Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. e-mail *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 208 (62. Jahrgang) **August 2008**

Inhalt

Robert Adler, John Ewing, Peter Taylor: Citation Statistics 1

Saharon Shelah: A Bothersome Question 27

Martin Goldstern: Kardinalzahlarithmetik 31

Manfred Mayer und Hans Georg Feichtinger: ATS – der „österreichische Vortragsserver" 47

Gerald Kuba: Über den Tangens rationaler Winkel 57

Neue Mitglieder 64

Buchbesprechungen 65

Die Titelseite zeigt den Coxeter-Komplex Σ der ikosahedralen Gruppe

$$G = \left\langle s, t, u \mid s^2 = t^2 = u^2 = (st)^3 = (tu)^2 = (su)^5 = 1 \right\rangle,$$

d.h. die simpliziale Zerlegung der Einheitskugel, die von den Spiegelungsebenen der kanonischen orthogonalen Darstellung von G ausgeschnitten wird. Σ stellt auch ein *apartment* in einem Gebäude nach Jacques Tits dar.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 208 (2008), 1–25

Citation Statistics

Robert Adler, John Ewing, Peter Taylor

Joint IMU/ICIAM/IMS Committee on Quantitative Assessment of Research

Executive Summary

This is a report about the use and misuse of citation data in the assessment of scientific research. The idea that research assessment must be done using "simple and objective" methods is increasingly prevalent today. The "simple and objective" methods are broadly interpreted as *bibliometrics*, that is, citation data and the statistics derived from them. There is a belief that citation statistics are inherently more accurate because they substitute simple numbers for complex judgments, and hence overcome the possible subjectivity of peer review. But this belief is unfounded.

• Relying on statistics is not more accurate when the statistics are improperly used. Indeed, statistics can mislead when they are misapplied or misunderstood. Much of modern bibliometrics seems to rely on experience and intuition about the interpretation and validity of citation statistics.

• While numbers appear to be "objective", their objectivity can be illusory. The meaning of a citation can be even more subjective than peer review. Because this subjectivity is less obvious for citations, those who use citation data are less likely to understand their limitations.

• The sole reliance on citation data provides at best an incomplete and often shallow understanding of research – an understanding that is valid only when reinforced by other judgments. *Numbers are not inherently superior to sound judgments.*

Using citation data to assess research ultimately means using citation-based statistics to rank things – journals, papers, people, programs, and disciplines. The statistical tools used to rank these things are often misunderstood and misused.

• For journals, the impact factor is most often used for ranking. This is a simple average derived from the distribution of citations for a collection of articles in the

This article is reprinted with kind permission by the authors, and by IMU, ICIAM, and IMS.

ISSN 0020-7926

From the committee charge
The drive towards more transparency and accountability in the academic world has created a "culture of numbers" in which institutions and individuals believe that fair decisions can be reached by algorithmic evaluation of some statistical data; unable to measure quality (the ultimate goal), decision-makers replace quality by numbers that they can measure. This trend calls for comment from those who professionally "deal with numbers" – mathematicians and statisticians.

journal. The average captures only a small amount of information about that distribution, and it is a rather crude statistic. In addition, there are many confounding factors when judging journals by citations, and any comparison of journals requires caution when using impact factors. Using the impact factor alone to judge a journal is like using weight alone to judge a person's health.

• For papers, instead of relying on the actual count of citations to compare individual papers, people frequently substitute the impact factor of the journals in which the papers appear. They believe that higher impact factors must mean higher citation counts. But this is often not the case! This is a pervasive misuse of statistics that needs to be challenged whenever and wherever it occurs.

• For individual scientists, complete citation records can be difficult to compare. As a consequence, there have been attempts to find simple statistics that capture the full complexity of a scientist's citation record with a single number. The most notable of these is the h-index, which seems to be gaining in popularity. But even a casual inspection of the h-index and its variants shows that these are naïve attempts to understand complicated citation records. While they capture a small amount of information about the distribution of a scientist's citations, they lose crucial information that is essential for the assessment of research.

The validity of statistics such as the impact factor and h-index is neither well understood nor well studied. The connection of these statistics with research quality is sometimes established on the basis of "experience." The justification for relying on them is that they are "readily available." The few studies of these statistics that were done focused narrowly on showing a correlation with some other measure of quality rather than on determining how one can best derive useful information from citation data.

