# Internationale Mathematische Nachrichten
# International Mathematical News
# Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

**Herausgeber:**

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. e-mail *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

**Redaktion:**

*J. Wallner* (TU Graz, Herausgeber)
*M. Drmota* (TU Wien)
*H. Humenberger* (Univ. Wien)
*R. Winkler* (TU Wien)

**Ständige Mitarbeiter der Redaktion:**

*C. Binder* (TU Wien)
*R. Mlitz* (TU Wien)
*K. Sigmund* (Univ. Wien)

**Bezug:**

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

© 2008 Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wien.

ISSN 0020-7926

# Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

*http://www.oemg.ac.at/*
email: *oemg@oemg.ac.at*

**Sekretariat:**

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

**Vorstand:**

*R. Tichy* (TU Graz): Vorsitzender
*M. Drmota* (TU Wien):
Stellvertretender Vorsitzender
*J. Wallner* (TU Graz):
Herausgeber der IMN
*M. Oberguggenberger* (Univ. Innsbruck): Schriftführer
*I. Fischer* (Univ. Wien):
Stellvertretende Schriftführerin
*H. Pottmann* (TU Wien): Kassier
*F. Rendl* (Univ. Klagenfurt):
Stellvertretender Kassier
*G. Teschl* (Univ. Wien):
Web-Beauftragter (kooptiert)

**Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen (2009–):**

*W. Woess* (Graz)
*G. Kirchner* (Innsbruck)
*H. Kautschitsch* (Klagenfurt)
*F. Pillichshammer* (Linz)
*P. Hellekalek* (Salzburg)
*C. Krattenthaler* (Wien)
*W. Schlöglmann* (Didaktikkommission)

**Beirat:**

*A. Binder* (Linz)
*C. Christian* (Univ. Wien)
*U. Dieter* (TU Graz)
*H. Engl* (Öst. Akad. Wissenschaften)
*P. M. Gruber* (TU Wien)
*G. Helmberg* (Univ. Innsbruck)
*H. Heugl* (Wien)
*E. Hlawka* (TU Wien)
*W. Imrich* (MU Leoben)
*M. Koth* (Univ. Wien)
*C. Krattenthaler* (Univ. Wien)
*W. Kuich* (TU Wien)
*R. Mlitz* (TU Wien)
*W. Müller* (Univ. Klagenfurt)
*W. G. Nowak* (Univ. Bodenkult. Wien)
*L. Reich* (Univ. Graz)
*N. Rozsenich* (Wien)
*W. Schachermayer* (Univ Wien)
*F. Schweiger* (Univ. Salzburg)
*K. Sigmund* (Univ. Wien)
*H. Sorger* (Wien)
*H. Strasser* (WU Wien)
*W. Wurm* (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionsvorsitzende gehören statutengemäß dem Beirat an.

**Mitgliedsbeitrag:**

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

# Internationale Mathematische Nachrichten

## International Mathematical News

## Nouvelles Mathématiques Internationales

**Nr. 209 (62. Jahrgang)** **Dezember 2008**

---

## Inhalt

*Ansgar Jüngel und Daniel Matthes:* Entropiemethoden für nichtlineare partielle Differentialgleichungen . . . . . 1

*Helmut Pottmann, Alexander Schiftner, Johannes Wallner:* Geometry of Architectural Freeform Structures . . . . . 15

*Christoph Ableitinger:* Ausbreitung von Epidemien . . . . . 29

*Hansjörg Albrecher, Peter Paule und Franz Winkler:* Mathematik in Linz . . 41

Buchbesprechungen . . . . . 49

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft . . . . . 67

Neue Mitglieder . . . . . 69

Ausschreibung Preise der ÖMG . . . . . 70

Die Titelseite zeigt den Coxeter-Komplex $\Sigma$ der ikosahedralen Gruppe

$$G = \left\langle s,t,u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^3 = (tu)^2 = (su)^5 = 1 \right\rangle,$$

d.h. die simpliziale Zerlegung der Einheitskugel, die von den Spiegelungsebenen der kanonischen orthogonalen Darstellung von $G$ ausgeschnitten wird. $\Sigma$ stellt auch ein *apartment* in einem Gebäude nach Jacques Tits dar.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 209 (2008), 1–14

# Entropiemethoden für nichtlineare partielle Differentialgleichungen

**Ansgar Jüngel und Daniel Matthes**
TU Wien

## 1 Einleitung

Evolutionsgleichungen sind partielle Differentialgleichungen, die die zeitliche Entwicklung von physikalischen Größen beschreiben. Evolutionsgleichungen sind von zentralem Interesse in der Angewandten Mathematik, insbesondere im Hinblick auf ihre mannigfache Verwendung in Physik, Chemie, Biologie und in den Ingenieurs-, Sozial- und Wirtschaftswissenschaften. Einige Anwendungsbeispiele sind die Beschreibung der Elektronenbewegung in Transistoren und Speicherbauteilen, die Untersuchung von Phasengrenzen in chemischen Reaktionen, die Quantifizierung des Wachstums von biologischen Zellen und die Optimierung der Aerodynamik um Flugzeugflügel. Das mathematische Ziel ist die Analysis der entsprechenden (meist nichtlinearen) partiellen Differentialgleichungen. Hauptschwerpunkte sind der Beweis der Wohlgestelltheit der zugehörigen Anfangs- bzw. Randwertprobleme sowie die Beschreibung des qualitativen Verhaltens der Lösungen, vor allem im Langzeitregime.

In einer Vielzahl von Modellen haben die typischen Lösungen die Tendenz, gegen einen gewissen Gleichgewichtszustand zu streben. Meist lässt sich diese Tendenz durch ein thermodynamisches Prinzip erklären: Mit zunehmender Zeit führt die Interaktion der Teilchen eines (geschlossenen) Systems zur Erhöhung der sogenannten *Entropie*, die gemeinhin als ein „Maß der Unordnung“ verstanden wird.[1] Das Gesetz der Zunahme der Entropie in geschlossenen thermodynamischen Systemen wurde 1865 von Clausius entdeckt und von Boltzmann in den 1870er-Jahren statistisch interpretiert. Das Maximum der Entropie (unter den für das Sys-

[1] Dies ist ein bekanntes Phänomen auf dem eigenen Büroschreibtisch: Mit zunehmender Zeit nimmt die Unordnung zu.

ISSN 0020-7926 © 2008 Österr. Math. Gesellschaft

tem charakteristischen Nebenbedingungen) wird gemäß dem Gibbs-Prinzip in der Gleichgewichtsverteilung erreicht, wenn also alle makroskopischen Größen des beschriebenen Systems stationäre Werte annehmen.

Wir wollen im Folgenden erläutern, welche Rolle die Entropie in einigen partiellen Differentialgleichungen spielt und inwieweit Methoden, die auf dem Entropiekonzept beruhen, zu neuen mathematischen Resultaten oder eleganten Beweisen bekannter Ergebnisse führen können. Aus Platzgründen beschränken wir uns auf einige grundlegende Beispiele und gehen nicht auf die zahllosen neuen Entwicklungen und Anwendungen von Entropiemethoden in Funktionalanalysis, Stochastik und Massentransporttheorie ein; wir verweisen die interessierten LeserInnen auf die exzellenten Bücher [1] und [13].

Im folgenden Abschnitt erläutern wir die Verwendung der Entropie in der kinetischen Theorie von Boltzmann. Die Entropie wird in Abschnitt 3 benutzt, um exemplarisch das Langzeitverhalten von Lösungen der linearen Fokker-Planck-Gleichung zu beschreiben und nebenbei die logarithmische Sobolev-Ungleichung zu beweisen. Verallgemeinerungen und weitere Anwendungen werden in Abschnitt 4 diskutiert. Schließlich stellen wir in Abschnitt 5 eine Methode vor, wie neue Entropien auf algorithmischem Wege gewonnen werden können.

# 2 Die Boltzmann-Gleichung und Entropie

Ein Gas oder eine Flüssigkeit kann auf mikroskopischer Ebene durch die Dichtefunktion $f$ beschrieben werden; dabei gibt $f(t;x,v)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür an, zur Zeit $t \geq 0$ ein Teilchen am Ort $x \in \mathbb{R}^3$ mit Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^3$ zu finden. Gemäß der kinetischen Theorie erfüllt $f$ die 1872 von Boltzmann formulierte Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F(x) \cdot \nabla_v f = Q(f),$$

wobei $F(x)$ eine auf die Teilchen wirkende Kraft und $Q(f)$ die Geschwindigkeitsänderungen von Teilchen aufgrund von Kollisionen beschreibt. Typischerweise ist $Q$ von der Form

$$(Q(f))(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{|\omega|=1} \sigma(\omega, |v - v_*|) \big( f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \big) d\omega dv_*,$$

worin $v$, $v_*$ die Geschwindigkeiten der kollidierenden Teilchen *vor* dem Stoß und $v'$, $v'_*$ die *nach* dem Stoß sind. Diese Stöße erhalten – nach den Gesetzen der klassischen Mechanik – Impuls und Energie, also $v + v_* = v' + v'_*$ und $|v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2$. Die genaue Form der Kollisionsrate $\sigma$ hängt von der Art der Teilchen ab und muss aus einer mikroskopischen Theorie bestimmt werden. Oft ist sie eine Funktion der Geschwindigkeitsdifferenz $|v - v_*|$ und des Stoßwinkels $\omega$.

Wir betrachten den einfachsten Fall: ohne äußere Kräfte, $F \equiv 0$, und für räumlich homogene Dichten, $f(t;x,v) = f(t;v)$. Die Anfangsdaten sind entsprechend durch $f(0;x,v) = f_0(v)$ gegeben. Als Wahrscheinlichkeitsdichte ist $\int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)\,dv = 1$ erfüllt, und wir setzen voraus, dass der makroskopische Impuls verschwindet ($\int_{\mathbb{R}^3} v f_0(v)\,dv = 0$) und die Temperatur normiert ist ($\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 f_0(v)\,dv = 1$). Die mikroskopischen Erhaltungsgesetze für Energie und Impuls sorgen dafür, dass sich auch der makroskopische Impuls und die Temperatur nicht in der Zeit ändern.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Funktion $f(t)$ für $t \to \infty$ gegen eine Grenzfunktion $f_\infty$ konvergiert. Da die mikroskopischen Wechselwirkungen der Teilchen reversibel sind, ist zunächst nicht klar, warum $f(t)$ eine Tendenz in Richtung eines Gleichgewichts entwickeln sollte – und ob überhaupt ein Gleichgewicht $f_\infty$ existiert. Diese Fragen können mittels des Entropie-Konzepts beantwortet werden.

Die *Entropie*[2] ist definiert durch

$$H[f] = \int_{\mathbb{R}^3} f \log f \, dv, \tag{1}$$

und die Funktion $t \mapsto H[f(t)]$ ist monoton fallend:[3]

$$\begin{aligned}\frac{dH[f(t)]}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial t} \log f \, dv = \int_{\mathbb{R}^3} Q(f) \log f \, dv \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{|\omega|=1} \sigma\big(f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*)\big) \log \frac{f(v')f(v'_*)}{f(v)f(v_*)}\, d\omega\, dv\, dv_* \\ &\le 0.\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft wird auch als das *H-Theorem* von Boltzmann bezeichnet. In der Menge der Wahrscheinlichkeitsdichten mit Impuls null und Temperatur eins wird das (strikt konvexe) Funktional $H$ durch die Maxwellverteilung

$$f_\infty(v) = (2\pi)^{-3/2} e^{-|v|^2/2}$$

minimiert. Aus obiger Rechnung folgt zunächst zwar nur, dass $H[f(t)]$ monoton fällt, aber es ist nicht schwer zu folgern, dass für $t \to \infty$ tatsächlich $H[f(t)]$ gegen $H[f_\infty]$ konvergiert.

Impliziert dies bereits $f(t) \to f_\infty$ in einer geeigneten Topologie? Ja, denn mithilfe der Csiszár-Kullback-Ungleichung

$$\|f(t) - f_\infty\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \sqrt{8}\sqrt{H[f(t)] - H[f_\infty]} \tag{2}$$

[2] Eigentlich handelt es sich um die *negative* Entropie, aber es ist hier zweckmäßiger, das Funktional wie oben zu definieren.

[3] Wir nehmen hier und im Folgenden an, dass die entsprechende Gleichung eine hinreichend oft differenzierbare Lösung besitzt, um technische Details auszusparen und die grundlegenden Ideen herauszustellen.

kann die $L^1$-Norm der Differenz mit der Entropie abgeschätzt werden. Da $f(t)$ und $f_\infty$ Wahrscheinlichkeitsdichten sind, ist der $L^1$-Abstand in diesem Zusammenhang ein sehr natürliches Maß für den Abstand zum Gleichgewicht.

Die Frage, wie schnell $f(t)$ gegen $f_\infty$ konvergiert, ist allerdings deutlich schwieriger zu beantworten. Im Allgemeinen kann keine exponentielle Konvergenz erwartet werden (Resultat von Bobylev). Desvillettes und Villani haben unter bestimmten Voraussetzungen gezeigt, dass die Konvergenz aber zumindest „fast exponentiell“ ist: Für alle $\varepsilon > 0$ gilt die Abschätzung $H[f(t)] - H[f_\infty] \le C_\varepsilon t^{-1/\varepsilon}$ $(t > 0)$ mit einer von $\varepsilon$ abhängigen Konstanten $C_\varepsilon > 0$.

# 3 Eine Fokker-Planck-Gleichung und Entropie

Boltzmann hat das Konzept der Entropie vor über 100 Jahren begründet. Seitdem haben die damit verbundenen Ideen Eingang in sehr verschiedenen Gebieten gefunden, etwa in der Informationstheorie, in der Theorie hyperbolischer Erhaltungsgleichungen sowie in Beweisen gewisser Funktionalungleichungen. Insbesondere mit ihrer Anwendung auf nichtlineare Diffusionsprozesse erreichte die Theorie der Entropiemethoden eine neue Qualität.

Als Illustration betrachten wir die homogene Boltzmann-Gleichung ohne äußere Kräfte mit dem Fokker-Planck-Operator $Q(f) = \mathrm{div}_v(\nabla_v f + vf)$ und schreiben die entsprechende lineare *Fokker-Planck-Gleichung* in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(\nabla u + xu) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d,\ t > 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

Das Anfangsdatum $u_0$ sei nichtnegativ und eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h. $\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\,dx = 1$. Wie zuvor ist der – in der Menge der Wahrscheinlichkeitsdichten einzige – Gleichgewichtszustand $u_\infty$ durch die (nun $d$-dimensionale) Maxwellverteilung $u_\infty(x) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/2}$ gegeben. Wiederum sind wir am Konvergenzverhalten der Lösung $u(t)$ gegen $u_\infty$ interessiert.

Es ist zweckmäßig, anstelle der Boltzmannschen Entropie die relative Entropie

$$H_r[u] = \int_{\mathbb{R}^d} u \log u\,dx - \int_{\mathbb{R}^d} u_\infty \log u_\infty\,dx \ge 0 \tag{3}$$

zu verwenden. Das Funktional $H_r$ erbt die strikte Konvexität der Boltzmann-Entropie und hat $u_\infty$ als eindeutigen Minimierer, mit $H_r[u_\infty] = 0$. Eine Rechnung zeigt, dass die Funktion $t \mapsto H_r[u(t)]$ monoton fallend ist.

Das Ziel ist nun, die Entropieproduktion bzw. -dissipation

$$D[u(t)] = -\frac{dH_r[u(t)]}{dt} = 4\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\sqrt{u(t;x)}|^2\,dx - 2d + \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 u(t;x)\,dx$$

nach unten durch die relative Entropie abzuschätzen. Gilt nämlich allgemein die Ungleichung $D[u] \geq \lambda H_r[u]$ mit einer Konstanten $\lambda > 0$, so folgt

$$\frac{dH_r[u(t)]}{dt} = -D[u(t)] \leq -\lambda H_r[u(t)], \quad t > 0, \tag{4}$$

woraus man mit dem Gronwallschen Lemma sofort die exponentielle Konvergenz von $H_r[u(t)]$ gegen null schließt. Die Beziehung zwischen der Entropie und der Entropieproduktion kann bewiesen werden, indem man auch die Entropieproduktion nach der Zeit differenziert und abschätzt. Eine längere Rechnung ergibt

$$\frac{dD[u(t)]}{dt} \leq -2D[u(t)], \quad t > 0.$$

Daraus folgt zum einen die exponentielle Konvergenz von $D[u(t)]$; zum anderen erhalten wir

$$\begin{aligned} D[u(t)] &= -\int_t^\infty \frac{dD[u(s)]}{ds}\,ds \geq 2\int_t^\infty D[u(s)]\,ds \\ &= -2\int_t^\infty \frac{dH_r[u(s)]}{ds}\,ds = 2H_r[u(t)]. \end{aligned}$$

Dies ist gerade (4) mit $\lambda = 2$. Mithilfe der Csiszár-Kullback-Ungleichung (2) folgt hieraus übrigens auch die exponentielle Konvergenz $u(t) \to u_\infty$ in der $L^1$-Norm.

Als Beiprodukt der obigen Rechnung erhalten wir einen Beweis für eine wichtige Funktionalungleichung, nämlich die *logarithmische Sobolev-Ungleichung* $H_r[u] \leq \frac{1}{2}D[u]$ oder

$$\int_{\mathbb{R}^d} u\log u\,dx + \log\left((2\pi e^2)^{d/2}\right) \leq 2\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\sqrt{u}|^2\,dx, \tag{5}$$

die die relative Entropie $H_r$ mit der sogenannten *Fisher-Information* [8]

$$F[u] = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\sqrt{u}|^2\,dx$$

in Beziehung setzt. Die Ungleichung (5) wurde zuerst von Gross in den 1970er-Jahren bewiesen. Eine äquivalente Version wurde allerdings bereits von Stam Ende der 1950er-Jahre gezeigt. Der obige Beweis stammt im Wesentlichen von Bakry und Emery [2]. Die Ungleichung (5) zeigt, dass $H^1$-Funktionen $f = \sqrt{u}$ in den Orlicz-Raum $L^2\log L^2(u_\infty dx)$ einbetten. Dies klingt zunächst nicht spektakulär, da die Sobolev-Ungleichungen z.B. die Einbettung in $L^p$ mit $p = 2d/(d-2) > 2$ garantieren. Allerdings ist die Konstante in (5) im Gegensatz zu den Sobolev-Ungleichungen unabhängig von der Raumdimension $d$, was etwa von Bedeutung für die thermodynamischen Limites in der Mathematischen Physik ist.

Die betrachtete Fokker-Planck-Gleichung ist linear; prinzipiell kann also das exponentielle Abklingen der Lösungen auch durch eine Spektralanalysis des Differentialoperators erhalten werden. Die Entropiemethode ist jedoch vergleichsweise einfach und liefert einen expliziten Wert für die Abklingrate. Noch wichtiger ist allerdings, dass sich die Entropiemethode relativ problemlos auf eine Vielzahl *nichtlinearer* Gleichungen übertragen lässt.

# 4 Weitere Anwendungen

**Langzeitverhalten von Lösungen und Funktionalungleichungen.** Wir haben bereits zwei Anwendungen im vorigen Abschnitt kennengelernt: die Berechnung von Abklingraten für die Lösung der linearen Fokker-Planck-Gleichung und der Beweis einer logarithmischen Sobolev-Ungleichung. Der Entropie-Beweis für die Konvergenz der Lösung $u(t)$ einer diffusiven Evolutionsgleichung im Langzeitlimes kann allgemein grob in drei Schritte unterteilt werden.

Zunächst berechnet man bei gegebenem Funktional $H[u] \geq 0$ die Entropieproduktion $D = -dH/dt$. Im zweiten Schritt leitet man eine Funktionalungleichung zwischen der Entropie $H$ und der Entropieproduktion $D$ in der Form $D \geq \phi(H)$ her, wobei $\phi$ eine nichtnegative, monotone Funktion ist; dies ist der Kern des Beweises. Im dritten Schritt schließt man von der Ungleichung

$$\frac{dH[u(t)]}{dt} = -D[u(t)] \leq -\phi(H[u(t)]) \quad (t > 0)$$

auf das Abklingverhalten von $H[u(t)]$. Im Falle von $f(s) = \lambda s$ folgt exponentielle Konvergenz mit Rate $\lambda > 0$; falls $f(s) = \lambda s^\gamma$ mit $\gamma > 1$, erhält man algebraische Konvergenz mit Rate $1/(\gamma - 1)$.

Die im vorigen Abschnitt präsentierte Vorgehensweise überträgt sich fast wortgetreu von der linearen Fokker-Planck-Gleichung auf wesentlich allgemeinere Situationen. Beispielsweise können nichtlineare Fokker-Planck-Gleichungen mit sehr allgemeinen (nur hinreichend konvexen) Potentialen $V(x)$ und nichtlinearem Diffusionsverhalten behandelt werden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(f(u) + u\nabla V) \quad \text{in } \mathbb{R}^d,\ t > 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

Ist beispielsweise $f(u) = u^m$ mit einem Parameter $m > 1$, so folgt mit analogen Ideen (jedoch weit größerem technischen Aufwand) exponentielle Konvergenz von $u(t)$ gegen den eindeutigen Gleichgewichtszustand $u_\infty$ in der $L^1$-Norm mit expliziter Rate [4].

Nicht nur die Evolutionsgleichungen, sondern auch das betrachtete Entropie-Funktional kann verallgemeinert werden. Ein relativ allgemeiner Ansatz ist $H_g[u]$

$= \int_{\mathbb{R}^d} g(u(x))\,dx$ mit einer konvexen Funktion $g$. Allerdings muss für jede Gleichung bestimmt werden, welche Funktionen $g$ zu ihr passend sind in dem Sinne, dass $H_g[u(t)]$ sich entlang von Lösungen der Gleichung monoton verhält. In der Praxis haben sich vor allem die homogenen Funktionale

$$H_p(u) = \frac{1}{p(p-1)} \int_{\mathbb{R}^d} u^p\,dx \quad (p \neq 0,1) \tag{6}$$

bewährt. Sinn dieser Verallgemeinerung ist nicht nur der Beweis von Abklingraten in verschiedenen $L^p$-Normen, sondern auch der Beweis neuer Funktionalungleichungen. Angewandt auf die lineare Fokker-Planck-Gleichung führen die Entropien der Form $H_p$ mit $p > 1$ auf die sogenannten *Beckner-Ungleichungen*

$$\frac{p}{p-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,d\mu(x) - \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{1/p}\,d\mu(x)\Big)^p\Big] \leq C_p \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\sqrt{f(x)}|^2\,d\mu(x),$$

wobei $f(x) = u(x)/u_\infty(x)$ die relative Dichte, $d\mu = u_\infty dx$ das invariante Maß und $u_\infty$ wie zuvor die Maxwellverteilung sind. Zusätzlich lässt sich das Maß $\mu$ in weiten Grenzen variieren, indem man lineare Fokker-Planck-Gleichungen mit anderen Potentialen $V$ betrachtet.

Schließlich wollen wir erwähnen, dass auch Entropien mit Ableitungen unter dem Integral verwendet werden, wie z.B.

$$D_q(u) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u^{q/2}|^2\,dx, \quad q \neq 0. \tag{7}$$

Insbesondere ist das Funktional $D_1$ die bereits erwähnte Fisher-Information. Kann die Monotonie von $D_2[u(t)]$ entlang beliebiger Lösungen $u(t)$ einer gegebenen Evolutionsgleichung bewiesen werden, so folgt sofort die zeituniforme $H^1$-Glattheit von $u(t)$.

**Existenz und Positivität von Lösungen.** Entropiemethoden können dazu verwendet werden, um die *Positivität* von Lösungen gewisser Differentialgleichungen, für die kein Maximumprinzip zur Verfügung steht, zu zeigen. Wir wollen dies anhand von zwei Beispielen illustrieren.

Die Lösung $u(t;x)$ der eindimensionalen *Dünnfilmgleichung*

$$\begin{aligned} &u_t + (|u|^\beta u_{xxx})_x = 0 \quad \text{in } (0,1),\ t > 0, \\ &u_x = |u|^\beta u_{xxx} = 0 \quad \text{an } x = 0,1, \quad u(x,0) = u_0(x) > 0, \end{aligned}$$

beschreibt die orts- und zeitabhängige Dicke eines Flüssigkeitsfilms auf einer glatten Oberfläche. Der Parameter $\beta > 0$ ist durch die hydrodynamischen Eigenschaften der jeweiligen Flüssigkeit festgelegt; typischerweise ist $1 \leq \beta \leq 3$. Die Indizes stellen hier partielle Ableitungen nach $t$ bzw. $x$ dar. Diese Gleichung ist in den

letzten Jahren intensiv in der mathematischen Literatur analysiert worden, da sie eine Reihe interessanter Eigenschaften besitzt. Eine dieser Eigenschaften ist die Tatsache, dass im Falle $\beta > 2$ die Lösung für alle Zeiten positiv bleibt, wenn das Anfangsdatum $u_0$ positiv ist. Das bedeutet, dass der Flüssigkeitsfilm nicht reißt.

