

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email imn@tuwien.ac.at, <http://www.oemg.ac.at/>

Redaktion:

J. Wallner (TU Graz, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
R. Tichy (TU Graz)
R. Winkler (TU Wien)

Ständige Mitarbeiter der Redaktion:

B. Gittenberger (TU Wien)
G. Eigenthaler (TU Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger:
Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr.
Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches
Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040
Wien.

© 2012 Österreichische Mathematische
Gesellschaft, Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

<http://www.oemg.ac.at/>

email: oemg@oemg.ac.at

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: sekr@oemg.ac.at

Vorstand des Vereinsjahres 2011:

M. Drmota (TU Wien): Vorsitzender
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Stellvertretender Vorsitzender
J. Wallner (TU Graz):
Herausgeber der IMN
B. Lamel (Univ. Wien): Schriftführer
A. Ostermann (Univ. Innsbruck):
Stellvertretender Schriftführer
G. Larcher (Univ. Linz): Kassier
P. Kirschenhofer (MU Leoben):
Stellvertretender Kassier
G. Schranz-Kirlinger (TU Wien):
Beauftragte für Frauenförderung
G. Teschl (Univ. Wien):
Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
U. Dieter (TU Graz)
H. Engl (Univ. Wien)
P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)

M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
L. Reich (Univ. Graz)
N. Rozsenich (Wien)
W. Schachermayer (Univ. Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
H. Strasser (WU Wien)
R. Tichy (TU Graz)
W. Wurm (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionsvorsitzende gehören statutengemäß dem Beirat an.

Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:

W. Woess (Graz)
G. Kirchner (Innsbruck)
C. Nowak (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
P. Hellekalek (Salzburg)
C. Krattenthaler (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 20,-

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria-Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques
Internationales

Nr. 219 (66. Jahrgang)

April 2012

Inhalt

<i>Christof Sparber: Semiclassical Quantum Dynamics and Bohmian Trajectories</i>	1
<i>Hans-Friedrich Bauch: 125 Jahre magisches Sechseck</i>	13
<i>Hans Humenberger: Elementarmathematische Betrachtungen zum Delischen Problem und zur Winkeldreiteilung</i>	25
Buchbesprechungen	45
Internationale Mathematische Nachrichten	58
Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft	60
Neue Mitglieder	61

Die Titelseite illustriert eine diskrete Variante der flächentreuen und ergodischen „Katzenabbildung“ $(x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$ modulo 1 am Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, die von V.I. Arnold anhand des Bildes einer Katze illustriert wurde. Die diskrete Abbildung lautet $(i, j) \mapsto (2i + j, i + j)$ modulo N , auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2/(N\mathbb{Z})^2$. Für den abgebildeten Fall $N = 150$ hat sie eine Periode von 300 Iterationen. *Illustration:* Claudio Rocchini (ISTI, Pisa), abgelegt in *Wikimedia Commons*.

Semiclassical Quantum Dynamics and Bohmian Trajectories

Christof Sparber

University of Illinois at Chicago

The goal of this article is to give a brief overview of some of my recent work on semiclassical quantum dynamics. Indeed, ever since my master's degree, the problem of trying to describe the semiclassical asymptotics (or, more colloquial, the semiclassical limit) of quantum dynamics has been one of my preferred research topics (see [16] for a general introduction). Mathematically speaking, it furnishes an important example of a (singular) multi-scale problem in partial differential equations. In the last two years this topic has again been drawn to the center of my attention, mainly because of a novel interpretation in terms of Bohmian dynamics (to be described below). The results obtained so far can be found in two papers together with P. Markowich and T. Paul [13, 14] and in an upcoming work together with P. Markowich, C. Klein, and A. Figalli [9]. The latter also includes numerical simulations.

1 Introduction

We consider the time-evolution of a single (non-relativistic) quantum mechanical particle, described by a wave function $\psi(t, x) \in \mathbb{C}$ under the influence of given time-independent potential $V(x) \in \mathbb{R}$, typically an electrostatic field. The dynamics of ψ is then governed by Schrödinger's equation

$$i\varepsilon\partial_t\psi^\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta\psi^\varepsilon + V(x)\psi^\varepsilon, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0^\varepsilon(x) \quad (1.1)$$

for $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, where $d \in \mathbb{N}$ denotes the spatial dimension. Here we have rescaled the original equation (including all physical parameters, like mass, charge, the Planck's constant, etc.) into dimensionless units such that only one small parameter $0 < \varepsilon \leq 1$ remains. The latter plays the role of a (dimensionless)

Planck's constant. A particular situation in which this scaling appears is when the external potential V varies slowly on the quantum mechanical length and time scales, i.e. $V = V(\varepsilon x)$. Rescaling into macroscopic scales $x \rightarrow x/\varepsilon, t \rightarrow t/\varepsilon$ then yields (1.1) with $\varepsilon > 0$ denoting the microscopic/macroscopic scale ratio.

The *classical limit* of quantum mechanics is concerned with the asymptotic behavior of solutions to (1.1) as $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Obviously, this is a singular limiting regime and thus such an asymptotic description is by no means straightforward. This can already be seen by considering the case $V(x) = 0$, for which one can find a simple solution of (1.1) in the following form

$$\psi^\varepsilon(t, x) = e^{ik \cdot x/\varepsilon} e^{-i|k|^2/(2t\varepsilon)},$$

where $k \in \mathbb{R}$ is some given wave vector. We consequently expect solutions of (1.1) to exhibit oscillations in t and x with frequency $O(1/\varepsilon)$, preventing any kind of strong convergence of ψ^ε as $\varepsilon \rightarrow 0_+$.

A possible way to get more insight is to look at quadratic quantities of ψ^ε , which are presumably better behaved. Probably the two most important such quantities are the *position* and the *current density*, defined by

$$\rho^\varepsilon(t, x) = |\psi^\varepsilon(t, x)|^2, \quad J^\varepsilon(t, x) = \varepsilon \operatorname{Im}(\overline{\psi^\varepsilon(t, x)} \nabla \psi^\varepsilon(t, x)). \quad (1.2)$$

It has been realized by E. Madelung in 1926 that these densities can be used to rewrite the Schrödinger equation (1.1) in the following, hydrodynamical form:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon + \operatorname{div} J^\varepsilon = 0, \\ \partial_t J^\varepsilon + \operatorname{div} \left(\frac{J^\varepsilon \otimes J^\varepsilon}{\rho^\varepsilon} \right) + \rho^\varepsilon \nabla V = \frac{\varepsilon^2}{2} \rho^\varepsilon \nabla \left(\frac{\Delta \sqrt{\rho^\varepsilon}}{\sqrt{\rho^\varepsilon}} \right). \end{cases} \quad (1.3)$$

Formally, the term on the right hand side in the second equation is of order $O(\varepsilon^2)$. Thus, as long as the corresponding spatial derivatives of $\sqrt{\rho^\varepsilon}$ are “well behaved”, one expects this term to (formally) converge to zero in limit $\varepsilon \rightarrow 0_+$, resulting in an Euler-type system for a classical fluid:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} J = 0, \\ \partial_t J + \operatorname{div} \left(\frac{J \otimes J}{\rho} \right) + \rho \nabla V = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Unfortunately the resulting system (1.4) does *not* admit smooth global in-time solutions, since in general shock waves appear in the solution. This consequently implies that the formal limit obtained by dropping the term of order $O(\varepsilon^2)$ can only describe the asymptotic behavior of ρ^ε and J^ε up to the appearance of the first shock in (1.4) (as was proved in [10]).

The quantum-hydrodynamic system (1.3) can also be seen as the starting point of *Bohmian mechanics*, which was introduced by D. Bohm in [4, 5] as a trajectory based reformulation of quantum dynamics (for a broad introduction to this subject we refer to [8]). This idea is intriguing in so far as it allows to put both quantum dynamics and classical dynamics on a common base, in contrast to the standard interpretation of quantum mechanics, which rejects the (classical) concept of particle trajectories. In particular, the definition of quantum mechanical trajectories seems to offer the possibility of having a smooth transition between both theories in the limit $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Inspired by these ideas, we recently introduced the concept of *Bohmian measures* in [13]. Namely, for any given ψ^ε , with corresponding position and current densities given in (1.2), we define an associated measure on phase space

$$\beta^\varepsilon(t, x, p) := \rho^\varepsilon(t, x) \delta(p - u^\varepsilon(t, x)),$$

where $\delta(p - \cdot)$ denotes the d -dimensional delta distribution and $u^\varepsilon := \frac{J^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}$ formally denotes the quantum mechanical velocity field. Note that even though u^ε is not well defined at points where $\rho^\varepsilon = 0$, our definition of β^ε nevertheless yields a continuous non-negative distribution on phase space. Next, we consider an ε -dependent phase space flow

$$\Phi_t^\varepsilon : (x, p) \mapsto (X^\varepsilon(t, x), P^\varepsilon(t, x)) \in \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_p^d,$$

induced by the following system

$$\begin{cases} \dot{X}^\varepsilon(t, x) = P^\varepsilon(t, x), & X^\varepsilon|_{t=0} = x \\ \dot{P}^\varepsilon(t, x) = -\nabla(V(X^\varepsilon(t, x)) + \varepsilon^2 V_B^\varepsilon(t, X^\varepsilon(t, x))), & P^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon(x), \end{cases} \quad (1.5)$$

where $V_B^\varepsilon(t, x)$, denotes the so-called *Bohm potential*, i.e.

$$V_B^\varepsilon = -\frac{1}{2} \frac{\Delta \sqrt{\rho^\varepsilon}}{\sqrt{\rho^\varepsilon}}.$$

Note that (1.5) assumes that one can solve the Schrödinger equation globally and define $V_B^\varepsilon(t, x)$ for all $(t, x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$. Under mild regularity and growth conditions for V , it was shown in [13] (using earlier results stated in [3, 15]), that the flow Φ_t^ε exists globally in time for almost all $(x, p) \in \mathbb{R}^{2d}$, *relative to the measure*

$$\beta_0^\varepsilon(x, p) = \rho_0^\varepsilon(x) \delta(p - u_0^\varepsilon(x)), \quad u_0^\varepsilon = \frac{J_0^\varepsilon}{\rho_0^\varepsilon},$$

where ρ_0^ε and J_0^ε denote the position and current densities associated to the initial wave function ψ_0^ε . In addition, Φ_t^ε is continuous on its maximal open domain and one can also show that, for all times $t \in \mathbb{R}$, the measure $\beta^\varepsilon(t)$ is the *push forward*

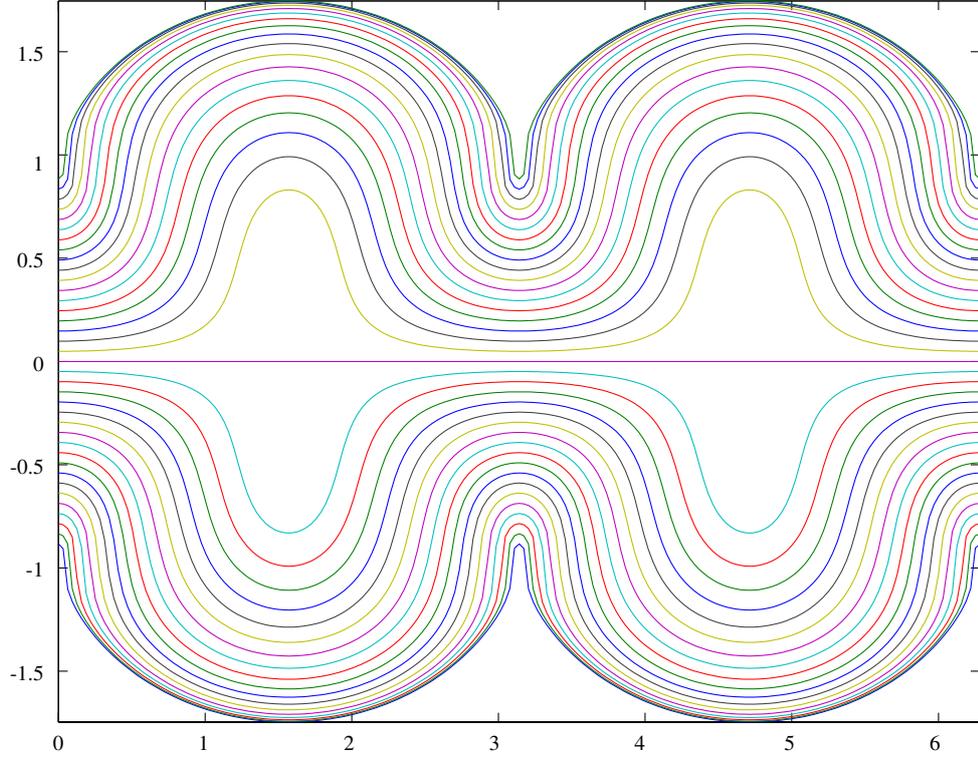


Figure 1: Bohmian trajectories for $d = \varepsilon = 1$ in a harmonic oscillator potential $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ with ψ given as a superposition of the ground state and the second excited state.

of β_0^ε under the flow Φ_t^ε . More precisely, for any test-function $\varphi \in C_0(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_p^d)$, i.e. continuous and vanishing at infinity, it holds

$$\langle \beta^\varepsilon(t), \varphi \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, u^\varepsilon(t, x)) \rho^\varepsilon(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(X^\varepsilon(t, x), P^\varepsilon(t, x)) \rho_0^\varepsilon(x) dx, \quad (1.6)$$

where we have used the fact that $P^\varepsilon(t, x) = u^\varepsilon(t, X^\varepsilon(t, x))$. In other words, the measure β^ε encodes, for all times $t \in \mathbb{R}$, the full quantum mechanical dynamics of ρ^ε and J^ε , which, in view of (1.3), yields a hydrodynamical system equivalent to the Schrödinger equation. An important property of the Bohmian trajectories X^ε is that they *do not cross*, see [3]. This is true even at points where $\rho^\varepsilon(t, x) = 0$. To illustrate this fact, we numerically compute the trajectories in $d = 1$ for

$$\psi(t, x) = (1 + (1 - 2x^2)e^{-2it}) e^{-x^2 - it/2},$$

where we have set $\varepsilon = 1$ for simplicity. This wave function furnishes a superposition of the ground state and the second excited state of the quantum mechanical harmonic oscillator and vanishes for $x = 0$ and $t = (2k + 1)\pi/2$, with $k \in \mathbb{Z}$. The

resulting trajectories can be seen in Fig. 1. Note that indeed, all trajectories avoid the vortices at $t = \pi/2$ and $t = 3\pi/2$, only the trajectory for $x = 0$ passes through these nodes. More details on the numerical treatment of Bohmian mechanics can be found in the upcoming work [9].

The time-evolution of β^ε is governed by the system (1.5), which can formally be seen as a $O(\varepsilon^2)$ perturbation of the Hamiltonian system of classical mechanics (through the Bohm potential). It therefore seems natural to ask ourselves the following question:

Q: Can we mathematically describe the limit of the Bohmian flow Φ_t^ε as $\varepsilon \rightarrow 0_+$? Clearly, answering this question will be very difficult in general since (1.5) comprises a highly nonlinear dynamical system. A slightly more modest question might therefore be:

Q: Can we describe the classical limit of β^ε ?

A (partial) answer to the last question will be given in the following section. The hope, of course, is that precise knowledge of the classical limit of β^ε also allows to infer something on the limit of the Bohmian dynamics Φ_t^ε .

2 On the classical limit of Bohmian measures

The following result obtained in [13] shows the existence of a classical limit of β^ε , provided some basic a-priori bounds (w.r.t. ε) on the family $\{\psi^\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ hold true.

Theorem 2.1. *Let C_1, C_2 be some positive constants independent of ε .*

1. *Assume that for all $t \in \mathbb{R}$ it holds*

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|\psi^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C_1.$$

Then, up to extraction of an appropriate sub-sequence $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, there exists a measure $\beta^0 \equiv \beta \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_p^d)$, such that

$$\beta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0_+} \beta \quad \text{in } L^\infty(\mathbb{R}_t; \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_p^d)) \text{ w} - *,$$

where $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_p^d)$ denotes the set of non-negative Borel measures.

2. *If, in addition, it holds*

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|\varepsilon \nabla \psi^\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq C_2,$$

then we also have

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \rho^\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \beta(t, x, dp), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} J^\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} p \beta(t, x, dp).$$

The proof follows from basic weak compactness arguments and shows that the limiting measure β incorporates the classical limit of ρ^ε and J^ε , obtained by taking moments in p (for more details, see the proofs of Lemma 3.1 and Lemma 3.2 in [13]). If ψ^ε is a solution of the Schrödinger equation (1.1), then the necessary a-priori estimates are easily obtained from the conservation of mass and energy, provided they hold at $t = 0$.

We would like to obtain more qualitative properties of β . A basic feature, proved in [13], concerns the *sub-critical case* w.r.t. the scale ε .

Theorem 2.2. *Assume that ψ^ε is uniformly bounded (w.r.t. ε) in $L^2(\mathbb{R}^d)$ and, in addition*

$$\varepsilon \nabla \psi^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0, \quad \text{in } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d).$$

Then, up to extraction of subsequences, it holds $\beta(x, p) = \rho(x) \delta(p)$, where ρ is the weak- $$ limit of the position density as given in Theorem 2.1.*

This result is a rather straightforward consequence of the definition of β^ε (see the proof of [13, Theorem 4.3]) and can be interpreted as follows: Sequences of functions ψ^ε which *neither oscillate nor concentrate* on the scale ε (but maybe on some larger scale), all yield the same classical limiting measure β , concentrated at $p = 0$. For general solutions of (1.1) however, we expect oscillations and/or concentration effects on the scale ε . In [13], [14] several different results, characterizing the limiting measure β , have been established. In particular, a comparison to the, by now classical, theory of Wigner measures (or semi-classical defect measures, see, e.g., [12]) can be found in [13].

Instead of recalling these results, we shall, in the following, give some basic examples for the limiting measure β . As a first case, we consider so-called WKB states.

Example 2.1 (WKB states). Let

$$\psi^\varepsilon(x) = a(x) e^{iS(x)/\varepsilon},$$

where the amplitude $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ and the phase S is assumed to be smooth and real-valued. Then the definition of β^ε immediately gives

$$\beta^\varepsilon(x, p) = \beta(x, p) = |a(x)|^2 \delta(p - \nabla S(x)).$$

Obviously, for ψ^ε in WKB form we find that the position and current densities are given by $\rho^\varepsilon = |a|^2$ and $J^\varepsilon = \rho \nabla S$, i.e. they are in fact ε -independent. It is well known that if the initial data ψ_0 is given in WKB form then the exact solution $\psi^\varepsilon(t)$ can be approximated by a WKB state up to the appearance of the first shock in (1.4).

Next, we shall consider a particularly interesting class of wave functions exhibiting both high frequency oscillations and concentration effects.

Example 2.2 (Semi-classical wave packets). Let

$$\psi^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d/4} a\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}}\right) e^{ip_0 \cdot x/\varepsilon}, \quad x_0, p_0 \in \mathbb{R}^d,$$

for some given profile $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, normalized such that $\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Then, we find that

$$\beta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0_+} \beta(x, p) = \delta(x - x_0) \delta(p - p_0),$$

i.e. the phase-space probability distribution of a single particle with position x_0 and momentum p_0 . Note that for $p_0 = 0$ this can be seen as a particular case of Theorem 2.2.

The last example is particularly interesting as it allows to prove a positive result about the convergence of Bohmian trajectories (see Section 3 below).