We do not dismiss citation statistics as a tool for assessing the quality of research – citation data and statistics can provide some valuable information. We recognize that assessment must be practical, and for this reason easily-derived citation statistics almost surely will be part of the process. But citation data provide only a limited and incomplete view of research quality, and the statistics derived from citation data are sometimes poorly understood and misused. Research is too important to measure its value with only a single coarse tool.

We hope those involved in assessment will read both the commentary and the details of this report in order to understand not only the limitations of citation statistics but also how better to use them. If we set high standards for the conduct of science, surely we should set equally high standards for assessing its quality.

1 Introduction

Scientific research is important. Research underlies much progress in our modern world and provides hope that we can solve some of the seemingly intractable problems facing humankind, from the environment to our expanding population. Because of this, governments and institutions around the world provide considerable financial support for scientific research. Naturally, they want to know their money is being invested wisely; they want to assess the quality of the research for which they pay in order to make informed decisions about future investments.

This much isn't new: People have been assessing research for many years. What is new, however, is the notion that good assessment must be "simple and objective," and that this can be achieved by relying primarily on metrics (statistics) derived from citation data rather than a variety of methods, including judgments by scientists themselves. The opening paragraph from a recent report states this view starkly:

It is the Government's intention that the current method for determining the quality of university research – the UK Research Assessment Exercise (RAE) – should be replaced after the next cycle is completed in 2008. Metrics, rather than peer-review, will be the focus of the new system and it is expected that bibliometrics (using counts of journal articles and their citations) will be a central quality index in this system. [Evidence Report 2007, p. 3]

Those who argue for this simple objectivity believe that research is too important to rely on subjective judgments. They believe citation-based metrics bring clarity to the ranking process and eliminate ambiguities inherent in other forms of assessment. They believe that carefully chosen metrics are independent and free of bias. Most of all, they believe such metrics allow us to compare all parts of the research enterprise – journals, papers, people, programs, and even entire disciplines – simply and effectively, without the use of subjective peer review.

But this faith in the accuracy, independence, and efficacy of metrics is misplaced.

- First, the accuracy of these metrics is illusory. It is a common maxim that statistics can lie when they are improperly used. The misuse of citation statistics is widespread and egregious. In spite of repeated attempts to warn against such misuse (for example, the misuse of the impact factor), governments, institutions, and even scientists themselves continue to draw unwarranted or even false conclusions from the misapplication of citation statistics.
- Second, sole reliance on citation-based metrics replaces one kind of judgment

with another. Instead of subjective peer review one has the subjective interpretation of a citation's meaning. Those who promote exclusive reliance on citation-based metrics implicitly assume that each citation means the same thing about the cited research – its "impact". This is an assumption that is unproven and quite likely incorrect.

• Third, while statistics are valuable for understanding the world in which we live, they provide only a partial understanding. In our modern world, it is sometimes fashionable to assert a mystical belief that numerical measurements are superior to other forms of understanding. Those who promote the use of citation statistics as a *replacement* for a fuller understanding of research implicitly hold such a belief. We not only need to use statistics correctly – we need to use them *wisely* as well.

We do not argue with the effort to evaluate research but rather with the demand that such evaluations rely predominantly on "simple and objective" citation-based metrics – a demand that often is interpreted as requiring easy-to-calculate numbers that rank publications or people or programs. Research usually has multiple goals, both shortterm and long, and it is therefore reasonable that its value must be judged by multiple criteria. Mathematicians know that there are many things, both real and abstract, that cannot be simply ordered, in the sense that each two can be compared. Comparison often requires a more complicated analysis, which sometimes leaves one undecided about which of two things is "better". The correct answer to "Which is better?" is sometimes: "It depends!"

Research usually has multiple goals and it is therefore reasonable that its value must be judged by multiple criteria.