Da für Gleichungen höherer Ordnung im Allgemeinen kein Maximumprinzip zur Verfügung steht, muss die Positivität mit anderen Mitteln bewiesen werden. Es zeigt sich, dass dies für $\beta \geq 4$ mittels Entropiemethoden möglich ist. Die beiden entscheidenden Entropien wurden dabei von Bernis und Friedman [3] identifiziert: die erste ist $H_p$ von (6) mit $p = 2-\beta$, die zweite ist $D_q$ von (7) mit $q = 2$. Genau genommen nutzt der Beweis gar nicht die Monotonie dieser Größen, sondern nur ihre uniforme Beschränktheit in der Zeit. Die Beschränktheit von $D_2[u(t)]$ impliziert Hölder-Stetigkeit:

$$|u(t;x) - u(t;y)| \leq C|x-y|^{1/2},$$

wobei die Konstante $C > 0$ zeitunabhängig ist. Angenommen, $u(T)$ würde an einem Punkt $x_0$ verschwinden. Dann folgt mit der Hölder-Stetigkeit, dass

$$H_{2-\beta}[u(T)] = \int_0^1 u(T;x)^{2-\beta}\,dx \geq C\int_0^1 |x-x_0|^{1-\beta/2}\,dx.$$

Für $\beta \geq 4$ divergiert das letzte Integral; dies steht im Widerspruch zur zeituniformen Beschränktheit von $H_{2-\beta}[u(t)]$.

Als zweites Beispiel betrachten wir ein Kreuzdiffusionsmodell aus der Populationsdynamik, das 1979 von Shigesada, Kawasaki und Teramoto [12] vorgeschlagen wurde. Unter vereinfachenden Annahmen können wir das Modell wie folgt formulieren:

$$u_t = \Delta(a_1 u + uv), \quad v_t = \Delta(a_2 v + uv) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \tag{8}$$

mit homogenen Neumann-Randbedingungen und Anfangsbedingungen $u(\cdot,0) = u_0 \geq 0$, $v(\cdot,0) = v_0 \geq 0$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet sei. Die Variablen $u$ und $v$ beschreiben die zeitliche Entwicklung zweier Populationsdichten, die miteinander konkurrieren, und $a_1$, $a_2 > 0$ sind zwei Diffusionskoeffizienten. Der Term $uv$ modelliert die Segregation der beiden Spezies. Die Analysis dieses Systems ist nichttrivial, denn die Diffusionsmatrix ist im Allgemeinen nicht positiv definit (sogar nicht einmal symmetrisch). Auch für (8) steht kein Maximumprinzip zur Verfügung. Um die Nichtnegativität der Lösungen zu zeigen, führen wir neue Variablen $w = (y,z)$ über $u = e^y$ und $v = e^z$ ein. Können wir die Existenz von Lösungen in den Variablen $y$ und $z$ zeigen, so sind die Populationsdichten $u$ und $v$ automatisch positiv.

Verblüffenderweise ist die Diffusionsmatrix in $w$ symmetrisch und positiv definit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(w) = \operatorname{div}(A(w)\nabla w)$$

mit

$$\rho(w) = \begin{pmatrix} e^y \\ e^z \end{pmatrix}, \quad A(w) = \begin{pmatrix} a_1 e^y + e^{y+z} & e^{y+z} \\ e^{y+z} & a_2 e^z + e^{y+z} \end{pmatrix}.$$

Dies ist kein Zufall. Es zeigt sich nämlich, dass die Tatsache, dass das System *symmetrisierbar* ist (in dem Sinne, dass die neue Diffusionsmatrix symmetrisch und positiv definit ist), äquivalent zur Existenz einer Entropie ist. Die neuen Variablen sind dann gerade die Ableitungen der Entropiedichte $h$ nach den alten Variablen: $y = \partial h/\partial u$ und $z = \partial h/\partial v$. In diesem Fall lautet die Entropie

$$H(u,v) = \int_\Omega h(u,v)\,dx \quad \text{mit Dichte } h(u,v) = u(\log u - 1) + v(\log v - 1).$$

Diese Zusammenhänge sind nicht neu: Die Äquivalenz zwischen der Symmetrisierbarkeit der Gleichungen und der Existenz einer Entropie ist bei hyperbolischen Erhaltungsgleichungen wohlbekannt [11]. Die Variablen $y$ und $z$ werden in der Thermodynamik Entropievariablen genannt. Neu ist die Anwendung dieser Prinzipien auf die Analysis parabolischer Systeme.[4]

# 5 Algorithmische Konstruktion von Entropien

In den Anwendungen der Entropiemethode sind gute Abschätzungen für die Entropiedissipation $D = -dH/dt$ von zentraler Bedeutung. Insbesondere ist von Interesse, ob die betrachtete Evolutionsgleichung ein gegebenes Funktional $H$ dissipiert, also zumindest $D \geq 0$ gilt. Derartige Abschätzungen zu beweisen ist in vielen Fällen ein nichttriviales Unterfangen. Außerdem wird eine naive Herangehensweise in der Regel zu nicht-optimalen Abschätzungen führen. Wir wollen dies anhand eines einfaches Beispiels erläutern und daran anschließend eine Technik vorstellen, mit der Dissipationsungleichungen systematisch und algorithmisch abgeleitet werden können. Unsere Ausführungen basieren auf [9].

Wir betrachten wieder die eindimensionale Dünnfilmgleichung

$$u_t + (u^\beta u_{xxx})_x = 0, \quad x \in \mathbb{T},\ t > 0, \quad u(\cdot,0) = u_0 \geq 0,$$

wobei $\mathbb{T}$ der eindimensionale Torus sei, d.h. wir nehmen periodische Randbedingungen an. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, dass eine glatte, positive Lösung existiert. Leiten wir das Funktional $H_\alpha$ in (6) ab, so folgt nach mehrfacher

[4] Beispielsweise in dieser Form verwendet in [6]. Das Populationsmodell wurde in [5] analysiert.

partieller Integration:

$$
\begin{aligned}
-\frac{H_\alpha}{dt} &= -\frac{1}{\alpha-1}\int_{\mathbb{T}} u^{\alpha-1}(u^\beta u_{xxx})_x\,dx = -\int_{\mathbb{T}} u^{\alpha+\beta-2}u_x u_{xxx}\,dx \\
&= (\alpha+\beta-2)\int_{\mathbb{R}} u^{\alpha+\beta-3}u_x^2 u_{xx}\,dx + \int_{\mathbb{T}} u^{\alpha+\beta-2}u_{xx}^2\,dx \qquad (9)\\
&= -\frac{1}{3}(\alpha+\beta-2)(\alpha+\beta-3)\int_{\mathbb{R}} u^{\alpha+\beta-4}u_x^4\,dx + \int_{\mathbb{T}} u^{\alpha+\beta-2}u_{xx}^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite ist nichtnegativ, wenn $(\alpha+\beta-2)(\alpha+\beta-3)\le 0$ oder $2\le\alpha+\beta\le 3$. Damit erhält man *eine* mögliche Antwort auf die Frage, für welche Parameter $\alpha$ das Funktional $H_\alpha$ bezüglich der Zeit monoton fällt. Die Antwort ist jedoch nicht optimal. Wir zeigen weiter unten, dass $dH_\alpha/dt\le 0$ gilt, wenn $3/2\le\alpha+\beta\le 3$ erfüllt ist. Der Grund für die Nichtoptimalität der obigen Rechnung ist, dass der zweite Summand in (9) in einigen Fällen den ersten Summanden kompensiert, selbst wenn dessen Vorfaktor negativ ist.

Um zu zeigen, dass die Dissipation $D_\alpha=-dH_\alpha/dt$ auch für Parameter $3/2\le\alpha+\beta\le 3$ nichtnegativ ist, integrieren wir partiell auf folgende *systematische* Weise. Zunächst sei bemerkt, dass die partielle Integration in (9) in der Form $D_\alpha = D_\alpha + c\cdot I_1$ mit $c=1$ geschrieben werden kann, wobei

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{T}} u^{\alpha+\beta}u^{\alpha+\beta}\Big((\alpha+\beta-2)\Big(\frac{u_x}{u}\Big)^2\frac{u_{xx}}{u} + \Big(\frac{u_{xx}}{u}\Big)^2 + \frac{u_x}{u}\frac{u_{xxx}}{u}\Big)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} \Big(u^{\alpha+\beta}\frac{u_x}{u}\frac{u_{xx}}{u}\Big)_x\,dx = 0.
\end{aligned}
$$

Es gibt insgesamt drei (sinnvolle und unabhängige) Regeln für partielle Integrationen, nämlich

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{T}} u^{\alpha+\beta}\Big((\alpha+\beta-3)\Big(\frac{u_x}{u}\Big)^4 + 3\Big(\frac{u_x}{u}\Big)^2\frac{u_{xx}}{u}\Big)\,dx = \int_{\mathbb{T}}\Big(u^{\alpha+\beta}\Big(\frac{u_x}{u}\Big)^3\Big)_x\,dx = 0,\\
I_3 &= \int_{\mathbb{T}} u^{\alpha+\beta}\Big((\alpha+\beta-1)\frac{u_x}{u}\frac{u_{xxx}}{x} + \frac{u_{xxxx}}{u}\Big)\,dx = \int_{\mathbb{T}}\Big(u^{\alpha+\beta}\frac{u_{xxx}}{u}\Big)_x\,dx = 0.
\end{aligned}
$$

Das Problem, die Nichtnegativität von $D_\alpha$ zu zeigen, ist offensichtlich äquivalent zu: Finde reelle Zahlen $c_1$, $c_2$ und $c_3$, sodass

$$
D_\alpha = D_\alpha + c_1 I_1 + c_2 I_2 + c_3 I_3 \ge 0.
$$

Die Idee besteht nun darin, nicht die Summe der Integrale, sondern die Summe der *Integranden* abzuschätzen. Punktweise Nichtnegativität der Integranden impliziert trivialerweise Nichtnegativität des Integrals. Die Homogenität der auftretenden Ausdrücke erlaubt uns, die Integranden (bis auf den Faktor $u^{\alpha+\beta}$) als

Polynome zu interpretieren, indem wir die Ableitungen von $u$ mit Polynomvariablen identifizieren: $u_x/u$ mit $\xi_1$, $u_{xx}/u$ mit $\xi_2$ usw. Setzen wir $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, so entspricht

$$\begin{aligned}
&D_\alpha \text{ dem Polynom } S(\xi) = -\xi_1\xi_3,\\
&I_1 \text{ dem Polynom } T_1(\xi) = (\alpha+\beta-2)\xi_1^2\xi_2 + \xi_2^2 + \xi_1\xi_3,\\
&I_2 \text{ dem Polynom } T_2(\xi) = (\alpha+\beta-3)\xi_1^4 + 3\xi_1^2\xi_2,\\
&I_3 \text{ dem Polynom } T_3(\xi) = (\alpha+\beta-1)\xi_1\xi_3 + \xi_4.
\end{aligned}$$

Die Polyonome $T_i$ nennen wir *Shift-Polynome*. Wenn wir das Problem

$$\exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} : \forall \xi \in \mathbb{R}^4 : (S + c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3)(\xi) \geq 0 \tag{10}$$

lösen, verfügen wir über eine punktweise Abschätzung des Integranden, und es folgt $D_\alpha \geq 0$.
Meist ist man an stärkeren Resultaten interessiert: Man möchte die Entropiedissipation von unten durch ein nichtnegatives Integral abschätzen. Im Falle der Entropie für die Dünnfilmgleichung könnte man etwa beweisen wollen, dass

$$D_\alpha(u) \geq c \int_{\mathbb{R}} \left|(u^{(\alpha+\beta)/2})_{xx}\right|^2 dx$$

für ein geeignetes $c > 0$ gilt. Dies kann mit der oben beschriebenen Methode geschehen. Dazu wird der Integrand auf der rechten Seite durch ein Polynom $P$ ausgedrückt, und das Problem (10) lautet nun:

$$\exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} : \forall \xi \in \mathbb{R}^4 : (S - cP + c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3)(\xi) \geq 0. \tag{11}$$

Die obige Vorgehensweise übersetzt sich in den folgenden Algorithmus:

1. Berechne das Funktional $D_\alpha[u]$ und formuliere es als ein Polynom $S$. Dieses Polynom wird natürlich von der Gestalt der Gleichung abhängen.

2. Bestimme alle Shift-Polynome $T_i$, die partiellen Integrationen entsprechen. Diese Polynome hängen von der Ordnung und Homogenität der Differentialgleichung ab, aber nicht von deren spezieller Struktur.

3. Entscheide, für welche Parameter $\alpha$ das Problem (10) gelöst werden kann. Dies zeigt, dass $H_\alpha$ bezüglich $t$ monoton fallend ist.

4. Entscheide, für welche Parameter $\alpha$ und Konstanten $c > 0$ das Problem (11) gelöst werden kann. Dies beweist Ungleichungen vom Typ $dH_\alpha/dt + cQ \leq 0$, wobei $Q$ ein nichtnegatives Integral ist, das Ableitungen der Lösung enthält.

Die Hauptaufgabe besteht also darin, das algebraische Problem (10) bzw. (11) zu lösen. Interessanterweise handelt es sich hierbei um ein *Quantoreneliminationsproblem* aus der Reellen Algebraischen Geometrie. Tarski hat bereits 1951 gezeigt:

> Eine quantifizierte Aussage über Polynome kann immer auf algorithmischem Wege auf eine quantorenfreie Aussage reduziert werden.

Es existiert eine Vielzahl von implementierten Algorithmen zur Quantoreneliminination, etwa das Paket QEPCAD (Quantifier Elimination using Partial Cylindrical Algebraic Decomposition) von Collins und Hong oder die Funktion "Reduce" von *Mathematica*. Diese Algorithmen liefern vollständige und exakte Lösungen. Der Nachteil ist die enorme Komplexität der verwendeten Algorithmen, die schon bei vergleichsweise einfachen Problemen jeden vernünftigen Zeitrahmen sprengen.

Ein alternativer Ansatz ist durch die Methode der Summe der Quadrate (SOS = Sum Of Squares) gegeben. Statt die Nichtnegativität in (10) bzw. (11) zu zeigen, wird das (scheinbar kompliziertere) Problem gelöst, das Polynom als Summe von Quadraten anderer Polynome zu schreiben. Diese Methode liefert in der Regel keine vollständigen Antworten, da es bekanntermaßen nichtnegative Polynome gibt, die nicht als eine Summe von Quadraten geschrieben werden können. Andererseits lässt sich die SOS-Methode wesentlich effizienter implementieren.

Das obige Problem für die eindimensionale Dünnfilmgleichung ist jedoch so einfach, dass wir das Entscheidungsproblem (10) „per Hand" lösen können. Offensichtlich ist die Benutzung der partiellen Integration $I_3$ nicht zielführend, da sie eine Ableitung vierter Ordnungen in erster Potenz enthält; wir setzen also $c_3 = 0$. Außerdem ist es zweckmäßig, den Ausdruck $\xi_1\xi_3$ in der Summe (10) zu eliminieren, da die Variable $\xi_3$ nur in erster Potenz auftritt; wir setzen entsprechend $c_2 = 1$. Die verbleibende quantifizierte Aussage lautet:

$$\exists c_1 \in \mathbb{R} : \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 :$$
$$(S + c_1 T_1 + T_2)(\xi) = (\alpha+\beta-3)c_1\xi_1^4 + (\alpha+\beta-2+3c_1)\xi_1^2\xi_2 + \xi_2^2 \geq 0.$$

Das Polynom kann auf ein Polynom zweiten Grades in der Variablen $\xi_1^2/\xi_2$ zurückgeführt werden, und die Lösung der entsprechenden quadratischen Ungleichung ergibt die bekannte Bedingung $3/2 \leq \alpha+\beta \leq 3$. Abschätzungen für die Entropiedissipation können bewiesen werden, wenn $3/2 < \alpha+\beta < 3$, und in diesem Fall existiert eine (von $\alpha$ und $\beta$ abhängige) Konstante $c > 0$ mit

$$\frac{dH_\alpha}{dt} + c\int_{\mathbb{T}} \left( \left|(u^{(\alpha+\beta)/2})_{xx}\right|^2 + \left|(u^{(\alpha+\beta)/4})_x\right|^2 \right) dx \leq 0.$$

Die obige Vorgehensweise verallgemeinert sich in natürlicher Weise bei Anwendung auf Gleichungen beliebiger gerader Ordnung $k$ vom Typ

$$u_t = \left( u^{\beta+1} q\left( \frac{u_x}{u}, \ldots, \frac{u_{x\ldots x}}{u} \right) \right)_x, \quad t > 0, \tag{12}$$

wobei $u_{x\dots x}$ die Ableitung der Ordnung $k-1$ und $q$ ein Polynom in $k-1$ Variablen darstellen. Im Falle der Dünnfilmgleichung ist $k=3$ und $q(\xi)=\xi_3$. Erstaunlich viele Gleichungen aus der Physik, Chemie und Biologie können in der Form (12) geschrieben werden. Neben der Dünnfilmgleichung ist ein weiteres Beispiel für eine (auch mathematisch interessante) Gleichung höherer Ordnung die *Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn-Gleichung* (DLSS-Gleichung) [7]

$$u_t = (u(\log u)_{xx})_{xx} \quad \text{in } \mathbb{T},\ t>0,$$

die Interfacefluktuationen in einem zweidimensionalen Spinsystem, dem sogenannten (zeitdiskreten) Toom-Modell, beschreibt. Hier lautet das Polynom $q(\xi)=\xi_1^3-2\xi_1\xi_2+\xi_3$. Es zeigt sich, dass sich die Funktionale $H_\alpha$ für $0\le\alpha\le 3/2$ entlang von Lösungen monoton verhalten.

Kürzlich wurde die algorithmische Entropiekonstruktion auf eine Gleichung *sechster* Ordnung angewendet, um die Existenz von Lösungen zu zeigen [10]:

$$u_t - \Big[u\Big(\frac{1}{u}\big(u(\log u)_{xx}\big)_{xx}+\frac{1}{2}\big((\log u)_{xx}\big)^2\Big)_x\Big]_x = 0, \quad x\in\mathbb{T},\ t>0.$$

Die Variable $u(t;x)$ stellt die Elektronendichte in einem Halbleiter dar, der durch eine Variante eines Quantendiffusionsmodells beschrieben werden kann. Hier zeigt sich die Stärke der algorithmischen Technik: Der Beweis von apriori-Abschätzungen für diese Gleichung „per Hand“ ist extrem mühsam. Die obige Methode führt einfach und elegant zum Ziel, da sie sämtliche möglichen partiellen Integrationen einbezieht.

Grundsätzlich kann die algorithmische Entropiekonstruktion auch für Gleichungen in mehreren Raumdimensionen $d$ verwendet werden. Ein naiver Ansatz wäre, jeder partiellen Ableitung eine Polynomvariable zuzuordnen und sämtliche partiellen Integrationen als Shift-Polynome zu formulieren. Leider ergibt dies eine sehr hohe Anzahl von Variablen $\xi_i$ und Koeffizienten $c_j$; das entstehende Problem ist auch algorithmisch nicht sinnvoll zu bewältigen. Eine bessere Variante ist, die Symmetrieeigenschaften der Gleichungen auszunutzen und nur mit den symmetrischen, skalaren Ausdrücken wie $|\nabla u|^2/u^2$ und $(\Delta u)/u$ zu arbeiten. Auf diese Weise kann beispielsweise gezeigt werden, dass $H_\alpha$ für $3/2\le\alpha+\beta\le 3$ Lyapunov-Funktionale für Lösungen der mehrdimensionalen Dünnfilmgleichung sind. Im Falle der DLSS-Gleichung ist $H_\alpha(u(t))$ für alle $0<\alpha<2(d+1)/(d+2)$ monoton fallend.

Es ist zu erwarten, dass Entropiemethoden aufgrund ihrer physikalischen Interpretierbarkeit und ihrer Flexibilität in der Anwendung zunehmend an Bedeutung in der Analysis nichtlinearer partieller Diffusionsgleichungen gewinnen werden. Mit der Erweiterung der Techniken auf neue Gleichungsklassen werden Entropiemethoden bei der Validierung von Modellen und in der numerischen Analysis auch zukünftig eine wichtige Rolle spielen. Der Begriff der Entropie erweist sich damit mehr als ein Jahrhundert nach seiner Einführung als ein robustes und nützliches Instrument in Theorie und Anwendungen.

# Literatur


[1] L. Ambrosio, N. Gigli und G. Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*. Birkhäuser, Basel, 2005.

[2] D. Bakry und M. Emery. Diffusions hypercontractives. In: Sém. Proba. XIX, no. 1123 in Lecture Notes in Math., pp. 177–206. Springer, 1985.

[3] F. Bernis und A. Friedman. Higher order nonlinear degenerate parabolic equations. *J. Differential Equations* 83 (1990), 179–206.

[4] J. A. Carrillo, A. Jüngel, P. Markowich, G. Toscani und A. Unterreiter. Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities. *Monatsh. Math.* 133 (2001), 1–82.

[5] L. Chen and A. Jüngel. Analysis of a multi-dimensional parabolic population model with strong cross-diffusion. *SIAM J. Math. Anal.* 36 (2004), 301–322.

[6] P. Degond, S. Génieys, and A. Jüngel. A system of parabolic equations in nonequilibrium thermodynamics including thermal and electrical effects. *J. Math. Pures Appl.* 76 (1997), 991–1015.

[7] B. Derrida, J. Lebowitz, E. Speer und H. Spohn. Fluctuations of a stationary nonequilibrium interface. *Phys. Rev. Letters* 67 (1991), 165–168.

[8] R. Fisher. Theory of statistical estimation. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 22* (1925), 700–725.

[9] A. Jüngel and D. Matthes. An algorithmic construction of entropies in higher-order nonlinear PDEs. *Nonlinearity* 19 (2006), 633–659.

[10] A. Jüngel and J.-P. Milišić. A sixth-order nonlinear parabolic equation for quantum systems. Eingereicht, 2008.

[11] S. Kawashima and Y. Shizuta. On the normal form of the symmetric hyperbolic-parabolic systems associated with the conservation laws. *Tohoku Math. J., II. Ser.* 40 (1988), 449–464.

[12] N. Shigesada, K. Kawasaki und E. Teramoto. Spatial segregation of interacting species. *J. Theoret. Biol.* 79 (1979), 83–99.

[13] C. Villani. *Optimal Transport, Old and New*. Im Druck, Springer, 2009. Online: *http://www.umpa.ens-lyon.fr/∼cvillani/surveys.html*.



*Ansgar Jüngel and Daniel Matthes*
*Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien*
*Wiedner Hauptstr. 8–10, 1040 Wien*

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 209 (2008), 15–28

# Geometry of Architectural Freeform Structures

**Helmut Pottmann**[1], **Alexander Schiftner**[1,2], **Johannes Wallner**[3]

[1] TU Wien [2] Evolute GmbH, Wien [3] TU Graz

*This article shows to which extent a particular field of mathematics, namely discrete differential geometry, has recently become relevant in architectural design. It is very interesting that new mathematics has emerged from this cooperation with a branch of knowledge hitherto not known for its use of mathematical methods.*

## Introduction

Complex freeform structures are one of the most striking trends in contemporary architecture. This direction has been pioneered by architects such as F. Gehry who exploit digital technology originally developed for the automotive and airplane industry for tasks of architectural design and construction. This is not a simple task at all, since the architectural application differs from the original target industries in many ways, including aesthetics, statics, scale and manufacturing technologies.

Whereas metal forming can generate any reasonable shape of a car body, it is much less clear how to actually construct a complicated geometric shape in an architectural design. One has to segment the shape into simpler parts, so-called panels. According to Lars Spuybroek, "panelization is a hugely important issue" [10]. Since available CAD software does not cover this topic, one may have to resort to simpler shapes, to accept higher costs or to try experimental approaches.

Very recent research shows that the use of geometry and computational mathematics bears a great potential to advance the field of freeform architecture. It is a major goal of this paper to sketch these developments and to illustrate them at hand of a few real projects. In fact, it is in place to talk about a new research area, called *Architectural Geometry* [6], which is currently emerging at the border of differential geometry, computational mathematics and architectural design/ engineering.

