_j \in \mathbb{R}^{d_j}$, and ∇_j denotes the partial derivative with respect to q_j . We assume $\omega_0 = 0$ and

$$\omega_j \geq \frac{1}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Suppressing the right-hand side in (7), the problem is reduced to harmonic oscillators with solution $q_j(t) = c_1 e^{i\omega_j t} + c_2 e^{-i\omega_j t}$. It seems therefore natural to approximate the solution $q(t)$ of the complete nonlinear system (7) with a linear combination of $e^{\pm i\omega_j t}$, where the coefficients depend smoothly on t . However, since the oscillations are here of much larger amplitude than the numerical (artificial) oscillations in computations with multistep methods, this is not sufficient. Due to the mixing of exponentials by the nonlinearity, we have to consider also products of such exponential terms. For an analysis of the solutions of (7) we thus consider an ansatz (also called modulated Fourier expansion) of the form

$$\mathbf{q}(t) \approx \mathbf{y}(t) + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}(t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})t}. \quad (8)$$

For a multi-index $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ and the vector $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ of high frequencies we write $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n$, so that $e^{i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})t}$ becomes a product of pure exponentials $e^{i\omega_j t}$. We also consider the norm $\|\mathbf{k}\| = |k_1| + \dots + |k_n|$. The coefficient functions $\mathbf{y}(t)$ and $\mathbf{z}^{\mathbf{k}}(t)$ are vector-valued with the same dimension and partitioning as $\mathbf{q}(t)$ and they are assumed to be smooth. This means that together with all their derivatives they are bounded independently of ε for $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, so that the high oscillations are well separated from the slow motion in (8). The sum in (8) is over a suitably chosen finite set of multi-indices $\mathcal{K} \subset \{\mathbf{k}; \|\mathbf{k}\| \leq N\}$ with suitably chosen N . For getting insight into the long-time behaviour of the total oscillatory energy

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^n I_j(q_j, \dot{q}_j), \quad I_j(q_j, \dot{q}_j) = \frac{1}{2} \left(|\dot{q}_j|^2 + \omega_j^2 |q_j|^2 \right),$$

where $|q_j|$ denotes the Euclidean norm in \mathbb{R}^{d_j} , we are confronted with the following problems:

- find a relation between the total oscillatory energy $I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ and the coefficient functions of the modulated Fourier expansion,

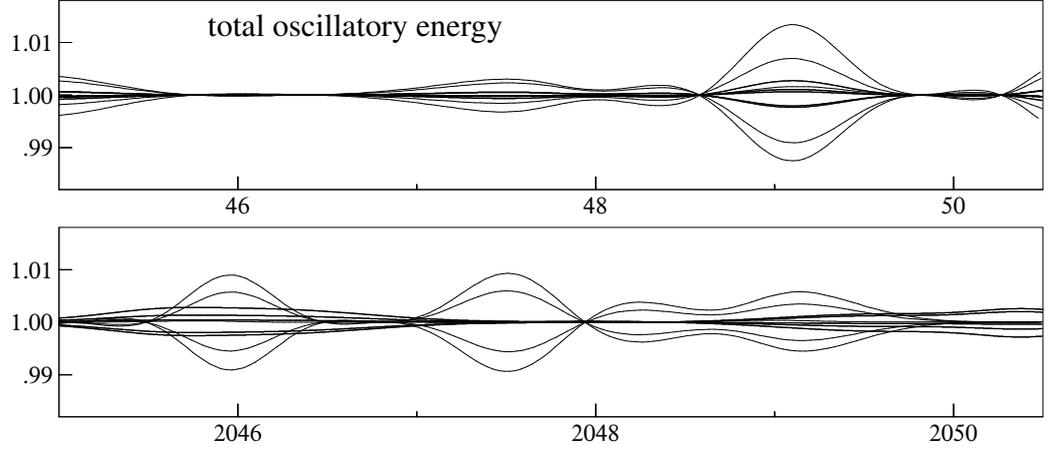


Figure 5: Total oscillatory energy connected at stroboscopic samples for the chain of springs with data as in Figure 3.

- control the coefficient functions $\mathbf{z}^{\mathbf{k}}(t)$ corresponding to high oscillations. They should remain bounded of size $\|\mathbf{z}^{\mathbf{k}}(0)\|$ over long time intervals.

To become convinced of the existence of an expansion (8), we perform a stroboscopic sampling, similar to our previous experiment with a linear multistep method (see Figure 4). We consider the example of Section 1 with three stiff springs having frequencies (4). We assume that the dominant oscillating terms in (8) are those corresponding to $\mathbf{k} = \pm \langle j \rangle$, where $\langle j \rangle = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ is the j -th unit vector. They are given by $\mathbf{z}^{\pm \langle j \rangle}(t) e^{\pm i \omega_j t}$. At stroboscopic time instances $t = t_n = t_0 + 2\pi \varepsilon n$ we thus have

$$\mathbf{q}(t) \approx \mathbf{y}(t) + 2\Re\left(\mathbf{z}^{\langle 1 \rangle}(t) e^{i \omega_1 t} + \mathbf{z}^{\langle 2 \rangle}(t) e^{i \omega_2 t} + \mathbf{z}^{\langle 3 \rangle}(t) e^{i \omega_3 t}\right),$$

which is expected to be smooth in contrast to the highly oscillatory solution (see Figure 3) of the differential equation. In Figure 5 we interpolate the oscillatory energies $\{I(\mathbf{q}(t_n), \dot{\mathbf{q}}(t_n))\}_{n \geq 0}$ for five different values of t_0 , namely $t_0 = 2\pi \varepsilon l / 5$ for $l = 1, \dots, 5$. Thin curves correspond to $\varepsilon = 1/200$, thick curves to $\varepsilon = 1/1000$. It is striking how smooth these curves are (higher order terms of (8) are present but not visible in the plot), and that their qualitative behaviour is maintained on very long time intervals (on much longer intervals than shown in the figure).

Connection between both types of modulated Fourier expansions. Comparing the modulated Fourier expansion (6) for linear multistep methods with the expansion (8) for highly oscillatory Hamiltonian systems, we notice the correspondence $\zeta_j^n \leftrightarrow e^{i \omega_j t}$ for $t = nh$. To a zero $\zeta_j = e^{i \theta_j}$ of $\rho(\zeta)$ (resp. $\sigma(\zeta)$) corresponds a frequency $\omega_j = \theta_j / h$ in the problem (7).

3 Results on the long-time behaviour

In this section we present two typical results that can be proved with the technique of modulated Fourier expansions – one on the energy preservation of linear multistep methods, the other on the near-preservation of the total oscillatory energy of highly oscillatory systems. We also give an overview on further results and hints to the literature.

Near-preservation of energy with linear multistep methods. We consider a method (5) and apply it to a constrained Hamiltonian system (1) with total energy $H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{q} + U(q)$. We assume that the method coefficients are such that:

- The method is irreducible and of order p , i.e., the generating polynomials $\rho(\zeta)$ and $\sigma(\zeta)$ do not have common roots, and they satisfy

$$\frac{\rho(\zeta)}{(\log \zeta)^2} - \sigma(\zeta) = O((\zeta - 1)^p) \quad \text{for } \zeta \rightarrow 1.$$

- It is symmetric, i.e., $\alpha_j = \alpha_{k-j}$ and $\beta_j = \beta_{k-j}$ for all j .
- The equation $\rho(\zeta) = 0$ has only simple roots with the exception of the double root for $\zeta = 1$; all roots are on the unit circle.
- The equation $\sigma(\zeta) = 0$ has only simple non-zero roots; all non-zero roots are on the unit circle.
- Starting approximations satisfy

$$\begin{aligned} q_j - q(jh) &= O(h^{p+2}) & \text{and } g(q_j) &= 0 \quad \text{for } j = 0, \dots, k-1 \\ \lambda_j - \lambda(jh) &= O(h^p) & \text{for } j &= 1, \dots, k-2 \end{aligned}$$

(the latter for the case of an explicit method with $\beta_k = 0$ and $\beta_{k-1} \neq 0$).

The following result is taken from [11].

Theorem 1. *The numerical solution of a linear multistep method satisfying the above assumptions preserves the total energy of the constrained Hamiltonian system (1) up to $O(h^p)$ over time $O(h^{-p-1})$:*

$$H(q_n, \dot{q}_n) = H(q_0, \dot{q}_0) + O(h^p) \quad \text{for } nh \leq h^{-p-1}.$$

The constant symbolized by O is independent of n and h subject to $nh \leq h^{-p-1}$.

This result explains the excellent long-time energy preservation in the experiment of Section 1 (Figure 1). The ideas of the proof will be outlined in Section 4.

Hints to the literature. The first rigorous proofs of long-time energy preservation of linear multistep methods for second order Hamiltonian systems without constraints is given in [21], see also [24]. There, the technique of modulated Fourier expansion is further used to prove near-preservation of momentum and an at most linear growth of the global error for integrable Hamiltonian systems. These results are extended in [11] to constrained Hamiltonian systems (1). The technique of modulated Fourier expansion can also be applied to general first order Hamiltonian systems [19]. However, there one typically gets near-preservation of energy only over time intervals of length $O(h^{-2})$. This is elaborated in [10] for partitioned linear multistep methods and in [12] for general multi-value methods.

Near-preservation of the total oscillatory energy in differential equations. We consider a highly oscillatory Hamiltonian system of the form

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\nabla_j U(\mathbf{q}), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (9)$$

where $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, q_n)$ with $q_j \in \mathbb{R}^{d_j}$, and $\omega_0 = 0$, and we are interested in the long-time behaviour of the total oscillatory energy

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^n I_j(q_j, \dot{q}_j), \quad I_j(q_j, \dot{q}_j) = \frac{1}{2} \left(|\dot{q}_j|^2 + \omega_j^2 |q_j|^2 \right). \quad (10)$$

We make the following assumptions:

- The frequencies $\omega_1, \dots, \omega_n$ are bounded from below as

$$\omega_j \geq \frac{1}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

- There exist $\delta > 0$ and a set $K \subset \mathbb{R}^{d_0}$ such that the potential U has bounded derivatives of all orders in a δ -neighborhood of $K \times 0 \times \dots \times 0$.
- The initial values $\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)$ are such that

$$I(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)) \leq E, \quad (11)$$

where the bound E is independent of ε .

The following result is taken from [15].

Theorem 2. *Consider the Hamiltonian initial value problem (9) satisfying the above assumptions. For an arbitrarily fixed integer $N \geq 1$ there then exist $C > 0$ and $\varepsilon^* > 0$ such that the following holds for $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$: along the solution of (9) the oscillatory energy deviates from its starting value by no more than*

$$|I(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) - I(\mathbf{p}(0), \mathbf{q}(0))| \leq C\varepsilon^{3/4} \quad \text{for } 0 \leq t \leq \varepsilon^{-N}, \quad (12)$$

provided that $q_0(t)$ stays in the set K for such long times. The threshold ε^ and the constant C depend on n and N , on the energy bound E and on bounds of derivatives of the potential U .*

This result explains the excellent long-time preservation of the total oscillatory energy in the experiment of Figure 3. Our proof is based on modulated Fourier expansions and will be outlined in Section 4.

Hints to the literature. Modulated Fourier expansions for the long-term analysis of highly oscillatory differential equations have first been used in [20] for the case of a single high frequency ω . Exponentially long times $t \leq e^{c\omega}$ are covered in [6]. The case of several high frequencies satisfying a non-resonance condition is studied in [7]. The result of Theorem 2, taken from [15], does not require any condition on the high frequencies. Modulated Fourier expansions have also given new insight into the FPU problem [23]. They have been successfully applied to studying long-time regularity and stability of Hamiltonian partial differential equations (nonlinear wave equation [9, 16], nonlinear Schrödinger equation [14, 17]).

Related results have been obtained in [2], [3], [4], [1] with canonical transformation techniques of Hamiltonian perturbation theory.

Modulated Fourier expansions have in addition proved very useful in analyzing numerical methods for highly oscillatory differential equations [24, 20, 7, 25] and Hamiltonian partial differential equations [8, 5, 13, 18, 22].

4 Sketch of the proof

Although Theorems 1 and 2 treat two completely different situations, their proofs with modulated Fourier expansions are closely connected. We sketch the main steps in the proof. For details we refer the reader to the original literature.

4.1 Construction of the coefficient functions

The first step of the proof consists in the construction of coefficient functions for the modulated Fourier expansion.

Linear multistep methods. To keep the presentation as simple as possible, we restrict ourselves to Hamiltonian systems without constraints. We consider the method (5) and we are looking for approximations to q_n of the form

$$\hat{q}_n = y(t) + \sum_{j \in I} \zeta_j^n z_j(t), \quad t = nh, \quad (13)$$

where the index set I corresponds to roots of $\rho(\zeta)$ that are different from 1. To achieve this we insert this expansion into the multistep formula and compare the coefficients of ζ_j^n . Writing the Taylor series of a function as $y(t+h) = e^{hD}y(t)$,

where D denotes differentiation with respect to time, this yields

$$\begin{aligned}\rho(e^{hD})y &= h^2 \sigma(e^{hD}) f(y) + O(h^2 \|\mathbf{z}\|^2) \\ \rho(\zeta_j e^{hD})z_j &= h^2 \sigma(\zeta_j e^{hD}) f'(y) z_j + O(h^2 \|\mathbf{z}\|^2)\end{aligned}\quad (14)$$

with the notation $\|\mathbf{z}\| = \max_j |z_j|$. Since $\zeta = 1$ is a double root of $\rho(\zeta) = 0$, we have $\rho(e^{hD}) = h^2 D^2 \rho_0(hD)$, and for the simple roots ζ_j we have $\rho(\zeta_j e^{hD}) = hD \rho_j(hD)$, where $\rho_j(0) \neq 0$ for all j . Applying the inverse of the operators $\rho_j(hD)$ to these relations yields (after truncation and omitting the remainder) the differential equations

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= f(y) + hf_1(y) + h^2 f_2(y) + \dots + h^{N-1} f_{N-1}(y) \\ \dot{z}_j &= h(a_1(y) + ha_2(y) + \dots + h^{N-1} a_{N-1}(y)) z_j.\end{aligned}\quad (15)$$

This construction guarantees that for every solution of the system (15) the approximations \widehat{q}_n of (13) satisfy the multistep relation with a defect of size $O(h^{N+2}) + O(h^2 \|\mathbf{z}\|^2)$. Initial values for (15) are obtained from the starting approximations q_0, q_1, \dots, q_{k-1} by putting $t = 0, h, \dots, (k-1)h$ in (13). We notice that both the coefficient functions in (15) and the initial values for the system (15) are uniquely determined.

Oscillatory differential equation. For the solution $\mathbf{q}(t) = (q_0(t), q_1(t), \dots, q_n(t))$ of the system (9) we consider an approximation

$$\widehat{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{y}(t) + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{K}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}(t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})t}.\quad (16)$$

We let $\mathbf{y}(t) = \mathbf{z}^{\mathbf{0}}(t)$, and we denote the components of the super-vector $\mathbf{z}^{\mathbf{k}}(t)$ by $z_j^{\mathbf{k}}(t)$, $j = 0, 1, \dots, n$. To avoid technical difficulties, we assume here that the frequencies $\omega_1, \dots, \omega_n$ are non-resonant, so that $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} \neq 0$ for all multi-indices in the set $\mathcal{K} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Inserting this ansatz into the differential equation (9) and comparing the coefficients of $e^{i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})t}$ yields

$$(\omega_j^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})^2) z_j^{\mathbf{k}} + 2i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}) \dot{z}_j^{\mathbf{k}} + \ddot{z}_j^{\mathbf{k}} = \sum_{m \geq 0} \sum_{s(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{k}} \frac{1}{m!} g_j^{(m)}(\mathbf{y})(\mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}_1}, \dots, \mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}_m}), \quad (17)$$

where we use the notation $g_j(\mathbf{y}) = \nabla_j U(\mathbf{y})$ for the derivative of the potential with respect to y_j . The second sum is over m -tuples of non-zero multi-indices $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$, such that $s(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \dots + \boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{k}$.

To get smooth coefficient functions (with derivatives bounded independently of ε) we determine the dominating term in the left-hand expression, we put the other terms to the right-hand side, and we iteratively eliminate the higher derivatives. After suitable truncation this yields a second order differential equation for the

case $(j, \mathbf{k}) = (0, \mathbf{0})$, first order differential equations for $\mathbf{k} = \pm \langle j \rangle$ with $j \geq 1$, and algebraic relations for all other situations.

When dividing the equation by $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})$ or by $(\omega_j^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})^2)$, one may encounter small denominators. To avoid this difficulty, this requires either non-resonance assumptions for the frequencies or the introduction of modified frequencies.

For every solution of the resulting differential-algebraic system, the function $\hat{\mathbf{q}}(t)$ of (16) satisfies the equation (9) up to a small defect. Unique initial values for the functions $z_j^{\mathbf{k}}$ are obtained from $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$ by putting $\hat{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{q}_0, \dot{\hat{\mathbf{q}}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$.

4.2 Formal invariants for the modified equations

The second step heavily relies on the fact that we are concerned with Hamiltonian differential equations. For this situation we derive invariants for the coefficient functions of the modulated Fourier expansion.