The plea to use multiple methods to assess the quality of research has been made before (for example [Martin 1996] or [Carey-Cowling-Taylor 2007]). Publications can be judged in many ways, not only by citations. Measures of esteem such as invitations, membership on editorial boards, and awards often measure quality. In some disciplines and in some countries, grant funding can play a role. And peer review – the judgment of fellow scientists – is an important component of assessment. (We should not discard peer review merely because it is sometimes flawed by bias, any more than we should discard citation statistics because they are sometimes flawed by misuse.) This is a small sample of the multiple ways in which assessment can be done. There are many avenues to good assessment, and their relative importance varies among disciplines. In spite of this, "objective" citation-based statistics repeatedly become the preferred method for assessment. The lure of a simple process and simple numbers (preferably a single number) seems to overcome common sense and good judgment.

This report is written by mathematical scientists to address the misuse of statistics in assessing scientific research. Of course, this misuse is sometimes directed towards the discipline of mathematics itself, and that is one of the reasons for writing this report. The special citation culture of mathematics, with low citation counts for journals, papers, and authors, makes it especially vulnerable to the abuse of citation statistics. We believe, however, that *all* scientists, as well as the general public, should be anxious to use sound scientific methods when assessing research.

Some in the scientific community would dispense with citation statistics altogether in a cynical reaction to past abuse, but doing so would mean discarding a valuable tool. Citation-based statistics *can* play a role in the assessment of research, provided they are used properly, interpreted with caution, and make up only part of the process. Citations provide information about journals, papers, and people. We don't want to hide that information; we want to illuminate it.

That is the purpose of this report. The first three sections address the ways in which citation data can be used (and misused) to evaluate journals, papers, and people. The next section discusses the varied meanings of citations and the consequent limitations on citation-based statistics. The last section counsels about the wise use of statistics and urges that assessments temper the use of citation statistics with other judgments, even though it makes assessments less simple. "Everything should be made as simple as possible, but not simpler," Albert Einstein once said.[1]

This advice from one of the world's preeminent scientists is especially apt when assessing scientific research.

2 Ranking journals: The impact factor[2]

The impact factor was created in the 1960s as a way to measure the value of journals by calculating the average number of citations per article over a specific period of time. [Garfield 2005] The average is computed from data gathered by *Thompson Scientific* (previously called the Institute for Scientific Information), which publishes *Journal Citation Reports*. *Thompson Scientific* extracts references from more than 9,000 journals, adding information about each article and its references to its database each year. [THOMPSON: SELECTION] Using that

[1]This quote was attributed to Einstein in the *Reader's Digest*, Oct. 1977. It appears to be derived from his actual quote: "It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience." From "On the Method of Theoretical Physics" The Herbert Spencer Lecture, delivered at Oxford (10 June 1933); also published in *Philosophy of Science*, Vol. 1, No. 2 (April 1934), pp. 163–169.

[2]While we concentrate on the *Thompson Scientific* impact factor in this section, we note that Thompson promotes the use of two other statistics. Also, similar statistics based on average citation counts for journals can be derived from other databases, including Scopus, Spires, Google Scholar, and (for mathematics) the Math Reviews citation database. The latter consists of citations from over 400 mathematics journals from the period 2000–present, identified as items that were listed in Math Reviews since 1940; it includes more than 3 million citations.

information, one can count how often a particular article is cited by subsequent articles that are published in the collection of indexed journals. (We note that *Thompson Scientific* indexes less than half the mathematics journals covered by *Mathematical Reviews* and *Zentralblatt*, the two major reviewing journals in mathematics.[3])

For a particular journal and year, the journal impact factor is computed by calculating the average number of citations to articles in the journal during the preceding two years from all articles published in that given year (in the particular collection of journals indexed by *Thompson Scientific*). If the impact factor of a journal is 1.5 in 2007, it means that on average articles published during 2005 and 2006 were cited 1.5 times by articles in the collection of all indexed journals published in 2007.

Thompson Scientific itself uses the impact factor as one factor in selecting which journals to index. [THOMPSON: SELECTION] On the other hand, Thompson promotes the use of the impact factor more generally to compare journals.