Remark 2.3. One could get the wrong impression that the projection of the limiting measure β onto momentum space \mathbb{R}_p^d is always singular. However, in the appendix of [14] we give an example of a class of wave functions ψ^ε for which the projection is found to be absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on \mathbb{R}_p^d .

3 Classical limit of Bohmian trajectories for semi-classical wave packets

In the following we denote by $X(t), P(t)$ the classical Hamiltonian trajectories induced by

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = P(t), & X|_{t=0} = x_0, \\ \dot{P}(t) = -\nabla V(X(t)), & P|_{t=0} = p_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

One of the main results of [14] is then as follows.

Theorem 3.1. *Let V be sufficiently smooth and bounded and*

$$\psi_0^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d/4} a\left(\frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}}\right) e^{ip_0 \cdot x/\varepsilon}, \quad x_0, p_0 \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

with ε -independent amplitude $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, such that $|a|^2 > 0$ a.e. on \mathbb{R}^d . Consider the following family of rescaled Bohmian trajectories

$$Y^\varepsilon(t, y) = X^\varepsilon(t, x_0 + \sqrt{\varepsilon}y), \quad Z^\varepsilon(t, y) = P^\varepsilon(t, x_0 + \sqrt{\varepsilon}y),$$

Then it holds: $Y^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0_+} X, Z^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0_+} P$, locally in measure on $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$.

More precisely, for every $\delta > 0$ and every Borel set $\Omega \subseteq \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d$ with finite Lebesgue measure \mathcal{L}^{d+1} :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}^{d+1}(\{(t, y) \in \Omega : |(Y^\varepsilon(t, y), Z^\varepsilon(t, y)) - (X(t), P(t))| \geq \delta\}) = 0.$$

Roughly speaking, Theorem 3.1 says that the Bohmian trajectories $X^\varepsilon, P^\varepsilon$ located within a tube of diameter $O(\sqrt{\varepsilon})$ around every X, P converge to the classical flow induced by (3.1) in the limit $\varepsilon \rightarrow 0_+$.

Remark 3.1. Very recently, a similar convergence result has been proved in [7], using a completely different mathematical approach. In particular, no result on the convergence of P^ε is given there.

The proof of Theorem 3.1 relies on the following steps: First, we recall the fact that for initial data given by (3.2) one can prove that the exact solution of (1.1) can be approximated by (see, e.g., [6] and the references given therein)

$$\psi^\varepsilon(t, x) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0_+}{\sim} u^\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-d/4} u\left(t, \frac{x - X(t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) e^{i(P(t) \cdot (x - X(t)) + S(t))/\varepsilon}. \quad (3.3)$$

Here $P(t), X(t)$ solve the Hamiltonian system (3.1), $S(t)$ is a purely time-dependent phase factor (cf. [6] for the precise definition) and the profile $u(t, y)$ solves

$$i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta_y u + \frac{1}{2}(Q(t)y, y)u, \quad u|_{t=0} = a(y),$$

where $Q(t) := \text{Hess}V(X(t))$ denotes the Hessian of the potential $V(x)$, evaluated at the classical trajectory $X(t)$. In other words, u solves an ε -independent Schrödinger-type equation with time-dependent quadratic potential. Next, we find that the approximation (3.3) satisfies sufficiently strong error bounds so that one can compute the classical limit of the Bohmian measure β^ε associated to the exact solution ψ^ε by computing the classical limit of the Bohmian measure associated to u^ε . This implies that

$$\beta^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0_+} \beta = \delta(x - X(t)) \delta(p - P(t)). \quad (3.4)$$

The final step of the proof uses the fact that the push-forward property (1.6) allows to connect the limiting measure β to the *Young measure* $\omega_{t,y} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_p^d)$ associated to the rescaled Bohmian trajectories $Y^\varepsilon(t, y), Z^\varepsilon(t, y)$. Indeed it has been proved in [14] that for all $t \in \mathbb{R}$:

$$\beta(t, x, p) = \int_{\mathbb{R}^d} |a(y)|^2 \omega_{t,y}(x, p) dy.$$

In view of (3.4) and the fact that $|a|^2 > 0$ by assumption, this implies that

$$\omega_{t,y}(x, p) = \delta(p - P(t)) \delta(x - X(t)).$$

In other words, the Young measure $\omega_{t,y}$ is found to be concentrated in a single point in phase space $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_p^d$. By a well known result of Young measure theory (see e.g. [11, Proposition 1]), this is equivalent to the local in-measure convergence of $Y^\varepsilon(t), Z^\varepsilon(t)$ and we are done.

4 Concluding remarks

The above results give a basic overview of the mathematical theory of Bohmian measures developed in [13, 14]. Clearly, many questions remain open. For example, it is not yet clear under which conditions on ψ^ε does the limiting measure β retain the *mono-kinetic* form of β^ε , i.e. under which conditions can one guarantee that

$$\beta(t, x, p) = \rho(t, x) \delta(p - u(t, x)),$$

for some $\rho(t) \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}_x^d)$ and some velocity field $u(t, x) \in \mathbb{R}^d$ defined $\rho - a.e.$. In [13] only sufficient conditions for this have been derived. Similarly, the connection between Bohmian measures and Wigner measures is only partially understood. The latter are known to incorporate the classical limit of (the expectation values of) any physical observable, cf. [12], and it would be interesting to understand whether or not these limits can also be obtained from β .

Furthermore, the problem of convergence of the Bohmian flow Φ_t^ε for general initial data ψ_0^ε (not necessarily given in the form of a semiclassical wave packet) is largely open. The latter is again closely related to the problem of shocks appearing in the formal limiting system (1.4) associated to the quantum hydrodynamic equations (1.3). Numerical simulations indicate [9] that in general the convergence will only hold before the first shock appears. At this point, the correct limiting description after shocks is not even formally known. In addition, one may wonder whether or not it is possible for X^ε to converge even if $P^\varepsilon = \dot{X}^\varepsilon$ does not (due to the highly oscillatory nature of the problem when $\varepsilon \rightarrow 0_+$, it is clear that in general P^ε will behave worse than X^ε).

Finally, we want to mention that the concept of Bohmian measures, at least formally, allows to set up a quantum mechanical analogue of the *optimal mass transportation theory* developed in [1, 2] (see also [17] for a general introduction). Unfortunately, the associated minimization problem is based on the physical action principle and thus on a Lagrangian functional L , which in the (free) case $V = 0$ is given by

$$L = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^\varepsilon |u^\varepsilon|^2 dx - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \sqrt{\rho^\varepsilon}|^2 dx.$$

In contrast to the classical situation where $\varepsilon = 0$, this functional may not even be bounded from below (let alone convex etc.) and thus it is highly unclear if one can give a rigorous mathematical meaning to the associated optimal mass

transportation problem. It nevertheless remains an interesting feature of Bohmian dynamics that it seems to offer the possibility of such a reformulation, which in itself could allow for completely new insights in the dynamical features of quantum mechanics.

References

- [1] J. D. Benamou, and Y. Brenier, *A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem*. Numer. Math. **84** (2000), no. 3, 375–393.
- [2] J. D. Benamou, and Y. Brenier, *Mixed L2-Wasserstein optimal mapping between prescribed density functions*. J. Optim. Theory Appl. **111** (2001), no. 2, 255–271.
- [3] K. Berndl, D. Dürr, S. Goldstein, G. Peruzzi, and N. Zanghi, *On the global existence of Bohmian mechanics*. Comm. Math. Phys. **173** (1995), 647–673.
- [4] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden Variables” I*. Phys. Rev. **85** (1952), 166–179.
- [5] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden Variables” II*. Phys. Rev. **85** (1952), 180–193.
- [6] R. Carles and C. Fermanian-Kammerer, *Nonlinear coherent states and Ehrenfest time for Schrödinger equations*. Comm. Math. Phys. **301** (2011), no. 2, 443–472.
- [7] D. Dürr and S. Römer, *On the classical limit of Bohmian mechanics for Hagedorn wave packets*. J. Funct. Anal. **259** (2010), 2404–2423.
- [8] D. Dürr and S. Teufel, *Bohmian Mechanics*. Springer Verlag, 2009.
- [9] A. Figalli, C. Klein, P. Markowich, and C. Sparber, *WKB analysis for Bohmian trajectories*. Preprint available at: *arXiv:1202.3134*.
- [10] I. Gasser and P. A. Markowich, *Quantum hydrodynamics, Wigner transforms and the classical limit*. Asympt. Anal. **14** (1997), 97–116.
- [11] N. Hungerbühler, *A Refinement of Ball’s Theorem on Young Measures*. New York J. Math. **3** (1997), 48–53.
- [12] P. L. Lions and T. Paul, *Sur les mesures de Wigner*. Rev. Math. Iberoamericana **9** (1993), 553–618.
- [13] P. Markowich, T. Paul and C. Sparber, *Bohmian measures and their classical limit*. J. Funct. Anal. **259** (2010), 1542–1576.
- [14] P. Markowich, T. Paul and C. Sparber, *On the dynamics of Bohmian measures*. To appear in Archive Ration. Mech. Anal. (2012). Preprint available at *arXiv:1011.5361*.
- [15] S. Teufel and R. Tumulka, *Simple proof of global existence of Bohmian trajectories*. Comm. Math. Phys. **258** (2005), 349–365.
- [16] C. Sparber, N. Markowich, and N. Mauser, *Wigner functions vs. WKB meth-*

ods in multivalued geometrical optics. *Asymptot. Anal.* **33** (2003), no. 2, 153–187.

- [17] C. Villani, *Topics in optimal transportation*. Graduate Studies in Mathematics **58**, American Mathematical Society, 2003.

Author's address:

Christof Sparber

Department of Mathematics, Statistics and Computer Science

851 South Morgan Street

Chicago, IL 60607

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

V. S. Varadarajan (Managing Editor), Vyjayanthi Chari, Robert Finn, Kefeng Liu, Darren Long, Jiang-Hua Lu, Alexander Merkurjev, Sorin Popa, Jie Qing, Jonathan Rogawski, Paul Yang.

The Journal is published 10 times a year. The subscription price is \$ 485,00 per year for print and \$ 420,00 for electronic-only.

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
AT THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY, CA 94720-3840

125 Jahre magisches Sechseck

Hans-Friedrich Bauch

FH Stralsund

Das magische Sechseck ist 1887 vom Stralsunder Stadtbaumeister Ernst von Haselberg entdeckt worden – es wird wegen seiner Einmaligkeit als mathematisches Juwel bezeichnet. Seine Geschichte ist durchaus ein Auf und Ab. In den 80er-Jahren des 19. Jahrhunderts hatten Zahlenspiele wie das „15-Puzzle (Schiebefax)“ Hochkonjunktur, auch in der Öffentlichkeit wie heute z.B. Bingo. So verwundert es nicht, dass der mathematisch interessierte Architekt aus Vorpommern neben seiner aufwendigen Tätigkeit als Sanierer der mittelalterlichen Bausubstanz in Stralsund, die inzwischen als Weltkulturerbe von der UNESCO anerkannt wurde, ein Zahlenrätsel entwarf.

Ernst von Haselberg hatte neben seiner Hingabe zur Backsteingotik [5] und zur Mathematik auch ein Faible für die Berge, denn seine Diplomarbeit an der Königlich-Preußischen Bauakademie in Berlin 1856 trug den Titel „Sommerresidenz eines Fürsten in einer gebirgigen Gegend an einem See“. Er berichtet selbst während seines Studiums: „Die Vorliebe für die Mathematik würde mich dazu bewogen haben, den technischen Teil der Bauwissenschaften zu ergreifen, während ich jetzt, ohne den letzteren später zu vernachlässigen, dem der Kunst während der Studienzeit den Vorzug gebe und für das ganze Leben einen Genuß habe, der mich entschädigen wird, wenn das Schicksal mich für die Prosa bestimmen sollte.“ Mit seiner Frau, der Pastorentochter Caroline Tamms, hatte er nach der Hochzeit 1864 in 15 Jahren 10 Kinder. Ein Zitat einer Tochter weist noch einmal auf die Mathematik hin: „Ursprünglich hatte im Vordergrund seiner Neigungen die Mathematik gestanden, die er ja beinahe zur Grundlage seiner Laufbahn gemacht hätte. Bis ins hohe Alter reizten ihn mathematische Aufgaben.“



Am 5. Mai 1887 beendete Ernst von Haselberg sein Manuskript zum magischen

Zeitschrift

für

mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen.

(Zugleich Organ der Sektionen für math. und naturw. Unterricht in den Versammlungen der Pädagogen, Naturforscher, Seminar- und Volksschul-Lehrer.)

Unter Mitwirkung

der Herren Prof. Dr. BAUER in Karlsruhe, Univ.-Prof. Dr. FRISCHAUF in Graz, Dr. GÜNTHER, Prof. a. d. techn. Hochschule in München, Geh.-R. Dr. HAUCK, Prof. an der techn. Hochschule in Berlin, Gewerbeschul.-Dir. Dr. HOLZMÜLLER in Hagen, Realgymnasial.-Prof. Dr. LIEBER in Stettin, Gymnas.-Obl. v. LÜHMANN in Königsberg i/N., Dr. PROCK in Wien und Prof. SEIBERTLING in Lübeck

herausgegeben von

J. C. V. Hoffmann.



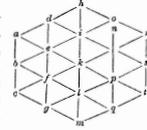
Neunzehnter Jahrgang.

Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1888.

Abbildung 1: MNU 1888.

801 (795). (Gestellt von v. Haselberg XIX., 429.) An Stelle der in das nebenstehende Sechseck eingeschriebenen Buchstaben sind die Zahlen von 1 bis 19 so zu setzen, daß die Summe der auf einer und derselben geraden Linie stehenden Zahlen, gleichviel ob sie aus drei, vier oder fünf Gliedern zusammengesetzt ist, nach allen Richtungen hin gleich 38 ist.



Auflösung. Bezeichnet man die Summe der sechs Zahlen an den äußeren Ecken mit $\sum a$, diejenige der sechs Zahlen in den Mitten der äußeren Seiten mit $\sum b$ und diejenige der sechs Zahlen, welche die Kernzahl k umgeben mit $\sum c$, so ist $\sum a + \sum b + \sum c = 5 \cdot 38 - k$, $2 \sum a + \sum b = 6 \cdot 38$ und $2 \sum b + 2 \sum c = 6 \cdot 38$. Hieraus ergibt sich $\sum a = 2 \cdot 38 - k(1)$; $\sum b = 2(38 + k)(2)$; $\sum c = 38 - 2k(3)$. Aus (3) ergibt sich, daß k nicht größer als 8 sein kann; wäre $k = 9$, so würde $\sum c = 20$ sich auch nicht mehr aus den sechs

niedrigsten Zahlen bilden lassen. — Die kleinste Zahl, welche an einer äußeren Ecke stehen kann, ist 3; wollte man z. B. $r = 2$ setzen, so würde sich $h + n + s + t = 2(38 - 2) = 72$ auch aus den vier höchsten Zahlen nicht mehr darstellen lassen. — Aus der Aufgabe lassen sich dreizehn Gleichungen bilden, welche je drei, vier oder fünf Unbekannte enthalten, deren Summe gleich 38 ist. Von diesen sind die zur Lösung wichtigsten $b = k + o + p$, $g = k + i + o$, u. s. w., da man hierdurch nach versuchsweiser Anordnung der inneren Zahlen die sechs Zahlen in den Mitten der äußeren Seiten findet. — Für $k = 8$ ist nun $\sum c = 22$; man findet für $\sum c$ eine, jedoch nicht brauchbare Gruppe von Zahlen für die Umgebung von k . Für $k = 7$ ergeben sich zwei, für $k = 6$ drei Gruppen solcher Zahlen, mit denen man ebenfalls nicht zum Ziel gelangt. Für $k = 5$ ist $\sum c = 28$; man erhält dann die einzige überhaupt mögliche Lösung in beistehender Anordnung. Für $k < 5$ enthält man keine passende Lösung.

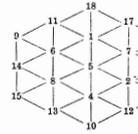


Abbildung 2: MNU 1889.

Sechseck. Dieses Sechseck H_{19} besteht bei ihm aus 19 Schnittpunkten von Strecken, die einander im Winkel von 60 bzw. 120 Grad schneiden. Es gibt in jeder der drei Richtungen 5 parallele Strecken mit 3, 4, 5, 4, 3 Punkten. Anstelle der Punkte sollen die Zahlen von 1 bis 19 so eingeschrieben werden, dass sich auf jeder geraden Strecke die Summe 38 ergibt. Mit großer Akribie fand er in aufwendiger Analyse heraus, dass es eine und – bis auf Drehungen und Spiegelungen – überhaupt nur eine Lösung gibt. Auf die Publikation dieses Problems 1888 in der *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* (MNU) ging innerhalb eines Jahres keine einzige Einsendung ein. Also musste er selbst 1889 im nächsten Jahrgang der Zeitschrift die Auflösung verraten (Abb. 2).

Wir überlassen dem Leser die Verfolgung des originalen Lösungsansatzes der Aufgabe, dem nichts Wesentliches hinzuzufügen ist. Erstaunlich ist aber folgendes: Schaut man bei der MNU auf das Impressum, so liest man an zweiter Stelle (nach dem Alphabet) „Univ.-Prof. Dr. Frischauf in Graz“, der also wahrscheinlich über dieses magische Sechseck informiert war. Der Herausgeber der IMN, Johannes Wallner, hat nun einerseits im Jahr 2004 das magische Sechseck als Illustration auf dem Titelblatt der IMN benutzt und andererseits vor kurzem ausführlich

über Johannes Frischauf (1837–1924) berichtet [16]. Es ist bemerkenswert, dass Wallner über diesen Zusammenhang wohl nicht informiert war.¹ Ebenso ging es dem Mathematiker und Mathematikhistoriker Peter Schreiber aus Stralsund, der das magische Sechseck 1981 in der Schülerzeitschrift *alpha* in der DDR bekanntmachte [15], ohne zu ahnen, dass es sich um ein Problem aus seiner Heimatstadt handelte.

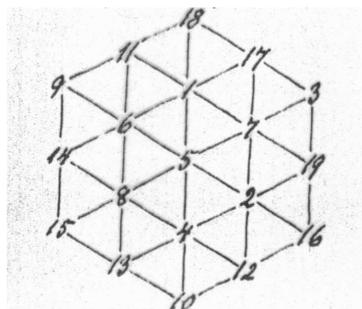
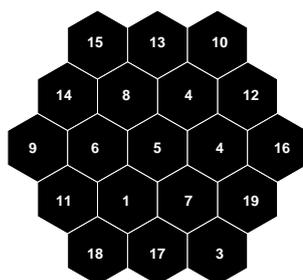


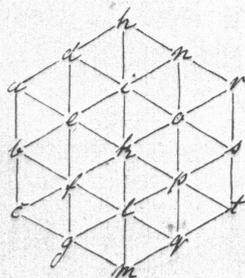
Abbildung 3: Das Sechseck H_{19} . Links: IMN 2004. Rechts: Original E. v. Haselberg.