ISSN 0020-7926 © 2008 Österr. Math. Gesellschaft

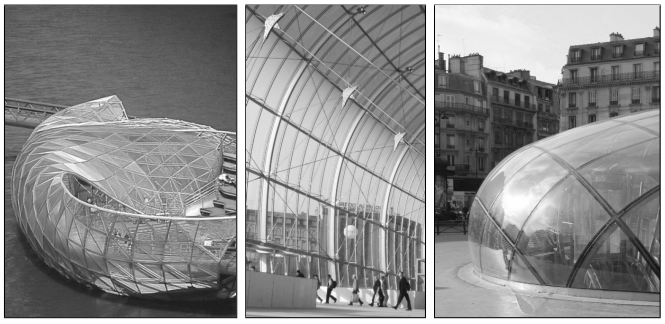


Figure 1: Segmentation of curved surfaces: From left to right: flat panels (Murinsel, Graz), single-curved panels (TGV train station, Strasbourg), and double-curved panels (St. Lazaire metró station, Paris).

Our paper is structured as follows. In Section 1, we discuss the problem of covering freeform shapes with planar quadrilateral panels. The resulting *planar quad (PQ) meshes* possess a number of important advantages over triangular meshes: they have a smaller number of edges, resulting in a smaller number of supporting beams following the edges, less steel and less cost. Quad meshes also have a lower node complexity, which is an important advantage for manufacturing. Panelization with planar quads and an optimized layout of supporting beams can be made accessible with methods from *discrete differential geometry* [5, 6, 7, 4]. Section 2 discusses freeform structures covered by *single curved panels*. It turns out that a basic geometric entity for this purpose, which we call a *developable strip model*, is obtained as a limit shape of a quad mesh with planar faces under a one-directional refinement rule. Developable strip models may be considered as semi-discrete surface representations since they constitute a link between smooth surfaces and discrete surfaces (meshes). In Section 3, we address other types of semi-discrete representations which are suitable for covering negatively curved surface parts with ruled surface panels. Finally, we point to some of the many open problems in architectural geometry.

## 1 Planar quad meshes and supporting beam layout

Assume that a smooth shape is given ('designed'), and one seeks a way of achieving that design in reality by approximating it by a polyhedron with quadrilateral faces, by subsequently building a steel construction along the edges of that polyhedron, and by realizing the faces as glass panels. For reasons of simplicity, and because this is the typical case anyway, we reduce that problem to the following mathematical abstraction: Given a submanifold $M \subseteq \mathbb{R}^3$, typically with boundary, we ask for a mapping $x$ from $\mathbb{Z}^2$ to $\mathbb{R}^3$ such that all $x(i,j)$ lie close to $M$ and such that each elementary quadrilateral

$$\begin{array}{ccc} x(i\,,j+1) & \longrightarrow & x(i+1\,,j+1) \\ \big\uparrow & & \big\uparrow \\ x(i\,,j) & \longrightarrow & x(i+1\,,j) \end{array} \tag{13}$$

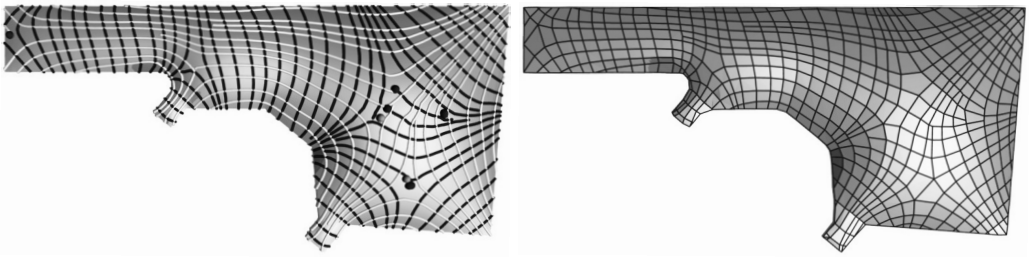


Figure 2: *Left:* Network of conjugate curves on a smooth surface $M$ which away from singularities serve as parameter lines of a conjugate parametrization $f(u,v)$. *Right:* Discrete samples of $f$ yield a mesh $x : V \to M$ with combinatorics $(V,E,F)$ which is mostly that of a regular grid.

is planar (see Figure 3). For practical purposes we also want this face to be convex. A characterization of both properties in elementary terms is that the angle sum in the quadrilateral (13) equals $2\pi$.[1]

In the construction of such discrete surfaces one has a lot of freedom, and it is tempting to solve for $x(i,j)$ in the manner of an initial value problem: Assuming that vertices $x(i,j)$, $x(i+1,j)$, $x(i,j+1)$ lie in the surface $M$, we consider their affine span $U$ and choose $x(i+1,j+1)$ anywhere on the intersection curve $M \cap U$. This method however does not work in practice, as it does not take aesthetics into account: we have use only for such solutions where each of the polygons $\big(x(i,j)\big)_{i=\text{const.}}$ and $\big(x(i,j)\big)_{j=\text{const.}}$ is visually smooth. It turns out that the right way to approach this problem is to invoke the theory of discrete differential geometry [9, 3], and to consider $x$ as a discrete surface parametrization approximating a smooth one.

In the classical differential geometry of smooth surfaces, there is the notion of *conjugate parametrization* $f(u,v)$ of a surface, which is characterized by linearly dependent vectors $\partial_u f, \partial_v f, \partial_u \partial_v f$. This means that any small quadrilateral

$$\begin{array}{ccc} f(u\,,v+\Delta v) & \longrightarrow & f(u+\Delta u\,,v+\Delta v) \\ \Big| & & \Big| \\ f(u\,,v) & \longrightarrow & f(u+\Delta u\,,v) \end{array} \tag{14}$$

whose convex hull's volume has the Taylor polynomial

$$\frac{1}{6}(\Delta u \Delta v)^2 \det(\partial_u f, \partial_v f, \partial_u \partial_v f) + \cdots \tag{15}$$

[1] For an $n$-gon with vertices $p_0, \ldots, p_{n-1}$, the angle sum $s$ is defined by letting $v_i = p_{i+1} - p_i$ (indices modulo $n$) and $s = \sum \cos^{-1}(\langle v_i, -v_{i-1}\rangle / (\|v_i\| \cdot \|v_{i-1}\|))$. For general $n$-gons, the condition of planarity plus convexity reads $s = (n-2)\pi$, by the discrete version of Fenchel's theorem.

is *planar* to a higher degree than in the general case. As it turns out [5], a planar quadrilateral mesh $x(i,j)$ approximating a surface can be effectively found from a conjugate parametrization $f(u,v)$ by letting $x^0(i,j) = f(i\Delta u, j\Delta v)$ and optimizing $x^0$ towards planarity of quads (see Figure 2).

**Computational issues.** This optimization procedure is highly nonlinear, as it involves planarity of quadrilaterals as a constraint yet to be achieved, together with target functionals which express smoothness and proximity to a reference surface $\Phi$. Smoothness of a polygon $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ is encoded by the quadratic functional $\|\Delta^2 x\|_{l^2} \to \min$ and $\operatorname{dist}(\Phi,\cdot)^2$ is reasonably close to a quadratic function, but planarity of faces contains quite some numerical nastiness. Experiments confirm that it is hopeless to optimize arbitray meshes towards planarity. The reason for this lies also in combinatorial/topological obstructions. However, optimization typically succeeds if initialized from a conjugate parametrization $f(u,v)$. In theory it is easy to find those: one can arbitrarily prescribe the tangent field $(u,v) \mapsto \operatorname{span}(\partial_u f)$. Thus one would expect that the problem of approximate segmentation of a surface into planar quadrilaterals is solved. In practice however, finding $f(u,v)$ is the real crux of the matter, because there are additional constraints such as minimum angles between parameter lines.

**Surface layers and beam layout — Offset surfaces.** We go one step further and consider not one but *two* discrete surfaces at the same time which we think of as two layers of an actual construction (see Figure 3). A usual condition imposed on them is that they are combinatorially equivalent and located at constant distance from each other (in that case they are called an *offset pair*). Distances make sense only if corresponding edges and faces are parallel, and they can be measured between corresponding faces, or edges, or vertices. The appropriate way of measuring distances depends on the application, one of which is *beam layout* (see Figure 4): We imagine steel beams with a constant rectangular cross section following edge pairs.

For more information on meshes which admit offsets of various kinds, see [5, 7]. Several interesting geometric characterizations of offset properties are known, and the entire theory fits nicely into the *consistence as integrability* paradigm which is

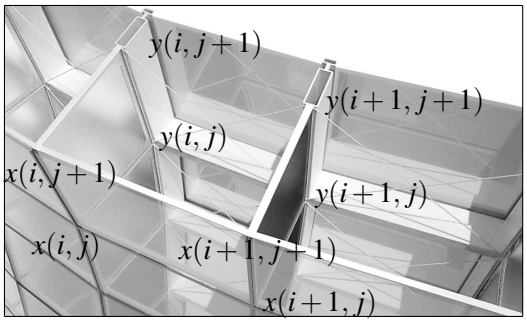



Figure 3: This multilayer construction is based on two discrete surfaces $x : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3$ and $y : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3$ where corresponding faces are planar, and parallel at constant distance. In addition, every pair of corresponding edges lies in a plane *(Image: B. Schneider).*

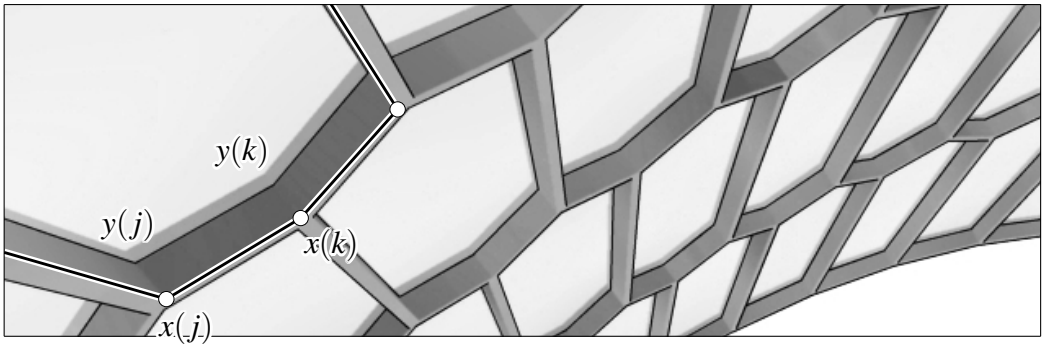



Figure 4: This beam layout is based on a discrete surface $x : V \to \mathbb{R}^3$ which has the combinatorics of a regular hexagonal lattice $(V, E, F)$. Another discrete surface $y : V \to \mathbb{R}^3$ has the property that for all $(k, j) \in E$, corresponding edges $x(k)x(j)$ and $y(k)y(j)$ are parallel at constant distance. In the positively curved areas of the surface, edges of beams with rectangular cross-section have an exact intersection at the nodes *(Image: H. Schmiedhofer).*

the main theme of the monograph [3]. For instance the discrete surface $x$ admits an offset $y$ at constant face-face distance, if and only if for all $i, j$, in the figure of four edges emanating from the vertex $x(i, j)$,

$$\begin{array}{ccccc} & & x(i,j+1) & & \\ & & | & & \\ x(i-1,j) & - & x(i,j) & - & x(i+1,j) \\ & & | & & \\ & & x(i,j-1) & & \end{array}$$

the sums of the two diagonally opposite angle pairs are equal. A further equivalent characterization which extends to non-quadrilateral faces is that for any vertex, the adjacent faces are tangent to a common right circular cone. Such geometric conditions are not difficult to incorporate into optimization procedures and are highly relevant for applications, as still we can approximate 'arbitrary' shapes by discrete surfaces with the face offset property by starting optimization from a principal curvature line parametrization [5].

The case of meshes which admit offsets at constant edge-edge distance behaves in a different way: here the obtainable shapes are still unknown, even for the appropriate smooth analogue (i.e., isothermic surfaces in the sense of Laguerre geometry).

**Remark: Discrete curvature theory.** We do not want to pass over the fact that the concept of *parallel meshes* developed in [7] naturally leads to a theory of curvatures of discrete surfaces which has its basis in the following: Assume that a

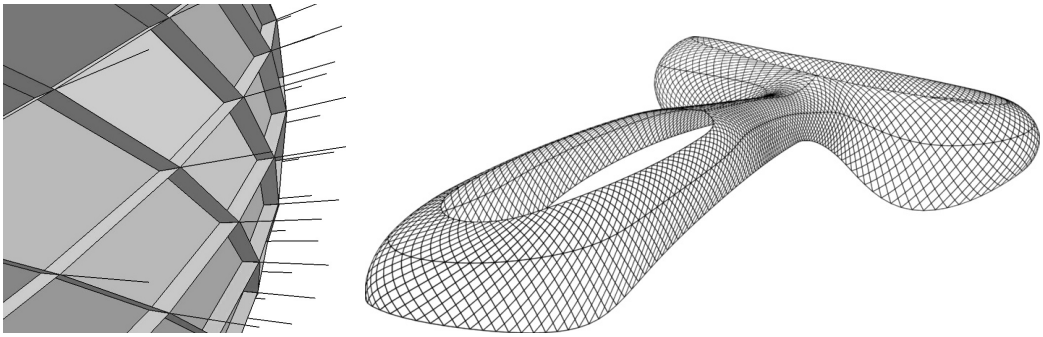
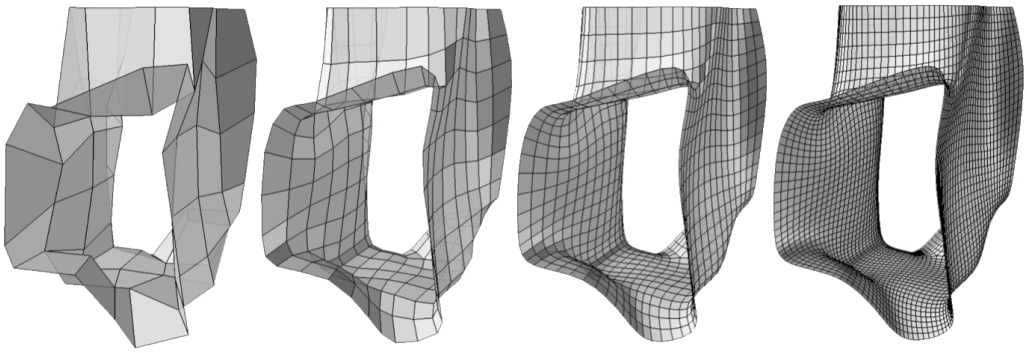


Figure 5: Layout of supporting beams for non-planar quad mesh applied to the project *Yas Island Marina Hotel,* Abu Dhabi, by Asymptote Architecture: The figure on the left shows an optimised solution for the construction of the steel frame aligned with the mesh shown at right.

surface $M$ is equipped with a unit normal vector field, and every point $p \in M$ moves to $p + \delta \cdot n(p)$, where $\delta \in \mathbb{R}$. Then the change in surface area is given by the area integral $\Delta A = \int 1 - 2\delta H + \delta^2 K$, where the functions $H, K$ are mean curvature and Gaussian curvature, respectively. An analogous formula in the discrete category, where movement in orthogonal direction is replaced by passage to an offset mesh leads to the definition of curvatures associated with the faces of discrete surfaces [7, 2]. It is remarkable and was not in the least expected by the authors that the discrete minimal surfaces of [1] occur as a special case.

**Supporting beam layout for arbitrary types of meshes.** In practice triangular meshes are widely used for covering freeform shapes. A major issue regarding these is the layout of supporting beams: for each node and its adjacent edges one is looking for a configuration of steel beams such that their symmetry planes intersect in a common node axis. Exact solutions to this problem are not feasible for applications in general. This is due to the fact that all meshes parallel to a triangular mesh are scaled copies of the given mesh with respect to some center. Therefore one is looking for approximate solutions which uniformly distribute the error throughout the nodes of the mesh. Similarly such solutions can be applied to types of meshes where parallelity is not defined, e.g. quad meshes with non-planar faces (see Figure 5).

**Design of PQ meshes.** In order to overcome the great numerical difficulties when optimizing a mesh towards planarity of its faces, we used a strategy common to discrete problems which are in fact discretizations of continuous ones: First solve at a coarse resolution and propagate the result to the next finer resolution, using it as initial values for the next round of optimization. In our case we use the available polyhedral subdivision rules [11] for propagation, and are thus able to greatly facilitate the *design* of polyhedral surfaces with planar quadrilateral faces (see Figure 6).



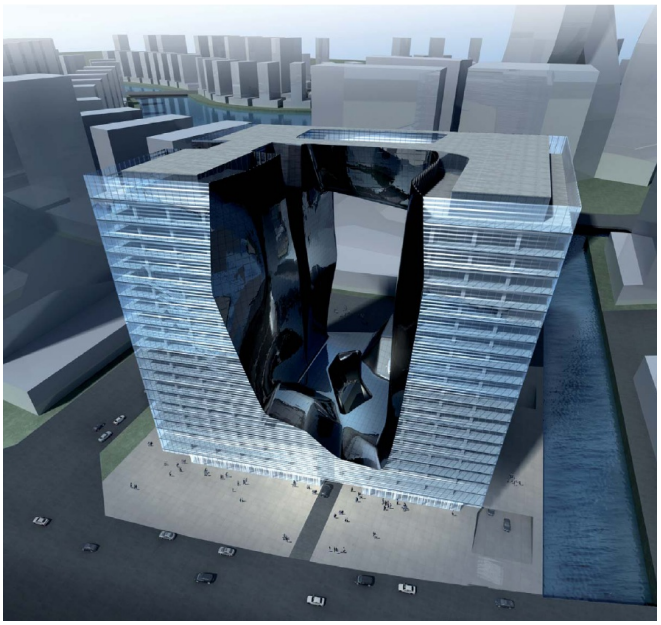


Figure 6: Design of a planar quad mesh via subdivision: Iterated steps of optimization and subdivision (which destroys planarity) lead to a planar quad mesh design useful in practice. The images show an application to the *Opus* project by Zaha Hadid Architects. This work has been performed within the project *MLFS* (grant 813391 funded by the Austrian research council, FFG).

## 2 Single curved panels

From the design viewpoint it is very desirable to be able to use genuinely curved surfaces without the necessity of segmentation into planar pieces (see e.g. Figure 1, right). Unfortunately this is rather expensive: in order to realize double curved glass panels, a separate mould has to be manufactured for each. The cost of this method has led to the fact that only very few large freeform structures which use double curved panels are in existence. *Kunsthaus Graz* (where the cost of construction is reported to have been considerable) is one, even if its double curved outer surface is only ornamental and does not, for instance, keep out rain.

An elegant compromise which achieves the illusion of true curvedness to a greater extent than polyhedral surfaces are surfaces comprised of *single-curved* panels, each of which is *developable* into the plane and has zero Gaussian curvature. The

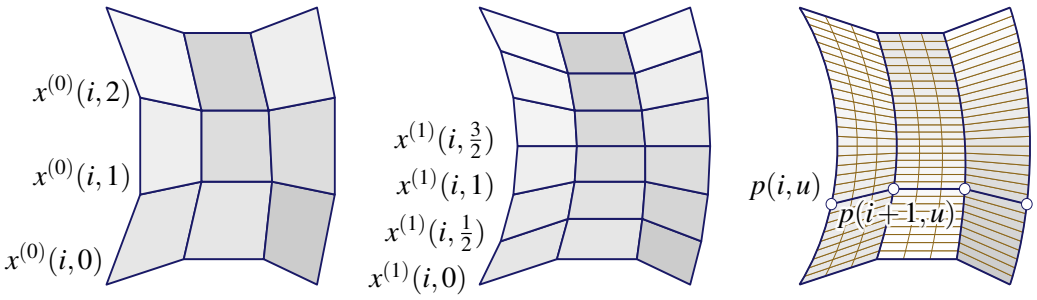



Figure 7: A semidiscrete surface $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ as limit of a sequence $(x^{(j)} : \mathbb{Z} \times (2^{-j}\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^3)_{j=0,1,2,\ldots}$ of discrete surfaces. Planarity of elementary quadrilaterals implies developability of the limit, assuming smoothness.

manufacturing of such single-curved panels is much easier than that of double-curved ones and basically is the same as bending paper. Today only few buildings which use that idea have been realized, one being the new TGV train station in Strasbourg (see Figure 1, center).

**Semidiscrete surface representations.** It turned out that an elegant way to describe surfaces consisting of developable strips (*D-strip models*) is a mixture of the discrete and continuous surfaces employed above.

It is a well known theorem of classical differential geometry that the following properties of a surface are essentially equivalent: (i) the surface is developable, i.e., locally isometric to a plane; (ii) the Gaussian curvature equals zero; (iii) the surface locally has a *torsal ruled* parametrization $f(u,v) = (1-u)a(v) + u\,b(v)$ with $\det(\partial_u a, \partial_u b, b-a) = 0$.

For this reason we consider the *semidiscrete* surface representation $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, where we imagine the actual surface described by $p$ to consist of the union of straight line segments

$$\{\overline{p(i,u)p(i+1,u)} \mid i \in \mathbb{Z}, u \in \mathbb{R}\}, \tag{16}$$

(see Figure 7). The single strips of the semidiscrete surface $p(i,u)$ are developable, if the vectors $\partial_u p$, $\Delta_i p$, $\Delta_i \partial_u p$ are linearly dependent, which means that the elementary quadrilateral

$$\begin{array}{ccc} p(i\,,u+\Delta u) & \longrightarrow & p(i+1\,,u+\Delta u) \\ \big| & & \big| \\ p(i\,,u) & \longrightarrow & p(i+1\,,u) \end{array} \tag{17}$$

whose convex hull's volume has the Taylor polynomial

$$\frac{1}{6}(\Delta u)^2 \det(\Delta_i p, \partial_u p, \Delta_i \partial_u p) + \cdots$$

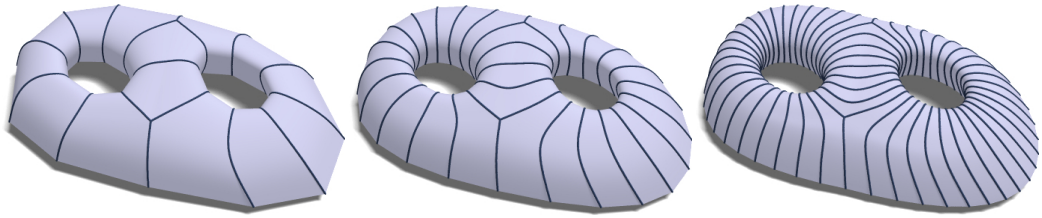


Figure 8: Design of D-strip models via subdivision: A coarse model is optimized so as to become piecewise developable (left). A subdivision rule destroys this property, but yields a good starting point for another round of optimization (center). This procedure is iterated (at right).

is planar to a higher degree than usual. From this property we derive the viewpoint that a D-strip model is a semidiscrete version of a conjugate parametrization and also a semidiscrete version of a PQ mesh. This is exploited by [8], where approximation of surfaces with D-strip models, design of D-strip models, and a geometric theory of D-strip models including offsets is studied.

**Computational issues.** The basic instrument in computing with D-strip models is an optimization procedure which takes a semidiscrete surface and optimizes it towards developability. It can be used to solve the approximation problem (if initialized from a conjugate surface parametrization, see Figure 9) and for the design problem (if used in an alternating way with a refinement procedure, see Figure 8).

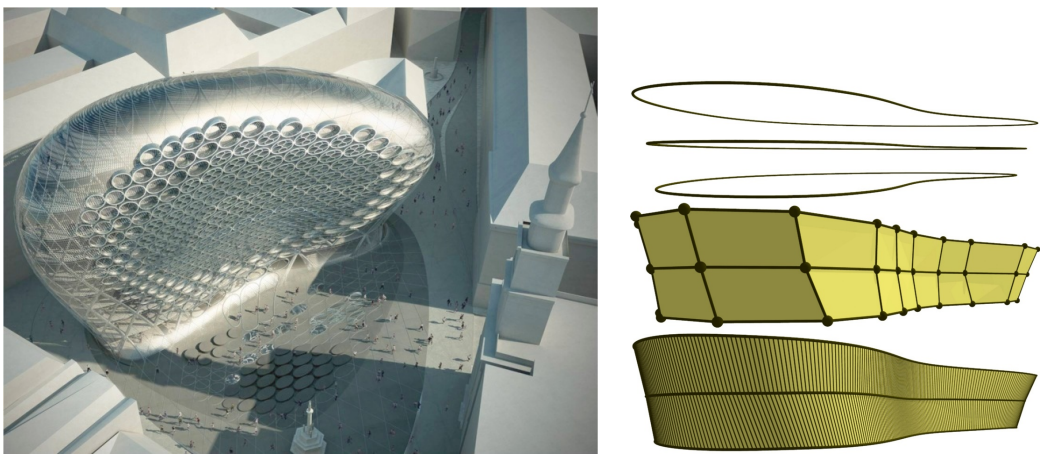


Figure 9: *Szervita Square,* Budapest, a project designed by Zaha Hadid Architects. Example of approximating the outer shell by a D-strip model aligned with planar, parallel sections given by the bottom three floor slabs. Sections, corresponding points used for initialization and the resulting D-strip model are shown at right.