Linear multistep methods. We again consider the relation (14), but instead of multiplying it by the inverse of a factor of $\rho(\zeta_j e^{hD})$, we multiply it by the inverse of the operator $\sigma(\zeta_j e^{hD})$. Expanding $\sigma(\zeta_j e^{hD})^{-1} \rho(\zeta_j e^{hD})$ into a series of powers of h this yields (notice that $\sigma(\zeta_j) \neq 0$ and ζ_j is a simple zero of $\rho(\zeta)$)

$$c_{j1} i h \dot{z}_j + c_{j2} h^2 \ddot{z}_j + c_{j3} i h^3 \dddot{z}_j + \dots = h^2 f'(y) z_j + O(h^2 \|z\|^2) \quad (18)$$

with real coefficients c_{jl} , and $c_{j1} \neq 0$. We then take the scalar product with the complex conjugate vector \bar{z}_j . For Hamiltonian systems we have $f(y) = -\nabla U(y)$, so that $f'(y)$ is a symmetric matrix and $\Im(\bar{z}_j^T f'(y) z_j) = 0$. Furthermore, we have $2\Re(\bar{z}_j^T \dot{z}_j) = \frac{d}{dt} \|z_j\|^2$, and it turns out that the imaginary part of the whole left-hand side of (18) can be written as a total differential of an expression, which after division by $c_{j1} h$ and suitable truncation, is of the form

$$K_j(y, z_j) = \|z_j\|^2 + \bar{z}_j^T (h E_{j,1}(y) + \dots + h^{N-1} E_{j,N-1}(y)) z_j.$$

Consequently, up to a small truncation error, the function $K_j(y, z_j)$ is an invariant of the system (15) for the coefficient functions of the modulated Fourier expansion. This is essential for a long-time bound of the parasitic components in symmetric multistep methods.

Oscillatory differential equation. For the system (9) one can recover a Hamiltonian structure in the equations (17) for the coefficient functions. With the scalar function

$$\mathcal{U}(z) = U(y) + \sum_{m=1}^N \sum_{j_1, \dots, j_m=0}^n \sum_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_m = \mathbf{0}} \frac{1}{m!} \nabla_{j_1, \dots, j_m}^m U(y) (z_{j_1}^{\mathbf{k}_1}, \dots, z_{j_m}^{\mathbf{k}_m}),$$

the right-hand side of (17), up to a defect due to the truncation of the series, can be written as $\nabla_j^{-\mathbf{k}} \mathcal{U}(\mathbf{z})$, where $\nabla_j^{-\mathbf{k}}$ denotes the derivative with respect to $z_j^{-\mathbf{k}}$. The important observation is now that the extended potential $\mathcal{U}(\mathbf{z})$ is invariant under the action of the one-parameter group $S(\theta)\mathbf{z} = (e^{i(\mathbf{k}\cdot\omega)\theta} z_j^{\mathbf{k}})$, i.e.,

$$\mathcal{U}(S(\theta)\mathbf{z}) = \mathcal{U}(\mathbf{z}) \quad \text{for all } \theta \in \mathbb{R}.$$

By Noether's theorem this implies the existence of a conserved quantity of the system (17). It turns out that this conserved quantity is close to the total oscillatory energy of the Hamiltonian equation (9).

4.3 From short to long time intervals

In Section 4.1 we have constructed smooth coefficient functions for the modulated Fourier expansion. The approximation (13), when inserted in the multistep formula, yields a small defect of size $O(h^2\delta^2)$ as long as $\|\mathbf{z}\| \leq \delta$. Similarly, the approximation (16), when inserted into the oscillatory differential equation (9), yields a small defect of size ε^N . In both situations this implies that on a short interval of size $O(1)$ the approximation coincides with the exact solution up to an error of the size of the defect.

An application of Gronwall-type estimates then yields bounds on the difference $\widehat{q}(t) - q(t)$, respectively $\widehat{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{q}(t)$, that grow exponentially with time. Such estimates cannot be improved in general, because the formulation of our two problems admits chaotic problems, where perturbations in initial values propagate exponentially with time. However, they are not useful for a proof of Theorems 1 and 2.

At this point we need the existence of invariants (Section 4.2) for the system defining the coefficient functions of the modulated Fourier expansion. These invariants have to be close to the quantities that we want to have under control. We want to get bounds for the spurious oscillations in the application of symmetric multistep methods and for the variation of the total oscillatory energy in highly oscillatory differential equations.

Let us explain the ideas for estimating the parasitic oscillations of multistep methods over long times. We consider a grid $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, such that $t_{m+1} - t_m = O(1)$. On the m -th subinterval we consider the coefficient functions $y^{[m]}(t), z_j^{[m]}(t)$ of the modulated Fourier expansion which are defined by the condition $\widehat{q}(t_m) = q_m$, where q_m denotes the numerical solution of the multistep method at time $t = t_m$. From Section 4.2 we know that

$$\|K_j(y^{[m]}(t_m), z_j^{[m]}(t_m)) - K_j(y^{[m]}(t_{m+1}), z_j^{[m]}(t_{m+1}))\| \leq \delta_1,$$

where δ_1 is a small quantity. On the small interval $[t_m, t_{m+1}]$ the difference between the modulated Fourier expansion \widehat{q}_n and the exact numerical values q_n is bounded

by the defect in the multistep formula. By the uniqueness of the coefficients of the Fourier expansion (Section 4.1) we therefore have

$$\|K_j(y^{[m]}(t_{m+1}), z_j^{[m]}(t_{m+1})) - K_j(y^{[m+1]}(t_{m+1}), z_j^{[m+1]}(t_{m+1}))\| \leq \delta_2,$$

where δ_2 is proportional to the defect. Summing up these two estimates, using the triangle inequality and a telescopic summation, we obtain

$$\|K_j(y^{[m]}(t_m), z_j^{[m]}(t_m)) - K_j(y^{[0]}(t_0), z_j^{[0]}(t_0))\| \leq m(\delta_1 + \delta_2).$$

Since $K_j(y, z_j)$ is close to $\|z_j\|^2$, this proves that the parasitic components $z_j(t)$ remain small over very long time intervals.

References

- [1] D. Bambusi, *Birkhoff normal form for some nonlinear PDEs*, Comm. Math. Phys. **234** (2003), 253–285.
- [2] G. Benettin, L. Galgani, and A. Giorgilli, *Realization of holonomic constraints and freezing of high frequency degrees of freedom in the light of classical perturbation theory. Part I*, Comm. Math. Phys. **113** (1987), 87–103.
- [3] ———, *Realization of holonomic constraints and freezing of high frequency degrees of freedom in the light of classical perturbation theory. Part II*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 557–601.
- [4] J. Bourgain, *Construction of approximative and almost periodic solutions of perturbed linear Schrödinger and wave equations*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), 201–230.
- [5] D. Cohen and L. Gauckler, *One-stage exponential integrators for nonlinear Schrödinger equations over long times*, BIT **52** (2012), 877–903.
- [6] D. Cohen, E. Hairer, and C. Lubich, *Modulated Fourier expansions of highly oscillatory differential equations*, Foundations of Comput. Math. **3** (2003), 327–345.
- [7] ———, *Numerical energy conservation for multi-frequency oscillatory differential equations*, BIT **45** (2005), 287–305.
- [8] ———, *Conservation of energy, momentum and actions in numerical discretizations of nonlinear wave equations*, Numer. Math. **110** (2008), 113–143.
- [9] ———, *Long-time analysis of nonlinearly perturbed wave equations via modulated Fourier expansions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **187** (2008), 341–368.
- [10] P. Console and E. Hairer, *Long-term stability of symmetric partitioned linear multistep methods*, Current challenges in stability issues for numerical differential equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2013, pp. 1–36.
- [11] P. Console, E. Hairer, and C. Lubich, *Symmetric multistep methods for constrained Hamiltonian systems*, Numerische Mathematik **124** (2013), 517–539.
- [12] R. D’Ambrosio and E. Hairer, *Long-term stability of multi-value methods for ordinary differential equations*, Submitted for publication (2013).

- [13] E. Faou, L. Gauckler, and C. Lubich, *Plane wave stability of the split-step Fourier method for the nonlinear Schrödinger equation*, Preprint (2013).
- [14] ———, *Sobolev stability of plane wave solutions to the cubic nonlinear Schrödinger equation on a torus*, *Comm. Partial Differential Equations* **38** (2013), 1123–1140.
- [15] L. Gauckler, E. Hairer, and C. Lubich, *Energy separation in oscillatory Hamiltonian systems without any non-resonance condition*, *Comm. Math. Phys.* **321** (2013), 803–815.
- [16] L. Gauckler, E. Hairer, C. Lubich, and D. Weiss, *Metastable energy strata in weakly nonlinear wave equations*, *Comm. Partial Differential Equations* **37** (2012), no. 8, 1391–1413.
- [17] L. Gauckler and C. Lubich, *Nonlinear Schrödinger equations and their spectral semi-discretizations over long times*, *Found. Comput. Math.* **10** (2010), 141–169.
- [18] L. Gauckler and C. Lubich, *Splitting integrators for nonlinear Schrödinger equations over long times*, *Found. Comput. Math.* **10** (2010), 275–302.
- [19] E. Hairer, *Backward error analysis for multistep methods*, *Numer. Math.* **84** (1999), 199–232.
- [20] E. Hairer and C. Lubich, *Long-time energy conservation of numerical methods for oscillatory differential equations*, *SIAM J. Numer. Anal.* **38** (2001), 414–441.
- [21] ———, *Symmetric multistep methods over long times*, *Numer. Math.* **97** (2004), 699–723.
- [22] ———, *Spectral semi-discretisations of weakly nonlinear wave equations over long times*, *Found. Comput. Math.* **8** (2008), 319–334.
- [23] ———, *On the energy distribution in Fermi-Pasta-Ulam lattices*, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **205** (2012), no. 3, 993–1029.
- [24] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner, *Geometric numerical integration. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, 2nd ed., Springer Series in Computational Mathematics 31, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [25] J. M. Sanz-Serna, *Modulated Fourier expansions and heterogeneous multiscale methods*, *IMA J. Numer. Anal.* **29** (2009), 595–605.

Author's address:

Ernst Hairer
Université de Genève
Section de mathématiques
2-4, rue du Lièvre,
1211 Genève 4, Switzerland
email Ernst.Hairer@unige.ch

Christian Lubich
Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Auf der Morgenstelle 10,
72076 Tübingen, Germany
email Lubich@na.uni-tuebingen.de

Zehn Jahre math.space: Mathematik wird zur „Öffentlichen Wissenschaft“

Rudolf Taschner

Wien

Dass es vor nunmehr zehn Jahren überhaupt ins Leben gerufen werden konnte, verdankt *math.space* meiner Frau Bianca Taschner: Das Projekt, die Mathematik einer breiten Öffentlichkeit als eminente kulturelle Errungenschaft im damals noch jungen MuseumsQuartier Wien zu präsentieren, war bereits von Johannes Wallner, Alexander Mehlmann und mir entworfen und geplant worden, allein seine Realisierung stand noch aus. Es galt, das damalige Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur zu überzeugen, dass *math.space* ein förderungswürdiges Unternehmen ist. Dieser entscheidende Schritt gelang durch Bianca Taschners Tatkraft. Seitdem ist sie die Managerin und der „Mastermind“ von *math.space*.

Tatsächlich entwickelte sich das Projekt zu einem höchst erfolgreichen Unternehmen. Im Vorstand nahm nach der Berufung von Johannes Wallner an die TU Graz Reinhard Winkler seine Position ein, dem es, bevorzugt in der Musik, wie Alexander Mehlmann, bevorzugt in der Literatur, seit jeher ein Bedürfnis ist, Bezüge von Mathematik und Kunst darzulegen. Bianca Taschner mobilisiert, leitet und betreut ein sich ständig wechselndes Team höchst engagierter junger Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter mit großem mathematischem und pädagogischem Talent, die uns bei Kursen für Kinder und Jugendliche tatkräftig unterstützen.

Seit 2003 wird in über 600 Veranstaltungen pro Jahr, an denen jährlich rund 30.000 Personen teilnehmen, Mathematik zur „Öffentlichen Wissenschaft“. Bereits vier Ministerien, das BMUKK, das BMWF, das BMVIT und das BMF, unterstützen die Aktivitäten von *math.space*, die von Kinderkursen für die Kleinsten, interaktiven Veranstaltungen für Gruppen aus Kindergärten, Volks-, Haupt- und Mittelschulen sowie Gymnasien über Darbietungen mathematischer „Erfindungen“ oder Lebens- und Wirkungsgeschichten bedeutender mathematischer Persönlichkeiten für Jugendliche bis hin zu Vorträgen für ein erwachsenes Publi-

kum reichen. Der Andrang ist so überwältigend, dass die monatlichen Abendvorträge in den 400 Personen fassenden Hofstallungen des Museums Moderner Kunst im MuseumsQuartier vor vollem Haus abgehalten und elektronisch aufgezeichnet werden. So ist es Interessierten, die nicht persönlich bei den Veranstaltungen anwesend sein können, möglich, die Vorträge unter <http://www.youtube.com/user/mathspacewien/videos> zu erleben. Mehr als 50.000 Personen haben bereits von diesem Angebot Gebrauch gemacht.

Um vermitteln zu können, welchen Eindruck *math.space* hinterlässt, ist es am besten, einen Besucher zu Wort kommen zu lassen. Hier die Schilderung von Lukas Emberger, Schüler der 3C-Klasse in der Handelsakademie Krems, die er nach einem Besuch des *math.space* verfasste:

„Am 16. Mai 2013 besuchten wir im Rahmen einer Exkursion mit Herrn Professor Siegl und Frau Professor Schütz das Museum Moderner Kunst in Wien und in weitere Folge den *math.space*.

math.space ist ein Projekt, welches darauf abzielt, jungen Menschen und Leuten, die nicht so sehr mit der Materie befasst sind, die Mathematik näherzubringen. Außerdem ist den Betreibern auch wichtig, einen kulturellen Bezug herzustellen. Ins Leben gerufen wurde dieses Projekt 2001 durch verschiedene Professoren der TU Wien, unter anderem Herrn Rudolf Taschner. Standort des Projekts ist das Museums-Quartier, dort finden auch die Vorträge statt. Rudolf Taschner verfügt ohne Zweifel über ein fundiertes Wissen in seinem Fach, sodass viele seiner Reden sogar auf der Videoplattform *YouTube* im Internet ausgestrahlt werden und dort auf großen Anklang stoßen. Wichtig zu erwähnen ist außerdem, dass das Projekt nicht nur für ‚Laien‘ ausgelegt ist, sondern auch Leuten vom Fach eine Anlaufstelle bietet. Aus diesem Grund werden auch nicht selten internationale Wissenschaftler aus aller Welt eingeladen, um Vorträge für Erwachsene und Experten zu leiten.

Ich halte das Projekt *math.space* für ein kulturell sehr hochwertiges Produkt, das zur allgemeinen Bildung der Menschen sehr viel beiträgt. Die Überlegung, dass die Mathematik allen Leuten in jedem Alter in einfacher ‚Übersetzung‘ zugänglich gemacht werden soll, finde ich sehr interessant, und sie zeugt auch in gewisser Weise von sozialer Kompetenz.

Allgemein ist anzumerken, dass die Mathematik eine Wissenschaft ist, die bei einem großen Teil der Bevölkerung auf Abneigung stößt, sei es wegen schulischer Misserfolge oder genereller Unwissenheit in diesem Fachgebiet. Der Vorstoß von Rudolf Taschner und seinen Kollegen, mit diesem Projekt diese teils komplizierte Materie verständlich zu übermitteln, kommt an dieser Stelle gerade recht. In spannen-

den und mitreißenden Vorträgen fesselt Herr Taschner seine Zuhörer und lässt die sonst so langweilig scheinende Mathematik wie einen spannenden Film wirken. Ich selbst konnte im Rahmen der Exkursion dem Vortrag ‚Die Erfindung des Spiels‘ beiwohnen. Diese Rede handelte von der Entstehung von Spielen in Zusammenhang mit mathematischen Methoden und Tricks, wie man mit Zahlen beispielsweise gegen jemanden hundertprozentiger Wahrscheinlichkeit gewinnen kann. Ich finde, dass Rudolf Taschner diesen Vortrag mit seiner stark ausgeprägten Rhetorik und mit seinem enormen Wissen über die Mathematik, sehr ansprechend gestaltet hat. Ich habe normalerweise eine eher negative Haltung zur Mathematik, da ich oft die komplexen Denkschritte in den vielen Rechenschritten nicht verstehe und auch meine schulischen Leistungen in diesem Unterrichtsfach stark zu wünschen übrig lassen. Doch sogar ich habe diesen Vortrag höchst interessant gefunden und die vielen Zahlentricks und Zufallsspiele, die uns Herr Taschner eindrucksvoll vermittelt hat, mit Spannung verfolgt und war von der Reichweite der Mathematik sehr begeistert. Der Wortwitz und Humor von Rudolf Taschner waren eine positive Draufgabe. Generell glaube ich auch, dass man sich sehr glücklich schätzen kann, dass solche intellektuellen Persönlichkeiten die Initiative ergreifen und sich für die Weiterbildung der Allgemeinheit einsetzen, denn gerade von diesen Menschen kann man eine Menge lernen. Summa summarum ist *math.space* für mich ein perfekt eingefädertes Projekt, welches in dieser Form mit Sicherheit noch lange, sehr erfolgreich bestehen wird.“

Adresse des Autors:

*Rudolf Taschner
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10/101
A 1040 Wien*

*Rudolf Taschner
math.space
Museumsplatz 7
A 1070 Wien*

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

V. S. Varadarajan (Managing Editor), Vyjayanthi Chari, Robert Finn, Kefeng Liu, Darren Long, Jiang-Hua Lu, Alexander Merkurjev, Sorin Popa, Jie Qing, Jonathan Rogawski, Paul Yang.