Das magische Sechseck wird, wie wir oben sehen, in neuerer Zeit üblicherweise in das reguläre Sechseckparkett eingebettet. Erst seit 1963 wurde es zumindest in der mathematischen Öffentlichkeit wieder weithin wahrgenommen. Martin Gardners Publikation im *Scientific American* [4] bewirkte die erneute Beschäftigung mit diesem Problem, das tatsächlich nur eine einzige Lösung besitzt. Charles W. Trigg wies auf Gardners Anfrage nach, dass es für kein anderes größeres oder kleineres Sechseck dieses Typs magische Belegungen gibt. Damit war dieses magische Sechseck wahrlich einzigartig. Als Folge von Gardners Artikel wurde es allerdings in der englischsprachigen Literatur als “Adams’ magic hexagon” bezeichnet. Der Eisenbahningenieur Clifford W. Adams hatte nämlich das Problem um 1910 in der amerikanischen Zeitschrift *The Pathfinder* vorgefunden. Schon 1895 gab es auch, doch wohl Haselberg folgend (?), ein passendes 19-Puzzle von dem Lehrer William Radcliffe von der Isle of Man, 1922 ein entsprechendes englisches Patent für ein 19-Puzzle, jeweils mit der Aufgabe, H_{19} magisch zu belegen. Adams löste das Problem erst 1957, als er sich von einer Operation erholte, und sandte dann die Lösung später an Martin Gardner. Kommen wir nun wieder zu Haselberg. Wir haben hier erstmals die Möglichkeit, das 4-seitige Originalmanuskript der Aufgabe und der Lösung, das der Verfasser 1989 mit seiner Tochter im Stralsunder Stadtarchiv auffinden konnte [2], vollständig im Faksimile zu zeigen (Seiten 16–19).

¹Bemerkung des Herausgebers: Das ist richtig. Ob Frischauf über das magische Sechseck informiert war, weiß der Herausgeber nicht, denn auch heutzutage lesen Mitglieder eines Editorial Board einer Zeitschrift oftmals nicht die Artikel, die darin erscheinen.

Mathematische Aufgaben.

1.



An Stelle des in der nebenstehenden
Aufgabe angegebenen Laufs
geben Sie die Zahlen von
1 bis 19 zu setzen, sozusagen,
so daß die Summe des auf einem
einen beliebigen gewählten Laufe
gelegenen Pfades, gleichmäßig, ob
er sich aus drei, vier oder
fünf Gliedern zusammensetzt,
merktlichen Abhängigkeit sein gleich
38 ist.

Lösung:

Die Summe der sechs Zahlen an dem äußeren
Grenze des Laufs werden gleich Σa gesetzt, die
in der Mitte des Laufs in dem Zentrum des äußeren
Laufs gleich Σb , die in der Mitte des Laufs
in unmittelbarer Umgebung gleich Σc .

Man findet leicht:

- 1) $\Sigma a = 2 \times 38 - k$
- 2) $\Sigma b = 2(38 + k)$
- 3) $\Sigma c = 38 - 2k$

aus 3) ergibt sich, dass k nicht größer als 8 sein kann; wollte man $k = 9$ setzen, so würde sich $\sum e = 20$ auf ein den fünf vordringsten Stellen nicht mehr verteilen lassen.

Die kleinste Zahl, welche an einem vorderen Stellen kommen kann, ist 3. Wollte man $n = 2$ setzen, so würde sich $k+n+s+t = 2(38-2) = 72$ auf ein den vier vordersten Stellen nicht mehr verteilen lassen.

Aus der letzten Lösung ergibt sich diejenige Gleichung, die alle Zahlen, welche in der Summe vorkommen, enthält. Diese Gleichung lautet $38 = b + e + f + i + k + l$. Die übrigen Gleichungen sind $b + e + f = 0 + 10 + 5 = k + m$, $b + i + s + l = 38$, also auch $b + e + f + i + k + l = 38$.

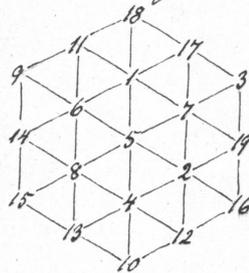
Die übrigen Gleichungen sind $b + e + f = 0 + 10 + 5 = k + m$, $b + i + s + l = 38$, also auch $b + e + f + i + k + l = 38$. Die übrigen Gleichungen sind $b + e + f = 0 + 10 + 5 = k + m$, $b + i + s + l = 38$, also auch $b + e + f + i + k + l = 38$.

Die übrigen Gleichungen sind $b + e + f = 0 + 10 + 5 = k + m$, $b + i + s + l = 38$, also auch $b + e + f + i + k + l = 38$. Die übrigen Gleichungen sind $b + e + f = 0 + 10 + 5 = k + m$, $b + i + s + l = 38$, also auch $b + e + f + i + k + l = 38$.

3)

Antwort ist wenn gewünscht die Annahme $k=8$,
 so ist mir eine ringige Gruppe für die fünf
 Personen in der unmittelbaren Umgebung des Ausgangs
 möglich ($1+2+3+4+5+4$); die zweitbeste Anordnung
 in jener möglichen Personengruppe führt aber zu keinem
 Ergebnis. Für $k=7$ sind zwei solche Gruppen,
 für $k=6$ drei Anordnungen möglich; aber auch
 mit diesen gelangt man nicht zum Ziel.

Antwort dem fünf Personenring, in welcher
 man bei der Annahme $k=5$ die Zahl $38-2k=28$
 zu setzen kann, gemischt die Gruppe $1+2+4+6+7+8$
 die ringige Lösungsmöglichkeit mögliche Lösung der
 Aufgabe sind zuerst in folgender Anordnung:



Dies oben schon angegeben ist, finden sich in
 folgenden Anordnungen:

$$14+1+19+4 = 38$$

$$13+6+17+2 = 38$$

$$12+8+11+7 = 38$$

$$\text{ferner } 14+6+8+4+5+1 = 38$$

$$19+7+2+4+5+1 = 38$$

u. s. w.

Ausloß
 Summe ist $18+4 = 16+6 = 15+7 = 22$
 sind $10+1 = 9+2 = 8+3 = 11$

Bei der fertigegebenen Aufwandsrechnung ist der
 Anschlag, daß die kleiner als 5 sei, nicht für
 einen der möglichen Ausfall der Ausgaben für
 die Summe nach dem Ansatz eingeleiteten
 Zahlen; eine andere mögliche Lösung wird aber
 nicht gefunden.

Ausloß d. 5. d. Mai
 1887.

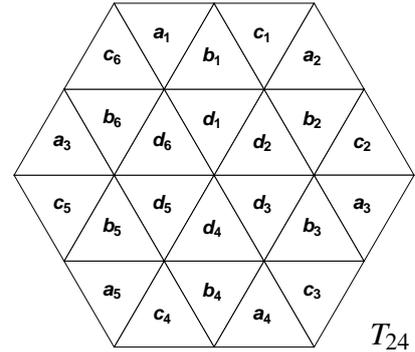
v. J. J. J.
 Herrschmann

Ausloß an v. J. J. J. d. 11. d. Mai 1887.

v. J. J.

Die Darstellung des magischen Sechsecks von E. v. Haselberg weist implizit auf das Dreiecksparkett hin, welches neben dem Quadrat- und dem Sechseckparkett das letzte der regulären Parkette in der Ebene ist. Hier schneiden sich zwei nicht-parallele Streifen ja stets in zwei gemeinsamen Dreiecken. Jedes Feld im Dreiecksparkett ist erst durch drei Streifen aus drei unterschiedlichen Richtungen eindeutig bestimmt. Dadurch unterscheidet sich das Dreiecksparkett von den beiden anderen Parketten.

Die simultane Betrachtung von Figuren in den drei Parketten führte 1989/90 zu der Überlegung, ob man neben Quadraten und Haselbergs Sechseck auch die abgebildete Figur T_{24} aus 24 Dreiecken magisch belegen kann. Das Problem und seine Lösung wurden, eingebettet in weitere Untersuchungen über Figuren in allen drei regulären Parketten, vom Verfasser in [3] veröffentlicht. Ähnlich wie beim Haselbergschen Sechseck ergeben sich aus dem Gleichungssystem von 12 Gleichungen für 24 Unbekannte einige einschränkende Bedingungen und Gesetzmäßigkeiten für magische Belegungen aus den Zahlen von 1 bis 24. Die magische Summe m , die in jedem geraden Streifen – vier parallele Streifen aus 5, 7, 7, 5 Dreiecken in jeder der drei Richtungen – zu erzielen ist, ergibt sich als $m = (1 + 2 + \dots + 24)/4 = 75$. Es gilt:



einige einschränkende Bedingungen und Gesetzmäßigkeiten für magische Belegungen aus den Zahlen von 1 bis 24. Die magische Summe m , die in jedem geraden Streifen – vier parallele Streifen aus 5, 7, 7, 5 Dreiecken in jeder der drei Richtungen – zu erzielen ist, ergibt sich als $m = (1 + 2 + \dots + 24)/4 = 75$. Es gilt:

$$\begin{aligned} b_1 + b_3 + b_5 &= b_2 + b_4 + b_6 \\ b_1 + b_3 + b_5 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 &= m \\ c_{i-2} + a_{i+2} &= b_i + d_{i-1} + d_i + d_{i+1}. \end{aligned}$$

Mit den Definitionen $a := \sum_{i=1}^6 a_i$, $b := \sum_{i=1}^6 b_i$, $c := \sum_{i=1}^6 c_i$, $d := \sum_{i=1}^6 d_i$, $D_i := a_i + b_i + c_i + d_i$ erhält man $a + b + c + d = 4m$, $b/2 + d = m$, $a + c + b/2 = 3m$, und weiter

$$\begin{aligned} D_{i-1} + D_i + D_{i+1} &= 2m \\ D_{i-2} + D_i + D_{i+2} &= 2m, \\ D_i &= D_{i+3}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$21 \leq d \leq 64, \quad 11 \leq b/2 \leq 54.$$

In Abb. 4 ist links die minimale Summe 21, rechts die maximale Summe 64 im inneren Ring um das Zentrum bei der magischen Belegung erreicht. Weitere Belegungen, auch von größeren Sechsecken dieses Typs im Dreiecksparkett, und andere interessante Aspekte wurden ab 2003 z.B. in [1] und [9] vorgelegt. Es fällt

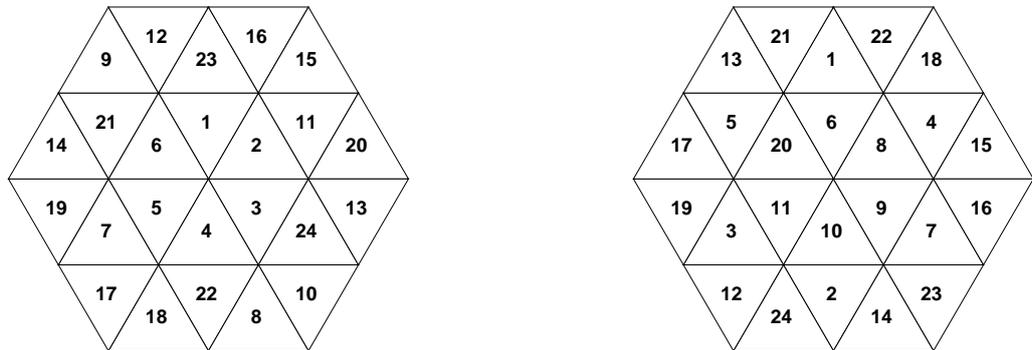


Abbildung 4: *Links*: minimale Summe im inneren Ring. *Rechts*: maximale Summe im inneren Ring.

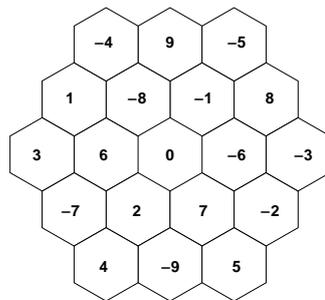


Abbildung 5: H_{19} mit magischer Summe 0.

nun auf, dass für diese Figuren aus Dreiecken und Sechsecken die Streifen unterschiedlich lang sein können, während das bei den Quadraten nicht der Fall ist. Daraus folgt unmittelbar, dass sich durch Hinzufügen eines konstanten Summanden zu jeder Zahl im Gegensatz zu der Situation bei magischen Quadraten kein neues magisches Sechseck ergibt. Damit wird das Problem, eine magische Belegung durch aufeinanderfolgende ganze Zahlen zu finden, mit jeder neuen Startzahl neu gestellt.

Dieser Idee wird im neuen Jahrtausend bei der Untersuchung von magischen Figuren vom Haselbergtyp im Sechseckparkett wieder nachgegangen [24], [20] und [23]. Anstelle der Zahlen von 1 bis n benutzt man nun allgemeiner eine ununterbrochene Folge von ganzen Zahlen, die eben nicht bei 1 beginnen muss. Das bisher größte bekannte verallgemeinerte magische Sechseck H_{169} vom Haselbergtyp besteht aus 169 kleinen Sechsecken und hat 3 mal 15 parallele Streifen.

Besonders wurden magische, zu Null symmetrische Belegungen mit der dann magischen Summe Null gesucht. Für Haselbergs Figur aus 19 Sechsecken war die Verwendung der 19 Zahlen von -9 bis 9 für eine magische Belegung der 3 mal 5 Streifen schon implizit in [13] und explizit in [10] gestellt und in [14] und [11] gelöst worden. Abb. 5 zeigt eine solche Belegung.

Es gibt nach wie vor sowohl im Dreiecks- wie im Sechseckparkett keine Algorithmen zum Erzeugen magischer Figuren beliebiger Größe. Jede neue Figur ist damit eine neue Herausforderung für trickreiches Ausprobieren und Durchsuchen der überaus vielen Möglichkeiten. Dabei stoßen auch große Computer und innovative Programmierer an ihre Grenzen [24].

Bei Figuren mit ungerader Felderanzahl $2n + 1$ wie eben H_{19} , die in verschiedenen Serien im Sechseck- und im Dreiecksparkett vom Verfasser [19] ebenfalls eingehend bezüglich magischer Belegungen behandelt wurden, kann man die Zahlen von $-n$ bis n als ununterbrochene Folge ganzer Zahlen verwenden. Wenn eine magische Belegung existiert, muss sie dann offensichtlich die magische Summe 0 haben.

Wie könnte man nun auch T_{24} , das ja wie das Haselbergsche Sechseck klassische magische Belegungen, aber eine gerade Anzahl von Feldern hat, ähnlich magisch in verallgemeinerter Weise mit der Summe 0 belegen?

Mein Kollege K.-P. Rudolph verzichtet nun bei T_{24} einfach auf die 0 als Belegungszahl und nutzt jeweils die Zahlen von 1 bis 12 und von -1 bis -12 . Er hat eine Vielzahl von Lösungen mit einem Computerprogramm gefunden.

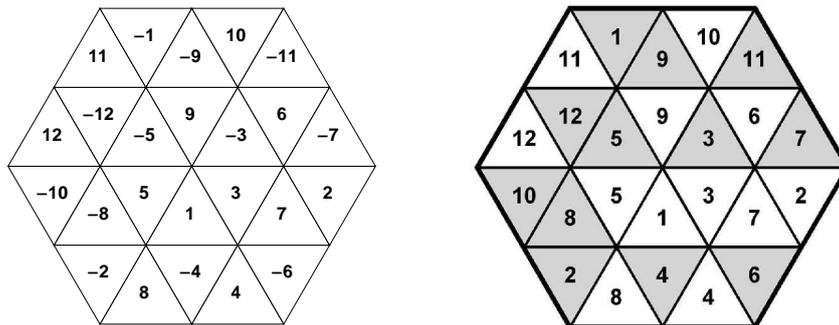


Abbildung 6: *Links:* T_{24} mit magischer Summe 0. *Rechts:* Die Guramiform von T_{24} . In jedem Streifen ist die Summe der grauen Felder gleich der Summe der weißen Felder ($12 - 10 - 8 - 2 + 8 = 0$ geht über in $12 + 8 = 10 + 8 + 2$ und $8 - 4 + 1 + 3 - 3 + 6 - 11 = 0$ geht über in $8 + 1 + 3 + 6 = 4 + 3 + 11$, usw.).

Dieser Ansatz bietet sich für jede Figur mit einer geraden Felderzahl $2n$ an: Schreibe die Zahlen von 1 bis n und von -1 bis $-n$ so in die Felder, dass sich in jedem geradlinigen Streifen die Summe 0 ergibt. Diese Aufgabe lässt sich in ein anderes Gewand kleiden und dabei ein wenig „vereinfachen“, indem man die Felder mit den negativen Zahlen grau einfärbt und anstelle der negativen Zahlen von -1 bis $-n$ noch einmal die Zahlen von 1 bis n benutzt. Dann soll bei der Belegung mit den $2n$ Zahlen (zweimal von 1 bis n) in jedem Streifen die Summe der Zahlen in den weißen Feldern gleich der Summe der Zahlen in den grauen Feldern sein.

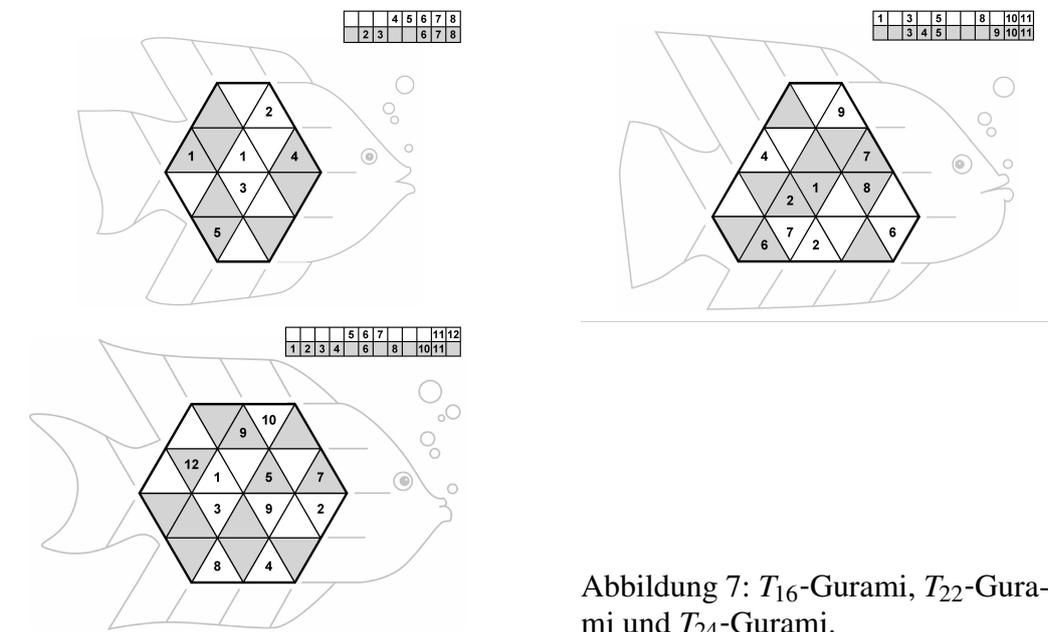


Abbildung 7: T_{16} -Gurami, T_{22} -Gurami und T_{24} -Gurami.

Der nächste Schritt zu unterhaltsamen mathematischen Rätseln ist, so viele Zahlen vorzugeben, dass sich nur genau eine Lösung ergibt. Dies ist dem Übergang von lateinischen Quadraten zu den Sudokus vergleichbar. Solche Rätsel werden in dem Büchlein [12] vorgestellt – siehe Abbildung 7. Der Name Gurami ergibt sich aus der Einbettung von Figuren in eine schematische Darstellung des gleichnamigen Fisches. Die stilisierten Gräten liefern Hilfslinien für Notizen. Für die drei Figuren T_{16} , T_{22} und T_{24} der Gurami-Rätsel von Rudolph mit jeweils 16, 22 und 24 Feldern gibt es unzählige magische Belegungen dieser Art. Der Einfachheit halber gibt es zu dem Gurami eine Tabelle, in der die noch einzutragenden Zahlen abgestrichen werden können.

Gurami-Rätsel vereinen die spannenden Fragen nach magischen Figuren mit Elementen des Sudokus. Und nun viel Spaß beim Rätseln!