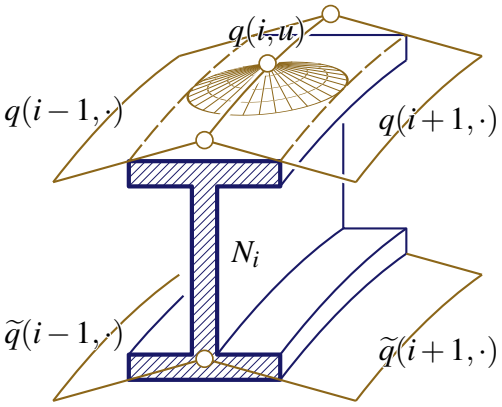



Figure 10: The top and bottom flanges of the I-beam follow an offset pair $p, \widetilde{p}$ of circular D-strip models – shown by dashed lines and one inscribed circle. It can be shown that these circles are contained in families of cones, which are tangent to another offset pair $q, \widetilde{q}$ of D-strip models usable for glass panels, and that the cone axes define a developable strip $N_i$ usable as the vertical web of the I-beam.

Similar to the optimization of meshes with planar faces, optimization towards developability is a numerically challenging task which is bound to fail except for small instances, or for instances initialized with geometric knowlege (using conjugate parametrizations). We used a simple spline model

$$p(i,u) = \sum_j b_{ij} N(\gamma u - j),$$

where $N$ is the cubic B-spline basis function and $b_{ij} \in \mathbb{R}^3$ are control points. We formulated all optimization goals, including the developability constraint, as target functions to be minimized. For details, see [8].

**Semidiscrete differential geometry.** Semidiscrete objects have been considered before in the systematic investigation of $k$-surface transformations (Jonas, Darboux, Combescure, etc.) as partial limits of $(k+l)$-dimensional discrete surfaces, where $k$ parameters become continuous and $l$ remain discrete [3]. It turns out that discrete integrable systems yield a master theory where many of the classical results, e.g. on permutability of transformations, follow as corollaries. The approach to semidiscrete surfaces described here is basically the case $k = l = 1$. We refrain from systematically discussing the further development of this semidiscrete surface theory, and restrict ourselves to aspects which have applications in architecture.

**Offsets.** For the purpose of multilayer constructions, we are interested in such D-strip models $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ which admit an *offset* at constant distance, which means another D-strip model $\widetilde{p}$ such that either

$$\|p(i,u) - \widetilde{p}(i,u)\| = \text{const.}$$

or alternatively that the distance between developable strips, measured along common normal vectors, is the same. It is also desirable that all ruled surface strips

$$(u,v) \mapsto (1-v)p(i,u) + v\,\widetilde{p}(i,u) \quad (i \in \mathbb{Z})$$

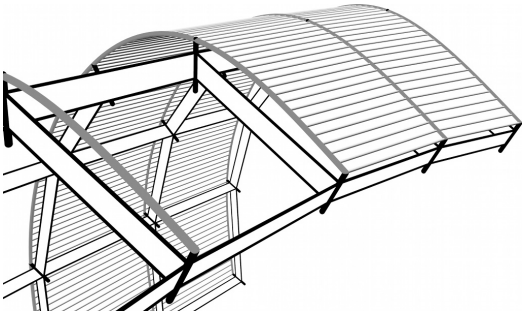


Figure 11: The close connection between PQ meshes and D-strip models can be exploited for *mixed multilayer constructions*. Usually one prefers simple structural elements, which can be achieved using a PQ mesh. An offset of this PQ mesh gives a good initialization for optimization of a D-strip model.

are developable because then we can use them for the definition of curved steel beams (see Figure 10). As it turns out, the *circular* strip models which possess families of inscribed circles, and the *conical* strip models, which possess families of inscribed cones, are the right geometric entity to consider here. Both are semidiscrete versions of principal curvature line parametrizations.

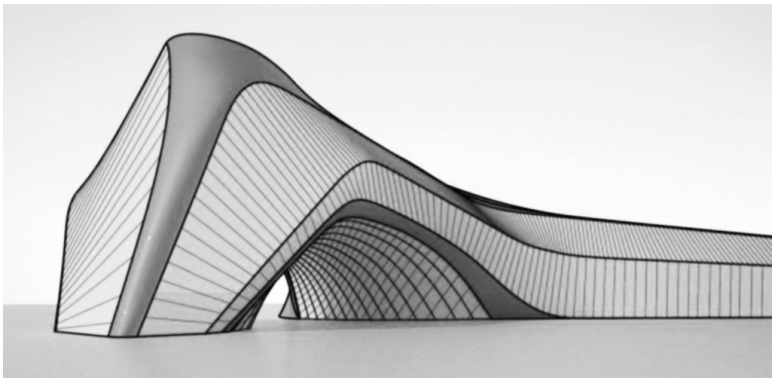
## 3 Ruled panels and beyond

Different types of segmentation are driven by capabilities of the material used, requirements on the substructure, aesthetics, etc. Up to now we have considered segmentation of surfaces into developable pieces only. These are relevant for materials that can be single curved to a certain extent, like glass, sheet metal or wood. As an example for a material with completely different properties we consider freeform surfaces made from concrete, for which one can not avoid to build freeform moulds or substructures. Therefore the production of moulds must be cheap, which can be achieved in practice e.g. by hot wire cutting of styrofoam. This leads to the necessity of approximating a freeform surface with a sequence of ruled surfaces.

**Smooth strip models.** Like in section 2, we are naturally led to semidiscrete surface representations, cf. Equation (16). Instead of developability, we aim for smooth transitions between successive ruled strips along their common edge curves. This is the case if the vectors $\Delta_i p, \partial_u p, \Delta_{i+1} p$ are linearly dependent, or, in other words, if the infinitesimal vertex star

$$\begin{array}{ccccc} & & p(i\,,u+\Delta u) & & \\ & & | & & \\ p(i-1,u) & \text{———} & p(i\,,u) & \text{———} & p(i+1,u) \qquad (\Delta u \to 0) \\ & & | & & \\ & & p(i\,,u-\Delta u) & & \end{array} \tag{18}$$

is planar.



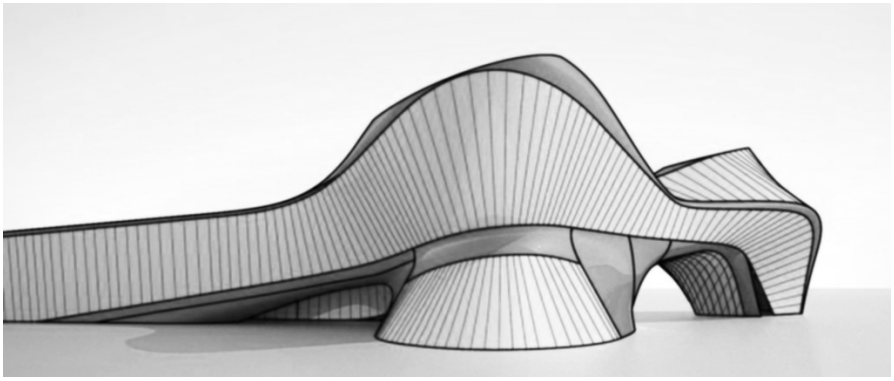
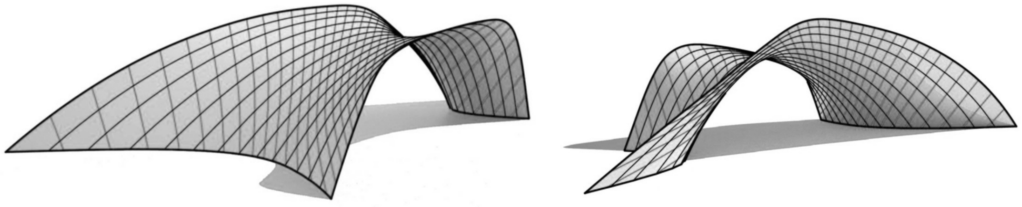


Figure 12: *Above:* Depending on the behavior of the asymptotic curves of the given design surface, negatively curved areas may be approximated by large ruled surface patches, or by a smooth union of ruled surface strips. Here an application to Zaha Hadid Architects' design for the *Nuragic and Contemporary Art Museum* in Cagliari, Italy is shown. *Below:* Details of surface parts which carry a dense sequence of ruled strips (taken from the underside).



Analogous to D-strip models, an optimization procedure is used to compute a smooth ruled strip model. The Gaussian curvature of ruled surfaces is $\leq 0$, therefore it only makes sense to approximate negatively curved surfaces with ruled strip models. The initialization of the optimization and the decision on the number of strips one should use can be made by inspecting the asymptotic curves of the given design surface. Rulings should approximately follow the (less curved) asymptotic curves. Hence, small curvature of one family of asymptotic curves implies a small

number of ruled strips. Figure 12 shows an example.

**Future research.** The field of Architectural Geometry is just emerging and thus a large number of problems have not been addressed so far. While solving parts of the existing problems, architects are creating even more complex and challenging shapes and thus provide a steady input to the list of future research topics.

Among the problem areas addressed in this note, the initialization of optimization algorithms with conjugate curve networks is probably the most challenging and important unsolved task. The challenge lies in the incorporation of design intents, while meeting various constraints and dealing with global problems such as the placement of singularities.

There is basically no geometric research on freeform structures from non-ruled double curved panels. Those have to be manufactured with moulds. Depending on the technology being used, moulds may be reusable and then the interesting question arises to cover a freeform surface with panels that can be manufactured with a small number of moulds. If the surface does not exhibit symmetries, precise congruence of panels may not be achievable. However, one can aim at panels that can be cut out from a slightly larger panel produced with the same mould.

The number of tasks being unsolved is also enlarged by the number of different materials being used, since their behavior and production technology has to enter the panel layout computation. Panel layout and the underlying supporting structure may not be totally separated. Therefore, structural aspects have to be incorporated as well.

## Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge the support of the Austrian research council (FFG) under grant No. 813391, the Austrian Science Fund (FWF) within the framework of the National Research Network *Industrial Geometry* (grant No. S92), RFR, Paris, and Waagner-Biro Stahlbau, Vienna. We want to thank Waagner-Biro, Zaha Hadid Architects, London, and Asymptote Architecture, New York, for the permission to include real data sets in this article.

## References

[1] A. Bobenko, T. Hoffmann, and B. Springborn, *Minimal surfaces from circle patterns: Geometry from combinatorics*, Ann. of Math. **164** (2006), 231–264.

[2] A. Bobenko, H. Pottmann, and J. Wallner, *A curvature theory for discrete surfaces based on mesh parallelity*, Geometry preprint 2008/06, TU Graz, 2008.

[3] A. Bobenko and Yu. Suris, *Discrete differential geometry: Integrable structure*, Graduate Studies in Math., no. 98, American Math. Soc., 2008.

[4] S. Brell-Cokcan and H. Pottmann, *Tragstruktur für Freiformflächen in Bauwerken*, Patent AT503.021 31.

[5] Y. Liu, H. Pottmann, J. Wallner, Y.-L. Yang, and W. Wang, *Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces*, ACM Trans. Graphics **25** (2006), no. 3, 681–689.

[6] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, and A. Kilian, *Architectural geometry*, Bentley Institute Press, 2007.

[7] H. Pottmann, Y. Liu, J. Wallner, A. Bobenko, and W. Wang, *Geometry of multi-layer freeform structures for architecture*, ACM Trans. Graphics **26** (2007), #65,1–11.

[8] H. Pottmann, A. Schiftner, P. Bo, H. Schmiedhofer, W. Wang, N. Baldassini, and J. Wallner, *Freeform surfaces from single curved panels*, ACM Trans. Graphics **27** (2008), #76.

[9] R. Sauer, *Differenzengeometrie*, Springer, 1970.

[10] L. Spuybroek, *NOX: Machining architecture*, Thames & Hudson, 2004.

[11] J. Warren and H. Weimer, *Subdivision methods for geometric design: A constructive approach*, Morgan Kaufmann, 2001.

*Authors' address:*

*Helmut Pottmann, Alexander Schiftner*
*TU Wien / Geometric Modeling and Industrial Geometry Research Group*
*Wiedner Hauptstr. 8–10/104, A 1040 Wien*
*{pottmann,aschiftner}@geometrie.tuwien.ac.at*

*Johannes Wallner*
*TU Graz / Institute of Geometry*
*Kopernikusgasse 24, A 8010 Graz*
*j.wallner@tugraz.at*

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 209 (2008), 29–39

# Ausbreitung von Epidemien

**Christoph Ableitinger**
Universität Wien

## 1 Ein Thema, das die Welt bewegt

Die Epidemiologie setzt sich mit den Ursachen und der Ausbreitung von übertragbaren Krankheiten auseinander. Erste Maßnahmen, Epidemien erfolgreich entgegenzutreten, gab es schon 1850. Mathematische Modelle wurden allerdings erst etwa 50 Jahre später entwickelt. Eine entscheidende Rolle spielte dabei der britische Mediziner Sir Ronald Ross, der beinahe sein gesamtes Leben für die Bekämpfung der Malaria gearbeitet hat. Er bereiste zahlreiche Länder und Kriegsschauplätze, um mehr über diese Krankheit zu erfahren. Er wollte die Ursache für die Malariaepidemie und ihre rasche Ausbreitung entdecken. Letztlich fand er heraus, dass die Ansteckung mit Malaria immer über Malariamücken ablief. Dafür erhielt er 1902 den Medizin-Nobelpreis, 1911 wurde er geadelt. Er entwickelte sogar ein erstes mathematisches Modell zur Beschreibung der Verbreitung der Krankheit.

Gegen Ende des 20. Jahrhunderts stieg auch medial das Interesse an der Epidemiologie. Krankheiten wie SARS oder die Vogelgrippe waren wochenlang Thema in Zeitungen und im Fernsehen rund um den Erdball. Viele Prognosen, Szenarien und emotional geprägte Diskussionen wurden geführt – nicht zum Schaden der Pharmaindustrie, wie man sich vorstellen kann.

Gerade auch diese Diskussionen und Entwicklungen haben gezeigt, dass realistische Prognosen über den Verlauf einer Epidemie nur sehr schwer zu treffen sind. Die dafür notwendigen mathematischen Modelle sind sehr vielschichtig. Im Folgenden wird ein Konzept für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe vorgestellt, das den Bogen von Modellen mit zuerst sehr einfachen Annahmen bis hin zu etwas komplexeren Modellen, wie dem SIR-Modell, spannt.

## 2 Der Einstieg in das Thema

Wir betrachten hier eine Krankheit, die direkt durch die Luft von Mensch zu Mensch übertragen werden kann. Im Schulunterricht kann zu diesem Zweck dis-

ISSN 0020-7926 © 2008 Österr. Math. Gesellschaft

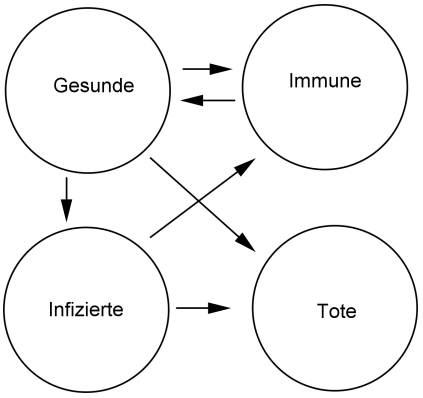



Abbildung 1

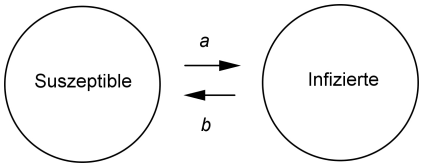



Abbildung 2

kutiert werden, welche unterschiedlichen Bevölkerungsgruppen es in Zusammenhang mit einer bestimmten Krankheit (z.B. Grippe) geben kann. Dabei könnten etwa Gesunde, Infizierte, Infektiöse, Geimpfte, Immune, Tote, in Quarantäne befindliche Menschen usw. genannt werden.

Als nächsten Schritt kann nun überlegt werden, zwischen welchen dieser Gruppen Übergänge stattfinden und in welche Richtung diese gehen können (siehe Abbildung 1). Es ist klar, dass ein entsprechendes mathematisches Modell zu diesem *Realmodell* für den Schulunterricht zu kompliziert wäre. Alle möglichen Übergänge sofort in Betracht zu ziehen, würde dazu führen, dass die Suche nach geeigneten Übergangsparametern zu komplex und das Aufstellen der (vielen) Gleichungen zu unübersichtlich wäre. Wir starten daher bei einem zunächst recht einfachen Modell mit lediglich zwei unterschiedlichen Bevölkerungsgruppen.

## 3 Ein einfaches Modell

Betrachten wir etwa die Ausbreitung einer Grippe. Dabei gibt es die Bevölkerungsgruppe, die zwar noch gesund, aber prinzipiell empfänglich für die Krankheit ist. Wir nennen diese Menschen *Suszeptible*. Auf der anderen Seite gibt es die bereits mit der Krankheit *Infizierten*. Wie finden nun Übergänge zwischen den beiden Bevölkerungsgruppen statt?

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich in jedem Zeitschritt (das kann eine Stunde, ein Tag, eine Woche sein) ein fixer Prozentsatz $a$ an Suszeptiblen infiziert und dass umgekehrt in jedem Zeitschritt ein fixer Prozentsatz $b$ von Infizierten gesundet und dann wieder suszeptibel ist (Abbildung 2).

Bezeichnen wir die Anzahl der Suszeptiblen zum Zeitpunkt $t$ mit $S_t$ und jene der Infizierten mit $I_t$ und setzen wir weiters voraus, dass die Gesamtpopulationsgröße

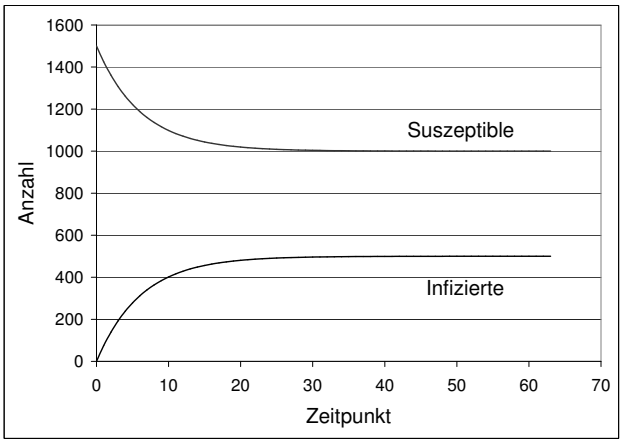



Abbildung 3: $a = 0,05$; $b = 0,1$; $N = 1500$. $S_0 = 1500$; $I_0 = 0$.

konstant gleich $N$ ist, dann ergibt sich:

$$S_{t+1} = S_t - aS_t + bI_t, \quad I_{t+1} = I_t + aS_t - bI_t = N - S_{t+1}$$

Wir haben also ein System von Rekursionen gewonnen. Es bleibt nur noch, die Konstanten $a$ und $b$ geeignet zu wählen. Gehen wir von einer Populationsgröße $N = 1500$ aus und wählen wir etwa $a = 0,05$ und $b = 0,1$. Wir können nun z.B. durch eine Simulation in einer Tabellenkalkulation feststellen, ob diese Wahl „brauchbar“ war. Dabei wird natürlich das große Potential von solchen Programmen, nämlich das Übertragen von Formeln auf andere Zellen und die damit verbundene rasche Berechnung rekursiv definierter Folgenglieder, ausgenutzt. Auch die grafische Darstellung mit Hilfe des eingebauten Diagrammassistenten stellt für Schülerinnen und Schüler kein Problem dar (s. Abbildung 3).

Es zeigt sich ein Verlauf der Zeitdiagramme, der auf lange Sicht zu stabilen Verhältnissen führt. Die Schülerinnen und Schüler können nun selbst herausfinden, dass bei dieser Wahl der Parameter auf Dauer ein Drittel der Bevölkerung krank sein wird. Die konkreten Personen wechseln dabei allerdings. Sie können weiters mit den Parametern $a$, $b$ und $S_0$ experimentieren und die Veränderungen an den Zeitdiagrammen beobachten. $S_0$ gibt dabei natürlich die Anzahl der Suszeptiblen zu Beginn des Prozesses an. Man erkennt, dass die Anzahl der Infizierten, die sich nach langer Zeit einstellt, zwar von der Wahl der Parameter $a$ und $b$, nicht aber von der Wahl von $S_0$ abhängt.

Bei der Beschreibung realer Krankheiten geht man oft genau umgekehrt vor. Man beobachtet zunächst die Größen der Bevölkerungsgruppen und deren Veränderungen im Laufe der Zeit und versucht danach, die im Modell vorkommenden Parameter geeignet anzupassen. Man kann dann aus so einem Modell lernen, welche durch den Menschen steuerbaren Parameter man verändern muss, um auf Dauer bessere Ergebnisse (z.B. geringere Infiziertenzahlen) zu erlangen. Kehren wir aber

zurück zu unserem Beispiel: Das Langzeitverhalten des Systems lässt sich auch aus den Rekursionsgleichungen erkennen und berechnen. Uns interessiert dabei ja folgende Frage: *Wie viele* Menschen werden gesund sein, wenn sich die Anzahl der Infizierten und damit auch die der Gesunden nicht mehr ändert, wo liegt also ein möglicher *Fixpunkt* des Prozesses? Wir wollen demnach wissen, wie groß $S$ ist, wenn $S_{t+1} = S_t$ gilt und ob der Prozess zu diesem Fixpunkt konvergiert. Setzen wir also diese Bedingung in die Rekursion für die Suszeptiblen ein:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t - aS_t + bI_t \\ S_t &= S_t - aS_t + bI_t \\ aS_t &= bI_t \\ aS_t &= b(N - S_t) \\ S_t &= \frac{b}{a+b}N \end{aligned}$$

Es bliebe jetzt noch, die Konvergenz der Rekursionsfolge $S_t$ mit Methoden der Theorie der Differenzengleichungen zu zeigen. Darum soll es aber in diesem Artikel und auch im Schulunterricht nicht primär gehen. Vielmehr reicht an dieser Stelle der intuitive und experimentelle Zugang mithilfe der Tabellenkalkulation. Den stabilen Endzustand der Anzahl der Suszeptiblen bezeichnen wir nun mit $S^* = \frac{b}{a+b}N$. In unserem Fall ergibt sich $S^* = \frac{0{,}1}{0{,}15} \cdot 1500 = 1000$. Wie kann man ganz allgemein dafür sorgen, dass $S^*$ einen möglichst großen Wert annimmt? Man sollte klarerweise versuchen, $b$ möglichst groß und $a$ möglichst klein zu machen. Doch hat man auf diese Parameter überhaupt Einfluss? Es ist notwendig, sich Gedanken darüber zu machen, wie man diese Parameter zu interpretieren hat. $b$ ist die *Genesungsrate*, kann also etwa durch Medikamente, Pflege, Schonung usw. angehoben werden. $a$ ist die *Infektionsrate*, die durch Stärkung der Abwehrkräfte im Vorhinein bzw. durch Verhinderung von Kontakten zu Kranken gesenkt werden kann. Diese Parameter sind natürlich von Krankheit zu Krankheit unterschiedlich zu interpretieren. Sie hängen davon ab, auf welche Arten die Krankheit übertragen werden kann bzw. wie sich der Genesungsprozess im Einzelfall gestaltet. Beobachtet man nun in unserem Beispiel, dass sich die Ansteckungsrate $a$ auf 10 Prozent erhöht, auf welchen Wert müsste man dann den Genesungsparameter $b$ anheben können, damit auf Dauer trotzdem nicht mehr als 500 Personen krank sind? Welche Möglichkeiten gibt es, die Parameter $a$ und $b$ so zu wählen, dass die Anzahl der kranken Personen nicht größer als 300 ist? Wie groß ist die Ansteckungsrate ungefähr, wenn bei einer Genesungsrate von 15 Prozent auf Dauer 1.400 Personen gesund sind? Diesen Fragen können die Schüler einerseits experimentell mittels der Tabellenkalkulation auf den Grund gehen, andererseits können sie die gesuchten Werte auch einfach algebraisch aus $S^* = \frac{b}{a+b}N$ berechnen.