The Journal is published 10 times a year. The subscription price is \$ 485,00 per year for print and \$ 420,00 for electronic-only.

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
AT THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY, CA 94720-3840

INDIANA UNIVERSITY MATHEMATICS JOURNAL (Formerly the Journal of Mathematics and Mechanics)

Edited by

E. Bedford, H. Bercovici, N. Katz, M. Larsen, P. Sternberg, V. Turaev, K. Zumbrun.

For institutions, the print and online subscription rates are \$400.00 and \$320.00. Individual subscribers' fees are \$100.00 and \$50.00, respectively. The JOURNAL appears in 6 annual issues averaging more than 500 pages each.

Indiana University, Bloomington, Indiana U.S.A

Die Exponentialfunktion als dynamisches System

Stefan Götz und Franz Hofbauer

Universität Wien

In [1] werden fortlaufende Potenzen $a^{a^{\dots}}$ auf ihre Konvergenz hin untersucht. Dabei wird stets $a > 0$ vorausgesetzt. Die fortlaufende Potenzbildung ist so zu verstehen, dass die Potenzen von rechts nach links berechnet werden. Zwei Fragen werden in diesem Artikel beantwortet. Erstens: Für welche Werte $a > 0$ konvergiert die Folge a, a^a, a^{a^a}, \dots ? Gegen welche Werte z konvergiert sie dann jeweils? Und zweitens: Für welche $z > 0$ gibt es ein $a > 0$, sodass die genannte Folge gegen z konvergiert? Diese Problemstellung hat uns inspiriert (anders als in [1]), die reelle Exponentialfunktion als dynamisches System aufzufassen und seine Eigenschaften zu analysieren.

1 Einleitung

Das Iterieren einer (Grund-)Rechenoperation führt bekanntlich zur „nächsthöheren“: Fortlaufendes Addieren wird durch Multiplizieren abgekürzt, fortlaufendes Multiplizieren durch Potenzieren:

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot a \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n;$$

in beiden Fällen ist jeweils $n \in \mathbb{N}$. Gibt man die Beschränkung endlicher Anzahlen von Summanden auf, so divergiert der Ausdruck $a + a + \dots$ für alle $a \neq 0$. Für unendliche Produkte $a \cdot a \cdot \dots$ ist die Situation schon etwas komplexer: Für $|a| < 1$ konvergiert a^n für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Ist $a = 1$ der Fall, so ist die Folge $\langle a^n \rangle$ konstant gleich 1. Im Fall $a = -1$ ist die Folge immerhin noch beschränkt, aber nicht mehr konvergent, sonst divergiert sie.

So gesehen liegt die Frage auf der Hand, was es mit $a^{a^{a^{\dots}}}$ für $a > 0$ auf sich hat. Dabei ist diese fortlaufende Potenzbildung so zu verstehen, dass die Potenzen von rechts nach links berechnet werden. Diese Frage ist nicht neu, sondern wurde bereits in verschiedenen Artikeln behandelt, siehe z.B. [1]. Eine gute Literaturübersicht zu diesem Thema findet sich in [2]. Wir gehen jedoch mit einer neuen Sichtweise an diese Frage heran. Wir fassen die zu untersuchende Folge als eine Bahn in einem dynamischen System auf. Sei $I = [0, \infty)$ und $f_a : I \rightarrow I$ durch $f_a(x) = a^x$ für $a > 0$ definiert. Dann gilt

$$f_a(1) = a, \quad f_a(f_a(1)) = f_a^2(1) = a^a, \quad f_a(f_a(f_a(1))) = f_a^3(1) = a^{a^a}$$

und so weiter. Also ist die zu untersuchende Folge die Bahn des Punktes 1 im dynamischen System (I, f_a) . Wir studieren das Verhalten der Bahnen in diesem dynamischen System und erhalten damit auch eine Antwort auf die obige Frage.

Der erste Teil der Arbeit behandelt ganz allgemein dynamische Systeme (I, f) , wobei I ein Intervall und $f : I \rightarrow I$ eine stetige monoton wachsende Funktion ist. Es stellt sich heraus, dass die Bahn eines Punktes x , der nicht selbst schon Fixpunkt ist, eine monotone Folge bildet, die entweder unbeschränkt ist oder gegen einen Fixpunkt konvergiert. Ist f außerdem differenzierbar, dann lässt sich das Verhalten der Bahnen mithilfe der Ableitung bestimmen.

Diese Resultate wenden wir dann auf das dynamische Systeme (I, f_a) an, wobei I und f_a wie oben definiert sind. Für $a > 1$ ist die Funktion f_a selbst streng monoton wachsend. Für $0 < a < 1$ ist f_a streng monoton fallend, aber $g_a := f_a^2$ ist streng monoton wachsend, sodass wir die Resultate aus dem ersten Teil der Arbeit auf g_a anwenden können. Den Vorteil dieser Vorgangsweise sehen wir darin, dass sich die Untersuchung dieser dynamischen Systeme dann im Wesentlichen auf Kurvendiskussionen reduziert, wobei der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und der Zwischenwertsatz eine wichtige Rolle spielen. So gesehen zeigt die Arbeit auch, wie wesentliche Konzepte einer Analysis 1-Vorlesung für ein konkretes Problem relevant werden. Damit kann eine Sinnstiftung dieser analytischen Werkzeuge und Einsichten für Studierende schon zu Beginn ihres Studiums initiiert werden.

Als Spezialfall erhalten wir das Konvergenzverhalten der Folge a, a^a, a^{a^a}, \dots . Wir werden sehen, dass die Folge a, a^a, a^{a^a}, \dots gegen einen Fixpunkt p konvergiert, wenn $a \in [e^{-e}, e^{1/e}]$ gilt. Umgekehrt wird auch die Frage beantwortet: Für welche $p > 0$ gibt es ein $a > 0$, sodass die genannte Folge gegen p konvergiert?

Außerdem wird durch diese unsere Herangehensweise klar, was außerhalb dieses Konvergenzbereiches passiert. Ist $a > e^{1/e}$, dann divergiert jede Bahn, insbesondere die Folge a, a^a, a^{a^a}, \dots , gegen unendlich. Unterschreitet dagegen a den Wert e^{-e} , dann streben die Bahnen nicht mehr gegen einen Fixpunkt, sondern gegen eine Bahn mit Periode 2.

2 Die Werkzeuge

2.1 Worum geht es? — Begriffsbildungen

Sei I ein reelles Intervall und f eine stetige Abbildung von I nach I . Man spricht dann von einem dynamischen System (I, f) . Jeder Punkt $x \in I$ wird durch das dynamische System in sein Bild $f(x)$ transformiert. Man kann diesen Vorgang iterieren. Die dadurch entstehende Folge

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots$$

nennt man die Bahn (Orbit) des Punktes x . Gilt $f(x) = x$, dann heißt x Fixpunkt des dynamischen Systems.

Die schon in der Einleitung als motivierender Ausgangspunkt genannten Beispiele von Iterationen werden nun also verallgemeinert. Die Abbildungen, die wir studieren werden, sind monoton. Das ist nicht weiter verwunderlich, interessiert uns doch letztlich das iterative Verhalten der Exponentialfunktion $f: x \mapsto a^x$, und die ist bekanntlich monoton ($a > 0, a \neq 1$).

2.2 Erste Einsichten

Das folgende Lemma beschreibt das typische Verhalten der Bahnen in dynamischen Systemen (I, f) mit monoton wachsender Funktion f .

Lemma 1. *Sei I ein Intervall und $f: I \rightarrow I$ stetig und monoton wachsend.*

- (a) *Sei $J \subset I$ ein nach oben unbeschränktes Intervall, und es gelte $f(y) > y$ für alle $y \in J$. Für jeden Punkt in J divergiert dann die Bahn nach ∞ .*
- (b) *Sei $J \subset I$ ein Intervall, dessen rechter Endpunkt ein Fixpunkt p ist, und es sei $f(y) > y$ für alle $y \in J \setminus \{p\}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ für alle $x \in J$.*
- (c) *Sei $J \subset I$ ein Intervall, dessen linker Endpunkt ein Fixpunkt p ist, und es sei $f(y) < y$ für alle $y \in J \setminus \{p\}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ für alle $x \in J$.*

Beweis. Sei $x \in I$. Existiert $c = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ und liegt c in I , dann folgt wegen der Stetigkeit von f , dass $f(c) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = c$ gilt. Wir haben somit gezeigt, dass der Grenzwert einer Bahn, falls er existiert und in I liegt, ein Fixpunkt von f ist.

Wir beweisen (a). Sei $x \in J$. Ist $f^n(x) \in J$ gezeigt, dann folgt nach Voraussetzung, dass $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) > f^n(x)$ gilt und somit auch $f^{n+1}(x)$ in J liegt, da J nach oben unbeschränkt ist. Damit ist durch Induktion bewiesen, dass die Bahn von x monoton wachsend ist und in J liegt. Wäre die Bahn von x beschränkt, dann

würde aufgrund ihrer Monotonie $c = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ existieren und in J liegen. Es würde $f(c) = c$ gelten, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist die Bahn von x unbeschränkt, das heißt sie divergiert gegen ∞ .

Wir beweisen (b). Sei $x \in J$. Ist $f^n(x) \in J$ gezeigt, dann folgt nach Voraussetzung, dass $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \geq f^n(x)$ gilt und wegen $f^n(x) \leq p$ und der Monotonie von f auch $f^{n+1}(x) \leq f(p) = p$, was bedeutet, dass $f^{n+1}(x)$ ebenfalls in J liegt. Damit ist durch Induktion bewiesen, dass die Bahn von x monoton wachsend ist und in J liegt. Insbesondere ist sie durch p nach oben beschränkt. Somit existiert $c = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) \leq p$. Es gilt $c \in J$ und $f(c) = c$. Wäre $c \in J \setminus \{p\}$, dann würde $f(c) > c$ gelten, also ergibt sich $c = p$ und (b) ist bewiesen.

Der Beweis von (c) verläuft genauso wie der Beweis von (b). Es drehen sich nur die Ungleichheitszeichen um, und statt monoton wachsend hat man monoton fallend. \square

Als Beispiel für (c) können wir $I = [0, 1]$ mit $f : I \rightarrow I$, $f(y) = y^2$, betrachten. Wir wählen $J = [0, 1) \subset I$. Jetzt ist $f(y) = y^2 < y$ auf $J \setminus \{0\}$. Dann gilt nach Lemma 1, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0 \forall x \in J$ ist. Das sehen wir auch „zu Fuß“ ein: $f^n(x) = x^{2^n}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2^n} = 0 \forall x \in J$.

Mit dem folgenden Lemma kann man nachweisen, dass die Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllt sind.

Lemma 2. Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow I$ differenzierbar.

- (a) Sei $K \subset I$ ein Intervall, dessen rechter Endpunkt ein Fixpunkt p ist. Gilt $f' < 1$ im Inneren von K , dann ist $f(x) > x$ für alle $x \in K \setminus \{p\}$ erfüllt. Gilt $f' > 1$ im Inneren von K , dann ist $f(x) < x$ für alle $x \in K \setminus \{p\}$ erfüllt.
- (b) Sei $K \subset I$ ein Intervall, dessen linker Endpunkt ein Fixpunkt p ist. Gilt $f' < 1$ im Inneren von K , dann ist $f(x) < x$ für alle $x \in K \setminus \{p\}$ erfüllt. Gilt $f' > 1$ im Inneren von K , dann ist $f(x) > x$ für alle $x \in K \setminus \{p\}$ erfüllt.

Beweis. Wir zeigen (a). Für jedes $x \in K \setminus \{p\}$ existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in (x, p)$ mit $\frac{f(p) - f(x)}{p - x} = f'(\xi)$. Gilt jetzt $f' < 1$ im Inneren von K , dann insbesondere auch $f'(\xi) < 1$. Es folgt $f(p) - f(x) < p - x$, das heißt $f(x) > x$, da p ein Fixpunkt ist. Gilt aber $f' > 1$ im Inneren von K , dann insbesondere auch $f'(\xi) > 1$, und es folgt $f(p) - f(x) > p - x$, das heißt $f(x) < x$. Der Beweis von (b) verläuft analog. \square

Die beiden Bedingungen $f' < 1$ bzw. $f' > 1$ sind hinreichend. Bei unserem Beispiel ist wegen $f'(x) = 2x$ sowohl $f'(x) > 1$ für $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ als auch $f'(x) < 1$ für $x \in [0, \frac{1}{2})$ der Fall. Trotzdem haben wir Konvergenz auf $[0, 1)$ konstatiert. Schränken wir f auf $[0, \frac{1}{2})$ ein, dann ist natürlich $f'(x) < 1$ für alle x und wir können das Lemma 2(b) anwenden.

3 Das Verhalten der Exponentialfunktion a^x bei $a > 1$

Sei jetzt $I = [0, \infty)$ und $f_a : I \rightarrow I$ durch $f_a(x) = a^x$ definiert. Wir untersuchen die Familie (I, f_a) von dynamischen Systemen, wobei der Parameter a das Intervall $(0, \infty)$ durchläuft. Es soll das Konvergenzverhalten der Bahnen in Abhängigkeit vom Parameter a untersucht werden. Wir beginnen mit den Parameterwerten $a > 1$.

Satz 3. Für das soeben eingeführte dynamische System (I, f_a) gilt:

- (1) Ist $a > e^{1/e}$, dann divergieren alle Bahnen nach ∞ .
- (2) Ist $a = e^{1/e}$, dann ist e ein Fixpunkt. Für $x \in [0, e)$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = e$. Für $x \in (e, \infty)$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = \infty$.
- (3) Ist $1 < a < e^{1/e}$, dann existieren zwei Fixpunkte p und q mit $1 < p < e < q$. Für $x \in [0, p)$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = p$. Für $x \in (p, q)$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = e$. Für $x \in (q, \infty)$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = \infty$.

Was hat es mit der Grenze $e^{1/e} = 1.444667861 \dots$ für den Parameter a auf sich? Das Intervall I ist nach oben unbeschränkt, diesen Fall beschreibt Lemma 1(a). Dort wird zusätzlich $f_a(y) > y$ für alle $y \in I$ gefordert. Das bedeutet $a^y > y$ bzw. $\ln a > \ln y / y$ und schließlich $a > e^{\ln y / y}$. Das gilt für alle $y > 0$ und $a > 0$. Auch die Umkehrung ist richtig, aus $a > e^{\ln y / y}$ folgt $f_a(y) > y$ für $y > 0$ und $a > 0$.

Die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend, d.h. wir suchen das Maximum des Exponenten $\ln x / x$. Das liegt bei e und beträgt e^{-1} . Die Ableitung von $\ln x / x$ ist $(1 - \ln x) / x^2$, ist somit auf $(0, e)$ positiv und auf (e, ∞) negativ. Die Funktion $x \mapsto \ln x / x$ ist also auf $(0, e)$ streng monoton wachsend und auf (e, ∞) streng monoton fallend. Daher ist $e^{\ln x / x} \leq e^{e^{-1}} = e^{1/e}$ für alle $x \in I \setminus \{0\}$. Es gilt also $f_a(y) > y$ für alle $y > 0$ genau dann, wenn $a > e^{1/e}$ ist. Jetzt können wir (1) leicht beweisen.

Beweis von (1). Sei $a > e^{1/e}$. Nach den eben durchgeführten Überlegungen gilt $f_a(x) > x$ für alle $x \in I \setminus \{0\}$. Wegen $f_a(0) = 1 > 0$ gilt $f_a(x) > x$ für alle $x \in I$. Wegen Lemma 1(a) divergieren alle Bahnen nach ∞ . Damit ist (1) gezeigt. \square

Die Diskussion von $x \mapsto \ln x / x$ hat ergeben, dass $e^{\ln x / x} < e^{1/e}$ für alle $x \in (0, \infty) \setminus \{e\}$ gilt. Das verwenden wir zum Beweis von (2).

Beweis von (2). Sei $a = e^{1/e}$. Es gilt dann $e^{\ln x / x} < a$ für alle $x \in (0, \infty) \setminus \{e\}$. Aus der oben gezeigten Äquivalenz erhalten wir, dass auch $f_a(x) > x$ für alle $x \in (0, \infty) \setminus \{e\}$ gilt und somit für alle $x \in [0, e) \cup (e, \infty)$, da $f_a(0) = a > 0$ immer erfüllt ist. Der Punkt e ist Fixpunkt von f_a : es gilt ja $f_a(e) = a^e = e$.