Literatur

- [1] Baker, J. E. and D. R. King, Magic hexagons – magic moments, *Math. Gaz* 90 (2006), 235–248.
- [2] Bauch, H. F., Das magische Sechseck von Ernst von Haselberg, *Wissenschaft und Fortschritt* 40:9 (1990), 240–242.
- [3] Bauch, H. F., Magische Figuren in Parketten, *Math. Semesterberichte* 38 (1991), 99–115.
- [4] Gardner, M., Permutations and paradoxes in combinatorial mathematics, *Scientific American* 209 (1963), 112–119

- [5] von Haselberg, E., Baudenkmäler des Regierungsbezirkes Stralsund. (mehrbändige Publikationsreihe, 1881–1902), Stettin, Saunier.
- [6] von Haselberg, E., § 795 in *Z. f. math. und naturwiss. Unterricht* 19 (1888), 429.
- [7] von Haselberg, E., § 801 in *Z. f. math. und naturwiss. Unterricht* 20 (1889), 263–264.
- [8] Hemme, H., Das magische Sechseck in „Das Kabinett“, *Bild der Wissenschaft* 10 (1988), 164–166.
- [9] Krause, S., H. Harborth, Magic euclidean gameboards, *Congressus Numerantium* 173 (2005), 97–108.
- [10] Paasche, I., Problem 884, in *PM – Praxis d. Mathematik in der Schule* 28/4 (1986), 245.
- [11] Paasche, I., Lösung, in *PM – Praxis d. Mathematik in der Schule* 28/6 (1986), 515.
- [12] Rudolph, K.-P. und H.-F. Bauch, Gurami – das neue Zahlenrätsel mit 60 Aufgaben für kreative Tüftler, Bambus Spieleverlag Günter Cornett, Berlin 2011.
- [13] Schiffner E., Problem 107 in *Archimedes* 1 Hefte 5/6 (1949), 27.
- [14] Schiffner E., Lösung, in *Archimedes* 2 Heft 1 (1950), 9.
- [15] Schreiber, P., Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Havrda. Karls-Universität Prag. *alpha, Mathematische Schülerzeitschrift* 15 Heft 6 (1981) pp. 123, 142.
- [16] Tichy, R. und J. Wallner. Johannes Frischauf — eine schillernde Persönlichkeit in Mathematik und Alpinismus. *Int. Math. Nachr.* 210 (2009), 21–32.

Web-Referenzen:

- [17] Cornett, G., <http://www.gurami-raetsel.de>
- [18] Baker, J. E., <http://www.naturalmaths.com.au/hexagonia>
- [19] Bauch, H. F., <http://www.fh-stralsund.de>
- [20] Hoelbling, L., in http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_hexagon oder <http://www.geocities.ws/notlkh>
- [21] King, D. R., <http://www.drking.org.uk/hexagons/magic/index.html>
- [22] Köller, J., <http://www.mathematische-basteleien.de/magichexagon.htm>
- [23] Sillke, T., <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/magic-hexagon>
- [24] Zahray, A., in http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_hexagon

Adresse des Autors: Hans-Friedrich Bauch, Prof. i.R. der Fachhochschule Stralsund, Anklamer Str. 95, D 17489 Greifswald.

Elementarmathematische Betrachtungen zum Delischen Problem und zur Winkeldreiteilung

Hans Humenberger

Universität Wien

Die sogenannten vier griechischen Probleme der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal waren über Jahrhunderte (eigentlich Jahrtausende) lang Gegenstand mathematischer Aktivitäten bzw. Forschungen: (1) Das „Delische Problem“ der Würfelverdoppelung, (2) die Dreiteilung von Winkeln, (3) die Quadratur des Kreises und (4) die Konstruktion regelmäßiger n -Ecke. Hier soll nicht deren Geschichte genauestens betrachtet oder besonders tiefliegende Algebra betrieben werden, sondern wir möchten einen Zugang zu den ersten beiden auf elementarem Niveau aufzeigen, dessen erklärtes Ziel die Schaffung von „Verständnis“ (ohne genaue Definition dafür) ist. Dies ist insbesondere für allfällige Lehrerfortbildungen und Seminare für Studierende des Lehramts gedacht, ist aber auch als Thema für ausgesuchte Wahlpflichtfächer, Projekte oder „vorwissenschaftliche Facharbeiten“ (neue Reifeprüfung) vorstellbar.

1 Einleitung

Es ist ein oft angesprochenes Defizit des Mathematikunterrichts, dass die einzelnen Stoffgebiete relativ unverbunden nebeneinander stehen. Es wird nach *Vernetzung* der Gebiete verlangt, die Schülerinnen und Schüler sollten sehen, was ein Gebiet mit dem anderen zu tun hat, wie ein Gebiet Eingang in ein anderes findet – zumindest exemplarisch. An anderer Stelle haben wir das Prinzip des Vernetzens sogar als fundamentale Idee bezeichnet und unsere Vorstellungen mit

zahlreichen konkreten Beispielen dargestellt (vgl. [7, S. 345ff]¹). Die genannten Probleme (Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung nur mit Zirkel und Lineal) werden vielfach sogar als Paradebeispiele dafür genannt, wie Geometrie und Algebra zusammenhängen können. Doch meist wird das Ergebnis (nämlich deren Unmöglichkeit) wohl nur mitgeteilt und dazugesagt, dass diese geometrischen Probleme erst mit Hilfe der Algebra gelöst werden konnten. Genauer wird im Schulunterricht darauf nur selten eingegangen – für den mathematischen Pflichtunterricht an Gymnasien ist dies auch durchaus verständlich. Als Hintergrundwissen für Lehrkräfte scheint uns jedoch dieses Thema doch eine wichtige Bereicherung zu sein – sowohl als Auffrischung als auch als erstmalige genauere Beschäftigung damit.

Ein bedeutender Aspekt, der für dieses Thema spricht, ist sicher ein *kultureller* bzw. *historischer*. Diese Probleme haben so lange die mathematische Forschung beschäftigt, dass sie in einem gewissen Sinn schon Teil unseres Kulturguts geworden sind. Wir meinen nicht, dass es für *alle* (Lehrkräfte, Studierende, Schülerinnen und Schüler) interessant sein muss, die Geschichte des Problemkreises *Zusammenhänge zwischen Geometrie und Algebra* gleichsam von Alpha bis Omega nachzuschreiten, aber ein elementarer Zugang zu zwei ausgewählten Problemen bietet zumindest die *Möglichkeit*, diesen Stoff auch außerhalb einer Universitätsvorlesung über Algebra durcharbeiten, ohne einen großen Begriffsapparat vorher aufzubauen. Und eine Lehrkraft, die Mathematik unterrichtet, sollte zumindest in der Lage sein, zu diesem mathemathikhistorisch so bedeutsamen Thema etwas mehr zu erzählen, als dass ein gewisser Zusammenhang zwischen Algebra und Geometrie in den angegebenen Problemen besteht. Insofern versteht sich dieser Beitrag als Anreicherung des nötigen Hintergrundwissens von Lehrkräften.

Dieser Aufsatz soll kein Plädoyer dafür sein, die Algebra in der Schule enorm auszubauen und z.B. stundenlang zu untersuchen, ob gewisse algebraische Strukturen den Namen Gruppe, Ring oder Körper verdienen – darauf ist nämlich der frühere Schulunterricht in den algebraischen Strukturen oft hinausgelaufen, wobei meist selbst gute Schülerinnen und Schüler nicht im entferntesten verstehen konnten, was es mit diesen Namen überhaupt auf sich hat. Im Gegenteil, es ist wirklich zu begrüßen, dass man i.A. von dieser Vorgehensweise abgekommen ist. Wenn in der Schule überhaupt solche Begriffe strapaziert werden,² dann soll dies in einer Weise geschehen, in der Schülerinnen und Schüler verstehen können, dass und inwiefern hier ein wichtiges Thema vorliegt. Für eine allfällige Behandlung des Themas mit Schülerinnen und Schülern oder in Lehrveranstaltungen für Stu-

¹Dort ist zwar die Rede von fundamentalen Ideen der *Angewandten Mathematik*, wovon hier nicht gesprochen werden kann, aber auch losgelöst vom Anwendungsaspekt soll u.E. *Vernetzen* des Wissens eine Leitidee im Unterricht sein.

²Dies können wir uns z.B. im Rahmen von Begabtenförderungen mit besonders interessierten Schülerinnen und Schülern, Facharbeiten oder allgemeinen Leistungskursen mit Freiwilligen vorstellen.

dierende des Lehramts an der Universität³ haben wir deswegen an vielen Stellen konkrete *Aufgaben* in die folgenden Ausführungen angegeben.

2 Der Begriff des Körpers

Es ist besonders wichtig, zu erkennen und zu wissen, wie man zum Begriff des Körpers kommen kann, nämlich durch eine systematische Erweiterung des Zahlbegriffs. In den natürlichen Zahlen kann man nur die Addition und Multiplikation unbeschränkt ausführen, in den ganzen Zahlen auch noch die Subtraktion. Noch lange vor den negativen Zahlen kamen jedoch die *Verhältnisse* (Proportionen) natürlicher Zahlen – also die rationalen Zahlen. Nun konnte man auch uneingeschränkt dividieren und ein Körper (genannt \mathbb{Q} – die *rationalen Zahlen*) war erreicht. Grob gesprochen ist also ein Körper „etwas“, in dem alle vier Grundrechnungsarten uneingeschränkt (ausgenommen die Division durch 0) durchgeführt werden können, weswegen Körper eine besonders wichtige algebraische Struktur sind. Mit anderen Worten: In einem Körper K (z.B. \mathbb{Q}) hat die Gleichung

$$a \cdot x + b = c \quad (a, b, c \in K, a \neq 0)$$

stets eine (sogar eindeutige) Lösung $x = a^{-1}[c + (-b)] = \frac{c-b}{a}$. In \mathbb{Q} kam nun jedoch das Problem mit dem Ziehen von Wurzeln (*Radizieren*) hinzu, das in \mathbb{Q} nicht uneingeschränkt möglich war (allein diese Entdeckung löste bei den Griechen bekanntlich einen fulminanten Glaubenskampf aus) und der nächste Schritt war die Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen (\mathbb{R}) – eine Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen. Hier konnte man zwar uneingeschränkt Wurzeln ziehen, aber nur aus nicht negativen Zahlen, sodass die nächste Erweiterung auf den Körper der *komplexen Zahlen* führte. Es gibt noch viele andere Körper, die aber in der Schule i.A. nicht thematisiert werden und daher auch für Lehrkräfte keine besondere Bedeutung haben.

Für die Griechen bedeutete Mathematik fast ausschließlich *Geometrie*, sie hatten noch keine Körper (geschweige denn Körpererweiterungen und andere wichtige Elemente der Algebra – siehe später) zur Verfügung, diese Systematisierung kam erst viel später. Sie konnten – so gesehen – daher auch noch gar nicht entdeckt haben, dass die Umwandlung geometrischer Probleme in die Sprache der Algebra (durch ein Koordinatensystem) oft sehr nützlich sein kann.

\mathbb{Q} ist eigentlich ein sehr kleiner Körper, er ist sogar der kleinste Teilkörper von \mathbb{R} . Dies ist leicht einzusehen: Mit der 0 und der 1 muss wegen der uneingeschränkten Durchführbarkeit der Addition zunächst ganz \mathbb{N} , wegen der uneingeschränkten Durchführbarkeit der Subtraktion ganz \mathbb{Z} und wegen der uneingeschränkten Durchführbarkeit der Division eben ganz \mathbb{Q} im Körper enthalten sein.

³Allgemein im Folgenden als *Lernende* bezeichnet.

3 Größe von Körpern – erweiterte Körper

3.1 Gibt es Körper zwischen \mathbb{Q} und \mathbb{R} ?

Es ist doch eine interessante Frage, ob es zwischen den beiden Körpern \mathbb{Q} und \mathbb{R} vielleicht noch andere Körper gibt, oder ob man mit der Hinzunahme eines Elements, das nicht in \mathbb{Q} liegt, bereits ganz \mathbb{R} in den erweiterten Körper aufnehmen muss, ähnlich wie man mit 1 bereits *alle* rationalen Zahlen in \mathbb{Q} aufnehmen muss (siehe oben).

Probieren wir es einmal mit einer der einfachsten und bekanntesten irrationalen Zahlen – mit $\sqrt{2}$. Mit $\sqrt{2}$ müssten jedenfalls alle Zahlen $b\sqrt{2}$ (Multiplikation) und sogar alle Zahlen $a + b\sqrt{2}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) (Addition) enthalten sein. Eine konkrete Aufgabe für Lernende wäre nun, zu untersuchen (bzw. zu beweisen)⁴, ob die Menge der Zahlen $a + b\sqrt{2}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) einen Körper bildet.

Da alle Zahlen der angegebenen Form in \mathbb{R} liegen und \mathbb{R} einen Körper bildet, gelten selbstverständlich alle Rechenregeln. Es ist also nur zu untersuchen, ob mit zwei beliebigen Elementen aus der angegebenen Menge – z.B. $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ und $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$ – auch $x_1 \pm x_2$ bzw. $x_1 \cdot x_2$ und mit $0 \neq x_3 = a_3 + b_3\sqrt{2}$ auch $x_3^{-1} = \frac{1}{x_3}$ in dieser Menge liegen, also auch die Gestalt $a + b\sqrt{2}$ haben.

Für die Addition, Subtraktion und Multiplikation ist dies besonders einfach:

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2},$$
$$\text{und } (a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)\sqrt{2}.$$

Bei der Division bzw. beim Kehrwert hilft jener Trick, der auch bei der Division komplexer Zahlen angewandt wird, nämlich eine Erweiterung des Bruchs: Zunächst ist klar, dass mit $x_3 = a_3 + b_3\sqrt{2} \neq 0$ auch $a_3 - b_3\sqrt{2} \neq 0$ ist. Wäre nämlich $a_3 - b_3\sqrt{2} = 0$, so wäre $a_3 = b_3\sqrt{2}$ und somit $b_3 = a_3 = 0$ (weil sonst ja $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ wäre). Es wäre also $x_3 = 0$, was ja ausgeschlossen war. Nach dieser Überlegung dürfen wir beruhigt mit $a_3 - b_3\sqrt{2}$ erweitern und wir erhalten unter Berücksichtigung von $(a_3 + b_3\sqrt{2})(a_3 - b_3\sqrt{2}) = a_3^2 - 2b_3^2 \neq 0$:

$$(a_3 + b_3\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{a_3 + b_3\sqrt{2}} = \frac{a_3 - b_3\sqrt{2}}{(a_3 + b_3\sqrt{2})(a_3 - b_3\sqrt{2})}$$
$$= \frac{a_3 - b_3\sqrt{2}}{a_3^2 - 2b_3^2} = \frac{a_3}{a_3^2 - 2b_3^2} + \frac{-b_3}{a_3^2 - 2b_3^2}\sqrt{2},$$

also wieder eine Zahl der geforderten Gestalt. Wir haben dadurch gezeigt, dass die oben beschriebene Menge der Zahlen $a + b\sqrt{2}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) einen Körper bildet, den wir mit $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ bezeichnen wollen (der *kleinste* Körper, der \mathbb{Q} und $\sqrt{2}$

⁴Wir halten die Formulierung mit „untersuchen“ statt „beweisen“ für besser, da das Ergebnis noch nicht vorweggenommen wird.

enthält⁵). Dieser ist offenbar ein größerer als \mathbb{Q} (erweiterter Körper oder Erweiterungskörper⁶), aber ein kleinerer als \mathbb{R} .

„Mit welchen anderen Zahlen außer 2 funktioniert dieses Erweiterungsspiel durch eine Quadratwurzel noch?“, könnte eine Frage an die Lernenden lauten. Sie werden schnell auf die Antwort kommen, dass dies mit jeder Zahl funktioniert, deren Wurzel nicht in \mathbb{Q} liegt – „sonst kommt ja nichts Neues dazu!“, könnte eine hier passende Antwort sein.

3.2 Wiederholte Körpererweiterungen

Wir haben eigentlich beim Beweis, dass die Zahlen der Form $a + b\sqrt{2}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) einen Körper bilden, die spezielle Gestalt von \mathbb{Q} oder den konkreten Wert 2 gar nicht gebraucht. Vielmehr war nur wichtig, dass \mathbb{Q} selbst ein Körper war und $\sqrt{2}$ nicht selbst in diesem Körper lag. Deswegen können wir eigentlich auch allgemein formulieren:

Wenn K_0 irgendein Teilkörper von \mathbb{R} ist, so bilden die Zahlen der Form $a + b\sqrt{d}$ ($a, b, d \in K_0$, $d > 0$, $\sqrt{d} \notin K_0$) wieder einen Körper, den wir mit K_1 bezeichnen wollen. Man nennt diesen neuen (größereren) Körper K_1 einen (quadratischen⁷) Erweiterungskörper von K_0 .

Man kann nun den gerade neu erhaltenen Körper K_1 wiederum erweitern, d.h. mit $g \in K_1$, aber $\sqrt{g} \notin K_1$ kann man nach ganz analogem Muster erneut einen Erweiterungskörper konstruieren: Die Menge $K_2 := \{e + f\sqrt{g} : e, f \in K_1, g > 0, \sqrt{g} \notin K_1\}$ ist dann offenbar analog ein Erweiterungskörper des Körpers K_1 .

Dieses Verfahren kann nun prinzipiell beliebig lang fortgesetzt werden, sodass wir eine ganze Folge von Körpern bekommen $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\mathbb{Q} = K_0, K_1, K_2, \dots, K_n)$, wobei jeder Körper K_i ein Erweiterungskörper des vorherigen Körpers K_{i-1} ist. Man kann z.B. dafür schreiben

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n.$$

Diese fortgesetzten Erweiterungen betrachten wir einstweilen nur als unkompliziertes Gedankenexperiment – wir werden später nochmals darauf zurückkommen; tiefer wollen wir in die Algebra bzw. in die Theorie der Körpererweiterungen (z.B. Grad von Körpererweiterungen, irreduzible Polynome, Zerfällungskörper, Minimalpolynom, etc.) aber gar nicht eindringen. Uns genügt das bloße Verständnis von (quadratischen) Körpererweiterungen (keine große Theorie rundherum),

⁵Man sagt auch: Zu \mathbb{Q} wurde $\sqrt{2}$ „adjungiert“.

⁶Der allgemeine Begriff der Körpererweiterungen und die mit ihm zusammenhängenden Theorien brauchen in diesem Zusammenhang nicht genauer ausgebaut zu werden.

⁷Dieser Name rührt von der Erweiterung durch eine Quadratwurzel her. In weiterer Folge werden wir der Einfachheit halber jedoch nur von „Erweiterungskörpern“ sprechen, andere als quadratische werden nicht vorkommen.

und die Idee des Erweiterns von Zahlbereichen ist ja auch in der Kette $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ schon vorhanden und stellt insoferne nichts prinzipiell Neues dar.

4 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

4.1 Erklärung und Beschreibung

Es ist in einem gewissen Sinn natürlich schon erstaunlich, dass obige Ausführungen über Körper bzw. Körpererweiterungen etwas mit den Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu tun haben, dazu allerdings erst später. Dieses Erstaunliche, Spannende bzw. Interessante in den Lernenden zu wecken bzw. wach zu halten (Begeisterung schüren bzw. vermitteln) ist allgemein ein Kennzeichen eines erfolgreichen Unterrichts, auf jeder Stufe.