Wir haben bei unseren bisherigen Betrachtungen völlig außer Acht gelassen, dass die Anzahl der Neuansteckungen davon abhängen muss, wie häufig es zu Kon-

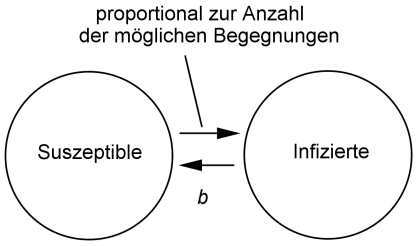



Abbildung 4

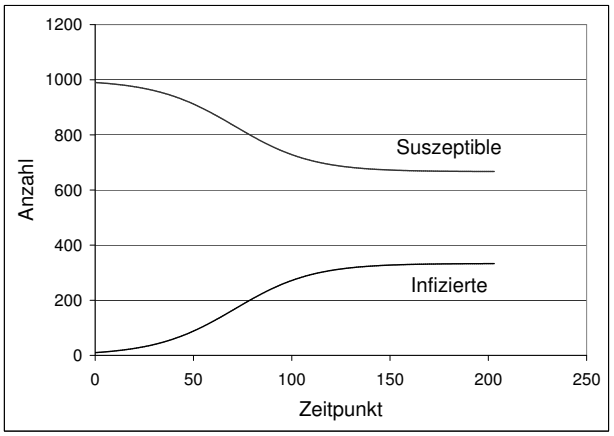



Abbildung 5: $a = 0,000125$; $b = 0,1$; $N = 1000$. $S_0 = 990$; $I_0 = 10$.

takten von Suszeptiblen mit Infizierten kommt. Das ist aber gerade die relevante Frage. Bisher wurde ja in jedem Zeitschritt einfach ein fixer Prozentsatz an Gesunden krank, allein davon abhängig, wie viele Gesunde es im Moment gibt.

## 4 Relevanz von Kontakten

Je mehr mögliche Begegnungen es zwischen Suszeptiblen und Infizierten gibt, desto mehr Neuansteckungen soll es in unserem Modell pro Zeitschritt geben. Die Anzahl der Neuansteckungen könnte etwa als direkt proportional zu dieser Anzahl der *möglichen Begegnungen* modelliert werden (s. Abbildung 4).

Falls die Schüler die Berechnung der Anzahl der möglichen Begegnungen schon von Räuber-Beute-Modellen kennen, dann können sie selbst versuchen, die zu diesem Modell passenden Rekursionsgleichungen zu finden. Falls nicht, kann an dieser Stelle erarbeitet werden, dass jeder Suszeptible prinzipiell jedem Infizierten begegnen kann, was insgesamt also genau $S_t \cdot I_t$ mögliche Begegnungen liefert. Ein gewisser Prozentsatz $a$ dieser Begegnungen wird tatsächlich stattfinden und auch zu einer Infektion des Suszeptiblen führen:

$$S_{t+1} = S_t - aS_tI_t + bI_t, \quad I_{t+1} = I_t + aS_tI_t - bI_t.$$

Die Schüler können jedenfalls versuchen, den Gleichgewichtszustand algebraisch aus diesen Rekursionen zu berechnen. Dazu verwenden sie wieder die Bedingung $S_{t+1} = S_t$. Das Ergebnis ist dabei $S^* = \frac{b}{a}$. Auf den ersten Blick erscheint es vielleicht eigenartig, dass dieser Gleichgewichtszustand $S^*$ scheinbar unabhängig von der Populationsgröße $N$ ist. Tatsächlich ist allerdings schon die Wahl des Parameters $a$ abhängig davon, wie groß die Population ist. Die Anzahl der möglichen Begegnungen zwischen Suszeptiblen und Infizierten wächst ja in Abhängigkeit

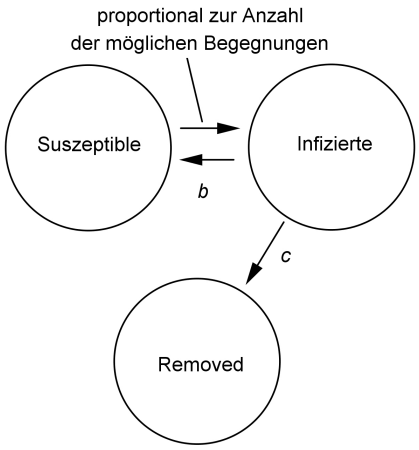



Abbildung 6

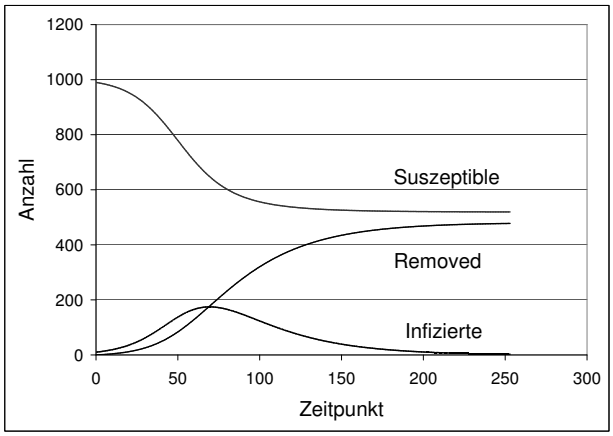



Abbildung 7: $a = 0,0002$; $b = 0,1$; $c = 0,03$; $N = 1000$. $S_0 = 990$; $I_0 = 10$; $R_0 = 0$.

von $N$ sehr rasch, was bei der Berechnung der tatsächlichen Neuansteckungen durch den Parameter $a$ kompensiert werden kann. Für das Implementieren am PC benötigen wir nun wieder vernünftige Parameterwerte für $a$ und $b$. Dazu kann man den Schülern etwa folgende Aufgabe stellen: Angenommen, pro Zeitschritt werden 10% der Infizierten wieder gesund. Wie groß muss $a$ gewählt werden, damit $S^* = 800$ ist? Implementiert nun das Modell mit diesen Werten in einer Tabellenkalkualtion! Die Populationsgröße soll $N = 1000$ betragen.

Die Zeitdiagramme sehen ganz ähnlich aus wie bei unserem ersten Versuch. Bei genauer Betrachtung fällt allerdings auf, dass der Verlauf *sigmoid*, d.h. *s-förmig*, ist. Bei wenigen Infizierten zu Beginn gibt es auch wenige Neuansteckungen. Erst wenn $I$ wächst, steigt auch die Anzahl der möglichen Begegnungen. Insgesamt also doch ein etwas realistischeres Modell als das erste. Dennoch wollen wir es noch weiter verbessern, indem wir eine dritte Bevölkerungsgruppe hinzunehmen.

## 5 Das SIR-Modell

Wir betrachten nun zusätzlich die Eventualitäten, einerseits an der Krankheit zu sterben und andererseits infizierte Personen unter Quarantäne stellen zu können, um so die Ansteckungsmöglichkeiten Suszeptibler zu verringern. Diese beiden Personengruppen fassen wir zu einer zusammen und nennen sie – wie in der Literatur üblich – *Removed*, was wir mit $R$ abkürzen. Dieses Zusammenfassen ist deshalb vernünftig, weil beide Bevölkerungsgruppen keinen Einfluss mehr auf die Entwicklung der Suszeptiblen bzw. Infizierten haben.

Der einzig neue Übergang soll nun jener von den Infizierten zu den Removed sein. In jedem Zeitschritt soll ein fixer Prozentsatz $c$ von Infizierten in die neue Gruppe wechseln (s. Abbildung 6). Die Schüler sollen nun versuchen, die Rekursionsglei-

chungen von vorhin dementsprechend zu erweitern.

$$S_{t+1} = S_t - aS_tI_t + bI_t, \quad I_{t+1} = I_t + aS_tI_t - bI_t - cI_t, \quad R_{t+1} = R_t + cI_t.$$

Zur leichteren Einprägsamkeit der Abkürzungen $S$, $I$ und $R$ nennt man Modelle dieser Gestalt *SIR-Modelle*. Nachdem die Schüler diese Rekursionsgleichungen in einer Tabellenkalkulation implementiert haben, stellt sich ihnen die Frage, welche Unterschiede sie zu den bisher betrachteten Modellen erkennen. Die Wahl der Parameter kann dabei, nachdem sich bei den Schülern durch die Bearbeitung der oben besprochenen Modelle wohl schon ein *Gespür* für deren Größenordnung entwickelt hat, durch Probieren erfolgen. Bei „schlechter" Wahl der Parameter kann es zu ungewünschten Ergebnissen des Modells kommen. Ist beispielsweise $a$ in Relation zu $b$ zu groß, d.h. dominiert der Term $-aS_tI_t$ den Term $bI_t$ in zu großem Ausmaß, kann es zu negativen und daher unbrauchbaren Werten für $S_{t+1}$ kommen.

Es zeigt sich wie bei den ersten beiden Modellen, dass sich auf Dauer – hier nach einer sprichwörtlichen *Grippewelle* – stabile Verhältnisse einstellen (Abbildung 7). Allerdings gibt es bei diesem Modell am Ende keine Infizierten mehr, die Krankheit kann also in der betrachteten Population als ausgestorben bezeichnet werden. Selbstverständlich können allerdings in der Gruppe der Removed noch kranke Menschen sein, es besteht aber keine Ansteckungsmöglichkeit mehr für Suszeptible. Die algebraische Ermittlung dieses Gleichgewichtszustandes ist nun leider nicht mehr so einfach möglich wie vorher. Setzt man wieder die Bedingung $S_{t+1} = S_t$ in die Rekursionsgleichung für die Suszeptiblen ein und betrachtet den Fall $I_t \neq 0$, so erhält man zwar einen Fixpunkt bei $S_1^* = \frac{b}{a}$, in unserem Beispiel also bei $S^* = 500$. Ganz offensichtlich liegt aber der Wert, den uns die Tabellenkalkulation liefert, über 500, nämlich bei etwa 519 Suszeptiblen. Wie kann das sein? Die Antwort liegt darin begründet, dass die Anzahl der Infizierten bereits Null ist, bevor sich dieser Wert für $S$ überhaupt einstellen kann. Auch in diesem Fall gilt ja $S_{t+1} = S_t$. Es gibt dann nämlich keine Neuansteckungen mehr, die Anzahl der Suszeptiblen bleibt konstant. Was kann man nun tun, um den tatsächlichen Wert für $S^*$ möglichst groß zu halten? Diese Frage können die Schüler wieder experimentell mit der Tabellenkalkulation erforschen. Dazu dienen die folgenden Anstöße: Was passiert, wenn durch die Verwendung eines neuen Medikaments die Genesungsrate $b$ von $0,10$ auf $0,11$ angehoben werden kann? Was geschieht langfristig gesehen, wenn die Übergangsrate $c$ statt $0,3$ den Wert $0,4$ annimmt? Wie ist das dabei auftretende Phänomen zu erklären? Sowohl die Erhöhung von $b$ als auch von $c$ führen nämlich dazu, dass die Anzahl der Suszeptiblen auf lange Zeit gesehen steigt. Inhaltlich ist dabei bemerkenswert, dass, wenn eine Krankheit sehr gefährlich und im hohen Maße tödlich ist – was ja gerade durch einen großen Wert für $c$ ausgedrückt werden kann –, am Ende weniger Leute mit der Krankheit infiziert sind. Das liegt eben genau daran, dass die Anzahl der im Moment Infizierten relevant für die Anzahl der Neuansteckungen ist. Ein „großes" $c$ dezimiert diese

Anzahl. Schließlich können sich die Schüler Gedanken darüber machen, wie das Modell erweitert werden müsste, wenn man auch Impfungen von Suszeptiblen oder *Immunität* nach überstandener Krankheit berücksichtigen würde und welchen Einfluss das auf das Langzeitverhalten des Systems hätte. Auch könnte man Übergänge von den unter Quarantäne stehenden Menschen zu den Suszeptiblen in das Modell aufnehmen.

## 6 Ein viertes und letztes Modell

Den Effekt, dass durch gefährlichere Viren insgesamt weniger Menschen erkranken, kann man auch im direkten Vergleich zweier Krankheitserreger demonstrieren. Betrachten wir dabei zwei Virentypen, die sich in ihrer „Aggressivität", genauer gesagt in ihrer Tödlichkeit, unterscheiden. Die an Virus 1 erkrankten Personen werden mit $I_t$ bezeichnet und haben eine Sterberate $v$ pro Zeitschritt, während die an Virus 2 Erkrankten mit $J_t$ bezeichnet werden und eine Sterberate $w$ haben. Wir nehmen diesmal auch einen Geburtsprozess dazu. Die Anzahl der Suszeptiblen soll wie im Modell des begrenzten Wachstums mit Kapazitätsgrenze $K$ zunehmen. Die Anzahl der Neuerkrankungen pro Zeitschritt soll wieder proportional zur Anzahl der jeweils möglichen Begegnungen sein:

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t + a \cdot (K - S_t) - b \cdot S_t \cdot (I_t + J_t) \\ I_{t+1} &= I_t + b \cdot I_t \cdot S_t - v \cdot I_t \\ J_{t+1} &= J_t + b \cdot J_t \cdot S_t - w \cdot J_t. \end{aligned}$$

Was bedeutet es nun, dass ein Virus aggressiver ist als das andere? In unserem Modell soll es keinen Unterschied bei der Übertragung der Krankheit geben. In beiden Fällen verwenden wir den Parameter $b$ als Infektionsrate. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Sterberaten unterschiedlich anzusetzen. Wir wollen im Folgenden annehmen, dass das Virus 2 etwas aggressiver als das Virus 1 ist, d.h. dass die Sterberate $w$ größer als die Sterberate $v$ ist. Die Wahl geeigneter Parameter ist in diesem Beispiel gar nicht so einfach, es kann den Schülern dabei mit Hinweisen weitergeholfen werden. Generell ist es günstig, die Parameter „eher klein" zu wählen, um die Veränderungen der betrachteten Populationsgrößen $S$, $I$ und $J$ pro Zeitschritt klein zu halten und dadurch negative Werte bzw. Oszillationen wie beim diskreten logistischen Wachstum mit zu großem Wachstumsparameter (siehe [4, S. 53–57]) zu vermeiden.

Trotz der zu Beginn höheren Zahl an Virus-2-Erkrankten hat das „schwächere" Virus 1 auf Dauer die „besseren Karten", wenn es ums Überleben in der betrachteten Bevölkerung geht. Das Virus 2 stirbt sogar komplett aus, während sich zwischen den verbleibenden Bevölkerungsgruppen stabile Verhältnisse einstellen. Die Anzahl der verstorbenen Menschen wächst natürlich weiter, im stationären Zustand werden in diesem Modell in jedem Zeitschritt so viele Menschen geboren, wie

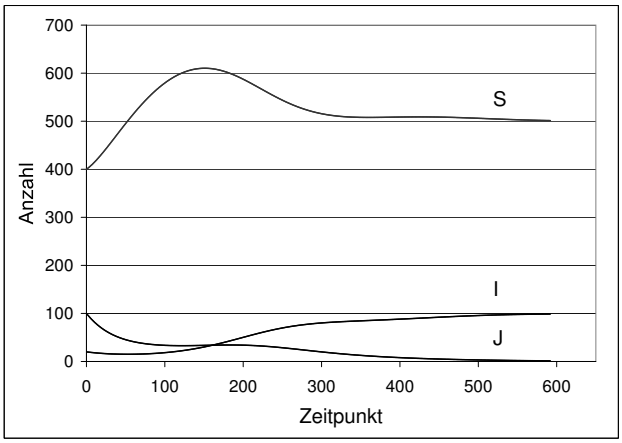



Abbildung 8: $a = 0,01$; $b = 0,0001$; $v = 0,05$; $w = 0,06$. $S_0 = 400$; $I_0 = 20$; $J_0 = 100$.

an der Krankheit versterben. $S^*$ lässt sich leider nicht sehr einfach berechnen. Aus der Bedingung $S_{t+1} = S_t$ gewinnt man aber immerhin die Beziehung $S^* = K - \frac{v}{a}I^*$ zwischen den Suszeptiblen und den Infizierten im Gleichgewichtszustand.

Schlussendlich kann man sich noch fragen, was passiert, wenn man anstatt unterschiedlicher Sterberaten unterschiedliche Übertragungsraten $b_1$ und $b_2$ einführt. Die Schüler können experimentell leicht feststellen, dass in diesem Fall das aggressivere Virus sehr wohl die Oberhand behält, was ja bei gleichen Sterberaten wenig verwunderlich ist.

## 7 Didaktische Bemerkungen

**Mathematische Modellierung:** Dass Modellierungstätigkeiten einen festen Platz im Schulunterricht einnehmen sollten, daran gibt es unter Fachdidaktikern keinerlei Zweifel. Zugegeben – die hier vorgestellte Unterrichtseinheit ist kein typisches Beispiel für eine Modellierungsaufgabe. Vielmehr könnte man sie als „geleitete Modellierung“ bezeichnen.[1] Selbstverständlich geht es darum, reale Phänomene oder Prozesse mit mathematischen Mitteln nachzubilden, um entweder die Situation besser verstehen (erklärendes Modell), die Abhängigkeiten deutlicher sehen (beschreibendes Modell) oder Vorhersagen für die Zukunft (prognostisches Modell) anstellen zu können. Allerdings müssen die dafür notwendigen Modellierungskompetenzen bei den Schülerinnen und Schülern erst einmal geschult werden, was m.E. durch diese Art der geleiteten Modellierung unterstützt werden kann. Ein ganz wesentlicher Teil des Modellierens besteht darin, die vorkommen-

[1] Die offenen Fragen am Ende der einzelnen Abschnitte bieten dann noch zusätzlich die Möglichkeit zum echten Modellieren.

den Terme, die Rekursionen und Abhängigkeiten, sowie die Ergebnisse, die die Modelle liefern, zu interpretieren. Darauf kann und darf bei dieser Unterrichtseinheit nicht verzichtet werden.

**Tabellenkalkulation:** Das wohl nächstliegende und wichtigste Werkzeug zur Darstellung und Implementierung diskreter dynamischer Prozesse ist im Schulunterricht die Tabellenkalkulation. „Die wichtigste Programmeigenschaft von Tabellenkalkulationen ist [...], dass die einzelnen Felder des Datenblattes miteinander ‚kommunizieren' können, d.h. man kann in einem Feld auf die Inhalte von anderen Feldern zugreifen." ([3, S. 86]). Das Eingeben von Daten in Zellen, das Verknüpfen von Zellen durch Formeln und das Übertragen dieser Formeln auf andere Zellen spielen eine zentrale Rolle. Auch die grafische Darstellung von Daten einer Tabelle lässt sich mit einigen wenigen Schritten ausführen. Eine weitere Option, die in diesem Artikel nicht thematisiert wurde, sind Schieberegler. Mit ihrer Hilfe können Abhängigkeiten bestimmter Größen von veränderbaren Parametern veranschaulicht werden.

**Roter Faden Iteration:** Das Umgehen mit iterativen Prozessen beginnt schon in der 7. Schulstufe und findet in den darauffolgenden Jahren auf unterschiedlichen Niveaus statt. Oftmals ist aber dieser rote Faden Iteration nicht klar herausgearbeitet, den Schülern und manchmal auch den Lehrern nicht bewusst. Man beginnt mit der Zinseszinsrechnung, mit exponentiellen Wachstumsprozessen, behandelt später etwa die rekursive Darstellung von linearen Funktionen, bearbeitet das Thema Folgen und Grenzwerte, iterative Näherungsverfahren und beackert schließlich, wenn noch Zeit bleibt, auch das Feld der Differenzengleichungen. Diese behandelten Themen stehen häufig getrennt nebeneinander da, ein gemeinsamer Kontext fehlt. Das Gebiet der Biomathematik – hier vertreten durch das Teilgebiet der Epidemiologie – könnte als „ständiger Begleiter" dieses roten Fadens im Sinne Bruners (siehe z.B. [1, S. 27]) fungieren, die erlernten Methoden fänden in ihm sinnvolle Anwendung.

**Systemdenken:** Kausalität ist für den Menschen lebensnotwendig. Wir denken von Natur aus in Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen, dieser Grundgedanke gehört zur inneren Struktur der Erkenntnis. Der Mensch hat sich daran gewöhnt, die Ursache der für ihn interessanten Wirkungen zu suchen, um die Welt besser in den Griff zu bekommen. Oftmals gibt es allerdings für eine Wirkung nicht nur eine, sondern eine ganze Reihe von Ursachen. Und solche Prozesse laufen auch nicht immer linear ab. Die Wirkung kann nämlich selbst wieder Einfluss auf ihre eigene Ursache haben, sogenannte *Rückkopplungen* finden statt. Ein Impuls, der in das System eingeführt wird, durchläuft das System also nicht einmal linear, sondern induziert eine gewisse Eigendynamik. „Um in vernetzten Systemen sinnvoll operieren zu können, ist ein Denken notwendig, das über lineares Ursache-Wirkungs-Denken hinaus den System- und Netzcharakter ausdrücklich einbezieht."

([5, S. 47]). Gerade dieses Denken kann durch die Bearbeitung und das Durchblicken gekoppelter Rekursionen, wie wir sie verwendet haben, schon früh geschult werden.

**Fächerübergreifend und anwendungsorientiert:** Die Biomathematik ist selbstverständlich aus Anwendungen heraus entstanden und daher auch fest dort verankert. Die Frage „Wozu braucht man das?“ erübrigt sich also in den meisten Fällen. Gerade offene Fragen in den Naturwissenschaften haben dazu geführt, dass sich die Mathematik stets weiterentwickelt hat. Und auch umgekehrt hat die Mathematik dazu beigetragen, dass andere Disziplinen besser wissenschaftlich erforschbar wurden. Es hat also immer ein fruchtbarer Austausch zwischen Mathematik und anderen Gebieten der Forschung stattgefunden. „Mathematik lebt und entwickelt sich gerade durch ihre Verbindungen mit der Wirklichkeit. Begriffe und Gegenstände der Mathematik sind stets aufgrund von inner- oder außermathematischen Fragestellungen, oft ausgehend vom Wunsch, die Natur besser zu verstehen, entstanden.“ ([2, S. 6]). Diese Synergien können natürlich auch im fächerübergreifenden Schulunterricht genutzt werden.

## Literatur


[1] Bruner, J. S. (1970): Der Prozess der Erziehung. Berlin-Verlag und Schwann, Berlin-Düsseldorf (Auf Englisch bereits 1960 erschienen).

[2] Henn, H.-W. (1997): Mathematik als Orientierung in einer komplexen Welt. *Der Mathematikunterricht* **43/**5, 6–13.

[3] Reichel, H.-Ch., Hrsg. (1993): Algebraprogramme und Tabellenkalkulation im Unterricht, Band 3 von *Mathematik für Schule und Praxis*. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

[4] Reinartz, E. (2003): Chaos im Unterricht. Denken in nichtlinearen Zusammenhängen! *Mathematik lehren* **120**, 53–57.

[5] Winkelmann, B. (1992): Dynamische Systeme und rationales Verhalten. *Der Mathematikunterricht* **38/**4, 46–61.



*Adresse des Autors:*

*Christoph Ableitinger*
*Fakultät für Mathematik, Universität Wien*
*Nordbergstr. 15, 1090 Wien*

# PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Editors: V. S. V a r a d a r a j a n (Managing Editor), Robert F i n n, Robert G u r a l n i c k, Kefeng L i u, Darren L o n g, Jiang-Hua L u, Sarin P o p a, Jie Q i n g, Jonathan R o g a w s k i, L.-S. Y o u n g.

The Journal is published 10 times a year with approximately 200 pages in each issue. The subscription price is $ 340,00 per year. Members of a list of supporting institutions may obtain the Journal for personal use at the reduced price of $ 170,00 per year. Back issues of all volumes are available. Price of back issues will be furnished on request.

**PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS**
**P. O. BOX 4163**
**BERKELEY, CA 94704-0163**

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 209 (2008), 41–46

# Mathematik in Linz

**Hansjörg Albrecher, Peter Paule und Franz Winkler**
Universität Linz

*Anmerkung des Herausgebers: Dieser Artikel berichtet über Aktivitäten am Mathematikstandort Linz (Johannes Kepler-Universität und Österreichische Akademie der Wissenschaften), nämlich über die soeben zu Ende gegangene Förderperiode des Spezialforschungsbereichs „Numerisches und Symbolisches Wissenschaftliches Rechnen“ und andere Aktivitäten im heurigen Jahr, die aufgrund ihres Umfangs zur internationalen Sichtbarkeit von Linz wesentlich beitragen. Vollständigkeit wurde hierbei nicht angestrebt, und naturgemäß kann eine solche Auswahl kein vollständiges Bild der Linzer Mathematik bieten.*

## Special Semester on Stochastics with Emphasis on Finance am RICAM: September–Dezember 2008

Zum bereits vierten Mal seit seiner Gründung im Jahre 2003 wurde in diesem Herbst ein *special semester* am Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (*RICAM*) der Österreichischen Akademie der Wissenschaften in Linz veranstaltet. Diesmal war Linz rund um das Thema “Stochastics with Emphasis on Finance” Zentrum internationaler mathematischer Forschungsaktivitäten. Das wissenschaftliche Komittee für dieses Semester wurde von Wolfgang Runggaldier (Padua, Vorsitzender) sowie Hansjörg Albrecher (Linz), Karl Kunisch (Graz), Hanna Pikkarainen (Linz) und Walter Schachermayer (Wien) gebildet.

Insgesamt gab es 219 Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus 34 Ländern an diesem Semester, davon 120 eingeladene Vortragende und 19 Langzeit-Gäste.