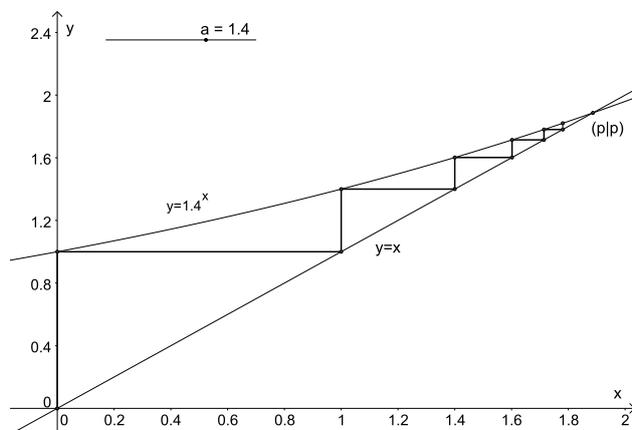


Abbildung 1: Die Bahn von $f_{1.4}$ mit Startwert im Ursprung.

Wendet man Lemma 1(b) auf das Intervall $[0, e)$ an, so folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = e$ für alle $x \in [0, e)$. Wendet man Lemma 1(a) auf das Intervall (e, ∞) an, dann folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = \infty$ für alle $x \in (e, \infty)$.

Da e ein Fixpunkt ist, gilt $f_a^n(e) = e$ für alle $n \geq 1$. Damit ist (2) gezeigt. \square

Der Beweis von Behauptung (3) von Satz 3 ist ein wenig aufwendiger. Wir suchen Fixpunkte der Funktion f_a , das sind Nullstellen der Funktion $h_a(x) := f_a(x) - x$. Da die Funktion h_a stetig auf I ist, kann man den Zwischenwertsatz anwenden, um Nullstellen zu finden.

Beweis von (3). Sei $1 < a < e^{1/e}$. Sei $h_a(x) = f_a(x) - x$. Wegen $h_a(1) > 0$ und $h_a(e) < 0$ existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $p \in (1, e)$ mit $h_a(p) = 0$. Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ und $a > 1$ existiert ein $c > e$ mit $\frac{\ln c}{c} < \ln a$, woraus $h_a(c) > 0$ folgt. Somit existiert auch ein $q \in (e, c)$ mit $h_a(q) = 0$. Wegen $h_a''(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist h_a strikt konvex und kann daher nicht mehr als zwei Nullstellen haben. (Hätte h_a drei Nullstellen, dann müsste h_a' zwei Nullstellen nach dem Satz von Rolle haben und h_a'' eine.) Daher sind p und q die einzigen Nullstellen von h_a , das heißt Fixpunkte für f_a . Auf $[0, p)$ gilt $h_a(x) > 0$, das heißt $f_a(x) > x$. Aus Lemma 1(b) folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = p$ für alle $x \in [0, p)$. Auf (p, q) gilt $h_a(x) < 0$, das heißt $f_a(x) < x$. Aus Lemma 1(c) folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = p$ für alle $x \in (p, q)$. Auf (q, ∞) gilt $h_a(x) > 0$, das heißt $f_a(x) > x$. Aus Lemma 1(a) folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = \infty$ für alle $x \in (q, \infty)$. Damit ist (3) gezeigt. \square

Man beachte die unterschiedlichen Charaktere der beiden Fixpunkte p und q von f_a . Es gibt überabzählbar viele Bahnen, die in p enden, aber nur eine, die nach q konvergiert: Jene, die auch in q startet. Die Attribute „anziehend“ für p und „abstoßend“ für q erklären sich so von selbst. Für $a = 1.4$ ist $p = 1.88666\dots$ und $q = 4.41029\dots$ Abbildung 1 zeigt die Bahn mit Startwert $x_0 = 0 \in [0, q)$.

Für $a = 1$ ist f_a die konstante Funktion 1.

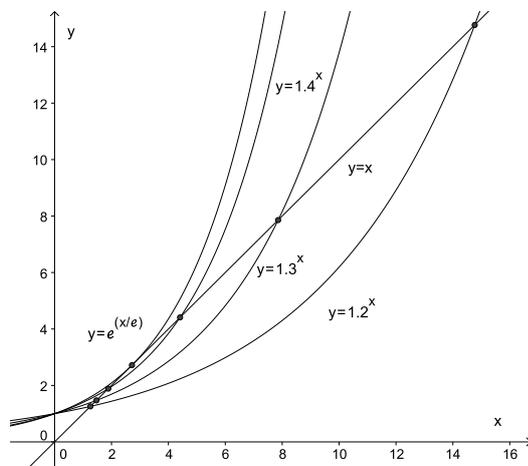


Abbildung 2: Die Lösungen p und q für verschiedene Basen a .

Zusammenfassend wissen wir nun, dass im Falle $a \geq 1$ der Ausdruck $a^{a^{a^{\dots}}}$ genau dann konvergiert, wenn a in $L := [1, e^{1/e}]$ liegt. An den Rändern von L kennen wir das Konvergenzverhalten explizit: Für $a = 1$ ist eben $a^{a^{a^{\dots}}} = 1$, und für $a = e^{1/e}$ ist $a^{a^{a^{\dots}}} = e$. Letzteres gilt wegen $e^{1/e} < e$ und Satz 3(2).

Für das Innere von L dagegen ist der Grenzwert von $a^{a^{a^{\dots}}}$ die kleinere Lösung $p \in (1, e)$ von $a^x = x$. Die zweite Lösung q ist größer als e . Abbildung 2 zeigt für verschiedene a die beiden Lösungen p und q . Auch der Graph der „Grenzfunktion“ $y = e^{x/e}$ ist zu sehen, er berührt die erste Mediane. Die zwei Lösungen p und q fallen hier zu einer zusammen: $p = q = e$.

Ist umgekehrt $p \in (1, e)$ vorgegeben, dann ist wegen $a^p = p$ der korrespondierende Wert für a gleich $e^{\ln p/p}$. Der zugehörige Graph dieser Funktion verläuft unspektakulär (Abbildung 3). Spiegelt man ihn an der ersten Mediane, dann er-

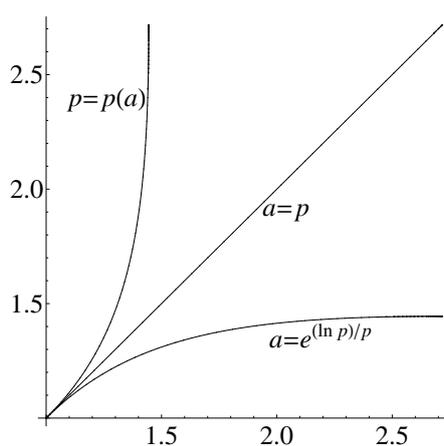


Abbildung 3: Die Graphen von $p = p(a)$ und $a = a(p)$.

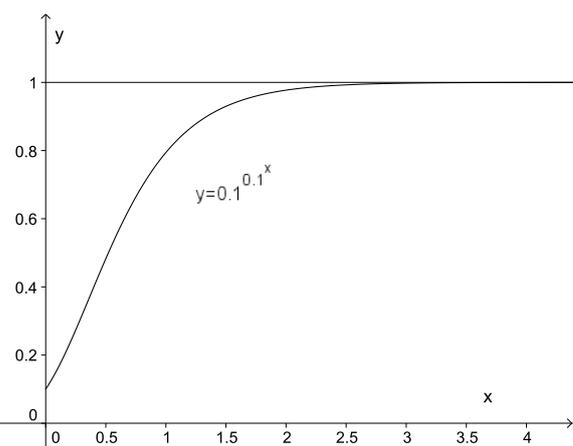


Abbildung 4: Der Graph von $y = 0.1^{0.1^x}$.

halten wir den Graphen der Abhängigkeit $p = p(a)$ auf dem Intervall L (ebenfalls Abbildung 3).

Der einzige infrage kommende ganzzahlige Wert für p ist $2 \in (1, e)$. Die zugehörige Basis der Exponentialfunktion ist dann $a = e^{\ln 2/2} = \sqrt{2} \in (1, e^{1/e})$. Der q -Wert ist in diesem Fall 4: $\sqrt{2}^4 = 4$. Wir erhalten also das schöne Resultat

$$\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\cdots = 2.$$

Startwerte aus dem Intervall $[0, 4)$ liefern alle Bahnen des dynamischen Systems $(I, f_{\sqrt{2}})$, die gegen 2 konvergieren. Der q -Wert 4 kann dagegen nur mit dem Startwert 4 erreicht werden.

4 Der Fall $0 < a < 1$

Vorerst halten wir fest, dass $f_a(x) < 1$ für alle $x \in I \setminus \{0\}$ ist und $f_a(0) = 1$. Dabei ist weiterhin $I = [0, \infty)$.

Für $0 < a < 1$ ist f_a monoton fallend. Um wieder eine monoton wachsende Funktion zu haben, untersuchen wir $f_a^2(x) = f_a(f_a(x)) = a^{a^x}$. Abbildung 4 zeigt für $a = 0.1$ den Graphen. Er besitzt eine waagrechte Asymptote in der Höhe 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{a^x} = a^{\lim_{x \rightarrow \infty} a^x} = a^0 = 1.$$

Besonders interessieren wir uns dabei für Intervalle, für die die Ableitung kleiner als 1 ist. Dies ist ja eine wesentliche Voraussetzung in Lemma 2, das zusammen mit Lemma 1 Konvergenzaussagen trifft. Wenn wir f_a^2 einmal differenzieren, erhalten wir $a^{a^x} \cdot a^x \cdot (\ln a)^2$. Das Produkt der ersten beiden Faktoren ist wegen $0 < a < 1$ jedenfalls kleiner als 1 für alle $x \in I$. Es bleibt $(\ln a)^2$. Für $a = 1/e$ ist $\ln a = -1$, wir schränken uns also vorerst auf $0 < a \leq 1/e$ ein. Dafür beweisen wir einige Eigenschaften der Ableitung von f_a^2 , die helfen werden, deren Größe abzuschätzen.

Lemma 4. Sei $0 < a \leq \frac{1}{e}$. Die Funktion

$$g_a(x) = f_a^2(x) = a^{a^x}$$

hat dann Ableitung $g'_a > 0$ und es gilt $g'_a(0) < 1$ und $g'_a(1) < 1$. Die Gleichung

$$a^x \ln a + 1 = 0$$

hat eine eindeutige Lösung c in $[0, 1]$, für die $g'_a(c) = -\ln a/e$ gilt. Weiters ist g'_a streng monoton wachsend auf $[0, c]$ und streng monoton fallend auf $[c, \infty)$.

Bevor wir dieses Lemma beweisen, halten wir uns eine wesentliche Folgerung daraus vor Augen: Die Stelle c ist offensichtlich eine (globale) Maximumsstelle von g'_a auf I .

Warum sind die Funktionswerte von g'_a an den Stellen 0 und 1 so interessant? Für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^+$ liegt schon die erste Iteration von f_a im Intervall $(0, 1)$.

Beweis. Wir berechnen $g'_a(x) = a^{a^x} a^x (\ln a)^2$. Man sieht, dass $g'_a(x) > 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Die Funktion $a \mapsto a(\ln a)^2$ nimmt auf dem Intervall $(0, 1]$ ihr Maximum $4/e^2$ im Punkt $1/e^2$ an, wie man durch Berechnen der Ableitung leicht feststellt. Für $a \in (0, 1]$ gilt somit $a(\ln a)^2 \leq 4/e^2 < 1$ und wegen $0 < a^a \leq 1$ auch $a^a a (\ln a)^2 < 1$. Daher ist $g'(0) = a(\ln a)^2 < 1$ und $g'_a(1) = a^a a (\ln a)^2 < 1$ gezeigt.

Wir berechnen $g''_a(x) = a^{a^x} a^x (\ln a)^3 (a^x \ln a + 1)$. Sei $\varphi(x) := a^x \ln a + 1$. Dann gilt $\varphi(0) = \ln a + 1 \leq 0$ und $\varphi(1) = a \ln a + 1 > 0$, weil $-\ln a \geq 1$ für $a \in (0, 1/e]$ gilt, womit dann aus $a(\ln a)^2 < 1$ (letzter Absatz) mittels Division durch $-\ln a > 0$ auch $-a \ln a < 1$ folgt. Somit existiert ein $c \in [0, 1]$ mit $\varphi(c) = 0$. Da φ streng monoton wachsend ist, ist c eindeutig. Weiters gilt $g''_a(x) = a^{a^x} a^x (\ln a)^3 \varphi(x)$. Auf dem Intervall $[0, c)$ ist φ negativ und daher g''_a positiv, sodass g'_a auf $[0, c]$ streng monoton wachsend ist. Auf dem Intervall (c, ∞) ist φ positiv und daher g''_a negativ, sodass g'_a auf $[c, \infty)$ streng monoton fallend ist.

Wegen $\varphi(c) = 0$ gilt $a^c = -1/\ln a$. Damit berechnen wir $g'_a(c) = a^{a^c} a^c (\ln a)^2 = a^{-1/\ln a} (-\ln a) = -\ln a/e$. \square

Im Falle $a = \frac{1}{e}$ ist $c = 0$. Die Ableitung g'_a ist dann streng monoton fallend auf $[0, \infty)$. Weiters gilt $g'_a(0) = \frac{1}{e}$.

Mithilfe von Lemma 4 untersuchen wir nun das Verhalten der Bahnen im dynamischen System (I, f_a) für Parameterwerte $0 < a < 1$. Es existiert wegen der Monotonie von f_a und $f_a(0) = 1$ genau ein $p \in I$ mit $f_a(p) = p$, das heißt p ist eindeutiger Fixpunkt. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = 0$ unterstreicht noch die eben gemachte Aussage. Wir können weiter präzisieren, dass dieser Fixpunkt p im Intervall $[0, 1]$ liegen muss, unabhängig vom konkreten Wert der Basis $a \in (0, 1)$.

Aus Lemma 2 wissen wir, dass der Wert (Betrag) 1 der Ableitung von f_a eine wesentliche Rolle spielt, er stellt quasi den „Rubikon“ dynamischer Systeme dar. Um nun aus den überabzählbar vielen Möglichkeiten für a einen quasi Ankerpunkt zu finden, wünschen wir uns den einen Fixpunkt p mit Steigung -1 : $a^p = p$ mit $f'_a(p) = -1$. Das heißt also $f'_a(p) = a^p \cdot \ln a = -1$ bzw. $p \cdot \ln a = -1$. Drücken wir p in der zweiten Gleichung aus und setzen in die erste ein, so erhalten wir $a = e^{-e}$. Für diese Basis formulieren wir nun den ersten Satz dieses Abschnitts.

Satz 5. Für $a = e^{-e}$ ist $\frac{1}{e}$ der eindeutig bestimmte Fixpunkt von f_a . Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = \frac{1}{e}$ für alle $x \in I$.

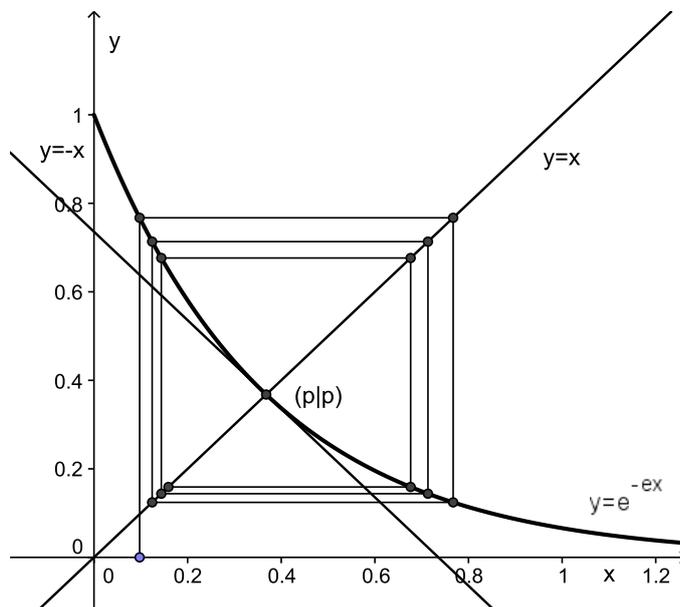


Abbildung 5: Die Bahn von $f_{e^{-e}}$ mit Startwert $x_0 = 0.1$.

Beweis. Man rechnet $f_a(1/e) = 1/e$ nach. Also ist $p = 1/e$ Fixpunkt. Sei $g_a(x) = f_a^2(x) = a^{a^x}$. Es gilt dann auch $g_a(p) = p$. Die Gleichung $a^x \ln a + 1 = 0$ in Lemma 4 ist ebenfalls für $x = 1/e$ erfüllt, sodass $c = 1/e = p$ gilt. Weiters gilt $g'_a(c) = -\ln a/e = 1$. Aus Lemma 4 folgt $0 < g'_a(x) < 1$ für alle $x \in I \setminus \{p\}$. Für das Intervall $K = [0, p)$ sind die Voraussetzungen von Lemma 2(a) erfüllt. Es folgt $g_a(x) > x$ für alle $x \in [0, p)$. Aus Lemma 1(b) mit $J = [0, p]$ folgt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} g_a^n(x) = p$ für alle $x \in [0, p]$. Für das Intervall $K = (p, \infty)$ sind die Voraussetzungen von Lemma 2(b) erfüllt. Es folgt $g_a(x) < x$ für alle $x \in (p, \infty)$. Aus Lemma 1(c) mit $J = (p, \infty)$ folgt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} g_a^n(x) = p$ für alle $x \in (p, \infty)$, insgesamt also für alle $x \in I$. Wegen $f_a^{2n}(x) = g_a^n(x)$ und $f_a^{2n+1}(x) = g_a^n(f_a(x))$ folgt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = p$ für alle $x \in I$. \square

Die Gleichung $a^x \ln a + 1 = 0$ aus Lemma 4 entspricht genau der Bedingung $f'_a(x) = -1$. Wegen $c = p$ kann g'_a elegant auf $I \setminus \{p\}$ kontrolliert werden. Der maximale Wert von g'_a , der 1 beträgt, ist einzig und allein der speziellen Wahl von a zu verdanken.