Die einfachsten Hilfsmittel für Konstruktionen sind Zirkel und Lineal, wobei als Lineal nur eine „Schiene“ zu verstehen ist, mit der man zwei Punkte geradlinig verbinden kann. Messen und Rechnen sollten als mögliche Fehlerquellen a priori ausgeschlossen werden. Das Lineal habe also weder eine cm-Skala noch überhaupt irgendeine Markierung. Es dürfen auch keine Punkte am Lineal durch den Konstrukteur markiert werden. Nur Konstruktionen, die mit diesen beiden Werkzeugen allein auszuführen waren, galten bei den Griechen als „wirkliche Konstruktionen“, und so ist es wohl auch nicht verwunderlich, dass man sehr lange versuchte, bei der Dreiteilung eines gegebenen Winkels oder bei der Konstruktion jener Kantenlänge, zu der ein Würfel mit doppeltem Volumen gehört, mit Zirkel und Lineal auszukommen. Es ist aber auch nicht verwunderlich – wie wir sehen werden –, dass dies niemandem gelang.

Bemerkung: Das Problem der Würfelverdoppelung heißt deshalb *Delisches Problem*, weil – einer alten Sage zufolge – bei einem Orakelspruch zu Delos die Verdoppelung des Delischen Altarwürfels gefordert wurde. Die Frage war also, wie kann man aus der vorhandenen Kantenlänge des Altarwürfels die Kantenlänge eines bzgl. des Volumens doppelt so großen Altarwürfels ermitteln?

4.2 Geometrie und Algebra – Konstruktionen in der Sprache der Algebra

Wir werden das Problem der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in die Sprache der Algebra übertragen und feststellen, dass dieses Instrumentarium geeignet ist, die in Rede stehenden Probleme zu lösen. Wir fragen zunächst, welche konstruktiven Operationen mit Zirkel und Lineal ausführbar sind und auf welche Weise wir dadurch zu neuen (konstruierbaren) Punkten kommen können.

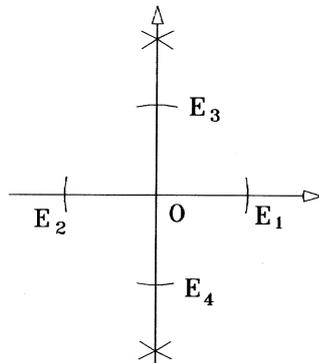


Abbildung 1: Kartesisches Koordinatensystem.

Es sind mit unseren Hilfsmitteln prinzipiell zwei verschiedene Arten von Konstruktionsgängen möglich:

- Mit dem Lineal kann man zwei bekannte Punkte (bereits konstruierte) verbinden und so die Verbindungsgerade zeichnen.
- Mit dem Zirkel kann man bei bekanntem Mittelpunkt und Radius einen ganzen Kreis bzw. einen Kreisbogen zeichnen.

Daraus ergeben sich drei Möglichkeiten, neue Punkte (= Schnittpunkte) zu konstruieren:

1. Schnittpunkt zweier Geraden,
2. Schnittpunkt(e) eines Kreises mit einer Geraden und
3. Schnittpunkt(e) zweier Kreise.

Das Abschlagen einer Strecke auf einer Geraden entspricht in diesem Sinn einem Schneiden einer Geraden mit einem Kreis. Hier wäre eine konkrete Aufgabe für Lernende zur selbstständigen Beschäftigung, wie man z.B. mit Zirkel und Lineal eine Parallele zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt (Parallelverschiebung) oder eine Normale zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt konstruiert, etc.

Für eine Übersetzung dieser möglichen Konstruktionsschritte in die Sprache der Algebra brauchen wir zunächst ein Koordinatensystem mit einer Einheitslänge. Wir geben uns einen beliebigen (ausgezeichneten) Punkt O der Ebene vor (Koordinatenursprung) und einen beliebigen anderen Punkt E_1 , den wir mit O verbinden (Gerade $OE_1 = x$ -Achse; die Halbgerade von O in Richtung E_1 sei die *positive x*-Achse). Den Abstand $|OE_1|$ definieren wir als Einheitslänge 1 (siehe Abbildung 1).

Wir können O , die x -Achse und die Einheitsstrecke OE_1 in Abbildung 1 leicht zu einem vollständigen kartesischen Koordinatensystem ergänzen, indem wir die y -Achse (Normale zur x -Achse durch O) dazukonstruieren und aus dem Punkt

$E_1(1|0)$ die drei anderen Einheitspunkte $E_2(-1|0)$, $E_3(0|1)$ und $E_4(0|-1)$ – und zwar folgendermaßen:

Den Punkt $E_2(-1|0)$ auf der negativen x -Achse erhalten wir, indem wir in O einstecken, die Strecke OE_1 in den Zirkel nehmen und diese Länge auf die andere Seite abschlagen (Schneiden des Kreises mit Mittelpunkt O und Radius 1 mit der Geraden). Nun schneiden wir die beiden Kreise mit den Mittelpunkten E_1 und E_2 und dem Radius 2 (Streckenlänge von E_1 nach E_2). Die Verbindungsgerade der erhaltenen Schnittpunkte liefert die y -Achse. Darauf können wir erneut die Strecke 1 zweimal abschlagen und erhalten die Punkte E_3 (positive y -Achse) und E_4 (negative y -Achse) – siehe Abbildung 1.

Zur Äquivalenz: Konstruierbarer Punkt in der Ebene \iff Konstruierbare Zahl auf der Zahlengeraden

Wegen der erwähnten möglichen Parallelverschiebung ist ein Punkt $(x|y)$ in der Koordinatenebene genau dann konstruierbar, wenn die zugehörigen Achsenpunkte $(x|0)$ und $(0|y)$ konstruierbar sind, d.h. wenn die Koordinaten (Zahlen) x und y auf einer Zahlengeraden konstruierbar sind. D.h. die Frage, welche Punkte in der Ebene konstruierbar sind, ist gleichbedeutend mit der Frage, welche Punkte (Zahlen) auf einer Achse (Zahlengerade, z.B. x -Achse oder y -Achse) konstruierbar sind, weshalb wir im Folgenden oft von *konstruierbaren Zahlen* (auf einer Zahlengeraden; statt von konstruierbaren Punkten in der Ebene) sprechen werden.

Mit *Konstruierbarkeit einer reellen Zahl $\pm a$ auf der Zahlengeraden* ist gemeint die Konstruierbarkeit einer Strecke mit Länge $|a|$: Die Konstruktion einer solchen Strecke führt i.A. natürlich über die Zahlengerade in die Ebene hinaus (Schnitt von Kreisen und Geraden), diese Streckenlänge kann aber klarerweise auf der Zahlengeraden nach links oder rechts abgetragen werden. Mit jeder konstruierbaren Zahl x ist natürlich auch ihre Gegenzahl $-x$ konstruierbar, sodass man sich bei den Überlegungen auf positive Zahlen beschränken kann.

Zunächst ist klar, dass alle natürlichen bzw. ganzen Zahlen konstruierbar sind, und zwar durch wiederholtes Abtragen der Einheitsstrecke. Mithilfe des Strahlensatzes überlegen wir auch leicht, dass damit auch alle rationalen Zahlen konstruierbar sind (vgl. Abbildung 2). Der Strahlensatz liefert $\frac{n}{1} = \frac{m}{x}$ bzw. $x = \frac{m}{n}$.

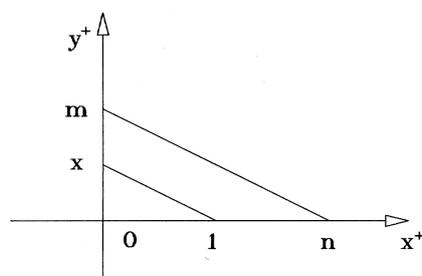


Abbildung 2: Konstruktion rationaler Zahlen (Punkte) – Strahlensatz.

Nun können wir aber nicht nur rationale Zahlen konstruieren, sondern auch Wurzeln von (nicht negativen) rationalen Zahlen \sqrt{a} , wie manche Schülerinnen und Schüler vielleicht noch aus der 8. Schulstufe wissen (insbesondere Wurzeln aus natürlichen Zahlen). Dies sogar oft auf mehrfache Weise, mithilfe des Satzes des Pythagoras, indem wir a als Summe oder Differenz von Quadraten darstellen (je nachdem erscheint \sqrt{a} dann als Hypotenusen- oder als Kathetenlänge eines rechtwinkligen Dreiecks), oder mithilfe des *Höhensatzes*, wobei dies keiner zusätzlichen Überlegung mehr bedarf wie die Darstellung als Summe bzw. Differenz zweier Quadrate, denn $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ (siehe Abbildung 3). (Wie ist der zugehörige Konstruktionsgang mit Zirkel und Lineal einzurichten? Genaue Beschreibung! Warum kann \sqrt{a} so erhalten werden? Wie wäre eine Konstruktion von \sqrt{a} mithilfe des Kathetensatzes möglich? Wiederholung der Begründungen bzw. der Beweise des Satzes von Pythagoras, des Höhen- bzw. Kathetensatzes – wieder einige konkrete Aufgaben für Lernende.)

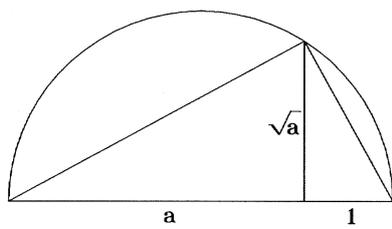


Abbildung 3: Höhensatz zur Konstruktion der Quadratwurzel.

Eine weitere Aufgabe: Die *konstruierbaren* reellen Zahlen (Punkte auf der Zahlengeraden, z.B. auf der x -Achse) bilden einen Körper (einen Teilkörper von \mathbb{R} , der nach obigen Überlegungen sicher alle rationalen Zahlen und alle Quadratwurzeln rationaler Zahlen enthält). Hier ist im Wesentlichen zu zeigen: Wenn a und b konstruierbar sind, dann sind auch $a \pm b$, $a \cdot b$ und $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$) konstruierbar. Wie können also diese Zahlen aus der Kenntnis von a und b konstruiert werden? (Strahlensatz bei $a \cdot b$ und $\frac{1}{a}$.)

4.3 Zusammenhang Konstruierbarkeit – Körper

Jetzt wird die Verbindung zu den oben besprochenen Körpern schon besser sichtbar. Wir fragen uns zunächst, ob wir mit den rationalen Zahlen und mit den Quadratwurzeln aus diesen nun schon alle konstruierbaren Zahlen gefunden haben. Die Antwort darauf ist: *Nein*, denn mit a, b, \sqrt{d} ($a, b, d \in \mathbb{Q}, d > 0, \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$) können wir auch z.B. die Zahl $a + b\sqrt{d}$ konstruieren: Diese ist weder rational noch Quadratwurzel einer rationalen Zahl (warum? Beweis als weitere Aufgabe). Wir können sogar alle solchen Zahlen konstruieren, die – wie wir bereits wissen – einen Körper K_1 bilden ($K_0 = \mathbb{Q}$). Aus solchen Zahlen aus K_1 können wir wieder die Quadratwurzel konstruieren und somit in analoger Weise alle Zahlen der Form $e + f\sqrt{g}$ ($e, f, g \in K_1, g > 0, \sqrt{g} \notin K_1$), die wiederum einen erweiterten

Körper K_2 bilden. Die obigen Gedanken zu Körpererweiterungen kommen also nun zum Tragen. Dieses Gedankenexperiment lässt sich beliebig lange fortsetzen – wir können daher formulieren:

Eine reelle Zahl x ist jedenfalls dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn sie in irgendeinem der oben beschriebenen Erweiterungskörper (ausgehend von \mathbb{Q}) liegt, anders formuliert, wenn es eine endliche Folge von Körpern

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n$$

mit $x \in K_n$ gibt, wobei jeder Körper K_{i+1} eine Erweiterung des Körpers K_i ist, also $K_{i+1} = K_i(\sqrt{d_i})$ mit $d_i(> 0) \in K_i$ und $\sqrt{d_i} \notin K_i$.

Man könnte die Elemente der Körper K_j vielleicht bezeichnenderweise „Quadratwurzel­ausdrücke“ nennen; gemeint sind damit Ausdrücke, die durch Verschachtelung von Addition, Multiplikation⁸ und Wurzelziehen entstehen. Nehmen wir als konkretes Beispiel die Zahl

$$(1 + 6\sqrt{5})\sqrt{2\sqrt{5} + 4\sqrt{3}}.$$

Durch die Adjunktion von $\sqrt{5}$ zu den rationalen Zahlen $K_0 = \mathbb{Q}$ erhalten wir den Körper $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ mit Elementen der Gestalt $a_1 + b_1\sqrt{5}$ ($a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$), dem der Ausdruck $2\sqrt{5}$ angehört. Als nächstes adjungieren wir $\sqrt{3}$ zum Körper K_1 und erhalten $K_2 = K_1(\sqrt{3})$, dem der Ausdruck $u = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$ angehört. Der Körper K_2 besteht ja aus Ausdrücken der Form $a_2 + b_2\sqrt{3}$, wobei a_2 und b_2 Elemente aus K_1 , also Ausdrücke von der Form $a_1 + b_1\sqrt{5}$ ($a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$) sind. Nun ziehen wir aus $u = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$ die Wurzel und fügen sie zu K_2 . Wir erhalten einen Körper K_3 mit Elementen der Form $a_3 + b_3\sqrt{u}$ ($a_3, b_3 \in K_2$). Diesem Körper gehört nun einerseits natürlich $\sqrt{u} = \sqrt{2\sqrt{5} + 4\sqrt{3}}$ an, und andererseits auch der ganze gegebene Quadratwurzel­ausdruck $(1 + 6\sqrt{5})\sqrt{2\sqrt{5} + 4\sqrt{3}}$, da ja der Faktor $1 + 6\sqrt{5}$ sogar aus K_1 und daher erst recht ein Element aus K_2 ist.

Nun erhebt sich die Frage, ob wir damit (mit den verschachtelten Quadratwurzel­termen) alle konstruierbaren Zahlen (Punkte) erfasst haben. Dies ist – wie sich herausstellen wird – tatsächlich der Fall. Um das zu begründen, brauchen wir uns nur daran zu erinnern, wie wir neue Punkte (Zahlen) mit Zirkel und Lineal aus bekannten konstruieren können. Hier gibt es nur die bereits erwähnten drei Möglichkeiten, nämlich (1) Schneiden zweier Geraden, (2) Schneiden einer Geraden mit einem Kreis und (3) Schneiden zweier Kreise, wobei Geraden durch Verbinden zweier bekannter (konstruierbarer) Punkte und Kreise bei bekanntem (konstruierbarem) Mittelpunkt und Radius entstehen können.

Schnitt zweier Geraden. Da es im Folgenden um die konkrete Algebraisierung von Geraden und Kreisen (in der Ebene) geht, wenden wir uns nun wieder der

⁸Hier sind auch Subtraktion und Division eingeschlossen.

ursprünglichen Sichtweise *Punkte in der Ebene* (mit 2 Koordinaten) zu, statt – wie oben mehrfach – Zahlen auf einer Zahlengeraden.

Wir stellen zunächst die Gleichung einer Geraden durch zwei konstruierbare Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$ (konkrete Aufgabe!) auf, wobei die Werte a_1, a_2, b_1, b_2 in einem festen Körper K liegen sollen, der nur bereits als konstruierbar erkannte Zahlen enthält. Wir werden sehen, dass dann auch deren Schnittpunkt bzw. die Koordinaten des Schnittpunktes (falls überhaupt einer existiert) in K liegen. Durch Schneiden von Geraden kann man also keine neuen, nicht in K liegende Punkte, als konstruierbar erkennen (keine Erweiterung von K möglich). Für die gesuchte Gleichung der Geraden erhalten wir

$$(a_2 - b_2)x + (b_1 - a_1)y = a_2 b_1 - a_1 b_2,$$

d.h. sie ist von der Form

$$ux + vy = w \quad \text{mit} \quad u, v, w \in K.$$

Berechnen wir nun die Koordinaten x_0, y_0 des (als existent vorausgesetzten) Schnittpunktes zweier solcher Geraden, d.h. die Lösung $(x_0|y_0)$ des Gleichungssystems ($u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 \in K$)

$$\begin{aligned} u_1 x + v_1 y &= w_1 \\ u_2 x + v_2 y &= w_2, \end{aligned}$$

so sehen wir, dass diese Koordinaten natürlich wieder in K liegen:

$$x_0 = \frac{v_2 w_1 - v_1 w_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{u_1 w_2 - u_2 w_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}.$$

Schnitt eines Kreises mit einer Geraden bzw. zwei Kreisen. Betrachten wir zunächst einmal die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunktskoordinaten a und b und dessen Radius r im oben schon beschriebenen Körper K liegen: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (mit r liegt auch r^2 in K .) Die Kreisgleichung hat also die Gestalt

$$x^2 + y^2 + kx + ly = m \quad \text{mit} \quad k, l, m \in K.$$

Schneiden wir einen solchen Kreis mit einer Geraden

$$ux + vy = w \quad (u, v, w \in K),$$

so ist dabei eine quadratische Gleichung zu lösen, in deren Lösungsformel nur eine Quadratwurzel auftritt und keine komplexeren Terme. Die Lösung (Schnittpunkt) liegt also entweder in K selbst oder in einer Erweiterung von K durch eine Quadratwurzel, nämlich in $K(\sqrt{d})$, wenn d die in der Lösungsformel der

quadratischen Gleichung auftretende Diskriminante bezeichnet. Sie ist von der Form $a_1 + b_1 \sqrt{d}$ ($a_1, b_1 \in K$). Das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden kann (wird i.A.) demnach „aus dem Körper K herausführen“, jedoch ist nur eine Körpererweiterung durch eine Quadratwurzel – so wie oben beschrieben – denkbar.

Schneiden wir schließlich zwei Kreise der Form

$$x^2 + y^2 + k_1 x + l_1 y = m_1 \quad (k_1, l_1, m_1 \in K)$$

$$x^2 + y^2 + k_2 x + l_2 y = m_2 \quad (k_2, l_2, m_2 \in K),$$

so erhalten wir durch Subtrahieren der beiden Gleichungen eine (lineare) Geradengleichung

$$(k_1 - k_2)x + (l_1 - l_2)y = m_1 - m_2,$$

aus der wir eine Unbekannte explizieren und in eine der beiden Kreisgleichungen einsetzen können. Der Schnitt zweier Kreise entspricht also rechnerisch dem Schnitt eines Kreises mit einer Geraden, so dass wir aufgrund obiger Überlegungen auch hier sagen können, dass die Koordinaten der Schnittpunkte entweder in K selbst oder in einem (quadratischen) Erweiterungskörper liegen müssen.

Bemerkung: Da der Schnitt der durch Subtraktion erhaltenen Geraden mit einem der beiden gegebenen Kreise dasselbe Ergebnis liefert wie der Schnitt der beiden ursprünglichen Kreise, muss es sich um eine ganz besondere Gerade handeln, nämlich um jene, die eben durch die beiden Schnittpunkte der beiden Kreise geht (falls Schnittpunkte überhaupt existieren – „Potenzgerade“).

Alle mit Zirkel und Lineal in einem Schritt⁹ konstruierbaren Punkte liegen also entweder im ursprünglichen Körper K (Schnitt Gerade–Gerade) oder allenfalls in einem quadratischen Erweiterungskörper $K(\sqrt{d})$ (Schnitt Kreis–Gerade und Kreis–Kreis).