Bereits vor dem offiziellen Semester-Start richtete das RICAM (nach Montreal 2006) in der letzten Augustwoche den *2. Int. Workshop on Gerber-Shiu Functions* aus, bei dem mehr als 40 Versicherungsmathematiker aktuelle Themen der Ruintheorie diskutierten, u.a. mit Vorträgen von H. Gerber (Lausanne), S. Lin (Toronto), G. Willmot (Waterloo) und H. Schmidli (Köln). Danach folgte eine Woche mit Tutorien, in denen W. Runggaldier, H. Albrecher, M. Deistler, W. Schachermayer, M. Monoyios (Oxford), J. Fouque (Santa Barbara) und T. Hohage (Göttingen) zu allen Themen des Semesters Einführungen gaben.

ISSN 0020-7926 © 2008 Österr. Math. Gesellschaft

Über das Semester verteilt fanden dann sechs exzellent besetzte thematische Workshops statt, die in der Folge kurz beschrieben werden:

• *Kick-Off-Workshop (8.–12.9.):* Zum Start stellten im Rahmen eines "Practitioner's Day" namhafte nationale und internationale Finanzmarkt-Praktiker – darunter Dilip Madan (Morgan Stanley New York), John Crosby (TSB Lloyds London) und Alberto Elices Vallejo (Grupo Santander) – aktuelle mathematische Probleme und Herausforderungen vor, die dann mit den Wissenschaftern diskutiert wurden. Unter den weiteren Vortragenden dieser Woche waren u.a. T. Zariphopoulou (Austin), J. Fouque (Santa Barbara), X. Zhou (Oxford), W. Schoutens (Leuven), R. Korn (Kaiserslautern), D. Filipovic (Wien), P. Laurence (Rom) und J. Teugels (Leuven).

• *Workshop on Advanced Modelling in Finance and Insurance (22.–26.9.):* In diesem Workshop wurden zahlreiche Modellierungsansätze diskutiert. Vortragende waren u.a. O. Barndorff-Nielsen (Aarhus), C. Klüppelberg (München), D. Hobson (Warwick), L.C.G. Rogers (Cambridge), E. Eberlein (Freiburg), S. Malamud (Zürich), S. Jacka (Warwick), G. Pflug (Wien) sowie H. Föllmer (Berlin).

• *Workshop on Optimization and Optimal Control (20.–24.10.):* Zu aktuellen Fragestellungen der stochastischen Kontrolltheorie und deren Anwendungen in der Versicherungs- und Finanzmathematik gab es u.a. Vorträge von B. Øksendal (Oslo), A. Sulem (INRIA), C. Hipp (Karlsruhe), J. Paulsen (Bergen), H. Gerber (Lausanne), G. Zitkovic (Austin) sowie H. Pham, N. Touzi, D. Lamberton, R. Elie und B. Bouchard (Paris).

• *Workshop on Inverse and Partial Information Problems: Methodology and Applications (27.–31.10.):* Ein wichtiger Schwerpunkt im Rahmen des *special semester* ist die Verknüpfung von statistischen und analytischen Ansätzen bei der Kalibrierung von Finanzmarktmodellen. Darauf wurde in diesem Workshop intensiv eingegangen: Vorträge gab es u.a. von R. Cont (Columbia und Paris), B. Mair (Florida), G. Bal (Columbia), B. Hofmann (Chemnitz), J. Pang (Illinois), P. Mathe (Berlin), A. Munk (Göttingen) und K. Sutton (North Carolina).

• *Workshop on Computational Methods with Applications in Finance, Insurance and the Life Sciences & Stochastic Methods in Partial Differential Equations and Applications of Deterministic and Stochastic PDEs (17.–21.11.):* Das Thema dieses Workshops verbindet die Forschungsfelder mehrerer Forschungsgruppen am RICAM. Unter den Vortragenden waren u.a. M. Giles (Oxford), E. Waymire (Oregon), P. Jourdain (Paris), P. Forsyth (Waterloo), J. Teichmann (Wien), P. Friz (Cambridge), A. Kohatsu-Higa (Osaka), C. Schwab (Zürich), K. Oosterlee (Delft), G. Pages (Paris).

• *Concluding Workshop (2.–4.12.):* Im abschließenden Workshop des Semesters gibt es neben einigen internationalen Sprechern auch zahlreiche österreichische Vortragende, insbesondere die derzeit in Österreich auf diesem Gebiet tätigen Nachwuchswissenschafter.

Im Zuge dieses *special semester* wird in der *Radon Series* des deutschen Verlags deGruyter auch der Sammelband "Advanced Financial Modelling" mit Beiträgen von Semester-Vortragenden entstehen.

Das nächste special semester am RICAM in Linz wird von April bis Juli 2009 zum Thema "Computational Methods for Inverse Problems – Theory and Practice" stattfinden und mit der internationalen Konferenz "Applied Inverse Problems (AIP)" (20.–24. Juli 2009) in Wien abschließen. Mehr Informationen gibt es auf der Webseite *http://www.ricam.oeaw.ac.at/specsem/*.

*Hansjörg Albrecher*
*Radon Institute for Computational and Applied Mathematics, Öst. Ak. Wiss / Inst. für Finanzmathematik, Univ. Linz*

## Der Spezialforschungsbereich „Numerisches und Symbolisches Wissenschaftliches Rechnen" (1998–2008)

*Internationales Gütesiegel für die Linzer Mathematik – "Performing at World Class Level"*

Mit Spezialforschungsbereichen (SFBs) fördert der Österreichische Wissenschaftsfonds FWF für eine maximale Dauer von acht Jahren (früher: 10 Jahre) die Etablierung von thematischen Forschungsschwerpunkten an einem österreichischen Universitätsstandort. An der Johannes Kepler Universität (JKU) begann 1998 der Spezialforschungsbereich F013 *Numerisches und Symbolisches Wissenschaftliches Rechnen* seine Arbeit mit dem ambitionierten Ziel, zwei bisher getrennte Bereiche der Algorithmischen Mathematik zusammenzubringen: Numerisches und Symbolisches Wissenschaftliches Rechnen. Beteiligte Institutionen: die JKU-Institute für Angewandte Geometrie, Industriemathematik, Numerische Mathematik und für Symbolisches Rechnen (RISC), und als Partnerorganisation das Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (RICAM) der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Der Leiter des SFB, P. Paule, hat 2003 von U. Langer diese Funktion übernommen. In der letzten Förderperiode (2004–2008) betrug die FWF-Förderung des SFB 1 Mio. Euro pro Jahr; weitere Förderer waren die Johannes Kepler-Universität Linz, das Land Oberösterreich und die Stadt Linz.

Nach zehnjähriger Tätigkeit des SFB F013 wurde eine offizielle Endevaluierung vorgenommen. Dazu wurden vom FWF internationale Experten (ihre Namen sind nur dem FWF bekannt) eingeladen, Gutachten zu verfassen. Diese bestätigen den Erfolg dieser Initiative der Linzer Mathematik: *"This SFB contributed significantly to the further development of basic science. They contributed to the advancement of theory (new theorems) and practice (new algorithms). These advancements have been possible by combining insights and expertise from two*

*almost disjunct fields. An important effect of the SFB is that it had led to convergence of these fields, instead of the usual divergence and specialization that one sees so often.*" Und: *"The SFB represents a center of excellence with very high international visibility. There is now much more serious interest from industry. Linz will become the flag place and other people would imitate it. In general, they are performing at world class level.*" Inhaltlich wurde von den Gutachtern eine Vielzahl von Neuentwicklungen hervorgehoben, zum Beispiel: Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen, Algorithmen zum Vereinfachen von Formeln und Gleichungen, Methoden für das automatische Beweisen von mathematischen Aussagen, Darstellung von geometrischen Objekten wie algebraische Kurven und Flächen, Regularisierungsmethoden für inverse Probleme, oder symbolisch/algorithmische Behandlung von Operatoren der Analysis. Entsprechende Anwendungen sind zum Beispiel typische Probleme in Strukturmechanik, Strömungsmechanik, in der Berechnung elektromagnetischer Felder und in den Lebenswissenschaften. Die Ergebnisse des SFB wurden auf Konferenzen vorgestellt (mehr als 1.100 Vorträge) und in wissenschaftlichen Zeitschrifen bzw. Tagungsbänden publiziert (mehr als 800 Artikel).

Aus dem SFB sind 45 Diplomarbeiten, 66 Doktorarbeiten und 7 Habilitationen hervorgegangen. Von SFB-Mitarbeitern haben 8 einen Ruf auf Professorenstellen im In- und Ausland erhalten. SFB-Doktoranden und SFB-Postdocs kamen aus mehr als 20 verschiedenen Ländern. Diese Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses wurde von den Gutachtern besonders geschätzt, z.B.: *"In my opinion the SFB did an excellent job in the training of new scientists just by the numbers alone. I also note that a number of young scientists seem to have found good positions after their stay."* Um die SFB-Expertise in dieser Hinsicht weiter auszuschöpfen, haben die am SFB beteiligten Institute beim FWF einen Antrag auf ein Doktoratskolleg (DK) in "Computational Mathematics" eingebracht, der vom FWF für die erste Periode von 3 Jahren (maximale Laufzeit 12 Jahre) genehmigt wurde. DKs bilden ein weiteres Schwerpunktprogramm des FWF. Diese sollen Ausbildungszentren für den hochqualifizierten akademischen Nachwuchs aus der nationalen und internationalen Scientific Community bilden. Das Linzer DK *Computational Mathematics* startet am 1. Oktober 2008, einen Tag nach Ende des SFB, starten.

Weitere Informationen (SFB-Abschlusskonferenz *SNSC'08*, Beschreibungen der Teilprojekte, etc.) finden sich unter: *http://www.sfb013.uni-linz.ac.at/*

*Peter Paule*
*Research Institute for Symbolic Computation (RISC)*
*Institutsvorstand/Chairman des SFB F013*
*Johannes Kepler Universität, 4040 Linz*

## RISC Summer 2008

Ebenso wie schon im Juli 2007 veranstaltete das Institut für Symbolisches Rechnen (RISC) auch im Juli 2008 wieder einen *RISC Summer*. Vom 7. Juli bis zum 2. August fanden insgesamt 9 wissenschaftliche Konferenzen und Workshops am RISC in Hagenberg statt:

– *SCIEnce Training Event (7.–20.7.):* The 3rd Training School in Symbolic Computation for young scientists in the frame of the European project SCIEnce (Symbolic Computation Infrastructure for Europe).

– *SCSS 2008 (12.–13.7.):* Austrian-Workshop on Symbolic Computation in Software Science.

– *RTA 2008 (14.–18.7.):* International Conference on Rewriting Techniques and Applications.

– *ISSAC 2008 (20.–23.7.):* International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation.

– *SNSC 2008 (24.–26.7.):* 4th International Conference on Symbolic and Numerical Scientific Computing.

– *Aldor & Axiom Workshop (24.–26.7.):* Workshop for cooperation of software developers and mathematical users of computer algebra systems.

– *ApCoA 2008 (24.–26.7.):* Workshop on Approximate Commutative Algebra.

– *ACA 2008 (27.–30.7.):* 14th International Conference on Applications of Computer Algebra.

– *AB 2008 (31.7.–2.8.):* International Conference on Algebraic Biology.

Einige dieser Veranstaltungen sollen in der Folge etwas näher beschrieben werden. Für zusätzliche Information sei auf die Webseite verwiesen (*http://www.risc.uni-linz.ac.at/about/conferences/summer2008/*).

RISC ist Partner im europäischen Projekt *SCIEnce* (Symbolic Computation Infrastructure for Europe), welches von 2006 bis 2011 läuft. RISC hat dabei die Aufgabe, die neuesten Forschungsergebnisse in Symbolic Computation an Wissenschafter aus den verschiedensten Fachbereichen zu vermitteln. In der SCIEnce Training School unterrichteten Projektleiter F. Winkler sowie Mitglieder von RISC und etliche auswärtige Referenten insgesamt 21 junge Wissenschafter aus 11 europäischen Ländern.

*RTA 2008* war die 19. Konferenz in der Reihe “Rewriting Techniques and Applications”. Dabei geht es um Automatisierung des logischen Schließens. Die Konferenzvorsitzenden B. Buchberger (RISC) und A. Voronkov (Univ. Manchester) und der Konferenzorganisator T. Kutsia (RISC) konnten 90 Teilnehmer aus 17 verschiedenen Ländern gewinnen.

Die Konferenz *ISSAC* ist die jährlich stattfindende Weltkonferenz auf dem Ge-

biet des symbolischen algebraischen Rechnens. Konferenzort 2007 war Waterloo (Canada), und im Jahr 2009 wird es Seoul (Südkorea) sein. F. Winkler konnte als Veranstalter die ISSAC 2008 ans RISC in Hagenberg bringen, was auch die hohe Wertschätzung des Instituts in der internationalen Scientific Community ausdrückt. 171 Teilnehmer aus 24 Ländern diskutierten die neuesten Forschungsergebnisse im algebraischen Rechnen, die zahlreiche Teilgebiete der Mathematik betreffen. So wurden etwa für lineare partielle Differentialoperatoren vollständige Invariantensysteme vorgestellt. Laplace kannte vor 200 Jahren ein vollständiges System für Operatoren der Ordnung 2, nun kann man sie auch für höhere Ordnung bestimmen. Damit eröffnen sich neue Möglichkeiten zur Lösung wichtiger Probleme in Wissenschaft und Technik. In drei eingeladenen Hauptvorträgen wurden auf unterschiedlichen Gebieten neue Forschungsrichtungen aufgezeigt. S. Abramov (russ. Akad. Wiss.) sprach über neue Ansätze zur Lösung von Differenzengleichungen, E. Mansfield (Univ. Kent) stellte eine Methode vor, um aus numerischen Lösungen von Differentialgleichungen mittels endlicher Differenzenschemata globale Eigenschaften abzulesen, und W. Stein (Univ. Washington) entwarf ein Paradigma für Computeralgebra basierend auf Open Source Software.

Von 1998 bis 2008 forschten mehrere mathematische Institute der JKU gemeinsam im Spezialforschungsbereich "Numerical and Symbolic Scientific Computing" an Problemstellungen des wissenschaflichen Rechnens. Zum Abschluss dieses vom Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (FWF) finanzierten 10jährigen Projektes wurden die Ergebnisse einem internationalen Publikum eindrucksvoll vorgestellt (s.o.).

Die *ACA 2008*, organisiert von B. Buchberger und W. Windsteiger, konnte 182 Wissenschafter aus 30 Ländern nach Hagenberg bringen. Damit war ACA 2008 eine der bestbesuchten Konferenzen in dieser Reihe.

Zum Abschluss des RISC Summer 2008 wurde noch in der Konferenz *Algebraic Biology* 2008 über interessante algebraische Ansätze zur Modellierung biologischer Prozesse berichtet.

Im Juli 2008 war also RISC wieder einmal das Zentrum der weltweiten Aktivitäten auf dem Gebiet des Symbolic Scientific Computing. Das ist nur möglich, weil sich alle Institutsmitglieder, vom Professor bis zu den Mitarbeitern im Sekretariat, mit großem Engagement für die Ziele des Instituts einsetzen. Auch für den Juli 2009 sind schon wieder etliche Konferenzen geplant – im Rahmen des RISC Summer 2009.

*Franz Winkler*
*Research Institute for Symbolic Computation (RISC)*
*Johannes Kepler Universität, 4040 Linz*

## SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS

Join the thousands of mathematics educators throughout the world who regularly read SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS — the leader in its field since 1902. The journal is published eight times a year and is aimed at an audience of high school and university teachers. Each 96 page issue contains ideas that have been tested in the classroom, news items to research advances in mathematics and science, evaluations of new teaching materials, commentary on integrated mathematics and science education and book reviews along with our popular features, the mathematics laboratory and the problem section.

The institutional subscription rate for foreign subscribers is US$ 46,– per year (surface mail), US$ 96,- per year (air mail).

Orders should be addressed to

**School Science and Mathematics, Dr. Donald Pratt**
**Curriculum and Foundations, Bloomsburg University**
**400 E Second Street, Bloomsburg, PA 17815, USA**

## INDIANA UNIVERSITY MATHEMATICS JOURNAL

(Formerly the Journal of Mathematics and Mechanics)

Edited by

P. Sternberg, E. Bedford, H. Bercovici, R. Glassey, M. Larsen, K. Zumbrun.

*The subscription price is $ 175.00 for subscribers in the U.S. and Canada, and $ 185.00 for all others. Private individuals personally engaged in research of teaching are accorded a reduced rate of $ 80.00 per volume. The JOURNAL appears in quarterly issues making one annual volume of approximately 1200 pages.*

**Indiana University, Bloomington, Indiana U.S.A**

# Buchbesprechungen

## *Allgemeines und Geschichte*

**E. von Collani, K. Baur: Was zum Teufel ist Qualität?** (Sigma Series in Stochastics, Vol. 2) Heldermann Verlag, Lemgo, 2007, xiv+205 S. ISBN 978-3-88538-302-4 H/b € 32,–.

Hinter diesem Titel steht kein Lehrbuch über statistische Qualitätskontrolle, kein Buch über einschlägige mathematische oder statistische Methoden, sondern vielmehr eine historische und philosophische Abhandlung zum Thema Qualität. Der Begriff „Qualität“ wird in seiner historischen Entwicklung seit der Antike beleuchtet und etwa im Zusammenhang mit industrieller Massenproduktion, Beurteilung von Schul- und Ausbildungssystemen (z.B. PISA-Studie), u.a. diskutiert. Trotz seiner zentralen Bedeutung für die menschliche Gesellschaft fehlt – nach Ansicht der Autoren – „noch immer eine auch nur einigermaßen tragfähige Definition“. Diese wird folglich auch gegeben, und zwar mithilfe eines Variablenpaares $(X,D)$, wobei die Zufallsvariable $X$ die für einen vorgegebenen Zweck relevanten Größen eines bestimmten Objekts quantifiziert, während die deterministische Variable $D$ alle Faktoren des Objekts beschreibt, die $X$ hinreichend stark beeinflussen. Die Qualität des Objekts wird dann durch das zukünftige Verhalten des Objekts im Hinblick auf den spezifizierten Zweck dargestellt. Damit wollen die Autoren dazu auffordern, „einen Neubeginn zu wagen, wobei dieser sich auf alle Bereiche der Menschheit und insbesondere auf die zeitgenössische Wissenschaft und die von ihr abgeleitete Art des Denkens bezieht“.

G. Karigl (Wien)

**W. Dunham (ed.): The Genius of Euler.** Reflections on his Life and Work. The Mathematical Association of America, 2007, xvi+309 S. ISBN 978-0-88385-558-5 H/b £ 25,99.

Auf Anregung von Doris Schattschneider, Don Albers und Jerry Alexanderson hat anlässlich des Euler-Jahres 2007 William Dunham eine Sammlung von biographischen und mathematischen Artikeln über Euler bzw. sein Werk und dessen Nachwirkung zusammengestellt. Der interessante Geist dieses lesenswerten Buches wird sichtbar an der Liste der Beiträge:

Biographische Artikel: *Leonhard Euler* (Finkel, 1897), *Leonard Euler; Supreme Geometer* (Truesdell, 1972), *Euler* (Weil, 1984), *Frederick de Great on Mathematics and Mathematicians* (Cajori, 1927), *The Euler-Diderot Anecdote* (Brown,

1942), *Ars Expositionis: Euler as Writer and Teacher* (Alexanderson, 1983), *The Foremost Textbook of Modern Times* (Boyer, 1951), *Leonhard Euler, 1707–1783* (Burckhardt, 1983), *Euler's Output, A Historical Note* (Ball, 1924), *Discoveries* (Sved and Logothetti, 1989), *Bell's Conjecture* (Memory, 1997), *A Response to "Bell's Conjecture"* (Marion and Dunham, 1997).

Mathematische Artikel: *Euler and Infinite Series* (Kline, 1983), *Euler and the Zeta Function* (Ayoub, 1974), *Addendum to: "Euler and the Zeta Function"* (Howson, 1975), *Euler Subdues a Very Obstreperous Series* (Barbeau, 1979), *On the History of Euler's Constant* (Glaisher, 1872), *A Mnemonic for Euler's Constant* (Ward, 1931), *Euler and Differentials* (Ferzola, 1994), *Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function* (Davis, 1959), *Change of Variables in Multiple Integrals: Euler to Cartan* (Katz, 1982), *Euler's Vision of a General Partial Differential Calculus for a Generalized Kind of Function* (Lützen, 1983), *On the Calculus of Variations and Its Major Influences on the Mathematics of the First Half of Our Century* (Kreyszig, 1994), *Some Remarks and Problems in Number Theory Related to the Work of Euler* (Erdős and Dudley, 1983), *Euler's Pentagonal Number Theorem* (Andrews, 1983), *Euler and Quadratic Reciprocity* (Edwards, 1983), *Euler and Fundamental Theorem of Algebra* (Dunham, 1991), *Guessing and Proving* (Pólya, 1978), *The Truth about Königsberg* (Hopkins and Wilson, 2004), *Graeco-Latin Squares and a Mistaken Conjecture of Euler* (Klyve and Stemkoski, 2006).

Peter M. Gruber (Wien)

**J. J. Gray, K. Hunger Parshall (eds.): Episodes in the History of Modern Algebra (1800–1950).** (History of Mathematics, Vol. 32) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2007, viii+336 S. ISBN 978-0-8218-4343-7 H/b $ 69,–.

Vor uns liegt eine wertvolle Sammlung von zwölf Essays zur Geschichte der Algebra, beginnend mit Beiträgen zu Charles Babbage (1791–1871) und Duncan F. Gregory (1813–1844) bis zur Zeitgeschichte der Mathematik, denn der letzte Beitrag führt in Entwicklungen der algebraischen Geometrie, die mit dem Namen Alexander Grothendieck verbunden sind. Als der Schreiber dieser Rezension zwischen 1960 und 1970 in Wien zunächst als Student, dann als Assistent mit Mathematik beschäftigt war, konnte man im Kollegenkreis noch glaubhaft versichern, dass man Bourbaki lese – aber die blauen Bände des IHES von Grothendieck und Dieudonné?

Nun, wie schon erwähnt, die vorliegenden Aufsätze bieten eine Fülle von Informationen, auch über politische und persönliche Umfelder. Wer Vorlesungen über Algebra vorbereitet, wird viele Anregungen finden. Die Literatur ist reichlich und genau referiert. Fremdsprachige Zitate werden in Englisch geboten, aber der Originaltext ist als Fußnote angegeben.

Dennoch muss kritisch angemerkt werden, dass gerade in den Beiträgen, welche die jüngere Geschichte beleuchten, die Anforderungen an die mathematischen Vorkenntnisse besonders hoch sind, was die weite Verbreitung des Buches erschweren könnte. So findet man wohl Definitionen der elementaren Algebra (wie etwa des Begriffs Integritätsbereich), aber was ein Klassenkörper oder ein Schema ist, kann oder muss man zwischen den Zeilen herauslesen. Eine präzise Erklärung wäre hilfreich. Hier wäre ein behutsames Eingreifen der Herausgeber nützlich gewesen.

F. Schweiger (Salzburg)

**H. Hemme: Die Hölle der Zahlen.** 92 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen. Mit zahlreichen Abbildungen. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 2007, 136 S. ISBN 978-3-525-40841-4 P/b € 14,90.

Wie im Untertitel des Buches verraten, werden 92 mathematische Aufgaben samt ausführlichen Lösungen angeboten. Es handelt sich um eine interessante Mischung aus „Denksportaufgaben“, geometrischen, kombinatorischen und zahlentheoretischen Problemen, deren Lösung teils „nur“ mit dem aufmerksamen Lesen des Aufgabentextes gelingt (Nr. 63, 81), teils durchaus einiges an Rechnungen erfordert (Nr. 16, 55). Zusätzlich gibt der Autor – Physiker an der Fachhochschule Aachen – die älteste ihm bekannte Quelle zu jeder Fragestellung an. Insgesamt ein empfehlenswertes Büchlein für jeden, der ungewöhnliche mathematische Aufgaben sucht.

Günter Lettl (Graz)

**A. Mehlmann: Mathematische Seitensprünge.** Ein unbeschwerter Ausflug in das Wunderland zwischen Mathematik und Literatur. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2007, xi+172 S. ISBN 978-3-8348-0175-3 H/b € 24,90.

Wer Vorkenntnisse aus Mathematik (zumindest für einige Essays des Buches erforderlich) mitbringt, ein wenig Polyhistor ist und Freude an Literatur hat, dem kann das Lesen dieses Buches Freude bringen. Mancherlei Vergnügliches und Rares ist zu finden. Schade, dass es *Mathematische Seitensprünge* betitelt ist: *Mathematische Bocksprünge* erscheint angemessener, da die satirisch-schelmische Schreibweise die Nähe zur Tragödie (griech. τραγῳδία, ursprünglich „Bocksgesang“, zu τράγος „Ziegenbock“) oft nicht ganz überspielen kann. Es wäre auch der Titel *Die Vermessung der Poesie* denkbar (man vergleiche Anmerkung 58 auf Seite 168), aber die tiefgründige Doppeldeutigkeit des Wortes *vermessen* scheint doch dagegen zu sprechen.