> *"As a tool for management of library journal collections, the impact factor supplies the library administrator with information about journals already in the collection and journals under consideration for acquisition. These data must also be combined with cost and circulation data to make rational decisions about purchases of journals." [THOMPSON: IMPACT FACTOR]*

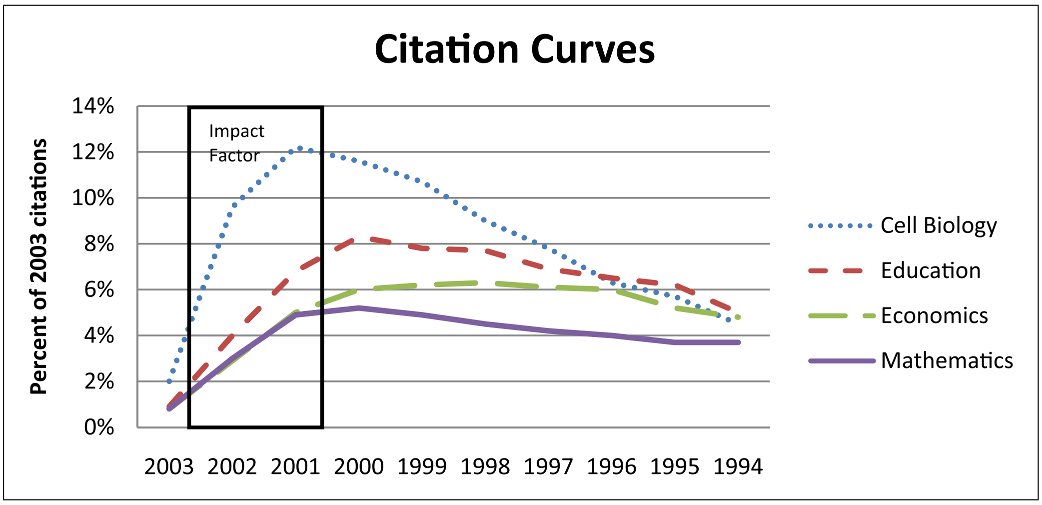
Many writers have pointed out that one should not judge the academic worth of a journal using citation data alone, and the present authors very much agree. In addition to this general observation, the impact factor has been criticized for other reasons as well. (See [Seglen 1997], [Amin-Mabe 2000], [Monastersky 2005], [Ewing 2006], [Adler 2007], and [Hall 2007].)

(i) The identification of the impact factor as an average is not quite correct. Because many journals publish non-substantive items such as letters or editorials, which are seldom cited, these items are not counted in the denominator of the impact factor. On the other hand, while infrequent, these items are sometimes cited, and these citations are counted in the numerator. The impact factor is therefore not quite the average citations per article. When journals publish a large number

[3] *Thompson Scientific* indicates (March 2008) that it indexes journals in the following categories: MATHEMATICS (217) — MATHEMATICS APPLIED (177) — MATHEMATICS INTERDISCIPLINARY (76) — PHYSICS, MATHEMATICAL (44) — PROBABILITY AND STATISTICS (96). The categories overlap, and the total number of journals is approximately 400. By contrast, *Mathematical Reviews* includes items from well more than 1200 journals each year, and considers more than 800 journals as "core" (in the sense that every item in the journal is included in Math Reviews). Zentralblatt covers a similar number of mathematics journals.

of such “nonsubstantial” items, this deviation can be significant. In many areas, including mathematics, this deviation is minimal.

(ii) The two-year period used in defining the impact factor was intended to make the statistic current. [Garfield 2005] For some fields, such as biomedical sciences, this is appropriate because most published articles receive most of their citations soon after publication. In other fields, such as mathematics, most citations occur beyond the two-year period. Examining a collection of more than 3 million recent citations in mathematics journals (the *Math Reviews* Citation database) one sees that roughly 90% of citations to a journal fall outside this 2-year window. Consequently, the impact factor is based on a mere 10% of the citation activity and misses the vast majority of citations.[4]