Wir haben somit eine genaue algebraische Charakterisierung der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen (Punkte) gewonnen bzw. folgenden bekannten Satz bewiesen:

Satz: Eine Zahl a bzw. ein Punkt $(a_1|a_2)$ ist genau dann konstruierbar, wenn es eine endliche¹⁰ Folge von Körpern

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_n$$

mit $a \in K_n$ (bzw. $a_1 \in K_n$ und $a_2 \in K_n$) gibt, wobei jeder Körper K_{i+1} eine quadratische Erweiterung seines jeweiligen Vorgängerkörpers K_i ist – wenn also $K_{i+1} = K_i(\sqrt{d_i})$ mit $d_i (> 0) \in K_i$, aber $\sqrt{d_i} \notin K_i$.

⁹Gemeint ist die Konstruktion eines Schnittpunkts.

¹⁰Für unendlich oftmalige Konstruktionsschritte (= mögliche Erweiterungen) haben wir auf Erden wohl weder den Platz noch die Zeit.

5 Das Problem der Würfelverdoppelung – Delisches Problem

Nun begeben wir uns wieder zurück zu einem unserer Ausgangspunkte, dem Delischen Problem der Würfelverdoppelung, zu dessen Lösung die gewonnene Charakterisierung der konstruierbaren Zahlen gute Dienste leistet.

Nehmen wir den einfachsten Würfel, den Einheitswürfel mit Kantenlänge 1, dieser hat auch Volumen 1. Ein Würfel mit doppeltem Volumen 2 müsste daher eine Kantenlänge von $\sqrt[3]{2}$ haben. Wir werden jedoch in zwei Teilen zeigen, dass $\sqrt[3]{2}$ mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar ist und somit die Unmöglichkeit der Würfelverdoppelung mit diesen Instrumenten beweisen.

Beweis: (vgl. z.B. [1, S. 153f]) Wenn $\sqrt[3]{2}$ konstruierbar wäre, so gäbe es einen Körper K_n , der durch sukzessive quadratische Körpererweiterungen aus \mathbb{Q} entsteht, in dem $x = \sqrt[3]{2}$ läge:

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n.$$

Wenn $x = \sqrt[3]{2} \in K_n$ wäre, so gäbe es offenbar ein $x \in K_n$ mit $x^3 = 2$. Wir zeigen (siehe unten):

$$\exists x \in K(\sqrt{d}) \text{ mit } x^3 = 2 \quad \implies \quad \exists y \in K \text{ mit } y^3 = 2. \quad (*)$$

Schrittweise angewandt auf die endliche Folge $\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n$ bedeutet dies:

Wenn es in einem Körper K_n eine Zahl x gäbe, für die $x^3 = 2$ gilt, so gäbe es auch eine solche Zahl in K_{n-1} , dann gäbe es aber auch eine in K_{n-2} usw., bis wir schließlich zu $K_0 = \mathbb{Q}$ kämen. Es müsste also auch eine rationale Zahl ($x \in \mathbb{Q}$) geben mit $x^3 = 2$. So eine Zahl kann es aber bekanntlich nicht geben (es gibt viele verschiedene Beweise für die Tatsache $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$). Durch diesen Widerspruch ist dann alles gezeigt. \square

Beweis der Gleichung ():* Angenommen es gibt ein $x \in K(\sqrt{d})$ mit $x^3 = 2$, also

$$(a + b\sqrt{d})^3 - 2 = 0 \quad \text{mit} \quad a, b, d \in K, d > 0, \sqrt{d} \notin K. \quad (2)$$

Daraus erhalten wir

$$0 = \underbrace{a^3 + 3ab^2d - 2}_{=:u} + \underbrace{b(3a^2 + b^2d)}_{=:v} \sqrt{d} = u + v\sqrt{d}. \quad (3)$$

Wäre $v = b(3a^2 + b^2d)$, der Koeffizient von \sqrt{d} in Gleichung (3), ungleich Null, so wäre $\sqrt{d} = -\frac{a^3 + 3ab^2d - 2}{b(3a^2 + b^2d)} \in K$, ein Widerspruch! Daher muss der Koeffizient $v = b(3a^2 + b^2d)$ Null sein.

Wegen $d > 0$ wäre für $b \neq 0$ mit Sicherheit $v \neq 0$, woraus $b = 0$ folgt. Aus Gleichung (2) folgt dann aber, dass $a^3 = 2$ ist mit $a \in K$, also genau das, was wir zeigen wollten. \square

Damit haben wir nicht nur die Unmöglichkeit der Delischen Würfelverdoppelung mit Zirkel und Lineal bei Kantenlänge $k = 1$ gezeigt, sondern auch die *generelle* Unmöglichkeit: Bei einer Kantenlänge $k \neq 1$ des Ausgangswürfels (k gegeben) wäre der Wert $k \cdot \sqrt[3]{2}$ zu konstruieren, was unmöglich ist, wenn $\sqrt[3]{2}$ nicht konstruierbar ist.

Bemerkung: Man könnte den Beweis auch etwas anders formulieren (Verallgemeinerung siehe unten): Wenn $a + b\sqrt{d}$ Nullstelle des kubischen Polynoms $p(x) := x^3 - 2$ ist, so ist auch $a - b\sqrt{d}$ eine Nullstelle (dies sieht man z.B. durch: $0 = p(a + b\sqrt{d}) = u + v\sqrt{d} \implies v = u = 0$ und $p(a - b\sqrt{d}) = u - v\sqrt{d} = 0$). Da p wegen der strengen Monotonie nur eine einzige reelle Nullstelle haben kann, folgt $b = 0$.

6 Das Problem der Winkeldreiteilung

Hier kann nicht mehr von einer generellen Unmöglichkeit¹¹ einer Winkeldreiteilung durch Zirkel und Lineal gesprochen werden, sondern nur mehr von der Unmöglichkeit eines Verfahrens, das allgemein, für jeden beliebigen Winkel, eine Lösung brächte. So ist z.B. ein Winkel von $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ sicher in drei gleich große Teilwinkel zu je $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ zerlegbar, weil bekanntlich ein Winkel von $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ konstruierbar ist (wie? genaue Erklärung ist eine Aufgabe für Lernende), und das ist ein Drittel von 90° . Noch einfacher ist ein Drittel von 180° , nämlich 60° , zu konstruieren. Wir brauchen, um die Existenz eines generell funktionierenden Verfahrens zu widerlegen, nur ein Beispiel eines Winkels, den man mit Zirkel und Lineal nicht dritteln kann.

Einen solchen finden wir im (leicht konstruierbaren) Winkel $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, von dem wir zeigen können, dass er nicht gedrittelt werden kann, indem wir nachweisen, dass sein Drittel, nämlich $\frac{\pi}{9} = 20^\circ$, nicht konstruierbar ist (vgl. z.B. [1, S. 154f]).

Dazu halten wir zunächst einmal fest, dass ein Winkel α klarerweise genau dann konstruierbar ist, wenn $\cos \alpha$ bzw. $\sin \alpha$ konstruiert werden können. Es genügt daher, zu zeigen, dass z.B. $\cos \frac{\pi}{9} = \cos 20^\circ$ nicht konstruierbar ist (warum genügt das? Begründung ist eine Aufgabe).

Als Voraufgabe leiten wir den Summensatz über den Kosinus eines dreifachen

¹¹Wie beim Delischen Problem.

Winkels her (konkrete Aufgabe – elementare Trigonometrie). Wir erhalten

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha \\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= \cos^3\alpha - 3(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.\end{aligned}$$

In der schließlich erhaltenen Beziehung $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ nehmen wir nun $\alpha = \frac{\pi}{9} = 20^\circ$. Mit $\cos\alpha = \cos 20^\circ = u$ und wegen $\cos(3\alpha) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ erhalten wir die Gleichung $\frac{1}{2} = 4u^3 - 3u$ bzw. $8u^3 - 6u - 1 = 0$. Setzen wir hier noch $x = 2u$, so ergibt sich

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Wir werden zeigen, dass keine Lösung dieser Gleichung konstruierbar ist, woraus dann folgt, dass auch $\frac{x}{2} = u = \cos 20^\circ$ bzw. $\alpha = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$ selbst nicht konstruierbar ist. Damit kann es kein allgemeines Verfahren zur Winkeldreiteilung (Trisektion) geben, da sonst auch ein Drittel von 60° (eben 20°) konstruierbar sein müsste. Wir betrachten zunächst folgenden

Hilfssatz: Wenn das normierte kubische Polynom $p(x) := x^3 + rx^2 + sx + t$ mit Koeffizienten $r, s, t \in K_0$ die Nullstelle $a + b\sqrt{d} \in K_1$ hat, dann hat es bereits eine Nullstelle in K_0 .

Beweis: Durch algebraische Rechnung folgt analog zu oben: Wenn $x_1 = a + b\sqrt{d}$ Nullstelle des kubischen Polynoms $p(x)$ ist, so ist auch $x_2 = a - b\sqrt{d}$ eine Nullstelle: $0 = p(a + b\sqrt{d}) = \dots = u + v\sqrt{d} \Rightarrow v = u = 0$ und $p(a - b\sqrt{d}) = \dots = u - v\sqrt{d} = 0$. Wenn $b = 0$ ist, so ist die Behauptung bereits erfüllt. Wenn $b \neq 0$ ist, so ist $x_1 \neq x_2$ und wegen des Wurzelsatzes von Vieta gilt für die dritte Nullstelle $x_3 = -r - (x_1 + x_2) = -r - 2a \in K_0$. \square

Wir wenden diesen Hilfssatz sukzessive auf die obige Gleichung $x^3 - 3x - 1 = 0$ an (Polynom mit rationalen Koeffizienten): Wenn $x^3 - 3x - 1 = 0$ eine Lösung in einem Erweiterungskörper K_n hat, so hat sie auch eine Lösung in $K_0 = \mathbb{Q}$; dies kann aber nicht sein:

Wenn es eine Lösung $x = \frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) gäbe, also

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 - 3\frac{m}{n} - 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad m^3 - 3mn^2 - n^3 = 0,$$

so gäbe es auch eine, bei der m und n teilerfremd sind (es kann gekürzt werden). Wäre p ein beliebiger Primteiler von m , so teile p die ersten beiden Summanden obiger Gleichung und müsste daher auch den dritten Summanden $-n^3$ teilen. Aus $p|n^3$ folgte aber $p|n$ (p ist eine Primzahl¹²), was einen Widerspruch zur Teilerfremdheit von m und n darstellte (analog würde $p|m$ aus $p|n$ folgen). Dieser

¹²Eine grundlegende Eigenschaft von Primzahlen, die mitunter auch zur Definition erhoben

Widerspruch tritt nur dann nicht auf, wenn die Zahlen m, n gar keine Primteiler hätten, also $m = \pm 1, n = 1$; dann wäre aber $x = \pm 1$, was ebenfalls einen Widerspruch darstellte, denn ± 1 ist sicher keine Lösung von $x^3 - 3x - 1 = 0$. Damit ist alles gezeigt.

Nebenergebnis: Welche Auswirkungen hat unsere Erkenntnis auf die Konstruktion regelmäßiger n -Ecke? (konkrete Aufgabe). Mit der Unmöglichkeit, einen Winkel von 20° mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, haben wir nicht nur gezeigt, dass i.A. die Winkeldreiteilung nicht möglich ist, sondern wir können dadurch ohne weiteren Aufwand ein wenig ins Umfeld eines berühmten anderen griechischen Problems gelangen – der *Konstruktion regelmäßiger n -Ecke*. Den Winkel von 20° bräuchte man für die Konstruktion eines regelmäßigen $360 : 20 = 18$ -Ecks. Da man Winkel natürlich mit Zirkel und Lineal verdoppeln bzw. halbieren kann, sind mit 20° auch die Winkel $40^\circ, 10^\circ$ und 5° nicht konstruierbar. An nicht konstruierbaren regelmäßigen n -Ecken erhalten wir also als Nebenergebnis unserer Betrachtungen: $n = 9, 18, 36, 72, \dots$ allgemein: $n = 9 \cdot 2^k$ mit $k = 0, 1, 2, \dots$

7 Das regelmäßige Siebeneck

Es gibt seit Gauß eine genaue Charakterisierung der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren regelmäßigen Vielecke. Sein Resultat:

Das regelmäßige n -Eck lässt sich genau dann mit Zirkel und Lineal konstruieren, wenn n eine Zweierpotenz ist oder $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_l$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und die p_i paarweise verschiedene Fermat-Primzahlen, d.h. Primzahlen vom Typus $p_i = 2^{2^m} + 1$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, sind.

Dieses Resultat ist nicht mit elementaren Mitteln einzusehen, aber immerhin kann man mit komplexen Zahlen und elementaren Mitteln einsehen, dass das regelmäßige Siebeneck nicht konstruierbar ist, vgl. [2, S. 111].

Vorbemerkung: Man überzeugt sich mit komplexen Zahlen leicht: $z = \cos \phi + i \sin \phi \implies \frac{1}{z} = \cos \phi - i \sin \phi$.

Wir wollen die Seitenlänge x des dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen Siebenecks finden. Die Ecken dieses Siebenecks sind die Wurzeln der Gleichung $z^7 - 1 = 0$. Eine Wurzel ist $z = 1$ und durch Abspalten des Linearfaktors

wird, ist: $p|ab \implies p|a$ oder $p|b$. In \mathbb{Z} ist diese Eigenschaft äquivalent mit der Definition durch die Irreduzibilität (p hat nur die trivialen Teiler ± 1 und $\pm p$). In allgemeineren Zahlenwelten ist diese Definition („irreduzibel“) jedoch nicht mehr äquivalent mit der genannten Eigenschaft („prim“). Daher gibt es dort die Unterscheidung *irreduzibel* und *prim*.

$z - 1$ ergibt sich:

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch z^3 , so ergibt sich $z^3 + 1/z^3 + z^2 + 1/z^2 + z + 1/z + 1 = 0$ bzw. nach einigen Umformungen

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0.$$

Mit $z = \cos\phi + i\sin\phi$ ist $z + 1/z = 2\cos\phi =: y$. Damit ist klar: $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann konstruierbar, wenn es y bzw. $\cos\phi$ ist.

Substituiert man in obiger Gleichung noch $y = z + 1/z$, so ergibt sich die Polynomgleichung (rationale Koeffizienten):

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0.$$

Wenn es hier eine konstruierbare Lösung aus K_n gäbe, so müsste es – wie oben bei der Winkeldreiteilung – auch eine rationale Lösung geben (Hilfssatz).

Dies kann aber nicht sein, denn eine rationale Lösung $y = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden $m, n \in \mathbb{N}$ wäre gleichbedeutend mit:

$$m^3 + m^2n - 2mn^2 - n^3 = 0$$

Jeder Primteiler von m wäre also auch einer von n und umgekehrt, sie können also keine Primteiler haben, d.h. $y = \pm 1$. Aber keine der beiden Zahlen ist Lösung obiger Gleichung.

D.h. das regelmäßige Siebeneck ist mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar.

Erstaunlicherweise ist es aber möglich, das regelmäßige Siebeneck durch Papierfalten (Origami) *exakt*¹³ zu bekommen (siehe z.B. [6]). So gesehen ist Papierfalten mächtiger als Zirkel und Lineal. Für das regelmäßige Siebeneck gibt es auch gute und einfachere Näherungslösungen mittels Papierfalten, vgl. z.B. [5, S. 5ff]) oder [4].

8 Konstruktionen mittels eines markierten Lineals und Papierfalten (Origami)

Wir haben gezeigt, dass Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung nicht mit Zirkel und Lineal alleine (exakt¹⁴) durchführbar sind; gleichwohl gibt es Wege, die

¹³Hier ist *theoretische* Exaktheit gemeint. Natürlich ist viel Genauigkeit, Übung und Geschick erforderlich, um ein akzeptables Resultat zu bekommen.

¹⁴Hier soll sich das Wort *exakt* auf die genaue Durchführung eines Gedankenprozesses beziehen, die praktische Durchführung einer Konstruktion mit Instrumenten ist notwendigerweise

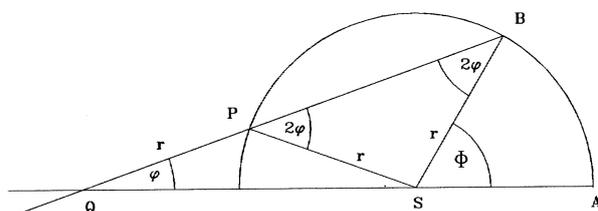


Abbildung 4: Konstruktion für die Winkel-dreiteilung mithilfe eines markierten Lineals nach Archimedes.

genannten Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln durchzuführen. Dies wollen wir am Beispiel der Winkel-dreiteilung kurz erläutern.

Für die *Dreiteilung des Winkels* gibt es eine alte Konstruktion, die von Archimedes herrührt (siehe Abbildung 4).

1. Gegeben sei ein Winkel Φ mit Scheitel S . Wir zeichnen einen Kreis mit beliebigem Radius r und Mittelpunkt S , der die beiden Winkelschenkel in A bzw. B schneidet.
2. Wir markieren auf dem Lineal eine Strecke der Länge r und legen dieses so an, dass es erstens durch B geht und dass zweitens der eine am Lineal markierte Endpunkt (der Strecke mit Länge r) auf dem Kreis (Punkt P) und der andere Endpunkt auf der Verlängerung von AS über S hinaus zu liegen kommt (Punkt Q).
3. Dann ist der Winkel $\angle PQS =: \varphi$ ein Drittel des gegebenen Winkels Φ .

Der Beweis ist hier ganz einfach: Da das Dreieck PQS gleichschenkelig ist, ist auch der Winkel $\angle PSQ = \varphi$ und der Außenwinkel $\angle SPB = 2\varphi$. Da das Dreieck SPB ebenfalls gleichschenkelig ist, muss auch der Winkel $\angle SBP = 2\varphi$ sein. Im Dreieck QSB muss nun Φ , der Außenwinkel bei S , gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel $2\varphi + \varphi$ sein, woraus unmittelbar $\varphi = \frac{1}{3}\Phi$ folgt.

Als eine weitere Möglichkeit sei eine *Papierfaltkonstruktion* (Origami) zur Winkel-drittelerung angeführt (siehe Abbildung 5a–f, vgl. [3, S. 44]): Man nehme ein rechteckiges Blatt Papier $ABCD$ (z.B. ein DIN A4-Blatt), wähle einen Punkt $P \in AD$ und falte den zu drittelnden Winkel $\alpha = \angle CBP$. Weiters falte man eine beliebige Parallele EF zu BC und die Mittelparallele GH von EF und BC .

Man faltet dann die Ecke B so ab, dass E auf BP und gleichzeitig B auf GH liegt, markiert die Bildpunkte B' und E' und faltet wieder zurück. Die letzte Faltkante schneidet GH in I . Nun gilt: Die Linien BB' und BI dritteln den Ausgangswinkel $\alpha = \angle CBP$. Der Beweis ist eine schöne elementargeometrische Übungsaufgabe.

ungenau – bedingt durch die Exaktheitsgrenzen der Instrumente und des menschlichen Konstrukteurs.

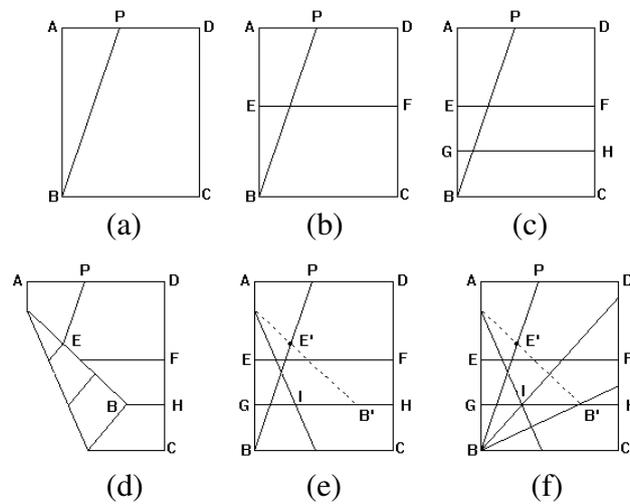


Abbildung 5: Papierfaltkonstruktion für die Winkeldreiteilung.