F. Schweiger (Salzburg)

**A. T. Benjamin, J. J. Quinn: Proofs That Really Count.** The Art of Combinatorial Proof. (The Dolciani Mathematical Expositions 27) The Mathematical Association of America, Washington, 2003, xiv+194 S. ISBN 0-883-85333-7 H/b £ 28,–.

This book is devoted to proofs of combinatorial identities which totally rely on elementary counting arguments: either direct counting to get the number of certain objects, counting the same set in two ways to obtain an equation, or counting different sets and establishing a bijection or an almost bijection to prove an identity. More than 200 identities are presented and proved by counting. The book requires no prerequisite knowledge and stays at an elementary level. It is accessible for first year students, and parts of it even to high school students.

Chapter 1 treats Fibonacci number and their interpretation as tilings of an $n \times 1$-board by squares and dominoes. Besides, Euclid's algorithm is discussed there. Chapters 2–4 generalize the ideas of Chapter 1 from Lucas and generalized Fibonacci numbers to general linear recurrences and further to continued fractions. Numerous identities are proved by exploiting the relation of these numbers to different tiling problems, all modifications of the original "Fibonacci tiling". Chapters 5 and 6 introduce binomial coefficients and sums with alternating sign. The inclusion-exclusion principle is presented as well, although all proofs are also (in most cases only) done by counting. Harmonic numbers and their connection to permutations are the topic of Chapter 7. Of course, Stirling numbers of both kinds are discussed as well. In Chapter 8 relations to number theory are explored. It starts with elementary arithmetic identities and goes on in examining divisibility properties of binomial coefficients, little Fermat's theorem, Wilson's theorem, and basic properties of Euler's $\varphi$-function. The final chapter presents some more advanced identities of Fibonacci and Lucas numbers. Binet's formula and the golden ratio as well as Fibonacci and Lucas polynomials are discussed here. The final section lists numerous open problems – known identities which do not have a *combinatorial* proof so far.

Each chapter is complemented by plenty of exercises. Hints and solutions to many of the exercises are given in an extra section. An appendix giving a list of all identities rounds off the book.

In summary, the book is a nice presentation of "The Art of Combinatorial Proof", as the subtitle says, and certainly well suited to trigger a student's interest in combinatorics.

B. Gittenberger (Wien)

**R. Diestel: Graphentheorie.** Dritte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006, xvi+344 S. ISBN 978-3-540-21391-8, P/b € 29,95.

Seit seinem ersten Erscheinen hat dieses Buch einen Siegeszug hinter sich. Weltweit ist es mittlerweile eines der (wenn nicht das) am meisten verwendeten Lehrbücher über Graphentheorie, sowohl in der englischen Originalausgabe als auch in der deutschen Übersetzung, um deren 3. Auflage es sich hier handelt.

Schon die erste Auflage stellte eine signifikante Modernisierung der Stoffdarstellung dar, in der zweiten ebenso wie in dieser dritten wurden weitere Ergänzungen und Verbesserungen vorgenommen. Alle Beweise sind sorgfältig durchdacht und dargestellt. Die Kapitel schließen mit Übungsaufgaben sowie historischen Notizen und Literaturangaben. Zu den Übungsaufgaben findet man am Ende Lösungshinweise. Außerdem findet man am Ende nicht nur ein ausführliches Schlagwortregister, sondern auch einen Notationsindex und einen englisch-deutschen Index, der klar macht, wie die wichtigsten Begriffe in diesen beiden Sprachen benannt bzw. übersetzt werden. Ähnlich nützlich sind die Rand-Spalten, in denen neue Begriffe und Symbole ebenso aufgelistet werden wie – in Beweisen – Nummernbezüge zu den anderen verwendeten Resultaten.

Hier noch ein Überblick über die Titel der einzelnen Kapitel: 0. Grundbegriffe; 1. Paarungen, Packungen, Überdeckungen; 2. Zusammenhang; 3. Graphen in der Ebene; 4. Färbungen; 5. Flüsse; 6. Extremale Graphentheorie; 7. Ramseytheorie für Graphen; 8. Hamiltonkreise; 9. Zufallsgraphen; 10. Minoren, Bäume und WQO.

Was in der deutschen Ausgabe leider fehlt, ist das in der englischen Ausgabe neue Kapitel über unendliche Graphen.

Das Werk ist mit großer sprachlicher Sorgfalt verfasst und eine ganz essentielle Grundlage für die Lehre, und kann auch als Referenz für fast alle wichtigen Bereiche der Graphentheorie dienen.

Wolfgang Woess (Graz)

## *Algebra und Zahlentheorie*

**L. J. Gerstein: Basic Quadratic Forms.** (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 90) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008, xiii+255 S. ISBN 978-0-8218-4465-6 H/b $ 55,–.

Das vorliegende Buch bietet eine Einführung in die arithmetische Theorie der quadratischen Formen, was aus dem Titel nicht ohne Weiteres hervorgeht. Stichwortartig lassen sich die behandelten Themen folgendermaßen beschreiben: Wittscher

Kürzungssatz, quadratische Räume über $Q_p$ und über $Q$, Gitter über Hauptidealringen, Theorie der ganzzahligen quadratischen Formen. In einem letzten Kapitel wird auch auf Anwendungen in der Kryptographie eingegangen. Eine Reihe tieferer Ergebnisse wird ohne Beweis angegeben, die Theorie der Clifford-Algebren fehlt völlig.

Das Buch ist flüssig geschrieben, das Tempo ist eher gemütlich und die Voraussetzungen an die Vorkenntnisse des Lesers sind nicht allzu hoch. Eine wertvolle Bereicherung des Textes sind die zahlreichen instruktiven Beispiele und Übungsaufgaben. Das Buch eignet sich daher ausgezeichnet als vorbereitende Lektüre für weiterführende Darstellungen des Gegenstandes, wie zum Beispiel Martin Knesers „Quadratische Formen“ (Springer-Verlag 2002), die “Arithmetic Theory of Quadratic Forms” von Y. Kitaoka (Cambridge University Press 1999) oder den Klassiker “Introduction to Quadratic Forms” von O. T. O’Meara (Springer-Verlag 1973).

O. Loos (Innsbruck)

**H. Dym: Linear Algebra in Action.** (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 78.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2007, xvi+541 S. ISBN-13 978-0-8218-3813-6, ISBN-10 0-8218-3813-X, H/b $ 79,–.

Ein Zitat aus dem Vorwort drückt ganz gut aus, wie das Buch einzuschätzen ist: ‘I wish someone had taught me this material when I was a graduate student. In those days, in the arrogance of youth, I thought that linear algebra was for boys and girls and that real men and women worked in functional analysis. However, this is but one of many opinions that did not stand the test of time’.

Das macht natürlich neugierig. Die inhaltliche Gliederung ist zunächst eher konventionell: Vektorräume, Gauss-Elimination (wobei der verbreitete Terminus ‘LU-Zerlegung’ nicht vorkommt), mit Betonung des konstruktiven Umganges mit Blockmatrizen, dyadischen Produkten etc. Es folgen Kapitel über Eigenwerte bis hin zur Jordan’schen Normalform, Determinanten, etc. Weiters Abbildungen zwischen normierten Räumen und solchen mit innerem Produkt beliebiger Dimension, mit Betonung der Besonderheiten des endlichdimensionalen Falles. Am Ende von Kapitel 7 findet sich eine erste Anwendung mit Blickrichtung Analysis, nämlich der Beweis des optimalen Exaktheitsgrades der Gauss-Quadratur. Weiter geht es mit Singulärwertzerlegung, Pseudoinversen, Definitheit, etc.

Die folgenden Kapitel stellen das eigentliche Herz des Buches dar. Sie sind diversen Anwendungen innerhalb der Analysis gewidmet, und in gewisser Weise mutiert der Text hier zu einem Lehrbuch über höhere Analysis, mit spezieller Betonung der relevanten Werkzeuge der Linearen Algebra und Matrixanalysis: Implizite Funktionen, Systeme von Differential- und Differenzengleichungen, dynamische Systeme, Kontrolltheorie, Fixpunktsätze, Matrixgleichungen, Nullstellen von Polynomen, Extremalprobleme. Damit ergibt sich insgesamt ein unkonventioneller Aufbau ohne ohne speziellen roten Faden, jedoch sehr reichhaltig und

auch gut lesbar. Einige numerische Algorithmen werden diskutiert, das Thema steht aber nicht im Zentrum des Interesses.

W. Auzinger (Wien)

**E. Miller, B. Sturmfels: Combinatorial Commutative Algebra.** With 102 Figures. (Graduate Texts in Mathematics 227.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, xiv+417 S. ISBN 0-387-22356-8 H/b € 69,95.

Das Schwergewicht bei diesem hochspezialisierten Text liegt bei der (kommutativen) Algebra; die kombinatorischen Untertöne sind sehr zart. Sturmfels hielt 8 Vorlesungen bei einer Sommerschule in Turin. Miller war an der Ausarbeitung beteiligt – so nahm alles seinen Anfang. Zu erwähnen sind zwei bedeutende Vorgängertexte: R. P. Stanleys "Combinatorics and commutative algebra" und "Cohen-Macauley rings" von W. Brun und J. Herzog. Eine neue Generation von Forschern auf diesem schwierigen Gebiet wird diesen Band sicher sehr begrüßen.

Der Text kann als Basis für Fortgeschrittenenseminare verwendet werden; im Vorwort werden dazu Vorschläge gemacht. Es gibt 3 Abschnitte, die wiederum in diverse Kapitel zerfallen: Monomial Ideals, Toric Algebra, Determinants. Die Übungsaufgabensammlung und die Referenzliste sind sehr reichhaltig. Der Leserkreis dieses eleganten Buches wird naturgemäß klein, aber erlesen sein. Den Autoren kann zu dieser feinen Leistung jedenfalls sehr gratuliert werden.

H. Prodinger (Stellenbosch)

**G. L. Mullen, C. Mummert: Finite Fields and Applications.** (Student Mathematical Library, Vol. 41) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2007, xi+175 S. ISBN 978-0-8218-4418-2 P/b $ 35,–.

This book provides a brief introduction to finite fields and some applications. The first chapter discusses the basic properties of finite fields and extension fields. It also establishes properties of the trace and norm function, continues with a discussion of bases for extension fields and concludes with some results on polynomials over finite fields.

Chapter 2 describes combinatorial applications (construction of Latin squares, projective planes, block designs, Hadamard matrices). Chapter 3 deals with coding theory (bounds, encoding and decoding methods, cyclic codes, BCH codes, Goppa codes) and Chapter 4 with some elementary aspects of cryptography (RSA, a double-round quadratic system, Diffie-Hellman, threshold systems, digital signatures, cryptosystems based on Dickson polynomials).

Each chapter concludes with some notes including a variety of references that provide material for further reading. Moreover, exercises of varying levels of difficulty are given. This book is an excellent text book for a first course on finite fields.

A. Winterhof (Linz)

**L. Nyssen (ed.): Physics and Number Theory.** (IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 10) EMS, Zürich, 2006, ix+265 S. ISBN 978-3-03719-028-9, P/b € 39,50.

Die vielfältigen Anwendungsbereiche der Zahlentheorie in der theoretischen Physik werden in diesem Sammelband anhand von ausgewählten Themenbereichen verdeutlicht: Michel Planat präsentiert das Phänomen des Phase-Lockings in klassischen und Quantensystemen und stellt die Beziehung zu Primzahlen sowie zur abstrakten Algebra dar. Jean-Louis Verger-Gaugry behandelt zum einen aperiodische Kristalle (nichtperiodische Massezustände in der Physik kondensierter Materie) und Delone-Mengen, zum anderen den Zusammenhang von selbstähnlichen endlich erzeugten gleichmäßig diskreten SFU-Mengen und diskreten Kugelpackungen in $\mathbb{R}^n$. Gazeau et al. behandeln die Diskretisierung der Zahlengerade anhand von zweidimensionalen quasi-kristallinen Gittern. Bergbauer und Kreimer diskutieren die Relevanz der Hochschild-Kohomologie von Renormalisierungs-Hopf-Algebren für lokale Quantenfeldtheorien und deren Bewegungsgleichungen. Emmanuel Royer stellt (auf Französisch) den Zusammenhang zwischen unitären Matrizen und der Riemannschen $\zeta$-Funktion dar, Philippe Michel präsentiert Kloosterman-Summen und einige ihrer Anwendungen basierend auf den arithmetischen, geometrischen und Spektraleigenschaften. Der letzte Beitrag des Bandes von Ariane Mézard stellt schließlich eine (wieder französischsprachige) Einführung in die lokale Langlands-Korrespondenz in Dimension 2 dar und präsentiert etliche Darstellungen und deren Verknüpfung.

R. Kainhofer (Wien)

## *Analysis*

**D. M. Bressoud: A Radical Approach to Real Analysis.** Second Edition. The Mathematical Association of America, 2007, xvi+323 S. ISBN 978-0-88385-747-2 H/b £ 27,99.

Das Buch liegt hier in der zweiten Auflage vor. 'Radical Approach' bedeutet einen Aufbau, der sich an der historischen Entwicklung der Analysis orientiert, jedoch in etwas anderer Weise als in dem bekannten Text 'Analysis by its History' von Hairer/Wanner. Ein Satz aus der Einleitung kann wohl als Motto dienen: "The highly refined proofs that we know today leave the mistaken impression that the road of discovery in mathematics is straight and sure. It is not. Experimentation and misunderstanding have been essential components in the growth of mathematics." In manchen Ohren mag der letzte Satz vielleicht ein wenig „radikal" klingen, aber man kann dem nur zustimmen, und es gilt bis heute.

Die Darstellung ist in einem historischen Kontext abgefasst, aber ohne strenge zeitliche Abfolge. Unendliche Reihen sind die prominenten Objekte. Beginnend

mit Fouriers Königsidee zu Beginn des 19. Jahrhunderts – Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen – die mehr Fragen aufwarf als Antworten lieferte, widmet sich der Autor dem Thema der unendlichen Reihen bis hin zu Taylorreihen. Erst dann folgt ein Kapitel über die Begriffe Differenzierbarkeit und Stetigkeit (in dieser Reihenfolge), wobei Cauchys Bemühen um den Beweis des Mittelwertsatzes im Zentrum der Darstellung steht. Mit den so sauber geklärten Begriffen in der Werkzeugkiste folgen weitere Kapitel über Konvergenzkriterien für unendliche Reihen, gleichmäßige Konvergenz, etc. Am Schluss finden wir unter anderem Dirichlets Beweis der punktweisen Konvergenz von Fourierreihen und eine Darstellung der Bemühungen über eine präzise Fassung des Integralbegriffs, beginnend mit Archimedes über Cauchy bis hin zu Riemann.

Aufgrund der historischen Einbettung (wo der Leser so manche Entdeckung macht) ist das Ganze tatsächlich ziemlich unkonventionell. So wird auch der Begriff der irrationalen Zahl am Beginn mittels Intervallschachtelungsprinzip so nebenbei eingeführt, mit dem Hinweis auf seine axiomatische Natur (aus moderner Sicht). Erst später wird der Zusammenhang mit Cauchy-Folgen und dem modernen Begriff der Vollständigkeit geklärt.

Man kann wohl darüber streiten, ob sich dieser Aufbau für einen Einführungskurs in Analysis eignet. Als Ergänzung bzw. als Quelle für zusätzliches Lehrmaterial ist er auf jeden Fall hervorragend geeignet. Auf ergänzende Materialien, insbesondere Codes in Mathematica und Maple, die im Internet abrufbar sind, wird systematisch verwiesen.

W. Auzinger (Wien)

**O. Forster: Analysis 3.** Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit Anwendungen. 4. Auflage. (Vieweg Studium) Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2007, vii+285 S. ISBN 978-3-528-37252-1 P/b € 24,90.

In der deutschsprachigen Literatur zur Differential- und Integralrechnung ein Klassiker (neben Lehrbüchern wie K. Königsberger: *Analysis 2,* Springer, 1997; U. Storch, H. Wiebe: *Lehrbuch der Mathematik, Band III: Analysis mehrerer Veränderlicher – Integrationstheorie*, BI, 1993; H. Amann, J. Escher, *Analysis III*, Birkhäuser 2001).

Unabhängig von den Besprechungen der ersten 3 Auflagen seien mir noch einige Bemerkungen gestattet. Der Autor verfolgt 3 Ziele: (a) Entwicklung der Lebesgueschen Integrationstheorie im $\mathbb{R}^n$; (b) Präsentation nichttrivialer Anwendungen; (c) Herleitung der Integralsätze für $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten.

(a) wird in Bourbaki-Dieudonné-Tradition als funktionalanalytische Erweiterung des Haarschen Maßes auf $\mathbb{R}^n$ über das Integral halbstetiger Funktionen durchgeführt – unter Weglassen von Abschnitten, die als zu abstrakt empfunden werden (z.B. Kap. 13.4 Schwache Topologie auf dem Raum der Maße in J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, Vol. II). Der Fluss der Theorie wird, pädagogisch klug, immer

wieder durch Beispiele und einfachere Abschnitte aufgelockert (z.B. § 2 Transformationsformel, zuerst für lineare Abbildungen, dann für differenzierbare). Die starke funktionalanalytische Ausrichtung zeigt sich an der Verwendung der Funktionenräume $\mathcal{C}(U)$, $\mathcal{C}^k(U)$, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}_c(U)$, $\mathcal{C}_c^k(U)$, $\mathcal{C}^\infty(U)$, $\mathcal{H}^\nearrow(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}_+(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, $L_1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $L_2$, $L_p$, $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, am Vollständigkeitsbeweis für $L_p$ oder am Nachweis der Existenz einer differenzierbaren 1-Partition.

(b) Die *Anwendungen* bestehen insbesondere in einer Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen (Potentialtheorie, Dirichletproblem der Laplacegleichung, Maximumprinzip, Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen) sowie in die Grundlagen der Distributionentheorie (Begriff einer Fundamentallösung, Fundamentallösungen von $\Delta_3, \Delta_3 + k^2, \Delta_n - \partial_t, \partial_{\bar{z}}$) und die Fourieranalysis auf $\mathbb{R}^n$ (Fourierinversion auf $L_1$, Satz von Plancherel, Hankeltransformation). Einen noch größeren Raum in einem Analysislehrbuch nimmt die harmonische Analysis nur in L. Schwartz' *Analyse IV – Applications de la théorie de la mesure* (Hermann, Paris, 1993) ein.

(c) Die Integration auf Untermannigfaltigkeiten wird in zwei Schritten bewältigt: in einem ersten Block, der den Gaußschen Integralsatz mit physikalischer Interpretation und dem Archimedischen Prinzip behandelt. Die systematische Herleitung des Stokesschen Integralsatzes als „Höhepunkt der Integrationstheorie" erfolgt in einem 2. Anlauf mittels der Theorie der Differentialformen und ihrer Integration auf $k$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten. An Anwendungen sind zu finden: der Cauchysche Integralsatz, die Taylorentwicklung holomorpher Funktionen, die Bochner-Martinelli-Formel für holomorphe Funktionen in $\mathbb{C}^n$ und der Brouwersche Fixpunktsatz.

Dass mehrdimensionale Integration auch anders dargestellt werden kann, ist beispielsweise zu sehen an: J.H. and B.B. Hubbard: *Vector Calculus, Linear Algebra and Differential Forms* (2nd ed., Prentice Hall, 2002), pp. 399–668 oder T. Shifrin: *Multivariable Mathematics* (Wiley, 2005), pp. 267–412.

N. Ortner (Innsbruck)

**K. E. Hirst: Calculus of One Variable.** With 72 Figures. (Springer Undergraduate Mathematics Series) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006, xi+267 S. ISBN 1-85233-940-3 P/b € 29,95.

Dies ist ein typischer 'Calculus'-Text. Ausgehend vom elementaren Begriff der Funktion einer reellen Variablen werden zunächst die wichtigsten Elementarfunktionen eingeführt. Der weitere Aufbau folgt der Systematik Limesbegriff, Differentiation und Anwendungen, Taylorentwicklung, Integration und Anwendungen.

Die Darstellung basiert auf einer anschaulichen Erläuterung der Begriffe, und die wichtigsten Rechentechniken werden vorgestellt. Jedes Kapitel enthält eine umfangreiche Sammlung von Übungsbeispielen, die richtigen Antworten sind im Anhang zusammengestellt. Komplette Lösungsanleitungen sind per Internet ab-

rufbar. Weiters wird der Leser ermutigt und angeleitet, auch Computeralgebra sinnvoll einzusetzen (insbesondere *Maple*), unter anderem für Zwecke der Visualierung.

Auf einen Aufbau im Sinne einer strengen Analysis wird bewusst verzichtet; insbesondere werden die Begriffe Limes und Stetigkeit in eher intuitiver Weise eingeführt. Der Ausdruck 'continuous' bzw. 'continuity' wird zwar verwendet, aber nicht formal sauber definiert; diese Stichworte kommen auch im Index nicht vor. Ob dieser Verzicht auf präzise Definitionen bei einem derartigen Text vertretbar ist, bleibe einer individuellen Beurteilung überlassen.

W. Auzinger (Wien)

**M. E. Taylor: Measure Theory and Integration.** (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 76.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2006, xiii+319 S. ISBN 0-8218-4180-7, H/b $ 59,–.

Diese gut verständliche, grundlegende Einführung in die Maß- und Integrationstheorie ist klassisch aufgebaut: Nach einer Vorstellung des Riemann-Integrals und seiner Probleme wird das Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}$ eingeführt und das Lebesgue-Integral auf allgemeinen Maßräumen definiert. Neben der Besprechung von $L^p$-Räumen und dem Beweis des Satzes von Radon-Nikodym werden zahlreiche Konstruktionen von Maßen vorgestellt, wie etwa die von äußeren Maßen ausgehende Konstruktion von Caratheodory oder die Konstruktion von Produktmaßen. Ausgehend von Letzteren wird schließlich das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten eingeführt. Es folgen Kapitel über signierte Maße, Dualräume zu $L^p$, Sobolev-Räume sowie ausgewählte Themen zur Konvergenz fast überall. Nach einigen Kapiteln über Hausdorff- und Radon-Maße rundet schließlich ein größerer Teil über Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse das Buch ab. Dabei wird nach den Grundlagen der Ergodentheorie die Anwendung der Maßtheorie für Zufallszahlen diskutiert (starkes und schwaches Gesetz der großen Zahlen sowie zentraler Grenzwertsatz). Weiters wird das Wiener-Maß besprochen sowie Martingale eingeführt.

Das Buch endet mit zahlreichen Anhängen auf insgesamt 60 Seiten, die neben der Wiederholung der wichtigsten Grundlagen auch zahlreiche zusätzliche Themenbereiche anschneiden wie etwa die Formel von Gauss-Green-Stokes in diversen Formulierungen und Verallgemeinerungen.

Jedes Kapitel endet mit zahlreichen Übungsbeispielen, sodass das Buch auch sehr gut zum Selbststudium als auch als Grundlage für einen Lehrveranstaltung zur Maß- und Integrationstheorie benutzt werden kann.

R. Kainhofer (Wien)

## *Funktionalanalysis*

**V. Müller: Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras.** Second edition. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 139) Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2007, ix+439 S. ISBN 978-3-7643-8264-3 H/b € 129,–.

This monograph develops spectral theory in Banach spaces in an axiomatic way. Topics covered are essential spectrum, Taylor spectrum, orbits of operators and the concept of capacity. It is written in a clear and concise way starting out with an introduction to Banach algebras and hence only requires some basic working knowledge in functional analysis. Together with an appendix on background material, this makes the book a valuable source for both beginners and experts in the field.

The present second edition corrects a few errors and contains some new results, in particular, concerning orbits and their relations to the invariant subspace problem.

G. Teschl (Wien)

## *Differentialgleichungen*

**Y. Ilyashenko, S. Yakovenko: Lectures on Analytic Differential Equations.** (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 86) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008, xiii+625 S. ISBN 978-0-8218-3667-5 $ 79,–.

Analytic differential equations have always played an important role in mathematics, which is also stressed by the fact that two of Hilbert's famous problems are concerned with this subject. Rather than trying to provide a comprehensive treatise it focuses on some interconnected key problems in this area of mathematics. In particular, a large part of this book is devoted to Bolibruch's solution to Hilbert's sixteenth problem. The other topics covered are normal forms, local theory of singular points of planar vector fields, functional moduli of analytic classification of resonant singularities, and global theory of polynomial differential equations.

The book is well written, but requires a good working knowledge in the theory of several complex variables and geometry. It provides complete and simplified proofs to some results at the frontier of current research by two of the leading experts and I am convinced it will become a standard reference in this field. It should also be useful for graduate students with some previous experience, who want to delve further into this area.