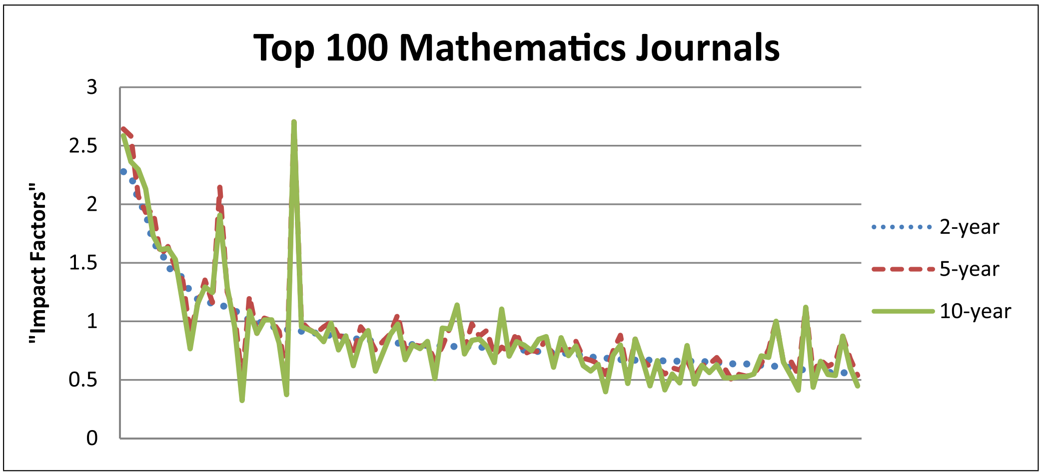


A graph showing the age of citations from articles published in 2003 covering four different fields. Citations to article published in 2001–2002 are those contributing to the impact factor; all other citations are irrelevant to the impact factor. Data from *Thompson Scientific*.

Does the two-year interval mean the impact factor is misleading? For mathematics journals the evidence is equivocal. *Thompson Scientific* computes 5-year impact factors, which it points out correlate well with the usual (2-year) impact factors. [Garfield 1998] Using the *Math Reviews* citation database, one can compute “impact factors” (that is, average citations per article) for a collection of the 100 most

[4]The *Mathematical Reviews* citation database includes (March 2008) more than 3 million references in approximately 400 journals published from 2000 to the present. The references are matched to items in the MR database and extend over many decades. Unlike the Science Citation Index, citations both to books and journals are included. It is a curious fact that roughly 50% of the citations are to items appearing in the previous decade; 25% cite articles appearing in the decade before that; 12.5% cite articles in the prior decade; and so on. This sort of behavior is special to each discipline, of course.

cited mathematics journals using periods of 2, 5, and 10 years. The chart below shows that 5 and 10-year impact factors generally track the 2-year impact factor.

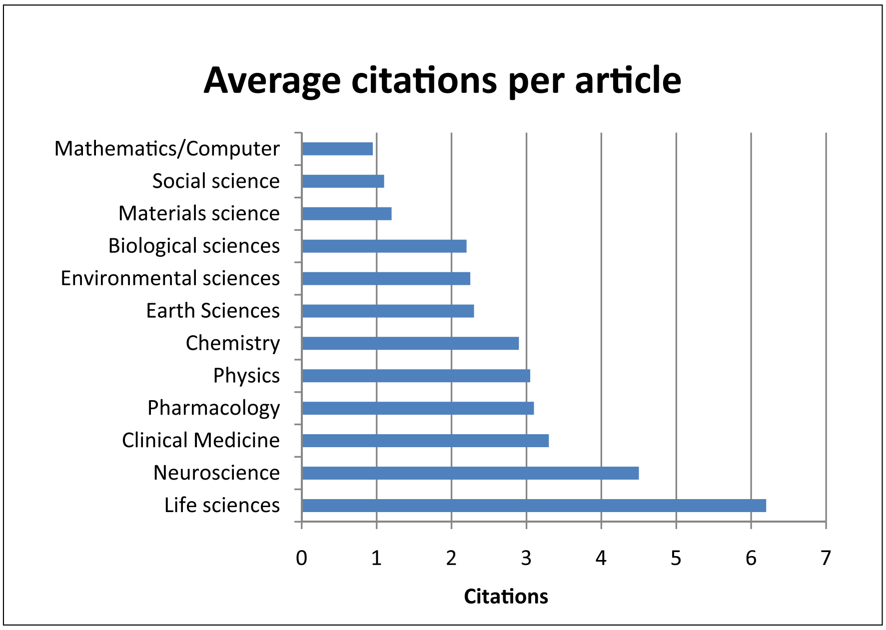


"Impact factors" for 2, 5, and 10 years for 100 mathematics journals. Data from *Math Reviews* citation database.