Was haben wir im Bezug auf die ursprüngliche Fragestellung gewonnen? Eine spezielle Konvergenzaussage aus dem Parameterraum für a ist bewiesen worden, nämlich: $(e^{-e})(e^{-e})(e^{-e}) \dots = 1/e$. Dabei ist $e^{-e} = 0.065988\dots$ und $1/e = 0.36787944\dots$. Abbildung 5 zeigt die Situation für den Startwert $x_0 = 0.1$, die Konvergenz passiert offensichtlich langsam. Dennoch sieht man deutlich, dass die Konvergenz gegen $p = 1/e$ von links und von rechts, also alternierend, erfolgt. Dieses Phänomen ist charakteristisch für Abbildungen mit Ableitung im Fixpunkt zwischen -1 und 0 . Die Tangente an $f_{e^{-e}}$ in p hat Steigung -1 .

Der nächste Satz behandelt Parameterwerte a größer als e^{-e} .

Satz 6. Sei $e^{-e} < a < 1$. Dann hat f_a einen eindeutig bestimmten Fixpunkt p und für alle $x \in I$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = p$. (Die Konvergenzgeschwindigkeit ist exponentiell.)

Exponentielle Konvergenzgeschwindigkeit bedeutet, dass der Abstand zum Grenzwert mit jeder Iteration um mindestens einen konstanten positiven Faktor $\alpha < 1$ vermindert wird.

Beweis. Teil 1. Sei zuerst $\frac{1}{e} < a < 1$, das heißt $-1 < \ln a < 0$. Es gilt $f_a'(x) = a^x \ln a < 0$. Weiters ist f_a' monoton wachsend, sodass $f_a'(x) \geq f_a'(0) = \ln a$ gilt. Wir erhalten $|f_a'(x)| \leq \alpha$ für alle $x \in I$ mit $\alpha := |\ln a| < 1$. Für beliebiges $y \in I$ gilt dann aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung $f_a(y) - p = f_a(y) - f_a(p) = f_a'(\xi)(y - p)$, wobei ξ zwischen y und p liegt. Es folgt $|f_a(y) - p| \leq \alpha|y - p|$. Durch wiederholtes Anwenden erhalten wir $|f_a^n(x) - p| \leq \alpha^n|x - p|$ für alle $x \in I$ und $n \geq 1$. Wegen $\alpha < 1$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^n(x) = p$. \square

Der erste Teil des Beweises behandelt jene a -Werte, für die der Betrag der Ableitung von f_a für alle $x \in I$ kleiner als 1 ist. In diesem Fall kann direkt weitergerechnet werden, der Kunstgriff von vorhin, die Iterierte $g_a = f_a^2$ zu betrachten, muss hier nicht angewendet werden. Dem zufolge wird nicht auf die Lemmata von Abschnitt 2.2 zurückgegriffen, da ja jetzt keine monoton wachsende Funktion f vorliegt.

Für $e^{-e} < a \leq \frac{1}{e}$ kann diese Strategie nicht mehr aufgehen: Wenn wir als Basis z.B. $a = e^{-2}$ wählen, dann ist $|f_{e^{-2}}'(x)| > 1$ für ein $x > 0$ nahe genug bei 0. Daher werden wir wieder das Iterationsverhalten von $g_a = f_a^2$ studieren. Für die Ableitung von g_a ist Lemma 4 zuständig.

Beweis. Teil 2. Sei $e^{-e} < a \leq \frac{1}{e}$, das heißt $-e < \ln a \leq -1$. Sei $g_a(x) = f_a^2(x) = a^{a^x}$. Nach Lemma 4 gilt $0 < g_a'(x) \leq g_a'(c) = \alpha$ für alle $x \in I$ mit $\alpha = -\ln a/e$. Wegen $-e < \ln a \leq -1$ gilt $0 < \alpha < 1$. Wie oben folgt dann $|g_a^n(x) - p| \leq \alpha^n|x - p|$ für alle $x \in I$ und $n \geq 1$ und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} g_a^n(x) = p$. Wegen $f^{2n}(x) = g_a^n(x)$ und $f^{2n+1}(x) = g_a^n(f(x))$ folgt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ für alle $x \in I$. \square

Wir nehmen in Teil 2 des Beweises von Satz 6 zur Kenntnis, dass auch jetzt nicht auf die Lemmata von Abschnitt 2.2 reflektiert wird, sondern wiederum direkt die Konvergenz der Iteration von (diesmal eben) g_a mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gezeigt wird. Allerdings könnte man hier genauso wie beim Beweis von Satz 5 vorgehen: $0 < g_a'(x) < 1$ gilt jetzt sogar für alle $x \in I$, weil wir $0 < \alpha < 1$ konstatiert haben. Dasselbe gilt natürlich auch, eigentlich umso mehr, für den ersten Teil: dort ist $0 < \alpha < \frac{1}{e}$, wobei wieder das $\alpha = -\ln a/e$ aus Lemma 4 gemeint ist (anders als im Beweis selbst!). Allerdings ist damit nichts über die Konvergenzgeschwindigkeit gesagt.

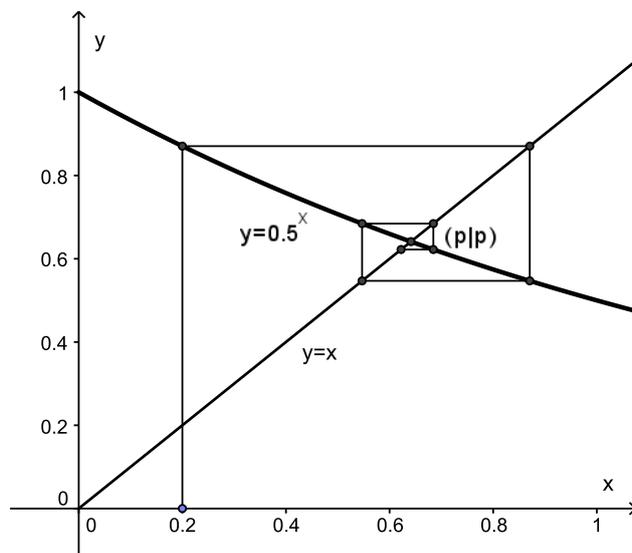


Abbildung 6: Die Bahn von $f_{0.5}$ mit Startwert $x_0 = 0.2$.

Die untere Grenze e^{-e} für a sorgt für $\alpha < 1$, also dafür, dass $g'_a(x) < 1$ ist für alle $x \in I$. Interessanterweise zeigt der nächste Satz, dass auch für kleinere Basenwerte a die Iteration von g_a konvergiert, die von f_a allerdings nicht mehr.

Die dem Artikel zugrundeliegende Fragestellung nach der Konvergenz von $a^{a^{a^{\dots}}}$ erhellt Satz 6 wie folgt: Für $e^{-e} = 0.06\dots < a < 1$ konvergiert $a^{a^{a^{\dots}}}$ alternierend gegen p , wobei $f_a(p) = a^p = p$ gilt. Der Fixpunkt p liegt im Intervall $(1/e, 1)$, da $f_a(1/e) > (e^{-e})^{1/e} = 1/e$ und $f_a(1) = a < 1$ ist. Für $a = 0.5$ zum Beispiel ergibt sich der Näherungswert 0.6411857 für p . Das heißt $0.5^{0.5^{0.5^{\dots}}} \approx 0.64$. Abbildung 6 zeigt die Bahn unter Iteration von $f_{0.5}$ mit Startwert $x_0 = 0.2$. Die Konvergenz ist deutlich schneller als in Abbildung 5.

Eine Übersicht über die Beziehung Basis-Grenzwert für $e^{-e} < a < 1$ in Analogie zu Abbildung 3 liefert Abbildung 7. Setzen wir die beiden Abbildungen 3 und 7 zusammen, so erhalten wir Abbildung 8.

Eigentlich haben wir ja viel mehr gezeigt: Um den infrage stehenden Ausdruck $a^{a^{a^{\dots}}}$ zu berechnen, ist der Startwert x_0 immer gleich a gesetzt worden. Wählen wir $x_0 = 0$, dann ist $x_2 = f_a^2(0) = a$. Tatsächlich konvergiert $a^{a^{a^{\dots}}}$ aber für Startwerte aus $I = [0, \infty)$, wenn nur $e^{-e} \leq a \leq 1$ gilt, und umgekehrt.

Fast genauso verhält es sich für den Fall $1 < a \leq e^{1/e}$, wie wir gesehen haben. Für $a = e^{1/e}$ wird der Grenzwert e für alle Startwerte aus $[0, e]$ erreicht, also auch für $x_0 = a = e^{1/e}$, sonst nicht. Ist $1 < a < e^{1/e}$, so wird der Grenzwert p von allen Bahnen mit Startwert x_0 aus $[0, q)$ erreicht. Dabei ist p der kleinere und q der größere Fixpunkt von f_a . Das sagt uns Satz 3. Dort steht auch $q > e$, daher ist der Startwert a aus $(1, e^{1/e})$ immer „erlaubt“.

Insgesamt können wir also festhalten, dass ein Startwert a immer in den Konvergenzbereich von $a^{a^{a^{\dots}}}$ fällt.

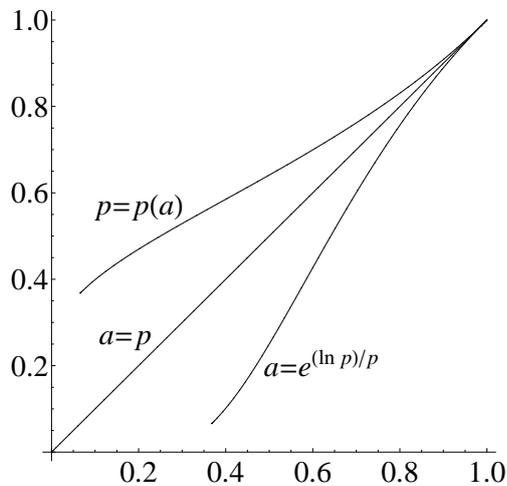


Abbildung 7: Nochmals: die Graphen von $p = p(a)$ und $a = a(p)$.

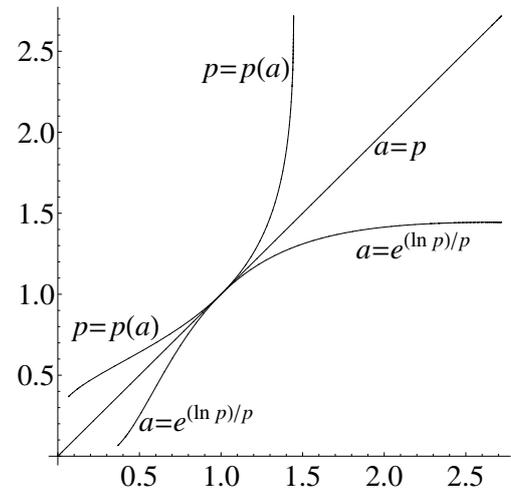


Abbildung 8: $p = p(a)$ und $a = a(p)$ auf dem maximalen Definitionsbereich.

Satz 7. Sei $0 < a < e^{-e}$ und $g_a(x) = f_a^2(x)$. Dann hat f_a einen Fixpunkt p und g_a hat drei Fixpunkte $r < p < s$. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} g_a^n(x) = r$ für alle $x \in [0, p)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g_a^n(x) = s$ für alle $x \in (p, \infty)$. Außerdem ist $f_a(r) = s$ und $f_a(s) = r$.

Satz 7 sagt etwas über die Konvergenz von $g_a = f_a^2$ aus. Was bedeutet er aber für die uns eigentlich interessierende Frage, nämlich das Konvergenzverhalten von f_a ? Es stellt sich periodisches Verhalten ein: Es gibt drei Punkte $r < p < s$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^{2n}(x) = r$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^{2n+1}(x) = s$ für alle $x \in [0, p)$ gilt, da für diese x ja $f_a(x)$ in $(p, 1]$ liegt. (Wenn nämlich $0 < x < p$ gilt, so ist $f_a(x) = a^x > a^p = p$.) Für $x \in (p, \infty)$ ist es umgekehrt. Da gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^{2n}(x) = s$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a^{2n+1}(x) = r$. Wegen der Stetigkeit von f_a muss dann auch $f_a(r) = s$ und $f_a(s) = r$ gelten. Die beiden Punkte r und s bilden eine Bahn der Periode 2 und alle anderen Bahnen, ausgenommen die Bahn von p , streben gegen diese periodische Bahn.

Daher können wir für die Konvergenz von $a^{a^{a^{\dots}}}$ für $0 < a < e^{-e}$ ein negatives Resultat konstatieren, ebenso wie für $a > e^{1/e}$ (Satz 3(1)). Konvergenz stellt sich also nur für $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$ ein, das bedeutet $a \in [0.06\dots, 1.44466786\dots]$.

Der Parameter $a = e^{-e}$ erscheint jetzt noch in einem anderen Licht. Bis jetzt hatte g_a wie f_a einen Fixpunkt p . Für $a < e^{-e}$ ist nach Lemma 4 $g'_a(c) = -\ln a/e > 1$ und im Beweis von Satz 7 werden wir zeigen, dass $g'_a(p)$ ebenfalls größer 1 ist. Wegen $g_a(0) = a > 0$ und $g_a(1) = a^a < 1$ muss der Graph von g_a die erste Mediane dreimal in $[0, 1]$ schneiden: Abbildung 9 für $a = 0.01$.

Beweis. Sei c wie in Lemma 4. Dann gilt $g'_a(c) = -\ln a/e > -\ln e^{-e}/e = 1$. Wegen der in Lemma 4 gezeigten Eigenschaften von g'_a existieren u und v mit

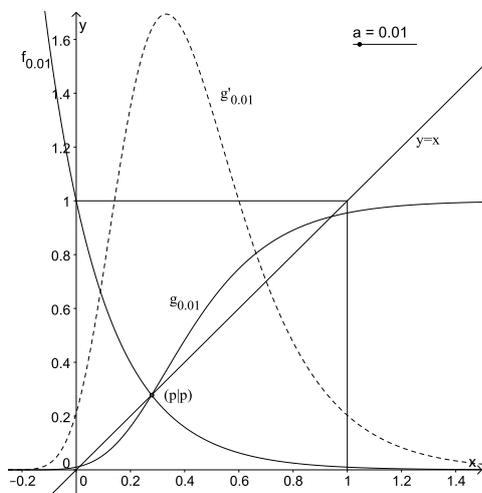


Abbildung 9: $f_{0.01}$, $g_{0.01}$ und $g'_{0.01}$ auf $[0, 1]$.

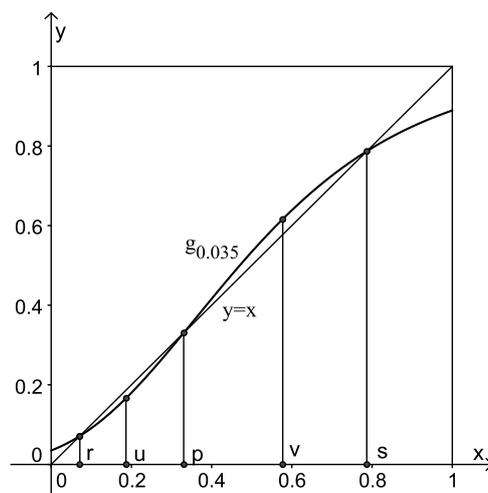


Abbildung 10: $g_{0.035}$ und $y = x$ auf $[0, 1]$: $r = f_a(s) < u < p < v < s = f_a(r)$.

$0 < u < c < v < 1$, sodass $g'_a(x) > 1$ für $x \in (u, v)$ gilt und $0 < g'_a(x) < 1$ für $x \in [0, u) \cup (v, \infty)$. Es muss auch $g'_a(u) = g'_a(v) = 1$ gelten.

Da $f_a : I \rightarrow I$ streng monoton fallend ist mit $f_a(0) = 1$ und $f_a(1/e) < (e^{-e})^{1/e} = 1/e$, existiert genau ein Punkt $p \in (0, 1/e)$ mit $f_a(p) = p$. Es gilt dann auch $g_a(p) = p$. Weiters ist $f'_a(p) = a^p \ln a = p \ln a = \ln a^p = \ln p < \ln \frac{1}{e} = -1$. Es folgt $g'_a(p) = f'_a(p)^2 > 1$. Damit ist $p \in (u, v)$ gezeigt.