Literatur

- [1] Cigler, J.: *Grundideen der Mathematik*. BI-Verlag 1991.
- [2] Courant, R., H. Robbins: *Was ist Mathematik?* Springer 1992.
- [3] Henn, H.-W.: *Elementare Geometrie und Algebra*. Vieweg 2003.
- [4] Henn, H.-W. (2005): Origamics: Gefaltete Mathematik. In: Henn, H.-W., Kaiser, G. (Hrsg.): *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation*. Festschrift für Werner Blum, 71–80. Franzbecker 2005.
- [5] Hilton, P., Pedersen, J.: The unity of mathematics: A casebook comprising practical geometry number theory and linear algebra. *Teaching Mathematics and Computer Science* 1/1 (2003), 1–34.
- [6] Hull, T.C.: Folding Regular Heptagons. In: Pegg, E., Schoen, A.H., Rodgers, T. (Hrsg.): *Homage to a Pied Puzzler*. AK Peters 2009.
- [7] Humenberger, H., H.-C. Reichel: *Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. BI-Verlag 1995.

Anschrift des Verfassers: *Hans Humenberger, Fakultät für Mathematik der Univ. Wien, Nordbergstraße 15, 1090 Wien. email hans.humenberger@univie.ac.at.*

INDIANA UNIVERSITY MATHEMATICS JOURNAL

(Formerly the Journal of Mathematics and Mechanics)

Edited by

E. Bedford, H. Bercovici, N. Katz, M. Larsen, P. Sternberg, V.
Turaev, K. Zumbrun.

For institutions, the print and online subscription rates are \$400.00 and \$320.00. Individual subscribers' fees are \$100.00 and \$50.00, respectively. The JOURNAL appears in 6 annual issues averaging more than 500 pages each.

Indiana University, Bloomington, Indiana U.S.A

Buchbesprechungen

<i>S. Asmussen, H. Albrecher</i> : Ruin Probabilities (M. PREDOTA)	46
<i>S. Brendle</i> : Ricci Flow and the Sphere Theorem (A. ČAP)	46
<i>G. Eskin</i> : Lectures on Linear Partial Differential Equations (G. TESCHL)	47
<i>K. Harada</i> : “Moonshine” of Finite Groups (P. GRABNER)	47
<i>E. Kartashova</i> : Nonlinear Resonance Analysis (R. TICHY)	48
<i>J. W. Morgan, F. Tsz-Ho Fong</i> : Ricci Flow and Geometrization of 3-Manifolds (A. ČAP)	48
<i>P. Mörters, Y. Peres</i> : Brownian Motion (W. WOESS)	49
<i>J. M. Muller et. al.</i> : Handbook of Floating-Point Arithmetic (W. AUZINGER)	49
<i>Y. A. Neretin</i> : Lectures on Gaussian Integral Operators and Classical Groups (F. LUEF)	50
<i>M. Pitici (ed.)</i> : The Best Writing on Mathematics 2010 (C. ELSHOLTZ) .	51
<i>J. J. Rotman</i> : Advanced Modern Algebra (G. PILZ)	52
<i>D. Schleicher, M. Lackmann</i> : An Invitation to Mathematics (S. WAGNER)	52
<i>G. Strang</i> : Wissenschaftliches Rechnen (W. AUZINGER)	53
<i>A. Stubhaug</i> : Gösta Mittag-Leffler (F. HASLINGER)	54
<i>T. Tao</i> : An Epsilon of Room, I: Real Analysis (J. MORGENBESSER) . . .	55
<i>W. Woess</i> : Denumerable Markov Chains (S. WAGNER)	56
<i>E. Zehnder</i> : Lectures on Dynamical Systems (F. LUEF)	56

S. Asmussen, H. Albrecher: Ruin Probabilities. Second Edition. (Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability, Vol. 14.) World Scientific, New Jersey, 2010, xvii+602 S. ISBN 978-981-4282-52-9 H/b £ 76,—.

Das vorliegende Buch ist die zweite, deutlich erweiterte Auflage des Buchs von S. Asmussen aus dem Jahr 2000 zum Themenkomplex Ruinwahrscheinlichkeiten, also der Wahrscheinlichkeit, dass ein Versicherungsunternehmen ruiniert wird. Nach der Einführung in verschiedene mathematische Grundlagen enthält es viele neue, aber auch erweiterte Abschnitte. Es ist vor allem um aktuelle Forschungsergebnisse ergänzt, bspw. Ruin-Wahrscheinlichkeiten für Lévy-Prozesse, Gerber-Shiu-Funktionen, Abhängigkeit von Risiken oder stochastische Kontrolle. Zur Veranschaulichung sind im Text immer wieder gut passende Abbildungen enthalten.

Das Buch stellt gerade im Hinblick auf aktuelle Entwicklungen im Versicherungsbereich ein wertvolles Kompendium dar, um auf neueste Entwicklungen im Sinne einer adäquaten Risikosteuerung reagieren zu können. Es beinhaltet die wesentlichen Modelle und Methoden der Ruinthorie von Beginn an. Das Buch ist sowohl für Forschungszwecke, für den Lehrbetrieb, für Selbststudium als auch für praktische Verwendungen in Versicherungsunternehmen geeignet.

M. Predota (Wien)

S. Brendle: Ricci Flow and the Sphere Theorem. (Graduate Studies in Mathematics 111.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, vii+176 S. ISBN 978-0-8218-4938-5 H/b \$ 47,—.

The celebrated applications of Hamilton's Ricci Flow culminating in Perelman's proof of Thurston's geometrization conjecture concern dimension three. This dimension is special, since the Ricci curvature in three dimensions contains complete information on the Riemann curvature, which is not true in higher dimensions.

The book under review describes a very interesting application of the Ricci flow in general dimensions. The basic aim of sphere theorems is proving that manifolds admitting Riemannian metrics which satisfy certain curvature bounds must be spheres. The classical result of Berger and Klingenberg in this direction (from the 1960s) is that a condition on sectional curvature known as $\frac{1}{4}$ -pinching implies homeomorphism to a sphere. The question whether such a manifold is diffeomorphic to a sphere (which is relevant in view of existence of exotic spheres) was answered only recently by the author of this book in collaboration with R. Schoen. Explaining the proof of this result is one of the aims of the book.

After an introductory chapter on Riemannian geometry and various older sphere theorems, the author develops the basics of the Ricci flow. The main part of the book is devoted to the study of curvature conditions which are preserved under

the Ricci flow, in particular, positive and non-negative isotropic curvature. Relations to Kähler-Einstein and quaternion Kähler manifolds are discussed. While the book is rather short, it is easy to read and presents a very nice and comprehensive introduction to a currently hot topic in differential geometry. For the ambitious reader, 16 problems are provided in the end of the book.

A. Čap (Wien)

G. Eskin: Lectures on Linear Partial Differential Equations. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 123.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011, xvii+410 S. ISBN 978-0-8218-5284-2 H/b \$ 74,-.

The present textbook serves as a graduate-level introduction to linear partial differential equations using Fourier analysis as the main tool. As a prerequisite, familiarity with Lebesgue integration, the Fourier transform, and some basic functional analysis is assumed. The book starts out with discussing distributions, their Fourier transforms, and Sobolev spaces and then moves on to apply these tools to investigate constant coefficient equations in Euclidean space. In particular, fundamental solutions (the Malgrange-Ehrenpreis theorem), hypoellipticity, radiation conditions, single and double layer potentials are discussed. The remaining chapters deal with elliptic equations in bounded domains, scattering theory for the Schrödinger equation (existence and asymptotics of distorted plane waves, an inverse problem) pseudodifferential operators (with applications to the Cauchy problems for parabolic and hyperbolic equations, Hörmander's theorem on propagation of singularities), elliptic boundary value problems and parametrices (including asymptotic expansions of heat traces, Weyl asymptotics, the Dirichlet-to-Neumann map, and the Atiyah-Singer index theorem), and the global theory of Fourier integral operators (including the oblique derivative problem).

Overall the book is well written and gives a self-contained introduction to some methods and applications of microlocal analysis. It is suited both as the basis for a graduate course as well as for self-study and I consider it a welcome contribution to the existing textbook literature.

G. Teschl (Wien)

K. Harada: "Moonshine" of Finite Groups. (EMS Series of Lectures in Mathematics.) EMS, Zürich, 2010, vi+76 S. ISBN 978-3-03719-090-6 P/b € 24,-.

„Monstrous Moonshine“ nannten Conway und Norton ihre Vermutung, dass zwischen dem zweiten Fourier-Koeffizienten der j -Funktion (1968–84) und der Dimension der kleinsten irreduziblen Darstellung der Monster-Gruppe (1968–83) ein Zusammenhang bestehen könnte. Borcherds bekam unter anderem für die Klärung dieses Zusammenhangs 1998 die Fields-Medaille.

Das vorliegende Büchlein basiert auf der Mitschrift einer Vorlesung des Autors an der Ohio State University 1983/84. Um eine Verallgemeinerung des Moonshine-Phänomens definieren zu können, werden zuerst modulare Formen und Fuchsche

Gruppen eingeführt. Weiters wird die Dedekindsche η -Funktion studiert. „Moonshine“ für eine endliche Gruppe G liegt dann vor, wenn es eine Abbildung ϕ von G in gewisse modulare Funktionen gibt, sodass die Abbildung $g \mapsto a_n(g)$ auf Folge ihrer Fourier-Koeffizienten einen verallgemeinerten Charakter von G darstellt.

Dem Autor gelingt es auf 62 Seiten, diese Fragestellungen aus dem Grenzgebiet zwischen Algebra, Zahlentheorie und klassischer Funktionentheorie klar aufzubereiten. Eine gute Grundlage für ein Studenten-Seminar.

P. Grabner (Graz)

E. Kartashova: Nonlinear Resonance Analysis. Theory, Computation, Applications. Cambridge University Press, 2011, xv+223 S. ISBN 978-0-521-76360-8 H/b £ 75,-.

Das vorliegende Buch beschäftigt sich mit der Beschreibung nichtlinearer Resonanz-Phänomene. Dabei treten polynomielle diophantische Relationen zwischen den Wellenzahlen auf. Dies führt zu interessanten Zusammenhängen zwischen mathematischer Physik und Zahlentheorie. Neben einer kurzen Einführung in Resonanz und Hamilton-Mechanik sowie in einige spezielle Aspekte diophantischer Gleichungen (z.B. der Satz von Besikovich) werden dann ausführlich diese Methoden auf verschiedene dynamische Systeme angewandt. Da es keinen Algorithmus gibt, um polynomielle diophantische Gleichungen zu lösen (Satz von Matiyasevich als Lösung des 10. Hilbertschen Problems), spielen spezielle Methoden aus Symbolic Computation eine wichtige Rolle. Die Problemstellungen werden elegant mit graphentheoretischen Konzepten beschrieben und am Ende des Buchs findet man eine geeignete Software.

Das Buch ist sehr gut als Grundlage eines Seminars für Fortgeschrittene geeignet. Allerdings sind sowohl Vorkenntnisse aus Mathematischer Physik wie aus Zahlentheorie nötig. Eine ausführliche Darstellung findet man im Artikel der Autorin in den *IMN* Nr. 218, Dezember 2011.

R. Tichy (Graz)

J. W. Morgan, F. Tsz-Ho Fong: Ricci Flow and Geometrization of 3-Manifolds. (University Lecture Series 53.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, ix+150 S. ISBN 978-0-8218-4963-7 P/b \$ 41,-.

This book is based on notes taken by the second author during a course given by the first author at Stanford University in 2009. The topic of the course and thus of the book is Perelman's proof of Thurston's geometrization conjecture for three-manifolds based on Hamilton's Ricci flow, which also led to a proof of the Poincaré conjecture. In view of the size of the book, one of course cannot expect to get a complete proof, but the discussion is fairly detailed with the omitted parts clearly indicated. The fact that the book grew out of lecture notes is visible by the

division into 32 lectures (which are grouped into six parts) and partly also in the style of writing.

A nice feature of the book is that the first part, which consists of five lectures and covers 25 pages, introduces all necessary notions and gives a rough outline of the main ingredients of the proof. In particular, this part discusses the concepts of Ricci flow and of Ricci flow with surgery and introduces the reader to canonical neighborhoods and their role in the proof. It is also explained where each concept is discussed in more depth in the later parts of the book, which simplifies that navigation through the text.

A. Čap (Wien)

P. Mörters, Y. Peres: Brownian Motion. With an appendix by O. Schramm and W. Werner. (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics.) Cambridge University Press, 2010, xii+403 S. ISBN 978-0-521-76018-8 H/b £ 40,-.

Es ist nicht wirklich notwendig, über dieses Buch viele Worte zu verlieren: Es ist *das* neue Standardwerk über die Brownsche Bewegung. Verfasst von zwei sehr namhaften Autoren, sehr sorgfältig geschrieben, seit Längerem erwartet und von der Fachwelt freudig begrüßt. Es werden alle wichtigen Aspekte der Brownschen Bewegung sorgfältig behandelt, und die Darstellung ist ebenso gut lesbar wie absolut auf der Höhe der Zeit. Hervorzuheben ist auch das Abschlusskapitel über SLE (Schramm-Loewner-Evolution) des tragisch verstorbenen großen Mathematikers Oded Schramm mit dem Fieldspreisträger Wendelin Werner. Das Werk ist als Nachschlagewerk ebenso geeignet wie zum Selbststudium und als Grundlage für die fortgeschrittene Lehre.

Ein absolutes *Muss* für jede Fachbibliothek und alle, die in der Stochastik arbeiten.

W. Woess (Graz)

J. M. Muller et. al.: Handbook of Floating-Point Arithmetic. Birkhäuser, Basel, 2010, xxiii+572 S. ISBN 978-0-8176-4704-9 H/b € 99,95.

Hier liegt eine umfassende aktuelle Monographie zu dem Thema vor. Der grobe Aufbau:

- Detaillierte Beschreibung des aktuellen Industriestandards IEEE 754-2008 und seiner Eigenschaften.
- Anleitungen zur kompetenten Verwendung von Gleitpunktarithmetik, mit Beispielen wie kompensierende Summation, Akkumulation langer innerer Produkte, etc.
- Algorithmen für die Implementierung der Gleitpunktoperationen auf Mikroprozessoren.

- Algorithmen, die auf diesen Operationen aufbauen, insbesondere für die Approximation der mathematischen Standardfunktionen. Dies betrifft die Themen Argumentreduktion und lokale Approximation, mit den damit verbundenen Fragen betreffend die numerische Stabilität und Approximationsgenauigkeit bei größtmöglicher Effizienz. Das *Table Maker's Dilemma* wird hier relativ ausführlich diskutiert – also die Frage nach korrekter (bestmöglicher) Rundung eines (naturgemäß fehlerbehafteten) in der Mitte zwischen zwei Gleitpunktzahlen angesiedelten Wertes, von der zu entscheiden ist, ob er nach links oder rechts zu runden ist. Dieses Problem spielt stark in die Zahlentheorie hinein.
- Erweiterungen, wie die Frage nach der formalen Zertifizierung von implementierten Komponenten, und die Erweiterung auf Zahlensysteme mit höherer Genauigkeit und höherem Wertebereich, basierend auf dem IEEE 754 Standard.

Auch der Zusammenhang mit modernen Programmiersprachen wird diskutiert. Man erkennt auch, dass es einige offene Probleme gibt; z.B. ist die Implementierung der komplexen Division mit voller Genauigkeit (basierend auf der kartesischen Darstellung mit Gleitpunkt-Real- und Imaginärteil) eine nichttriviale Angelegenheit.

Neben (128 bit) quadruple precision ist die Definition der Fused Multiply-Add Operation $FMA(a, b, c) = ab + c$ als Standardinstruktion eine der Neuerungen in IEEE 754-2008. Es wird dargestellt, wie man diese vorteilhaft in verschiedenen Situationen einsetzen kann.

Das vorliegende Buch wendet sich in erster Linie an Experten, die mit konkreten Implementierungen von Gleitpunkt-komponenten zu tun haben. Auch für einen „durchschnittlichen“ Leser liefert es jedoch einiges an interessanter Information über diese zentrale Teildisziplin des wissenschaftlichen Rechnens und welche mathematischen Methoden für sie relevant sind.

Das Einleitungskapitel ist recht unterhaltsam zu lesen – es enthält viele historische Daten, berichtet über Hoppalas (*bugs*) und was so alles schief gehen kann, und von manch weiteren Kuriositäten, z.B. dem russischen Rechner SETUN mit Basis 3 und Ziffern $-1, 0, 1$.

W. Auzinger (Wien)

Y. A. Neretin: Lectures on Gaussian Integral Operators and Classical Groups. (EMS Series of Lectures in Mathematics.) EMS, Zürich, 2011, xii+559 S. ISBN 978-3-03719-080-7 P/b € 58,-.

The book under review presents a comprehensive treatment of integral operators with Gaussians as integral kernel. These operators appear naturally in analysis, mathematical physics, probability theory and signal analysis.

The author also provides a more general point of view, which leads to the discussion of the Segal-Bargmann transform, the Zak transform, and operators with θ -kernels. The representations of the Heisenberg group are of central importance in this approach to Gaussian integral operators. Consequently, the Weil representation, aka metaplectic representation or oscillator representation, is an important tool and the author provides a comprehensive discussion of this representation. A treatment of the algebraic aspects of Gaussian integral operators yields to a non-orthodox introduction to the classical groups in the adelic and non-adelic case. The book is well-written and well-organized. Graduate students and researchers in representation theory, differential geometry, harmonic analysis, complex analysis and operator theory will benefit from the original approach to classical topics in these fields.

F. Luef (Wien)

M. Pitici (ed.): The Best Writing on Mathematics 2010. Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2011, xxviii+407 S. ISBN 978-0-691-14841-0 P/b £ 13,95.

Dieses Buch ist eine Anthologie, die 35 Aufsätze *über* Mathematik wiedergibt. Die Aufsätze sind keineswegs mathematische Fachaufsätze, sondern Reflektionen über Mathematik aus verschiedenen Blickwinkeln. Die Anthologie wendet sich an ein breites Publikum.

Die Aufsätze sind in folgende Kategorien unterteilt: Mathematics alive, Mathematicians and the practice of mathematics, Mathematics and its applications, Mathematics Education, History and philosophy of mathematics, Mathematics in the media.

Zu den Autoren gehören sehr bekannte Mathematiker. Die Originalartikel sind zum Teil Zeitschriften wie *Bulletin AMS*, *Notices AMS*, *American Mathematical Monthly*, *Mathematical Intelligencer*, aber auch unbekanntem Magazinen entnommen.

Die Auswahl der Aufsätze ist gut gelungen und zeigt die zahlreichen Facetten der Mathematik. Zu den Auswahlkriterien gehörte (wie der Titel andeutet), dass die Aufsätze gut geschrieben sind.

Hier seien nur drei der Aufsätze genannt: Judith V. Grabiner: *Why did Lagrange "prove" the parallel postulate?* Freeman Dyson: *Birds and frogs*. Timothy Gowers, Michael Nielsen: *Massively collaborative mathematics*.

Eine Fortsetzung der Anthologie (The Best Writing on Mathematics 2011) ist bereits erschienen; eine solche regelmäßige Auswahl von guten Aufsätzen hat sicher einen Platz in der großen Flut an Originalarbeiten.