The one large outlier is a journal that did not publish papers during part of this time; the smaller outliers tend to be journals that publish a relatively small number of papers each year, and the chart merely reflects the normal variability in impact factors for such journals. It is apparent that changing the number of "target years" when calculating the impact factor changes the ranking of journals, but the changes are generally modest, except for small journals, where impact factors also vary when changing the "source year" (see below).

(iii) The impact factor varies considerably among disciplines. [Amin-Mabe 2000] Part of this difference stems from the observation (ii): If in some disciplines many citations occur outside the two-year window, impact factors for journals will be far lower. On the other hand, part of the difference is simply that the citation cultures differ from discipline to discipline, and scientists will cite papers at different rates and for different reasons. (We elaborate on this observation later because the meaning of citations is extremely important.) It follows that one cannot in any meaningful way compare two journals in different disciplines using impact factors.

(iv) The impact factor can vary considerably from year to year, and the variation tends to be larger for smaller journals. [Amin-Mabe 2000] For journals publishing fewer than 50 articles, for example, the average *change* in the impact factor from 2002 to 2003 was nearly 50%. This is wholly expected, of course, because the sample size for small journals is small. On the other hand, one often compares



Average citations per article for different disciplines, showing that citation practices differ markedly. Data from Thompson Scientific [Amin-Mabe 2000].

journals for a fixed year, without taking into account the higher variation for small journals.

(v) Journals that publish articles in languages other than English will likely receive fewer citations because a large portion of the scientific community cannot (or do not) read them. And the type of journal, rather than the quality alone, may influence the impact factor. Journals that publish review articles, for example, will often receive far more citations than journals that do not, and therefore have higher (sometimes, substantially higher) impact factors. [Amin-Mabe 2000]

(vi) The most important criticism of the impact factor is that its meaning is not well understood. When using the impact factor to compare two journals, there is no a priori model that defines what it means to be "better". The only model derives from the impact factor itself – a larger impact factor means a better journal. In the classical statistical paradigm, one defines a model, formulates a hypothesis (of no difference), and then finds a statistic, which depending on its values allows one to accept or reject the hypothesis. Deriving information (and possibly a model) from the data itself is a legitimate approach to statistical analysis, but in this case it is not clear what information has been derived. How does the impact factor measure quality? Is it the best statistic to measure quality? What precisely does it measure? (Our later discussion about the meaning of citations is relevant here.)

Remarkably little is known about a model for journal quality or how it might relate to the impact factor.

The above six criticisms of the impact factor are all valid, but they mean only that the impact factor is crude, not useless. For example, the impact factor can be used as a starting point in ranking journals in groups by using impact factors initially to define the groups and then employing other criteria to refine the ranking and verify that the groups make sense. But using the impact factor to evaluate journals requires caution. The impact factor cannot be used to compare journals across disciplines, for example, and one must look closely at the type of journals when using the impact factor to rank them. One should also pay close attention to annual variations, especially for smaller journals, and understand that small differences may be purely random phenomena. And it is important to recognize that the impact factor may not accurately reflect the full range of citation activity in some disciplines, both because not all journals are indexed and because the time period is too short. Other statistics based on longer periods of time and more journals may be better indicators of quality. Finally, citations are only one way to judge journals, and should be supplemented with other information (the central message of this report).

These are all cautions similar to those one would make for any ranking based on statistics. Mindlessly ranking journals according to impact factors for a particular year is a misuse of statistics. To its credit, *Thompson Scientific* agrees with this statement and (gently) cautions those who use the impact factor about these things.

> *"Thomson Scientific does not depend on the impact factor alone in assessing the usefulness of a journal, and neither should anyone else. The impact factor should not be used without careful attention to the many phenomena that influence citation rates, as for example the average number of references cited in the average article. The impact factor should be used with informed peer review."[THOMPSON: IMPACT FACTOR]*

Unfortunately, this advice is too often ignored.

3 Ranking papers

The impact factor and similar citation-based statistics can be misused when ranking journals, but there is a more fundamental and more insidious misuse: Using the impact factor to compare individual papers, people, programs, or even disciplines. This is a growing problem that extends across many nations and many disciplines, made worse by recent national research assessments.