Für das Intervall $K = [u, p]$ können wir Lemma 2(a) anwenden. Es folgt $g_a(x) < x$ für alle $x \in [u, p]$. Insbesondere gilt $g_a(u) < u$. Wegen $g_a(0) = a > 0$ existiert ein $r \in (0, u)$ mit $g_a(r) = r$. Nun gilt $0 < g'_a < 1$ auf $(0, u)$. Nach Lemma 2 muss $g_a(x) > x$ für $x \in [0, r)$ und $g_a(x) < x$ für $x \in (r, u)$ gelten. Aus Lemma 1(c) mit $J = [r, p]$ folgt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} g_a^n(x) = r$ für alle $x \in [r, p]$. Und aus Lemma 1(b) mit $J = [0, r]$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} g_a^n(x) = r$ für alle $x \in [0, r)$.

Für das Intervall $K = (p, v]$ können wir Lemma 2(b) anwenden. Es folgt $g_a(x) > x$ für alle $x \in (p, v]$. Insbesondere gilt $g_a(v) > v$. Wegen $g_a(1) = a^a < 1$ existiert ein $s \in (v, 1)$ mit $g_a(s) = s$. Nun gilt $0 < g'_a < 1$ auf (v, ∞) . Nach Lemma 2 muss $g_a(x) > x$ für $x \in (v, s)$ und $g_a(x) < x$ für $x \in (s, \infty)$ gelten. Aus Lemma 1(b) mit $J = (p, s]$ folgt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} g_a^n(x) = s$ für alle $x \in (p, s]$. Und aus Lemma 1(c) mit $J = (s, \infty)$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} g_a^n(x) = s$ für alle $x \in (s, \infty)$. \square

Der Hauptteil des Beweises ordnet also auf dem Intervall $[0, 1]$ einerseits die Teilintervalle, auf denen $g'_a(x) > 1$ (Intervall (u, v)) bzw. $0 < g'_a(x) < 1$ (Intervalle $[0, u)$ und $(v, 1]$) gilt, andererseits jene, für die $g_a(x) > x$ ($[0, r)$ und (p, s)) bzw. $g_a(x) < x$ ((r, p) und $(s, 1]$) zutrifft: Abbildung 10 illustriert die Situation für $a = 0.035$.

Die Fixpunkte sind dabei $r = 0.07\dots$, $p = 0.33\dots$ und $s = 0.78\dots$. Das bedeutet also, dass die geraden Iterationen von $0.035^{0.035^{0.035\dots}}$ gegen $0.07\dots$ konvergieren, die ungeraden dagegen gegen $0.78\dots$.

Literatur

- [1] H. Humenberger: Iterationen, Grenzwerte und Spinnwebdiagramme – oder: warum ist 2 doch nicht 4? *Internationale Mathematische Nachrichten* Nr. 213 (2010), 19–34.
- [2] Power Tower. <http://mathworld.wolfram.com/PowerTower.html>

Adresse der Autoren:

*Stefan Götz (email stefan.goetz@univie.ac.at),
Franz Hofbauer (email franz.hofbauer@univie.ac.at)*

*Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Nordbergstraße 15
A-1090 Wien*

Buchbesprechungen

<i>T. Aste, D. Weaire</i> : The Pursuit of Perfect Packing (P. GRABNER)	38
<i>L. Barreira, C. Valls</i> : Ordinary Differential Equations (G. TESCHL)	38
<i>M. Berger</i> : Geometry Revealed (A. CAP)	39
<i>V. Berthé, M. Rigo (eds.)</i> : Combinatorics, Automata and Number Theory (M. MADRITSCH)	39
<i>M. Brokate, G. Kersting</i> : Maß und Integral (C. PÖTZSCHE)	40
<i>J. B. Conway</i> : A Course in Abstract Analysis (G. PILZ)	41
<i>D. A. Cox, J. B. Little, H. K. Schenck</i> : Toric Varieties (V. ZIEGLER)	41
<i>W. A. Dudek, V. S. Trokhimenko</i> : Algebras of Multiplace Functions (G. PILZ)	42
<i>N. Herrmann</i> : Mathematik für Naturwissenschaftler (C. ELSHOLTZ)	43
<i>R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw</i> : Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues (H. PRODINGER)	43
<i>N. I. Lobachevsky</i> : Pangeometry (H. STACHEL)	44
<i>F. Modler, M. Kreh</i> : Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1 (C. ELSHOLTZ)	45
<i>V. H. Moll</i> : Numbers and Functions (J. CIGLER)	45
<i>E. Outereelo, J. M. Ruiz</i> : Mapping Degree Theory (J. WALLNER)	46
<i>J. W. Prüss, M. Wilke</i> : Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme (G. TESCHL)	47
<i>D. Ruelle</i> : Wie Mathematiker ticken (H. PRODINGER)	47
<i>M. R. Schneider</i> : Zwischen zwei Disziplinen (G. HARING)	48
<i>J. Snugg</i> : A New Approach to Differential Geometry Using Clifford's Geometric Algebra (H.-P. SCHRÖCKER)	49
<i>T. Sonar</i> : 3000 Jahre Analysis (G. SCHRANZ-KIRLINGER)	50
<i>A. Taraz</i> : Diskrete Mathematik (S. WAGNER)	50
<i>G. Teschl</i> : Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems (C. PÖTZSCHE)	51
<i>M. Zworski</i> : Semiclassical Analysis (C. SPARBER)	52

T. Aste, D. Weaire: The Pursuit of Perfect Packing. Second Edition. Taylor & Francis, New York, London, 2008, xiii+200+S. ISBN 978-1-4200-6817-7 H/b £ 33,99.

Die Suche nach der besten Kugelpackung im Raum ist ein Problem, das auf Kepler zurückgeht und mit einigen prominenten mathematischen Problemen die Tatsache teilt, dass es einfach und allgemein verständlich zu formulieren ist, aber Jahrhunderte zu seiner Lösung notwendig waren. Das Kepler-Problem war 1900 auch als 18. Problem auf David Hilberts Liste von Jahrhundertproblemen. Nach vielen unvollständigen Ansätzen konnte Thomas Hales das Problem schließlich 2005 unter massivem Computereinsatz lösen. Das vorliegende Buch widmet sich der Geschichte unterschiedlichster Packungsprobleme, berichtet über die verschiedenen Beweisansätze und auch über verwandte Probleme, wie etwa die Bestimmung der „Kusszahl“ in Dimension $d \geq 3$. Das Buch wendet sich nicht nur an Mathematiker, sondern versucht eine möglichst breite Leserschaft anzusprechen. Dies scheint dem Besprecher nur mit Maßen gelungen zu sein: Der mathematisch gebildete Leser hätte sich an mancher Stelle mehr Details (vor allem) über den Haleschen Beweis gewünscht; für den allgemein interessierten Leser kommen allerdings wieder zu viele Andeutungen über den mathematischen Hintergrund vor. Das Buch kommt übrigens fast ohne Formeln aus.

P. Grabner (Graz)

L. Barreira, C. Valls: Ordinary Differential Equations. Qualitative Theory. Translated by the authors. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 137.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012, xii+248 S. ISBN 978-0-8218-8749-3 H/b \$ 64,-.

The present textbook gives an introduction to the qualitative theory of ordinary differential equations. The first part deals with the basic existence and uniqueness theorems, dependence on parameters, differential equations on manifolds, linear equations (including periodic equations and conjugacies). The second part focuses on stability and hyperbolicity including Liapunovs method, existence of stable and unstable manifolds, and the Grobman-Hartmann theorem. The third part looks at equations in the plane for which the index theory and the Poincaré-Bendixson theorem are established. The final part discusses bifurcation theory, center manifolds, normal forms and Hamiltonian systems including the statement of the KAM theorem. Except for the last part, full proofs are given for all results. Moreover, many examples are discussed in detail and exercises are present at the end of each chapter. The presentation is well structured and clear. The only thing missing are applications and hence the book is mainly intended for mathematics majors. In summary, this is a nice book suitable for an advanced course on ordinary differential equations.

G. Teschl (Wien)

M. Berger: Geometry Revealed. A Jacob's Ladder to Modern Higher Geometry. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, xvi+831 S. ISBN 978-3-540-70996-1 H/b € 59,95.

Written by one of the great geometers of our time, this book discusses problems from several areas of geometry which are either unsolved or have been solved only recently. These problem usually have a rather simple and elementary formulation but to solve them (or to make progress towards a solution) much more involved tools and/or abstract concepts are needed. "Jacob's ladder", as mentioned in the subtitle of the book, is a metaphor for the increasing conceptual power. Exposing the necessity of general concepts and tools and advocating a culture of geometric thinking are among the central aims of the book.

The book splits into twelve chapters which cover many topics from classical geometry (lines, circles, spheres, conics and quadrics, polyhedra and polytopes), convex geometry, lattices and packings, differential geometry of curves and surfaces, and relations of geometry to dynamics. It is not written as a textbook, but in an expository style without formal proofs but lots of outlines. This allows the educated reader to start reading somewhere in the book and quickly get a lot of information and inspiration without too much detail.

A. Cap (Wien)

V. Berthé, M. Rigo (eds.): Combinatorics, Automata and Number Theory. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 135.) Cambridge University Press, 2010, xix+615 S. ISBN 978-0-521-51597-9 H/b £ 80,-.

The present book deals with different aspects on numeration systems. In particular, it considers combinatorial, arithmetical and number theoretic questions. It can be seen as a result of the biannual conference on Combinatorics, Automata and Number Theory (CANT).

Starting with an introductory chapter the two main authors provide a framework for the following chapters. They thoroughly link the different notations and definitions together to provide the reader with a complete overview on the different topics.

The book has the structure of a tree where the subsequent chapters are branching from the common root, the introductory chapter. Each of these branching chapters start with an introduction giving a motivation to the specified aspect and providing links with different point of views in other chapters. Afterwards the authors present questions, problems and conjectures as well as actual results, breakthroughs and goals that have been achieved. Every chapter ends with an excursion to a problem of actual interest and some exercises.

We want to take a deeper look on the different chapters. After the introductory chapter, the second and third chapter deal with aspects involving finite automatas such as number representations and abstract numeration. The following three

chapters are devoted to a view from symbolic dynamics involving factor complexity, substitutions, Rauzy fractals and tilings. Dynamical systems such as combinatorics on Bratteli diagrams and dynamical systems on infinite words with uniform frequencies and invariant measures are dealt in following four chapters. Then the book focuses more on aspects originating from number theory such as transcendence and Diophantine approximation and analysis of digital functions and applications in the following chapters. Finally the equality problem for purely substitutive words and long products of matrices are investigated in the last two chapters.

All these different aspects cover a large spectrum of very recent work surrounding numeration systems. Therefore the book helps a reader not so familiar with this topic to get a great overview on the different research areas, whereas a reader who is already in numeration systems can broaden his knowledge by taking different views on these systems.

M. Madritsch (Nancy)

M. Brokate, G. Kersting: Maß und Integral. (Mathematik Kompakt.) Birkhäuser, Basel, 2011, vii+158 S. ISBN 978-3-7643-9972-6 P/b € 18,90.

Um es vorwegzunehmen, das Studium der 13 Kapitel dieses Textes hat mir große Freude bereitet. Er liefert in der Tat eine sehr effektive und elegante Einführung in die allgemeine Maß- und Integrationstheorie und vermittelt dabei nicht nur für diverse Anwendungsbereiche notwendige Grundlagen, sondern lässt auch motivierende Anmerkungen nicht zu kurz kommen. Als Analytiker fällt mir hierbei positiv auf, dass zentrale Konvergenzresultate (etwa von der dominierten Konvergenz, von Fischer-Riesz oder von Vitali) bereits am Anfang des zweiten Stoffdrittels behandelt werden, und die Präsentation zahlreiche Ausblicke in die Funktionalanalysis bietet. Als Preis hierfür wird die Theorie zur Eindeutigkeit, Regularität und Konstruktion von Maßen erst im Folgenden präsentiert, kann je nach Gusto aber vorgezogen werden.

Im Einzelnen beinhalten die knapp 160 Seiten eine motivierende Einführung (inklusive der historischen Entwicklung) und behandeln anschließend die fundamentalen Konzepte der Messbarkeit und Maße. Integrierbarkeit wird (natürlich) erst für nichtnegative Funktionen eingeführt und liefert besagte Konvergenzaussagen. Daraufhin widmen sich die Autoren der Eindeutigkeit und Regularität von Maßen, Mehrfachintegralen und Produktmaßen, absoluter Stetigkeit (Radon-Nikodym), der Translationsformel sowie der Konstruktion von Maßen. Ausführungen über die Bedeutung der Maß- und Integrationstheorie für Hilbert- und Banachräume (Dualräume von $L^p(M)$, $C(M)$) beschließen den mathematischen Inhalt. Die 12 Referenzen der Bibliographie beinhalten eine Liste von weiterführenden Monographien zum Thema.

In der neuen Reihe „Mathematik Kompakt“ erschienen, ist das vorliegende Lehrbuch als Grundlage für eine Vorlesung mit zwei Semesterwochenstunden gedacht

und – wie mir scheint – gut geeignet. Jedes Kapitel beinhaltet ferner eine Reihe interessanter Übungsaufgaben. Nicht zuletzt das moderne Layout rundet den sehr gelungenen Gesamteindruck ab.

C. Pötzsche (Klagenfurt)

J. B. Conway: A Course in Abstract Analysis. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 141.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012, xv+367 S. ISBN 978-0-8218-9083-7 H/b \$ 75,-.

This is an unusual and excellent textbook. It offers a unified account on measure theory and functional analysis, starting from Riemann-Stieltjes integrals and several prerequisites on metric, compact, locally compact, and normed spaces. What follows is an elegant treatment on measure theory, with an emphasis on integration and the representations of bounded linear functionals as integrals w.r.t. a Radon measure. Then Banach and locally convex spaces (and operators on these spaces) are studied in detail, along with important duality theorems. The final chapter concerns C^* algebras. The author has spent a lot of thoughts how to present the material. He usually starts from a well-known concrete situation and skillfully generalizes it to a suitable (which is not necessarily a maximal) level of abstraction. Over and over again, he motivates the reader to fill in details, study examples thoroughly, and to do (or at least read) the carefully chosen exercises. At many places, the author also offers interesting historic comments on important mathematicians in his area. The prerequisites are basic knowledges in real and complex analysis, in linear algebra, and in metric spaces. With this background, it is a pure pleasure to read in this book.

G. Pilz (Linz)

D. A. Cox, J. B. Little, H. K. Schenck: Toric Varieties. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 124.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011, xxiv+841 S. ISBN 978-0-8218-4819-7 H/b \$ 95,-.

Eine torische Varietät V ist eine algebraische Varietät, die einen Torus als offene, dichte Teilmenge enthält, sodass die Wirkung des Torus auf sich selbst auf ganz V fortgesetzt wird. Das vorliegende Buch ist eine sehr gelungene Einführung in die Theorie dieses spannenden Teilgebiets der algebraischen Geometrie. Das Buch ist in zwei Teile geteilt: Der erste, 9 Kapitel umfassende Teil gibt eine Einführung in die Theorie. Um auch Leuten, die keine Experten in der algebraischen Geometrie sind, den Einstieg zu ermöglichen, setzen die Autoren nur minimale Grundkenntnisse in der algebraischen Geometrie voraus (laut Autoren reicht zum Beispiel das Buch von Cox, Little und O’Shea, “Ideals, Varieties and Algorithms”). Zusätzlich enthält jedes Kapitel einen Abschnitt “Background section”, in der für das jeweilige Kapitel benötigte Begriffe und Methoden vorgestellt werden. So lernt der Leser etwas über affine, projektive und abstrakte torische Varietäten. Natürlich

fehlt auch nicht die ausführliche Behandlung von so grundlegenden Begriffen wie Divisoren, Geradenbündel, Garben, Differentialformen und Kohomologie auf torischen Varietäten.

Der zweite Teil des Buchs ist eine Auswahl weiterführender Kapitel, die auch aktuelle Entwicklungen mit einschließen. Hier wird auch vom Leser ein tieferes Verständnis in der algebraischen Geometrie erwartet. Die behandelten Themen sind torische Flächen, Auflösung von Singularitäten, Topologie und der Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch für torische Varietäten sowie Invariantentheorie.

Das Buch ist sehr sorgfältig geschrieben. Neben den schon erwähnten “Background sections” ermöglichen die vielen anschaulichen Beispiele einem Leser mit geringen Vorkenntnissen ein schnelles Eintauchen in die Theorie. Zudem hilft eine große Zahl an Übungsaufgaben, die Theorie zu verinnerlichen und rundet das Buch sehr schön ab. Die Autoren sind nicht nur bemüht, die Theorie der torischen Varietäten dem Leser näherzubringen, sondern zeigen auch immer wieder Verbindungen zu anderen Themen auf. Kurz gesagt, das Buch ist eine Bereicherung für jeden, der an algebraischer Geometrie interessiert ist und bereits über bescheidene Grundkenntnisse verfügt.

V. Ziegler (Linz)

W. A. Dudek, V. S. Trokhimenko: Algebras of Multiplace Functions. De Gruyter, Berlin, 2012, x+389 S. ISBN 978-3-11-026928-4 H/b € 129,95.