C. Elsholtz (Graz)

J. J. Rotman: Advanced Modern Algebra. Second Edition. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 114.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, xvi+1008 S. ISBN 978-0-8218-4741-1 H/b \$ 99,—.

This is a wonderful and monumental book of about 1,000 pages. It is a coherent, very well-written, and well-organized account of almost all important parts of algebra. The first edition came out in 2002 and has become a “classical text” since then. In the second edition, new areas were added (like the Normal Basis Theorem and categorical aspects) and many parts were rewritten.

The first 170 pages give the basics of group theory, commutative ring theory, and linear algebra in a self-contained manner and make up a very nice basic course in algebra in itself. The next chapter presents Galois Theory and the use of discriminants in computing Galois groups. The coherent presentation of so many chapters allows most interesting cross connections, for instance the similarities between Galois groups and symmetry groups of polyhedra. The next part (chapter 4) goes into more details of group theory, like to the Fundamental Theorem of finite abelian groups, to the Sylow Theory, and to free groups, up to combinatorial group theory.

Chapter 5 presents commutative ring theory (Unique factorization domains, the Nullstellensatz, Lüroth’s Theorem, Groebner bases, etc.). Chapter 6 deals with non-commutative rings and with module theory. Category theory is developed in order to study projective modules, and the like, in an elegant form. Chapter 7 develops the structure theory of rings and the application to representations of groups, but also other topics like the characterization of categories of modules (Gabriel-Mitchell). Chapter 8 presents finitely generated modules over principal ideal domains and their applications to canonical forms of matrices. It also contains a lot of material on bilinear forms, determinants, and Lie algebras. After a chapter on Homology Theory, special topics in commutative algebra are treated, like Krull’s prime ideal theory, localization, Dedekind rings, and the Serre-Auslander-Buchsbaum Theorem.

Many historical remarks add more reading pleasure, and a great number of carefully selected exercises allows the reader to test her or his understanding of the material. With this book, you have “algebra in your hands”; it should be on the working table of all people with an interest in algebra and its uses for other disciplines.

G. Pilz (Linz)

D. Schleicher, M. Lackmann: An Invitation to Mathematics. From Competitions to Research. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, xiv+220 S. ISBN 978-3-642-19533-4 P/b € 24,95.

Dieses wunderbare Buch besteht aus vierzehn Einzelbeiträgen, die ein breites Spektrum der Mathematik abdecken – von diophantischen Gleichungen über dy-

namische Systeme, Graphentheorie und numerische Analysis bis hin zur Fluidmechanik: Jeder sollte hier auf seine Kosten kommen. Die Autorenliste liest sich wie das *Who is who* der modernen Mathematik: Béla Bollobás, Timothy Gowers, Robert M. Kerr, László Lovász, Nader Masmoudi, Simon Norton, Marcel Oliver, Alexander A. Razborov, Dierk Schleicher, Stanislav Smirnov, Michael Stoll, Terence Tao, Lloyd N. Trefethen, Jean-Christophe Yoccoz und Günter M. Ziegler zeichnen für die vierzehn Kapitel verantwortlich, die nicht nur thematisch, sondern auch stilistisch die Vielfalt der Mathematik widerspiegeln.

An Invitation to Mathematics richtet sich a priori vor allem an interessierte SchülerInnen und StudentInnen, besonders an solche, die an mathematischen Olympiaden teilgenommen haben oder teilnehmen. Der Vergleich zwischen Wettbewerbsaufgaben und aktueller mathematischer Forschung ist eines der Themen des Buchs und wird insbesondere in den Beiträgen von Timothy Gowers und Stanislav Smirnov erörtert. Das Buch soll talentierten und interessierten jungen Leuten die Schönheit und Vielfalt mathematischer Forschung aufzeigen. Es ist aber definitiv auch für ein wesentlich breiteres Publikum mathematisch interessierter Leser geeignet, ich selbst hatte jedenfalls sehr viel Vergnügen beim Lesen der verschiedenen Kapitel.

S. Wagner (Stellenbosch)

G. Strang: Wissenschaftliches Rechnen. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, xiv+830 S. ISBN 978-3-540-78494-4 P/b € 39,95.

Die englischsprachige Originalausgabe ist 2007 erschienen, hervorgegangen aus einem Kurs über wissenschaftliches Rechnen am MIT. Der Autor ist ein bekannter Experte, insbesondere auf dem Gebiet der Numerischen Linearen Algebra und ihrer Anwendung auf Probleme der Ingenieurmathematik, z.B. im Zusammenhang mit Finite Elemente-Verfahren. Diese inhaltliche Ausrichtung ist auch die wesentliche Stärke dieses Lehrbuchs, nicht nur per se, sondern auch, weil die Identifikation der mathematischen Konzepte, etwa aus der Linearen Algebra, mit verschiedensten Typen von Anwendungsproblemen auch das intuitive Verständnis dieser Konzepte fördert. Im Vordergrund steht die Analogie zwischen diskreten und kontinuierlichen Problemen (Matrixgleichungen und Differentialgleichungen), die in einer Art anwendungsorientierter Didaktik und sehr pragmatisch vermittelt wird. Vieles ist naturgemäß stark algorithmisch ausgerichtet; auf formale Beweise wird weitgehend verzichtet.

Ein knapper Überblick: Das erste Kapitel ist ein Crash-Kurs zur (numerischen) linearen Algebra, mit den zuvor angedeuteten Identifizierungen. (Die fundamentale Rolle der Matrix- bzw. Matrix-Vektor-Multiplikation als Realisierung linearer Abbildungen in konkreten Koordinaten sollte man aber von Beginn an deutlicher herausstreichen.) Im zweiten und dritten Kapitel werden Diskretisierungsverfahren für Differentialgleichungsprobleme parallel mit weiteren für ihre Umsetzung relevanten numerisch-algebraischen Werkzeugen diskutiert. Es folgt ein Kapitel

über Fourieranalyse und damit verwandte Themen (FFT, Orthogonalpolynome, Wavelets), ein weiteres über analytische Funktionen und ihre Approximation. Weitere Themen sind Anfangswertprobleme für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Techniken zur effizienten Lösung großer linearer Systeme, und ein Kapitel über Optimierung und Variationsrechnung.

Als Beispiel für den inhaltlichen Zugang sei etwa der einführende Abschnitt im dritten Kapitel genannt, wo im Zusammenhang mit Randwertproblemen die Umformung diskreter Bilinearformen (Transposition) mit partieller Integration bzw. Integralsätzen identifiziert wird.

Die etwa 800 Seiten sind sehr übersichtlich gestaltet, wie ein gutes Skriptum. Es enthält viele präzise ausgeführte Illustrationen, Tipps zum Umgang mit MATLAB, Beispiele und Aufgabensammlungen. Der didaktischen Konzeption des Autors wird das Buch weitgehend gerecht, wenn auch meines Erachtens nach nicht in vollem Umfang.

W. Auzinger (Wien)

A. Stubhaug: Gösta Mittag-Leffler. A Man of Conviction. Translated by T. Nunnally. Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, x+733 S. ISBN 978-3-642-11671-1 H/b € 65,95.

This is an exhaustive biography of a leading mathematician of the 19th century who besides his mathematical contributions played a very important role in bringing together the French (Cauchy, Poincaré) and German (Weierstraß, Hilbert) schools of mathematics.

In this way Mittag-Leffler became one of the founders of modern analysis. The book offers an extensive insight into the social and cultural life in Sweden of the second half of the 19th century and the beginning 20th century. One learns a lot of very interesting details about Mittag-Leffler's influence not only in mathematics but also in other sciences, in business, and the arts. The biography contains many hitherto unknown facts about the relationship between for instance Alfred Nobel, Sonya Kovalevsky and Gösta Mittag-Leffler, who seem to have a certain impact on the foundation of the Nobel Prize.

The author describes and explains the major difficulties Mittag-Leffler had to handle when founding the journal *Acta Mathematica* which, still today, is one of the most prestigious journals in mathematics. Mittag-Leffler was far ahead of his time when he tried to establish a research institute for pure mathematics. This visionary step led to the foundation of the Mittag-Leffler Institute in Djursholm, which is up to now a leading research institute and which became a shining model for many other research institutes in mathematics all over the world. After one has visited the Mittag-Leffler Institute the book becomes still more authentic and illuminating. As a mathematician one would have liked to learn something more about Mittag-Leffler's mathematical contributions especially to complex analysis.

Nevertheless the book will be of great interest and insight to both mathematicians and general readers.

F. Haslinger (Wien)

T. Tao: An Epsilon of Room, I: Real Analysis. Pages from year three of a mathematical blog. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 117.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, xi+349 S. ISBN 978-0-8218-5278-1 H/b \$ 62,-.

Der Autor dieses Buchs führt seit 2007 einen mathematischen Blog (www.terry-tao.wordpress.com), in dem er interessante Kommentare und Beiträge zu äußerst vielen verschiedenen mathematischen Teilgebieten verfasst. Um diese Arbeiten in eine publizierbare Form zu bringen und sie zitierbar zu machen, hat er zahlreiche Beiträge der ersten zwei Jahre zu Büchern zusammengefasst (*Structure and Randomness* und *Poincaré's Legacies Vols. I, II*). Das vorliegende Buch schließt an diese Reihe an und ist der erste Teil eines zwei Bände umfassenden Werkes. Es beinhaltet Beiträge aus dem dritten Jahr seines Blogs.

Der erste Abschnitt des Buchs besteht aus Vorlesungsunterlagen einer Analysisvorlesung des Autors. Es werden Grundlagen in Maßtheorie und Topologie wiederholt und viele interessante funktionalanalytische Themen behandelt. So gibt es unter anderem Abhandlungen über die Interpolationstheorie von L^p -Räumen, den Satz von Hahn-Banach, die Fouriertransformation, Distributionen und Sobolevräume. Der zweite Abschnitt des Buchs beinhaltet verschiedene Texte zu ausgewählten Gebieten der Analysis. Beispielhaft seien folgende Beiträge erwähnt: Ein alternativer Zugang zum Fortsetzungssatz von Carathéodory, ein Kapitel über das Lemma von Zorn sowie ein Beitrag über eine analytische, dem Buch den Titel gebende Beweismethode.

Das Buch ist sehr angenehm zu lesen, obwohl die ausgewählten Themen keinesfalls einfach sind. Der Text ist mit vielen Kommentaren und interessanten Übungen (mit gut durchdachten Hinweisen) versehen, was einem das Gefühl gibt, dem Autor beim Arbeiten über die Schultern schauen zu dürfen. Es ist sowohl Studierenden als auch Forschenden zu empfehlen, welche an höherer Analysis und Funktionalanalysis interessiert sind beziehungsweise in dieses Gebiet von einem der herausragendsten Mathematiker unserer Zeit eingeführt werden wollen.

J. Morgenbesser (Wien)

W. Woess: Denumerable Markov Chains. Generating Functions, Boundary Theory, Random Walks on Trees. (EMS Textbooks in Mathematics.) EMS, Zürich, 2009, xvii+351 S. ISBN 978-3-03719-071-5 H/b € 48,-.

Die Lektüre dieses Buchs brachte mir angenehme Reminiszenzen an meine eigene Studienzeit an der TU Graz, in der ich mehrere einschlägige Vorlesungen des Autors besuchen durfte. Das Thema sind abzählbare Markovketten, ein breites Gebiet mit vielen interessanten Facetten. Es beginnt mit einer Einführung in das Thema, illustriert anhand einer Reihe von Beispielen, einer formalen Definition und elementaren Eigenschaften. Auch erzeugende Funktionen werden gleich zu Beginn eingeführt. Wie der Autor auch selbst betont, ist es ihm wichtig, alles auf eine saubere, maß- und wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlage zu stellen. In weiteren Kapiteln werden Irreduzibilität, Rekurrenz und Transienz, der Ergodensatz und reversible Markovketten betrachtet. Danach wird es etwas spezieller, mit Populationsmodellen (wie etwa dem klassischen Galton-Watson-Prozess), Potenzialtheorie transienter Markovketten, der Martin-Kompaktifizierung und insbesondere einem umfangreichen Abschnitt über Irrfahrten auf Bäumen.

Das Buch ist auf gehobenem Niveau verfasst, es richtet sich vor allem an Personen, die die theoretischen Grundlagen von Markovketten studieren wollen, und weniger an solche, die an praktischen Anwendungen interessiert sind. Es kann sicher ausgezeichnet als Vorlesungsunterlage dienen und ist auch zum Selbststudium für interessierte Leser mit etwas Erfahrung in Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandten Gebieten geeignet. Eine große Anzahl an Übungsaufgaben ist direkt in den Text eingebaut, mit vollständigen Lösungen am Ende des Buchs.

S. Wagner (Stellenbosch)

E. Zehnder: Lectures on Dynamical Systems. Hamiltonian Vector Fields and Symplectic Capacities. (EMS Textbooks in Mathematics.) EMS, Zürich, 2010, x+353 S. ISBN 978-3-03719-081-4 H/b € 48,-.

The book gives an introduction to dynamical systems, an important field of mathematics with many applications. The author is one of the leading experts in this area. The content is based on a lecture course given by the author at the ETH Zürich.

The theory of dynamical systems has its origins in celestial mechanics, but dynamical systems have turned out to be of relevance in various areas of mathematics and physics. The book consists of two parts. In the first part the author treats the basic notions of dynamical systems, e.g. transitivity, ergodic theorems, invariant manifolds of hyperbolic fixed points, homoclinic points, hyperbolic sets and gradientlike flows. The highlights of the first part are the Shadowing Lemma and Smale's Theorem about the embedding of Bernoulli systems near homoclinic points.

The second part of the book is devoted to a special class of dynamical systems: Hamiltonian systems. These dynamical systems come along with a special class of manifolds, so called symplectic manifolds. The basic theory of symplectic manifolds and Hamiltonian systems is developed in an elegant manner. The treatment culminates in the theory of symplectic capacities, which are of fundamental importance for an understanding of deeper properties of Hamiltonian systems. Symplectic capacities provide symplectic invariants and are key notions in the field of symplectic topology.

Each chapter begins with a short survey of its contents and ends with a brief selection of references to literature giving an alternative view on the subjects or describing related and more advanced topics. This well-written book is suitable for a wide audience and should be accessible to advanced students in mathematics and physics.

F. Luef (Wien)

Internationale Mathematische Nachrichten

Abel-Preis für Endre Szemerédi

Der mit ca. € 750.000,- dotierte Abel-Preis der Norwegischen Akademie der Wissenschaften wird im Jahr 2012 an den ungarischen Mathematiker Endre Szemerédi verliehen, und zwar

...for his fundamental contributions to discrete mathematics and theoretical computer science, and in recognition of the profound and lasting impact of these contributions on additive number theory and ergodic theory.

Das Preiskomitee 2011/12 besteht aus David Donoho, Madabushi S. Raghunathan, Terence Tao, Noga Alon, und der Vorsitzenden Ragni Piene. Es würdigt den Preisträger ausführlich wie folgt:

“Discrete mathematics is the study of structures such as graphs, sequences, permutations, and geometric configurations. The mathematics of such structures forms the foundation of theoretical computer science and information theory. For instance, communication networks such as the internet can be described and analyzed using the tools of graph theory, and the design of efficient computational algorithms relies crucially on insights from discrete mathematics. The combinatorics of discrete structures is also a major component of many areas of pure mathematics, including number theory, probability, algebra, geometry, and analysis.

Endre Szemerédi has revolutionized discrete mathematics by introducing ingenious and novel techniques, and by solving many fundamental problems. His work has brought combinatorics to the center-stage of mathematics, by revealing its deep connections to such fields as additive number theory, ergodic theory, theoretical computer science, and incidence geometry.

In 1975, Endre Szemerédi first attracted the attention of many mathematicians with his solution of the famous Erdős-Turán conjecture, showing that in any set of integers with positive density, there are arbitrarily long arithmetic progressions. This was a surprise, since even the case of progressions of lengths 3 or 4 had

earlier required substantial effort, by Klaus Roth and by Szemerédi himself, respectively.

A bigger surprise lay ahead. Szemerédi's proof was a masterpiece of combinatorial reasoning, and was immediately recognized to be of exceptional depth and importance. A key step in the proof, now known as the Szemerédi Regularity Lemma, is a structural classification of large graphs. Over time, this lemma has become a central tool of both graph theory and theoretical computer science, leading to the solution of major problems in property testing, and giving rise to the theory of graph limits.

Still other surprises lay in wait. Beyond its impact on discrete mathematics and additive number theory, Szemerédi's theorem inspired Hillel Furstenberg to develop ergodic theory in new directions. Furstenberg gave a new proof of Szemerédi's theorem by establishing the Multiple Recurrence Theorem in ergodic theory, thereby unexpectedly linking questions in discrete mathematics to the theory of dynamical systems. This fundamental connection led to many further developments, such as the Green-Tao theorem asserting that there are arbitrarily long arithmetic progressions of prime numbers.

Szemerédi has made many additional deep, important, and influential contributions to both discrete mathematics and theoretical computer science. Examples in discrete mathematics include the Szemerédi-Trotter theorem, the Ajtai-Komlós-Szemerédi semi-random method, the Erdős-Szemerédi sum-product theorem, and the Balog-Szemerédi-Gowers lemma. Examples in theoretical computer science include the Ajtai-Komlós-Szemerédi sorting network, the Fredman-Komlós-Szemerédi hashing scheme, and the Paul-Pippenger-Szemerédi-Trotter theorem separating deterministic and non-deterministic linear time.

Szemerédi's approach to mathematics exemplifies the strong Hungarian problem-solving tradition. Yet, the theoretical impact of his work has been a game-changer."

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Gespräche mit Mathematikern – Peter M. Gruber

Die von G. Lindbichler (Haus der Mathematik) und der ÖMG geförderte Video-Reihe *Gespräche mit Mathematikern* wurde im Jahr 2012 mit einem Gespräch mit em.Prof. Peter Gruber fortgesetzt, Gesprächspartnerin war seine Nachfolgerin an der TU Wien, Monika Ludwig.

Das Gespräch mit Peter Gruber sowie die früheren Gespräche mit Leopold Schmetterer, Edmund Hlawka, Wolfgang Schmidt und Harald Niederreiter werden auf der Homepage der ÖMG als Videostream zur Verfügung gestellt.

Die ÖMG bedankt sich herzlich bei G. Lindbichler für die Organisation der Aufnahmen und der Filmerstellung.

(Michael Drmota)

Neue Mitglieder

Adrian Fuchs – Graz. geb. 1992. 2003–2011 BRG Schloss Wagrain, Vöcklabruck, Preisträger der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. email *adrian.fuchs@asak.at*.

Christel Geiß, Dr. – Univ. Innsbruck. geb. 1963. Studium 1982–1987, Univ. Jena 1987–1992, Univ. Jyväskylä 2003–2010, seit 2010 Univ. Innsbruck. email *christel.geiss@uibk.ac.at*, http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/geiss_c/geissc.html.

Kurt Hornik, Univ.-Prof. DI Dr. – Wien. geb 1963. 1981–85 Studium der Technischen Mathematik an der TU Wien, 1987 Dissertation, 1990 Habilitation, 1986–2003 Univ. Assistent am Institut f. Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie der TU Wien, ab 2003 Univ.Prof. an der Wirtschaftsuniversität Wien.

Christian Pötzsche, Univ.-Prof. Dr. – Univ. Klagenfurt. geb. 1972. 03/1998 Diplom Univ. Augsburg, 05/2002 Promotion Univ. Augsburg, 02/2010 Habilitation TU München, seit 10/2011 Univ. Klagenfurt. <http://www.uni-klu.ac.at/~cpoetsche>.