G. Teschl (Wien)

**P. Kunkel, V. Mehrmann: Differential-Algebraic Equations.** Analysis and Numerical Solution. (EMS Textbooks in Mathematics) EMS, Zürich, 2006, viii+377 S. ISBN 3-03719-017-5, H/b € 58,–.

Das Buch schließt eine Lücke in der bestehenden Literatur. Eine umfassende Darstellung der Theorie differentiell-algebraischer Gleichungen und insbesondere ihrer numerischen Behandlung war bisher nicht verfügbar. Analysis und Numerik werden in zwei separaten Teilen beschrieben. Der erste Teil ist systematisch gegliedert, von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten und klassischen Normalformen über variable Koeffizienten bis hin zu nichtlinearen Problemen. Im zweiten Teil werden relevante numerische Verfahren für Anfangs- und Randwertprobleme beschrieben und analysiert.

Spezielle Abschnitte widmen sich unter anderem Problemen aus der Kontrolltheorie, schwachen Lösungen, Lösungen im Ausgleichssinn und Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten. Etliche konkrete Anwendungsprobleme bereichern die Darstellung. Das Buch hat eher den Charakter einer Monographie, wobei die Autoren aber auch konkrete Hinweise geben, wie man Teile daraus für eine einschlägige Vorlesung verwenden kann.

Der Index einer differentiell-algebraischen Gleichung ist kein eindeutig definierter Begriff. Die Autoren bevorzugen den Begriff des 'strangeness index' – mit diesem wird ausgedrückt, wie weit ein Problem von einem strikt entkoppelten System, bestehend aus einer differentiellen und einer algebraischen Komponente, entfernt ist. Dieser Indexbegriff weicht von den üblichen Definitionen ab. Der Zusammenhang mit dem konventionellen 'differentiation index' wird diskutiert, jedoch wird das sehr natürliche Konzept des 'tractability index' (eine konzeptuelle Verfeinerung des differentiation index) leider nur am Rande erwähnt.

Probleme mit strangeness index 0 ('strangeness-free') enthalten keine versteckten Zwangsbedingungen und sind einer numerischen Behandlung direkt zugänglich. Demgemäß wird im zweiten Teil in erster Linie dieser Fall betrachtet, und für allgemeinere Probleme werden Verfahren zur Indexreduktion diskutiert. Dieser Zugang ist nicht zwingend, ermöglicht aber einen systematischen Aufbau der Theorie für gewisse Klassen von Verfahren, die sich am strangeness-free Fall orientieren. Die Darstellung des inhaltlichen Zusammenhangs wird jedoch an manchen Stellen erst auf den zweiten Blick klar.

W. Auzinger (Wien)

**E. Hairer, Ch. Lubich, G. Wanner: Geometric Numerical Integration.** Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Second Edition. With 146 Figures. (Springer Series in Computational Mathematics 31) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006, xvii+644 S. ISBN-10 3-540-30663-3, ISBN-13 978-3-540-30663-4, H/b € 84,95.

Dies ist die zweite, überarbeitete und inhaltlich erweiterte Auflage des Klassikers aus dem Jahr 2001. 'Geometric Integration' steht für strukturerhaltende Integration: Für die numerische Integration von Anfangswertproblemen über lange Zeiträume ist die Erhaltung inhärenter Invarianten entscheidend für die Güte der Approximation. Der aktuelle Band liefert auf etwa 600 Seiten eine umfassende Darstellung dieses Forschungsgebietes, das sich etwa in den letzten 20 Jahren signifikant entwickelt hat und in verschiedensten Anwendungsgebieten von Relevanz ist. Innerhalb der Welt der Einschritt-Verfahren erhält man geeignete Verfahren höherer Ordnung z.B. durch Rekombination (mittels Partitionierung, Splitting oder Komposition) von Runge Kutta-Verfahren, und die bekannte Stabilitäts- und Fehlertheorie für implizite Runge Kutta-Verfahren wurde auf diese Klassen erweitert. Die inkludiert Charakterisierungen für konservierende Eigenschaften für algebraische erste Integrale, ausgedrückt als Bedingungen an die Verfahrenskoeffizienten.

Eine zentrale Rolle spielen z.B. die sogenannten symmetrischen (reversiblen) und symplektischen (volumenserhaltenden) Verfahren – die natürlichen Kandidaten für Integration konservativer bzw. Hamiltonscher Systeme. Entscheidend für das Verständnis ist die Deutung als diskretes dynamisches System, das den Fluss des gegebenen Problems approximiert. Die Auswirkung strukturerhaltender Eigenschaften auf die Genauigkeit bei Langzeitintegration lässt sich mittels Rückwärtsanalyse analysieren. Dabei ist es z.B. wesentlich, dass ein symplektisches Verfahren als exakte Lösung eines gestörten Hamiltonschen Systems gedeutet werden kann, das selbst wieder Hamiltonsch ist.

Weitere Abschnitte widmen sich unter anderem Fragen der Implementierung, Systemen mit Dämpfungsverhalten und der effizienten Integration hochoszillierender Systeme. Auch Mehrschrittverfahren werden ausführlich diskutiert.

Dieser kurze Abriss beleuchtet nur einige wesentliche Themen, ohne Anspruch auf eine vollständige Diskussion der Inhalte. Wie auch die beiden vorangegangenen Bände der Autoren über die Integration nichtsteifer und steifer Systeme ist dies ein Standardwerk, das auch redaktionall und graphisch vorbildlich aufbereitet ist. Es solle in jedem einschlägigen Regal seinen Platz finden.

W. Auzinger (Wien)

**W. Zulehner: Numerische Mathematik.** Eine Einführung anhand von Differentialgleichungsproblemen. Band 1: Stationäre Probleme. (Mathematik Kompakt) Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2008, vi+150 S. ISBN 978-3-7643-8426-5 P/b € 18,90.

Dieser einführende Text folgt nicht dem üblichen Aufbau eines Numerik-Kurses, sondern zielt direkt auf Methoden zur Lösung von gewöhnlichen und insbesondere partiellen Differentialgleichungen. Der vorliegende Band 1 geht aus von der schwachen bzw. variationellen Formulierung linearer elliptischer Randwertprobleme in einer unabhängigen Variablen. Im Anschluss daran wird die mathematische Theorie der Finite Elemente-Methode entwickelt und zunächst am eindimensionalen Fall umgesetzt; der mehrdimensionale Fall folgt in einem späteren Abschnitt. Die zentralen Begriffe wie schwache Ableitung, Sobolev-Räume etc. werden in der für den vorliegenden Zweck notwendigen Tiefe eingeführt.

Im Zentrum der weiteren Darstellung stehen direkte und iterative Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme. In den letzten beiden Abschnitten werden nichtlineare stationäre Gleichungen und ihre numerische Lösung basierend auf dem Newton-Verfahren besprochen. Jeder Abschnitt ist um eine Sammlung von Übungsaufgaben ergänzt, die insbesondere der Vertiefung des Stoffes dienen. Der angekündigte Band 2 ist nichtstationären Problemen gewidmet.

Wie dieser inhaltliche Abriss zeigt, stellt das Buch naturgemäß keine vollständige Einführung in die Numerische Mathematik dar; darauf ist es bewusst nicht angelegt. Andererseits ist damit Platz für speziellere Themen, insbesondere betreffend Vorkonditionierung zur Konvergenzbeschleunigung iterativer Verfahren. Hier werden Gebietszerlegungs-Techniken und hierarchische Strategien (Multigrid) und ihre praktische Umsetzung im Finite Elemente-Kontext besprochen. Als Kompliment an den Autor kann man sagen, dass der Text aufgrund der sehr übersichtlichen Umsetzung der Inhalte direkt als Unterlage für eine einschlägige Vorlesung plus Übung innerhalb eines Bachelor-Studiengangs geeignet erscheint.

W. Auzinger (Wien)

## *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*

**K. L. Chung, J. B. Walsh: Markov Processes, Brownian Motion, and Time Symmetry.** Second Edition. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 229.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, xii+431 S. ISBN 0-387-22026-7 H/b € 109,95.

Dieses Buch besteht aus zwei Teilen. Der erste umfasst die Kapitel 1 bis 5, und ist eine im Wesentlichen unveränderte Neuausgabe von Chungs Buch “Lectures

from Markov Processes to Brownian Motion" (1982) mit kleineren Korrekturen und Ergänzungen. Der zweite Teil, Kapitel 6 bis 15, stammt vom zweiten Autor.

Der erste Teil geht auf Vorlesungsnotizen von Chung aus den 1970-er Jahren zurück und ist ein mittlerweile klassischer Text. Hauptziel war, bzw. ist eine Darstellung der wichtigsten Aspekte der Theorie der Markovprozesse in stetiger Zeit mit besonderem Augenmerk auf die Brownsche Bewegung. Dabei geht es nicht in erster Linie um die größtmögliche Allgemeinheit, sondern um die wesentlichsten, klassischen Aspekte der Theorie, wobei der Umfang des im Voraus nötigen Reisegepäcks bewusst klein gehalten wird. Die 5 Kapitel spannen den Bogen von den Grundlagen der Markovprozesse und Martingale über Feller- und Hunt-Prozesse zur Brownschen Bewegung, mit besonderem Augenmerk auf die zugeordnete Potentialtheorie.

Auch der zweite Teil baut auf Vorlesungsnotizen auf, nunmehr von Walsh. Es ist eigentlich ein unabhängiges Buch, welches dem Text von Chung einen allgemeineren Rahmen nachstellt, der neuere Entwicklungen berücksichtigt und die Basis verbreitert. Dies könnte eigentlich genausogut ein separates Buch sein.

Motiviert durch die Grundthemen Zeitumkehr und Dualität, beginnt dieser Teil mit einem Kapitel *Generalities*, die hier in der Tat etwas allgemeiner gefasst sind. Die Kern-Kapitel sind 8 (*Ray processes*), 10 (*Time reversal*) und 13 (*Processes in duality*). Hier ist insbesondere die klare Einführung in die Ray-Prozesse hervorzuheben. Weitere Themen sind Doobs *h*-Prozesse, die durch superharmonische Funktionen induziert werden, sowie die Martinrand-Theorie und deren Verbindung mit der Ray-Knight-Kompaktifizierung. Ergänzt wird dies durch drei kurze, „eingestreute" Kapitel mit dem Titel *fireside chats*, Kamingesprächen zu spezifischen Ergänzungsthemen, die informell präsentiert werden.

Hier haben wir also zwei Bücher in einem, die anspruchsvolles Material für interessierte Leser in hervorragend zugänglicher Weise darstellen.

Wolfgang Woess (Graz)

**G. Schay: Introduction to Probability with Statistical Applications.** Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 2007, x+313 S. ISBN 978-0-8176-4497-0 P/b € 34,90.

Das vorliegende Werk stellt eine analysisbasierte Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik dar. Es enthält genug Material für 2 Semester, kann jedoch auch als Lehrbuch für eine einsemestrige Lehrveranstaltung herangezogen werden. Jeder Abschnitt enthält sehr viele Beispiele und Übungen, von denen für die Ungeraden der abgezählten Aufgaben auch die Lösungen angegeben werden.

In der Einführung beginnt dieses Buch mit der Beschreibung der Algebra der Ereignisse. Im Kapitel zwei werden kombinatorische Prinzipen besprochen und in Kapitel drei die Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie vorgestellt. Im nächsten Kapitel wird das Konzept der Zufallsvariablen eingeführt und darauf folgend im

fünften Kapitel Erwartungswert, Varianz und Momente besprochen.

In Kapitel sechs wird auf spezielle Verteilungen, insbesondere die Poissonverteilung, die Normalverteilung, die negative Binominalverteilung, die Gamma- und die Betaverteilung sowie auf multivariat normal verteilte Zufallsvariable eingegangen und der zentrale Grenzwertsatz besprochen.

In Kapitel sieben werden die Elemente der mathematischen Statistik eingeführt. Insbesondere wird das Schätzen, das Testen von Hypothesen, die Machtfunktion eines Tests, $\chi^2$-Tests, Zweistichprobentests und Kolmogorov-Smirnov-Tests näher besprochen.

Mit einem Umfang von 313 Seiten haben wir ein sehr sorgfältig geschriebenes Werk, das geeignet ist, in verschiedensten Fachrichtungen als Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik zu dienen. Es hebt sich insofern sehr positiv gegen viele Lehrwerke auf dem Sektor ab, als der Schwerpunkt hier auf dem Verständnis von elementarer Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik liegt und nicht auf programmiertechnische Varianten oder Fertigpakete eingegangen wird. Im gesamten Buch wird die Verwendung der linearen Algebra vermieden und dementsprechend wird die Verwendung der multivariaten Analysis nur dort vorgenommen, wo es unbedingt notwendig ist. Einige Konzepte aus der multivariaten Analysis wie die Doppelintegrale, die in der Erklärung des Buches nicht vermeidbar sind, werden eingeführt, höhere Integrale werden jedoch nicht verwendet.

W. Janko (Wien)

## *Einführungen*

**Y. Detert: Mathematik für Ahnungslose.** Eine Einstiegshilfe für Studierende. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 2007, xii+227 S. ISBN 978-9-7776-1386-4 € 28,–.

Vor uns liegt eine mathematische Formelsammlung mit durchgerechneten Beispielen, die im Wesentlichen den mathematischen Stoff der Sekundarstufe (mit Ausschluss von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik) umfasst. Da die Autorin Erfahrungen mit ‘remedial teaching’ gesammelt hat, wird das Büchlein als kompaktes Nachschlagwerk für Studierende technischer und naturwissenschaftlicher Richtungen einige Lücken schließen helfen. Allerdings bleibt ein Vorbehalt, nämlich, dass dieses Rezeptbuch wohl aus mancher Verlegenheit helfen könnte, aber Ahnungslose vielleicht doch ahnungslos zurücklässt. Die tiefere Struktur der Mathematik, angesiedelt zwischen Kreativität und Sicherheit der Erkenntnis, ist schwer erkennbar.

F. Schweiger (Salzburg)

**S. Jukna: Crashkurs Mathematik.** Für Informatiker. (Leitfäden der Informatik) Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008, xii+315 S. ISBN 978-3-8351-0216-3 P/b € 24,90.

Ziel des vorliegenden Buches ist es, eine einsemestrige Einführung in die Mathematik zu geben, wobei die Stoffauswahl im Hinblick auf Relevanz für die Informatik getroffen wurde: Es beginnt mit den Grundlagen der Mengenlehre, Logik und Kombinatorik, um dann ausgewählte Themen aus Algebra, Zahlentheorie, Lineare Algebra, etwas Analysis und diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie zu behandeln.

Das Buch ist insgesamt locker geschrieben und die Inhalte werden immer wieder mit leicht verständlichen Beispielen veranschaulicht. Außerdem bemüht sich der Autor regelmäßig, den Bezug zur Informatik herzustellen. Eine große Anzahl von netten Übungsaufgaben rundet das Buch ab (Musterlösungen dazu sowie Zusatzmaterialien werden auf der Webseite des Autors bereitgestellt).

Insgesamt halte ich es für einen netten Leitfaden, der eine leicht verdaubare Übersicht über die für Informatiker relevante Mathematik gibt und die Brücke zur vertiefenden Literatur schlagen kann.

S. Teschl (Wien)

**W. Purkert: Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler.** 6., überarbeitete Auflage. (Teubner Studienbücher Wirtschaftsmathematik) Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008, 453 S. ISBN 978-3-8351-0207-1 P/b € 29,90.

Der Umstand, dass dieses Buch von Purkert innerhalb von 13 Jahren bereits die 6. Auflage erlebt, spricht für sich. Tatsächlich stellt der „Brückenkurs Mathematik“ eine gelungene Mathematik-Auffrischung und Vorbereitung auf ein wirtschaftswissenschaftlich orientiertes Studium und zugleich eine nützliche Ergänzung zu den einschlägigen Lehrveranstaltungen im ersten Studienabschnitt dar. Das Buch beginnt, wirklich vom Anfang an, mit dem Rechnen mit Brüchen und reellen Zahlen, Prozentrechnung und Zinsen, Rechnen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, sowie Gleichungen und Ungleichungen. Es folgen Kapitel über Funktionen, Differential- und Integalrechnung, lineare Algebra (bis hin zu linearer Optimierung und Simplexalgorithmus) sowie eine später hinzugekommene Ergänzung zur Finanzmathematik. Während auf Theorie und Formalismus wenig Gewicht gelegt wird, findet man zahlreiche Beispiele und eine Fülle von Anwendungen aus dem Bereich der Volks- und Betriebswirtschaft, wie z.B. Kosten und Grenzkosten, Gewinnoptimierung, Produktionsfunktionen und Grenzrate der Substitution, Konsumenten- und Produzentenrente, Input-Output-Analyse, u.v.a.m. Darüber hinaus gibt es am Ende eines jeden Kapitels Übungsaufgaben einschließlich Lösungen. Insgesamt ein empfehlenswertes Lehrbuch.

G. Karigl (Wien)

# Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

### Emailadressen — Kontaktdaten — Buchbesprechungen

Die Mitglieder der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft werden herzlich gebeten, im Mitgliederverzeichnis auf der Webseite der ÖMG (*http://www.oemg.ac.at/Suche.html*) zu überprüfen, ob ihre Kontaktdaten aktuell sind und gegebenenfalls Korrekturen an das Sekretariat der ÖMG (F. Urbanek, e-mail *f.urbanek@tuwien.ac.at*) zu senden.

Falls Sie nicht ohnedies regelmäßig die Liste der zur Besprechung aufliegenden Bücher per email erhalten und Interesse daran haben, Bücher zu besprechen, so teilen Sie dies bitte ebenfalls mit.

### ÖMG- und DMV-Kongress in Graz, 20.–25.9.2009

Im September 2009 wird an der Technischen Universität Graz eine der alle vier Jahre stattfindenden ‚großen' gemeinsamen Tagungen der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft und der Deutschen Mathematikervereinigung abgehalten. Es ist uns gelungen, die folgenden Hauptvortragenden zu gewinnen:

*A. Bartels*, Münster
*A. Bobenko*, Berlin
*M. Burger*, Münster
*H. Esnault*, Duisburg-Essen
*B. Green*, Cambridge
*M. Ludwig*, New York
*F. Otto*, Bonn
*A. Quarteroni*, Lausanne
*M. Ruzhansky*, London
*W. Schlag*, Chicago
*K.-T. Sturm*, Bonn
*U. Tillmann*, Oxford (Noether-Vortrag)
*H. Edelsbrunner*, Duke University (öffentlicher Vortrag)

Sie sind herzlich eingeladen, einen Vortrag in einer der folgenden Sektionen anzukündigen:

1. *Grundlagen, Logik, theoret. Informatik*
2. *Algebra*
3. *Zahlentheorie*
4. *Geometrie*
5. *Algebraische Geometrie und Computeralgebra*
6. *Topologie und Differentialgeometrie*
7. *Reelle und komplexe Analysis*
8. *Funktionanalalysis*
9. *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*
10. *Partielle Differentialgleichungen*
11. *Wahrscheinlichkeit, Statistik, Ergodentheorie*
12. *Kombinatorik und Diskrete Mathematik*
13. *Numerik und wissenschaftliches Rechnen*
14. *Optimierung*
15. *Anwendungen in Physik und anderen Gebieten*
16. *Lehre und Popularisierung der Mathematik*
17. *Geschichte der Mathematik*
18. *Finanz- und Versicherungsmathematik*
19. *Fachhochschultag*
20. *Lehrertag*

Details zum Tagungsprogramm, Anmeldeformalitäten, etc. sind auf der Tagungs-Webseite *http://www.math.tugraz.at/OeMG-DMV/* zu finden. Die Registrierung wird Anfang 2009 möglich sein.

# Neue Mitglieder

**Markus Grasmair**, Dr. – Univ. Innsbruck. geb. 1979. Diplomstudiums Mathematik Univ. Innsbruck, seit 2003 Projektmitarbeiter (O. Scherzer), 2006 Abschluss des Doktoratsstudiums. e-mail *markus. grasmair @uibk. ac. at*.

**Enrico Kravina** – Feldkirch. geb. 1988. Preisträger, Österreichische Mathematikolympiade. e-mail *enrico. kravina @gmail. com*.

**Waltraud Lederle** – Frastanz. geb. 1990. Teilnehmerin am Bundeswettbewerb der Österreichischen Mathematikolympiade 2005–2008, IMO-Qualifikation 2008. e-mail *waldi13@gmx.at*.

**Christoph Maschler**, Mag. Dr. – Innsbruck. geb. 1975. 2002 Abschluss Physik Univ. Innsbruck, 2004 Abschluss Mathematik, 2003–07 Dissertation Theoretische Physik (Univ. Innsbruck, Betreuer: H. Ritsch), seit 2007 Konzipient bei der Patentanwaltskanzlei Torggler und Hofinger, Innsbruck. e-mail *christoph. maschler @gmail. com*.

**Stefan Reiterer** – TU Graz. geb. 1984. Student Technische Mathematik TU Graz.

**Paul Surer**, Dipl.-Ing. Dr. – Montanuniv. Leoben. geb. 1975. Studium Technische Mathematik TU Wien, Dissertation bei J. Thuswaldner in Leoben, seit 2005 wissenschaftlicher Mitarbeiter an der MU Leoben. e-mail *me @pavlovsky. com*.

**Gudrun Schappacher-Tilp**, Mag. Dr. – Graz. geb. 1976. 1999 Abschluss des Diplomstudiums Mathematik Univ. Graz, 2002 Doktorat Univ. Graz. seit 1999 bei Roche Diagnostics Forschung und Entwicklung, 2007/08 PostDoc Univ. Calgary – Modellierung biologischer Prozesse. e-mail *gudrun. schappacher-tilp @roche. com*.

# Ausschreibung des ÖMG-Schülerpreises 2009

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft möchte ab dem Schuljahr 2008/2009 jährlich herausragende Fachbereichsarbeiten in Mathematik oder Darstellender Geometrie mit Preisen auszeichnen.

Diese Arbeiten müssen jeweils bis spätestens 5. April des Jahres in der ÖMG (Univ.Prof. Dr. Michael Drmota, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, 1040 Wien) einlangen und werden von einer Jury begutachtet.

Die Verfasserinnen und Verfasser jener Arbeiten, die im Zuge dieser Begutachtung in die engere Wahl kommen, werden zu einem Kurzvortrag eingeladen, in dem sie ihre Arbeit präsentieren. Diese Präsentation, zu der auch die betreuenden Lehrerinnen und Lehrer eingeladen sind, wird im Mai stattfinden. Ort und Termin werden noch bekannt gegeben (jedenfalls in der Zeit zwischen schriftlicher und mündlicher Reifeprüfung). Anschließend erfolgt im Rahmen einer Feier die Preisverleihung.

Die ÖMG bittet alle ihre Mitglieder und die Leserinnen und Leser der IMN, potentielle Interessenten von dieser Einladung zu informieren und Schulen zur Teilnahme zu ermuntern.

Robert F. Tichy (Vorsitzender der ÖMG)

*Adresse:*
Univ.Prof. Dr. Michael Drmota
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8–10/104
1040 Wien

# Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2009

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2009 wieder zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2007 oder 2008 eine Diplomarbeit bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Diplomarbeiten ist ein Abschluss eines Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Doktoratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlossenen Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten Mathematiker bzw. Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2009 bei mir einlangen und folgende Unterlagen enthalten:

1. Ein Exemplar der als besonders hoch qualifiziert bewerteten mathematischen Diplomarbeit bzw. Dissertation;
2. zwei begründete Bewertungen dieser Diplomarbeit bzw. Dissertation;
3. einen Lebenslauf des Kandidaten bzw. der Kandidatin einschließlich kurzer Beschreibung des Studienablaufes.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachtungskommission die Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500,– € dotiert. Jeder Preisträger erhält eine Urkunde.

Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird sie (er) auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Robert F. Tichy (Vorsitzender der ÖMG)

*Adresse:*
o.Univ.-Prof. Dr. Robert F. Tichy
Institut für Mathematik der TU Graz,
Steyrergasse 30
8010 Graz

# Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2009

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2009 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematiker oder Mathematikerinnen, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind. Ein wesentlicher Teil der Arbeiten muss in Österreich erbracht worden sein.

Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten habilitierten Mathematiker bzw. Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2009 bei mir einlangen und folgende Unterlagen enthalten:

1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung;
2. Publikationsliste;
3. wissenschaftlicher Lebenslauf.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine Begutachtungskommission den Preisträger oder die Preisträgerin aus. Der Preis ist mit 1.000,– € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird der Preisträger oder die Preisträgerin eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten.

Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er oder sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Robert F. Tichy (Vorsitzender der ÖMG)

*Adresse:*
o.Univ.-Prof. Dr. Robert F. Tichy
Institut für Mathematik der TU Graz,
Steyrergasse 30
8010 Graz