Perhaps *the* basic idea behind this book is Cayley’s Theorem: every (semi-)group can be regarded as a (semi-)group of functions in one variable on a suitable set, with function composition as the operation. But what happens if we look at functions in several variables? The first obstacle is the “correct” definition of composition. The most successful one is the definition $f \circ (g_1, g_2, \dots, g_n)(x) := f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ as an $(n + 1)$ -ary operation. The resulting associativity-like condition is then called “superassociativity”. The axiomatic version is therefore to take a set G with an $(n + 1)$ -ary superassociative operation \circ , and to call the algebra (G, \circ) a “Menger algebra”. For $n = 1$, we simply get a semigroup. The generalization of Cayley’s Theorem is the result that every Menger algebra can be embedded into one consisting of n -place functions on a set G with the operation \circ mentioned above.

Many prominent algebraists, beside K. Menger, have worked in this theory: A. Artamonov, W.A. Dudek, B. Schweitzer, W. Nöbauer, etc. The book then contains a thorough discussion of the theory of Menger algebras, including ordered Menger algebras. The theory has applications and connections to areas like multi-valued logic and to automata theory. An extensive bibliography completes the book.

G. Pilz (Linz)

N. Herrmann: Mathematik für Naturwissenschaftler. Was Sie im Bachelor wirklich brauchen und in der Schule nicht lernen. Spektrum, Heidelberg, 2012, ix+290 S. ISBN 978-3-8274-2866-0 P/b € 19,95.

Dieses Buch ist ein recht unkonventioneller und informeller Zugang zur Mathematik für Naturwissenschaftler. Die behandelten Themen umfassen Matrizen, Lineare Gleichungssysteme, Funktionen mehrerer Veränderlicher, Integralsätze, Splines, Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen (inklusive numerischer Methoden), Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Unkonventionell ist das Buch, weil es normalen Schulstoff (d.h. einfache lineare Gleichungssysteme und Analysis einer Variablen) weitgehend voraussetzt. Dadurch gewinnt der Autor natürlich Zeit und Freiräume, um auf andere Themen genauer einzugehen. Die Analysis wird hier weitgehend in Dimension 2 entwickelt.

Informell ist das Buch, weil es häufig recht umgangssprachlich formuliert ist, z.B. wird die Matrizenmultiplikation, welches Element mit welchem verknüpft wird, mit einer „Maikäferidee“ erläutert.

Das Buch ist jedenfalls sehr anschaulich geschrieben und vermeidet technische Formulierungen wie z.B. die ε - δ -Definition der Stetigkeit, zugunsten anschaulicherer Varianten (hier Grenzwertdefinition).

Wenn die Voraussetzung, dass der Schulstoff bekannt ist, gegeben ist, mag dieses Buch ein leicht anschaulicher Zugang sein, der dann anstelle des Schulstoffs einige Kapitel einbauen kann, die andernfalls wegfielen.

C. Elsholtz (Graz)

R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw: Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues. (Springer Monographs in Mathematics.) With a Foreword by T. H. Koornwinder. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, xix+578 S. ISBN 978-3-642-05013-8 H/b € 99,95.

Koekoek und Swarttouw schrieben einen Report (1994 und 1998) “The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogues”, der in der interessierten mathematischen Szene stark zirkulierte. Er kann als Vorstufe dieses Buchs angesehen werden.

Der Österreicher Peter Lesky wirkte in Stuttgart und verstarb 2008 81jährig. Wikipedia weiß das über ihn: *Während seiner akademischen Laufbahn war Lesky vor allem auf dem Gebiet der Orthogonalen Polynome und Hypergeometrischen Funktionen tätig. Er war Mitautor bei 13 Büchern und Monografien sowie 80 zumeist deutschen Artikeln und 14 der von ihm betreuten 17 Doktoranden verfassten Dissertationen zu diesen Themen.* Durch dieses Publizieren in Deutsch blieben seine Bemühungen leider ein wenig im Schatten. Es ist schön, dass er zum Mitarbeiter an diesem großen Projekt wurde.

Es geht um das Askey-Schema, also um die Organisierung der orthogonalen Polynome. Große Plakate, die das schematisch beschreiben, findet man in vielen mathematischen Instituten.

Das vorliegende Werk ist weniger ein Lesebuch als eine Enzyklopädie, eine Sammlung des Wissensstands, ein Nachschlagewerk.

Den Inhalt zu beschreiben ist schwer und auch müßig, da die potentiellen Käufer ohnehin wissen, was sie erwarten können, und Uneingeweihte damit wahrscheinlich nicht allzuviel anfangen können.

Es ist sehr begrüßenswert, dass diese Sammlung den alten Report ersetzt. Es handelt sich um eine gewaltige Arbeitsleistung, die das möglich machte.

Ein sehr ausführliches Vorwort von Tom Koornwinder beleuchtet den historischen Kontext.

Fazit: Ein hervorragendes Buch, das dem Spezialisten unentbehrlich sein wird.

H. Prodingler (Stellenbosch)

N. I. Lobachevsky: Pangeometry. Edited and translated by A. Papadopoulos. (Heritage of European Mathematics.) EMS, Zürich, 2010, xii+310 S. ISBN 978-3-03719-087-6 H/b € 78,-.

Dieses in der Reihe *Heritage of European Mathematics* von der EMS herausgegebene Werk ist ein wichtiger Beitrag zur Geschichte der hyperbolischen Geometrie, die von Lobachevsky *Pangeometrie* genannt worden ist. Im Zentrum dieses Bands steht die mit umfangreichen Kommentaren versehene englische Übersetzung der letzten und reifsten Publikation Lobachevskys aus dem Jahr 1855. Von Axiomen ausgehend, entwickelte darin der damals schon völlig erblindete Autor modell- und koordinatenfrei die hyperbolische Trigonometrie sowie die hyperbolische Differentialgeometrie. Das Buch enthält auch Faksimiles des in russisch und französisch abgefassten Originals, jede Version rund 60 Seiten lang. Ferner gibt es eine umfangreiche Biographie und Bibliographie sowie abschließend einen weiteren sehr instruktiven und inhaltsreichen Kommentar zu Lobachevskys Pangeometrie, verfasst vom Übersetzer und Herausgeber A. Papadopoulos von der Universität de Strasbourg.

János Bolyai und Nikolai Lobachevsky entdeckten völlig unabhängig voneinander die hyperbolische Geometrie; sie gehören zu den ganz Großen der Mathematik. Kurioserweise hatte Bolyai Gauß verdächtigt, unter dem Pseudonym „Lobachevsky“ wesentliche Teile seiner Arbeit plagiiert zu haben. Bolyai und Lobachevsky wurde zu Lebzeiten keine Anerkennung zuteil. Aber J. Bolyai ist heute immerhin Namensgeber der Ungarischen Mathematischen Gesellschaft, und eine Büste Lobachevskys befindet sich in der Reihe der berühmtesten russischen Wissenschaftler am Teich vor der Moskauer Lomonossow-Universität.

H. Stachel (Wien)

F. Modler, M. Kreh: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1. Mathematik von Studenten für Studenten erklärt und kommentiert. Spektrum, Heidelberg, 2012, xviii+371 S. ISBN 978-3-8274-2830-1 P/b € 19,95.

Dieses Buch richtet sich an Studienanfänger der Mathematik und soll vor allem Studenten, die sich beim Übergang von Schulmathematik zu Hochschulmathematik schwertun, eine weitere (aber neuartige) Hilfestellung bieten. Dieses Buch wurde von zwei Studenten geschrieben, die sich daher recht gut in die Lage des Lesers hineinversetzen können.

Inhaltlich deckt das Buch wesentliche Teile einer Analysis I- und Lineare Algebra I-Vorlesung ab, aber es erhebt nicht den Anspruch auf eine vollständige und systematische Darstellung. Einerseits werden manche Themen ausführlicher besprochen, als dies in manchem Lehrbuch der Fall ist, es hat aber andererseits den Mut zur Lücke. Zusätzlich zu Definitionen, Sätzen und Beweisskizzen gibt es eine Reihe ausführlich erklärter Beispiele und informeller Erläuterungen zu den Definitionen und Sätzen. Hier haben die Autoren, gerade weil sie Studenten sind, die Möglichkeit, die Sachverhalte eher umgangssprachlich zu benennen. (Bsp.: „Das Integral $\int x^2 \cdot \cos(x) dx$ schreitet ja förmlich nach partieller Integration.“) Studenten, die sich mit einem „normalen“, formaler geschriebenen Buch im 1. Semester schwer tun, finden mit diesem Buch vielleicht leichter den Zugang zu wichtigen Themen. Dennoch sollte dieses Buch nicht die einzige Lektüre bleiben, es sollte nur eine weitere mögliche Brücke sein!

(Ein Buch mit vergleichbarer Intention ist auch in anderen Ländern bekannt, z.B. „Bridging the Gap to University Mathematics“ für den britischen Hochschulraum, allerdings sind die Rahmenbedingungen, was man üblicherweise in Grundvorlesungen lehrt, landesspezifisch sehr verschieden.)

C. Elsholtz (Graz)

V. H. Moll: Numbers and Functions. From a classical-experimental mathematician's point of view. (Student Mathematical Library, Vol. 65.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012, xxiii+504 S. ISBN 978-0-8218-8795-0 P/b \$ 58,-.

Dieses Buch entstand aus Vorlesungen des Autors über Differential- und Integralrechnung, diskrete Mathematik, Kombinatorik, Zahlentheorie, reelle Analysis und experimentelle Mathematik. Im Mittelpunkt steht dabei ein experimenteller Zugang zu den verschiedensten Problemen. Er schreibt: „Most of the topics are from elementary mathematics with occasional hints on how it connects to more sophisticated subjects. Part of the motivation for bringing together a large collection of notes on diverse topics was to provide the reader with some fun while learning interesting pieces of mathematics.“

Das Buch erinnert mich ein wenig an die „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis“ von G. Pólya and G. Szegő, das mich in meiner Studienzeit begeistert und

inspiriert hat. Es könnte eine ähnliche Rolle für jene heutigen Studenten spielen, die so wie ich den konkreten, beispielsorientierten Zugang zur Mathematik bevorzugen. Gleich zu Beginn erfährt man, dass komplizierte Identitäten mit Binomialkoeffizienten heute einfache automatische Beweise besitzen. Der dafür verantwortliche Gospersche Algorithmus wird an einfachen Beispielen illustriert. Beweise allgemeiner Sätze passen natürlich nicht in den Rahmen dieses Buchs. Es werden jedoch jeweils ausführliche Literaturhinweise gegeben. Es folgen u.a. Kapitel über Fibonacci-Zahlen, Catalan-Zahlen, Stirling-Zahlen der zweiten Art, die Wallissche Formel, die Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen, Bernoulli-Zahlen und Polynome sowie über die Gamma- und Zetafunktion. Das Buch enthält eine Fülle von mathematischen Gustostückerln, die in den üblichen Vorlesungen leider nur selten vorkommen. Ich erwähne nur den Stern-Brocot-Baum, die Calkin-Wilf-Abzählung der rationalen Zahlen, die Lucassche Kongruenz der Binomialkoeffizienten modulo einer Primzahl, die Wolstenholmeschen Kongruenzen, ein Beweis des Bertrand'schen Postulats, dass zwischen n und $2n$ immer eine Primzahl existiert, Kettenbrüche von e und damit zusammenhängenden Zahlen, die Euler-MacLaurinsche Summenformel oder die Irrationalität von $\zeta(3)$. Natürlich kommen auch die Vorlieben des Autors nicht zu kurz. So werden immer wieder p -adische Bewertungen von Zahlenfolgen betrachtet und komplizierte bestimmte Integrale berechnet.

Alles in allem kann man dem Autor zu diesem Buch nur gratulieren und ihm eine weite Verbreitung wünschen.

J. Cigler (Wien)

E. Outerelo, J. M. Ruiz: Mapping Degree Theory. (Graduate Studies in Mathematics 108.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, x+244 S. ISBN 978-0-8218-4915-6 H/b \$ 62,-.

This volume in the AMS series *Graduate Texts in Mathematics* develops the theory of degrees of mappings between smooth manifolds and also closures of bounded open sets in Euclidean spaces. The famous results connected to the mapping degree are all discussed, such as the ones bearing the names of Jordan-Brouwer, Borsuk-Ulam, Gauss-Bonnet, and last but not least, Heinz Hopf.

The first chapter gives an overview of the historic development of concepts related to the degree, including axiomatic definitions, extension to infinite dimensions and equivariant degree theory.

Chapter II introduces manifolds and the technicalities necessary for dealing with degrees such as Sard's theorem, tubular neighbourhoods, and small homotopies. This prepares the ground for the introduction of the Brouwer-Kronecker degree in Chapter III. The authors connect degrees to differential forms, leading to a degree formulation of the Gauss-Bonnet theorem. In addition to the list of results already mentioned, they discuss the Hopf invariant for mappings $S^{m-1} \rightarrow S^m$ of spheres.

Chapter IV studies degree theory in Euclidean spaces, where the domains of mappings are closures of bounded open sets. Similar to the previous chapter, a mixture of smooth results and approximation yields the proper definition of degree of continuous mappings. Finally, Chapter V presents the theorems by Heinz Hopf which characterize homotopy classes of mappings to sphere by their degree, as well as the Poincaré-Hopf index theorem.

This book treats the degree of mappings together with associated results in a thorough, very readable and self-contained manner. It seems to be inspired in particular by J. Milnor's sleek volume *Topology from the differentiable viewpoint*, and is an excellent and comprehensive introduction into a very nice piece of differential topology.

J. Wallner (Graz)

J. W. Prüss, M. Wilke: Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme. (Grundstudium Mathematik.) Birkhäuser, Basel, 2011, xv+318 S. ISBN 978-3-0348-0001-3 P/b € 29,95.

Das vorliegende Lehrbuch bietet eine klassische Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der dynamischen Systeme. Im ersten Teil werden Existenz, Eindeutigkeit und Fortsetzbarkeit, Lineare Systeme, stetige und differenzierbare Abhängigkeit und elementare Stabilitätstheorie behandelt. Der zweite Teil betrachtet Ljapunov-Funktionen, Poincaré-Bendixson-Theorie, Linearisierung und Invariante Mannigfaltigkeiten, periodische Lösungen, Verzweigungstheorie und Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeit.

Das Buch ist sorgfältig geschrieben, und alle Begriffe werden gut motiviert und mit vielen interessanten Beispielen illustriert. Es eignet sich bestens als Grundlage für eine einführende Vorlesung.

G. Teschl (Wien)

D. Ruelle: Wie Mathematiker ticken. Geniale Köpfe – ihre Gedankenwelt und ihre größten Erkenntnisse. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, ix+199 S. ISBN 978-3-642-04110-5 H/b € 20,50.

Der Autor ist mathematischer Physiker, Jahrgang 1935, aus Belgien gebürtig und naturalisierter Franzose. Es liegt eine Übersetzung des Buchs "The Mathematician's Brain" vor. Es ist gut, dass nun auch Leser, die im Englischen nicht so gewandt sind, Zugang zu Ruelles Gedankenwelt haben. Sonst ist wohl der Originaltext eher zu empfehlen. Übersetzungen solcher Texte sind nicht leicht zu produzieren: Professionelle Übersetzer verstehen die Mathematik nicht, und Mathematiker übersetzen eher zu wörtlich, sodass das Endprodukt irgendwie hölzern wirkt.

Ruelle beschreibt erfolgreich, was Mathematik ist, und was es bedeutet, Mathematiker zu sein. Er kann auf ein reiches Forscherleben zurückblicken, in dem er auch viele bedeutende Kollegen kennenlernte. Was er über Grothendieck zu sagen hat, ist vielleicht das "Highlight" des Buchs, denn das kommt aus erster Hand. Die Mitarbeiter des Bourbaki-Projekts kannte Ruelle natürlich auch, und solche Geschichten zu hören, ist immer wieder faszinierend. Andere Mathematiker, wie etwa Felix Klein und Alan Turing, finden auch ihren Platz. Ruelle konzentriert sich auf grundlegende Ideen und versucht, das seiner Leserschaft (die man sich als gebildete Menschen vorstellen muss, die nicht unbedingt mathematische Vorbildung haben müssen) klarzumachen, etwa anhand geometrischer Betrachtungen.

Der Text ist in viele kurze Kapitel unterteilt, sodass man die einzelnen Episoden auch mal zwischendurch lesen kann, ohne den Faden zu verlieren.

Die Lektüre vermittelt einem das Gefühl, dass ein *gescheiter* Mensch zu einem spricht, der gewohnt ist, über den Tellerrand hinauszublicken.

Wer in Mathematik mehr sieht als bloß ein technisches Werkzeug, wird an diesem Buch seine Freude haben.

H. Proding (Stellenbosch)

M. R. Schneider: Zwischen zwei Disziplinen. B. L. van der Waerden und die Entwicklung der Quantenmechanik. (Mathematik im Kontext.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, xvi+411 S. ISBN 978-3-642-21824-8 P/b € 39,95.

Ein Kennzeichen der Anfang des 20. Jahrhunderts entstandenen „modernen“ physikalischen Theorien, der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik, ist ihre starke Durchdringung mit abstrakten mathematischen Konzeptionen. In der Quantenmechanik ist es beispielsweise die Gruppen- und Darstellungstheorie für das Erfassen von Symmetrien. Eine Analyse der Wechselbeziehung der somit eng verbundenen Disziplinen Mathematik und Physik ist sehr vielversprechend. Dementsprechend untersucht die Autorin in diesem Buch die Beiträge des niederländischen Mathematikers van der Waerden zur gruppentheoretischen Methode in der Quantenmechanik (um 1930) aus mathemathikhistorischer Perspektive.

Das vorliegende Werk wurde im Oktober 2009 in leicht modifizierter Form als Dissertation an der Bergischen Universität Wuppertal eingereicht und vom Förderverein der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig mit dem Nachwuchsförderpreis 2010 ausgezeichnet.

Das Werk fokussiert auf drei zentrale Forschungskomplexe: Das Verhältnis van der Waerdens zur Physik, die inhaltliche Analyse und Kontextualisierung von van der Waerdens frühen quantenmechanischen Arbeiten und schließlich die Wechselbeziehung zwischen Mathematik und Physik in der Quantenmechanik.

Die Buch gliedert sich in vier Teile: Im ersten Teil wird der Kontext für van der Waerdens Wirken in der Quantenmechanik dargelegt, indem auf die Entwicklung der Quantenmechanik, die Geschichte der Darstellungstheorie und das Aufkom-

men gruppentheoretischer Methoden in der Quantenmechanik eingegangen sowie van der Waerdens wissenschaftlicher Werdegang beschrieben wird. Alle vier Darstellungen enden mit 1928, vor van der Waerdens erstem physikalischem Beitrag 1929. Die weiteren drei Kapitel sind chronologisch nach van der Waerdens Wirkungsstätten angeordnet: Groningen (1928–1931) als Teil 2, Leipzig (1931–1945) als Teil 3 sowie seine Karriere in den Niederlanden (1945–1951) und Zürich (ab 1951) und seine Beschäftigung mit der Physik ab 1945 als Teil 4. Die späteren Entwicklungen werden dabei nur angedeutet, auch weil der Kontext der Quantenmechanik jener Jahre ein anderer ist. Den Abschluss bildet die Analyse eines Vortrags über das Wechselverhältnis zwischen Mathematik, Physik und Astronomie, den er anlässlich seiner Emeritierung 1972 hielt. Der Gefahr der Unübersichtlichkeit durch Verzahnung von Mikroebene und Makroperspektive begegnet die Autorin dadurch, dass den einzelnen Teilen kurze Überblicksdarstellungen vorangestellt und die jeweiligen lokalen wissenschaftlichen Rahmenbedingungen in einleitenden Kapiteln zusammengestellt werden.

Das Werk kann in der vorliegenden Form nicht als Einführung in die berührten Fachgebiete gesehen werden, sondern als mathemathikhistorische Darstellung der Wechselbeziehung zwischen Mathematik und Quantenmechanik, gezeigt am Beispiel der Beiträge des niederländischen Mathematikers van der Waerden. Es zeigt aber auch grundsätzlich etwas über den Mathematisierungsprozess, wie er auch in anderen Disziplinen beobachtet werden konnte bzw. kann.

G. Haring (Wien)

J. Snugg: A New Approach to Differential Geometry Using Clifford's Geometric Algebra. Birkhäuser, Basel, 2012, xvii+465 S. ISBN 978-0-8176-8282-8 H/b € 59,95.

This book's blurb promises a "unique [...] approach to differential geometry" and this is certainly true. The canonical topics of a first course in differential geometry are developed within the framework of Clifford algebra. This has advantages. For example, the components of the Riemann tensor have a very intuitive interpretation as components of infinitesimal rotation operators. More importantly, differential forms (so unwieldy for many students) are replaced by certain Clifford numbers. Arguably, the necessity to familiarizing oneself with Clifford algebra is only a small burden for anybody who has mastered an undergraduate course in linear algebra. The absence of differential forms allows to present the usual capstone result of a course on elementary differential geometry, the Theorem of Gauß-Bonnet, already halfway through the book, after a sufficiently detailed introduction to Clifford algebra, and even before the Frenet-Serret equations. This swift progress makes room for additional topics that are covered in latter chapters: hyperbolic geometry, ruled surfaces, minimal surfaces and, especially, general relativity.

The style of writing is often informal and entertaining, but the derivations are rigorous and elegant. While there is a certain emphasis on manual calculations,

the author does not shy away from using or recommending the computer whenever this is appropriate.

Yet another unusual feature of this book is the inclusion of a lot of historic material that often is only remotely related to the mathematical contents. The author clearly enjoys himself when he informs us about the “discovery” of Einstein’s lost daughter, how Copernicus’ ideas relate to Arab astronomy, what the German gas shell attacks have to do with the early death of Schwarzschild, and in which setting Kepler made his famous conjecture. Maybe some readers will consider this off-topic. I enjoyed it.

H.-P. Schröcker (Innsbruck)

T. Sonar: 3000 Jahre Analysis. Geschichte, Kulturen, Menschen. Mit 558 Abbildungen, davon 363 in Farbe. (Vom Zählstein zum Computer.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, xxii+711 S. ISBN 978-3-642-17204-5 H/b € 39,95.

Nach „6000 Jahre Mathematik“ (in zwei Bänden), „4000 Jahre Algebra“ und „5000 Jahre Geometrie“ wieder ein wunderbarer Band aus der Reihe *Vom Zählstein zum Computer*.

3.000 Jahre, obwohl die Differentialrechnung gerade einmal 300 Jahre alt ist! Analysis ist die Wissenschaft des Unendlichen und das Unendliche ist Klammer und Leitlinie in diesem Buch. Aber auch die geschichtlichen Entwicklungen im Umfeld ergänzen die historische Entwicklung der Analysis bis zu heutigen aktuellen Anwendungen.

Dem Autor Thomas Sonar ist es mit seiner großen Erfahrung und seinem unglaublich breiten Wissen auf diesem Gebiet hervorragend gelungen, das Publikum mit interessanten Details, zahlreichen Fakten und ausgezeichneten Illustrierungen zu fesseln.

Ich denke, das folgende – dem Buch entnommene – Zitat weist auch den Weg durch dieses sehr empfehlenswerte Werk: *Die Analysis erweist sich als fordernde Geliebte, und man muss sich ihr hingeben, wenn man sie verstehen will.*

G. Schranz-Kirlinger (Wien)

A. Taraz: Diskrete Mathematik. Grundlagen und Methoden. (Mathematik Kompakt.) Birkhäuser, Basel, 2012, ix+137 S. ISBN 978-3-7643-8898-0 P/b € 18,90.

Dieses Buch gehört zur relativ neuen Reihe „Mathematik Kompakt“ von Birkhäuser, in der grundlegende Gebiete der Mathematik kompakt dargestellt werden. Der Umfang eines Bands deckt dabei etwa eine Vorlesung von zwei Semesterwochenstunden ab. Im konkreten Fall wird der Leser auf etwa 130 Seiten in die diskrete Mathematik eingeführt. Trotz dieser Kürze wird ein recht breites Spektrum abgedeckt: elementare Zählmethoden, erzeugende Funktionen und asymptotisches Zählen, Grundlegendes zur Graphentheorie, Partialordnungen, Ramsey-Theorie sowie algebraische und probabilistische Methoden. Selbst einige Themen, die in

den meisten Standardlehrbüchern nicht zu finden sind, werden behandelt: etwa randomisierte SAT-Algorithmen oder Färbungen des \mathbb{R}^n .

Freilich ist es nicht möglich, bei einem derartigen Kompaktbuch besonders weit in die Tiefe zu gehen. Es werden jedoch stets weiterführende Referenzen für den interessierten Leser genannt. Jedes Kapitel wird zudem mit einer Reihe von Übungsaufgaben abgeschlossen. Das Buch ist meiner Meinung nach sehr gut für eine einfache Einführungsvorlesung oder zum Selbststudium für Neulinge (etwa interessierte Schüler) geeignet. Es ist angenehm zu lesen, und die Erklärungen sind zwar knapp, aber gut verständlich und auch immer wieder mit Bildern illustriert.

S. Wagner (Stellenbosch)

G. Teschl: Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 140.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012, xi+356 S. ISBN 978-0-8218-8328-0 H/b \$ 64,-.

The textbook under review evolved from a two semester course by the author at the University of Vienna. Given the title, it is not surprising that the text consists of two main parts:

The first 60% are devoted to the theory of ordinary differential equations (ODEs). However, differing from most of its many contenders the presentation is not only directed towards dynamical systems, since also classical topics as equations in the complex domain and Sturm-Liouville theory are treated in one respective chapter – however in a desirably modern presentation.

The text starts with several examples of explicitly solvable equations, but also hints to a qualitative analysis of autonomous and periodic scalar problems. Existence and uniqueness theory for initial value problems is covered in form of the Picard-Lindelöf theorem, shown twice using Banach's and Weissinger's fixed point theorem. Attached one finds the standard results concerning dependence on initial conditions and parameters, as well as on global existence. Finally, Peano's theorem (via Euler polygons) is shown to obtain existence results. Chapter 3 on linear theory covers autonomous (and corresponding higher order equations) first, gives a proof of Floquet's reduction and treats the corresponding stability theory including stability of equilibria via first-order approximation. Moreover, one finds an appendix on matrix theory embracing the Jordan normal form and the logarithm of matrices. The chapter on complex equations deals with basic existence questions, linear systems (with singularities) and the Frobenius method. A section on the required Hilbert space theory precedes the explanations on linear boundary value problems (Sturm-Liouville theory) and oscillation theory.

The remaining 40% of the text contain (sometimes merely touch) a remarkably large number of topics on dynamical systems. The flow of an ODE serves as introductory example, properties of orbits and limit sets are derived; the presented stability theory for equilibria covers Lyapunov's direct method. The part on planar

systems includes a proof of the Poincaré-Bendixson theorem, while the following section on higher dimensional systems revisits limit sets and gives an introduction to Hamiltonian dynamics, the Kepler problem, and culminates in a formulation of the KAM theorem. Subsequently, the local behavior near hyperbolic fixed points is covered including the Stable Manifold and the Hartman-Grobman theorem, where an appendix on integral equations supports the construction of invariant manifolds via a Lyapunov-Perron approach.

The second half of the dynamical systems part is devoted to “Chaos theory”. It begins with discrete dynamical systems and explanations on difference equations. The period doubling scenario gets illustrated by means of the logistic map, the famous result by Li and Yorke is shown and Sharkovskii’s theorem formulated. One finds a definition of Devaney-chaos, corresponding properties of the Bernoulli shift and also strange attractors and fractal sets are dealt with. Eventually, it is demonstrated how homoclinic orbits are a source for chaotic behavior. The following chapter returns to periodic solutions and the local dynamics around them, leading to the Melnikov method (including nonautonomous perturbations). Ultimately, it is shown how chaotic behavior can be verified for higher-dimensional systems by means of Smale’s horseshoe, the Smale-Birkhoff theorem (only formulated) and Melnikov’s result that a simple zero in the Melnikov integral guarantees a transversal homoclinic orbit in the Poincaré map.

The book closes with bibliographical notes and a list of 50 references.

In conclusion, the author gives a notably compact presentation of a well-covered field. Nevertheless, areas such as algebraic (normal forms) and geometric (attractive invariant manifolds) reduction techniques, as well as bifurcation theory are omitted. The book includes a variety of interesting examples and exercises (some of the latter not related to ODEs or dynamical systems, though). A widely distributed computer algebra system was helpful in creating the graphics. Many corresponding source codes are included, from which the reader can benefit beyond the book and for further studies.

C. Pötzsche (Klagenfurt)

M. Zworski: Semiclassical Analysis. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 138.) American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, xii+431 S. ISBN 978-0-8218-8320-4 H/b \$ 75,—.

Maciej Zworski’s book is an excellent, comprehensive introduction to semiclassical analysis. It fills a void in the current literature by being a broad and introductory text into the general topic of “semiclassical analysis”. Most other existing books are either written for specialists in the field and/or are rather focused treatments of special topics. In contrast to that, Zworski’s book is suitable as a textbook for an advanced graduate course and offers a broad overview of a vast area of topics, such as: Fourier transformation methods, oscillatory integrals, quantization formulas, symbolic calculus for pseudo-differential operators, semiclassical

defect measures, WKB approximations, spectral asymptotics for differential operators, Egorov's theorem in quantum dynamics, the FBI transform, the wave front set of distributions, propagation of singularities, micro-local analysis, quantum ergodicity, etc. Several appendices on differential forms and operator theory make the text largely self-contained, but basic knowledge in complex analysis and partial differential equations is required. The book is very carefully edited and covers basic material (chapters 1 to 7) as well as advanced topics (chapters 8 and higher). It also includes a long list of up-to-date references and there is a maintained list of errata on the author's webpage.

In summary, this book will be of interest for graduate students who want to learn about this field, but also for researchers in partial differential equations and/or mathematical physics who want to have a reliable source explaining the current state of the art. I believe it will become a standard reference on its subject.

C. Sparber (Chicago)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Abelpreis für Pierre Deligne

Pierre Deligne erhält den Abelpreis 2013 für seine bahnbrechenden Beiträge zur Algebraischen Geometrie und deren Einfluss auf angrenzende Gebiete (*for seminal contributions to algebraic geometry and for their transformative impact on number theory, representation theory, and related fields*). So begründete das Abelpreis-Komitee am 20. März 2013 seine Entscheidung.

Pierre Deligne wurde am 3. Oktober 1944 in Belgien (Etterbeek bei Brüssel) geboren. Heute ist er emeritierter Professor in der School of Mathematics am Institute for Advanced Study in Princeton, New Jersey, USA. Zuvor forschte er am Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS) in Bures-sur-Yvette bei Paris. 1970 war er dessen jüngstes Mitglied geworden.

Festkolloquium zum 80. Geburtstag von Wolfgang Schmidt

Die Fakultät für Mathematik organisiert anlässlich des 80. Geburtstags von Prof. Wolfgang M. Schmidt eine Konferenz zum Thema *Diophantische Approximation* von Mittwoch, 9. bis Freitag, 11. Oktober 2013. Diese Konferenz wird die erste im neuen Gebäude am Oskar-Morgenstern-Platz 1 sein.

(Harald Rindler)

Neue Mitglieder

Markus Ableidinger, Dipl.-Ing. – Univ. Linz. geb. 1989. Nach Masterstudium der Finanz- und Versicherungsmathematik an der TU Graz derzeit Doktorand an der Univ. Linz. email markus.ableidinger@jku.at.

Evelyn Buckwar, Prof. Dr. – Univ. Linz. geb. 1964. 1997 Doktorat Mathematik an der FU Berlin, 2005 Habilitation an der HU Berlin, Gastprofessorin 2005–2006 an der Univ. Magdeburg und 2006–2007 an der TU Berlin, 2007–2011 Univ. Edinburgh, seit 2011 Professorin für Stochastik an der JKU Linz. email evelyn.buckwar@jku.at, <http://www.jku.at/stochastik>.

Monika Dörfler, Dr. – Wien. geb. 1972. 2002 Doktorat Mathematik an der Univ. Wien, 2006–2008 FH St. Pölten, 2008–2009 Akademie der Wissenschaften, seit 2009 Univ. Wien, davon bis 2012 im Rahmen des Hertha Firnberg-Programms. email monika.doerfler@univie.ac.at, <http://homepage.univie.ac.at/monika.doerfler/>.

Georg Gutenbrunner, Dipl.-Ing. Dr. – FH St. Pölten. geb. 1978. 2004 Doktorat Techn. Mathematik TU Wien, 2009–2010 Univ. Oldenburg, 2010–2011 TU Braunschweig, seit 2011 FH-Dozent an der Fachhochschule St. Pölten. email georg@gutenbrunner.com.

Harald Hinterleitner, Dipl.-Ing. – Univ. Linz. geb. 1988. 2012 Abschluss der Technischen Mathematik und Industriemathematik an der JKU Linz, seit 2013 Univ.-Assistent ebendort. email harald.hinterleitner@jku.at, <http://www.jku.at/stochastik>.

Andrea Madunic – Wien. geb. 1990. Studentin. email andreamadunic@hotmail.com.

Felix Schwenninger, Dipl.-Ing – Wien. geb. 1987. 2006–2011 Mathematikstudium an der TU Wien, seit 2011 Doktorand an der Univ. Twente in den Niederlanden. email f.l.schwenninger@utwente.nl, <http://www.math.utwente.nl/sst/schwenninger>.

Michaela Szölgényi, Dipl.-Ing. – Univ. Linz. geb. 1988. Masterstudium *Industriemathematik* an der Univ. Linz. Seit 2011 Doktorandin am Institut f. Finanzmathematik der Univ. Linz. <http://www.finanz.jku.at/index.php?id=86>, email michaela.szolgyenyi@ku.at.

Mario Weitzer, Mag.rer.nat. – MU Leoben. geb. 1985. Studium der Mathematik an der KFU Graz, ab 2011 Doktorand im Rahmen des FWF-Doktoratskollegs „Diskrete Mathematik“ an der MU Leoben. email *mario.weitzer@unileoben.ac.at*.