In a sense, this is not a new phenomenon. Scientists are often called upon to make judgments about publication records, and one hears comments such as, “She publishes in good journals” or “Most of his papers are in low level journals.” These can be sensible assessments: The quality of journals in which a scientist generally (or consistently) publishes is one of many factors one can use to assess the scientist’s overall research. The impact factor, however, has increased the tendency to ascribe the properties of an individual journal to each article within that journal (and to *each* author).

Thompson Scientific implicitly promotes this practice:

> *“Perhaps the most important and recent use of impact is in the process of academic evaluation. The impact factor can be used to provide a gross approximation of the prestige of journals in which individuals have been published.” [THOMPSON: IMPACT FACTOR]*

Here are some examples of the ways in which people have interpreted this advice, reported from mathematicians around the world:

Example 1: My university has recently introduced a new classification of journals using the Science Citation Index Core journals. The journals are divided into three groups based only on the impact factor. There are 30 journals in the top list, containing no mathematics journal. The second list contains 667, which includes 21 mathematics journals. Publication in the first list causes university support of research to triple; publication in the second list, to double. Publication in the core list awards 15 points; publication in any *Thompson Scientific* covered journal awards 10. Promotion requires a fixed minimum number of points.

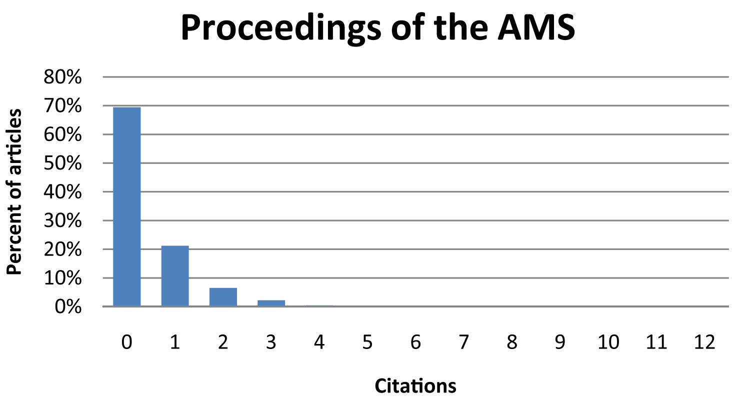
Example 2: In my country, university faculty with permanent positions are evaluated every six years. Sequential successful evaluations are the key to all academic success. In addition to a curriculum vitae, the largest factor in evaluation concerns ranking five published papers. In recent years, these are given 3 points if they appear in journals in the top third of the *Thompson Scientific list*, 2 points if in the second third, and 1 point in the bottom third. (The three lists are created using the impact factor.)

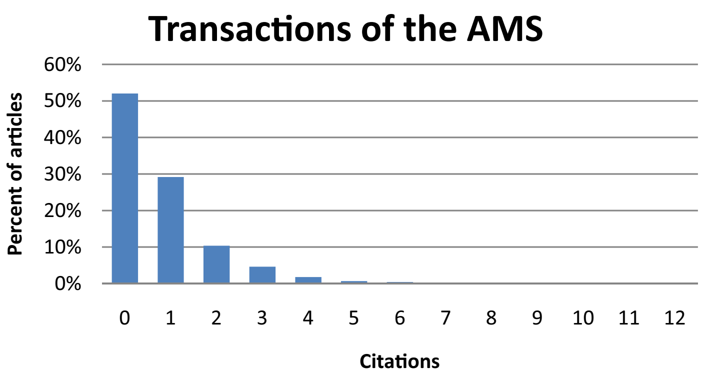
Example 3: In our department, each faculty member is evaluated by a formula involving the number of single-author-equivalent papers, multiplied by the impact factor of the journals in which they appear. Promotions and hiring are based partly on this formula.

In these examples, as well as many others reported to us, the impact factor is being used either explicitly or implicitly to compare individual papers along with their authors: If the impact factor of journal A is greater than that of journal B, then surely a paper in A must be superior to a paper in B, and author A superior to author B. In some cases, this reasoning is extended to rank departments or even entire disciplines.

It has long been known that the distribution of citation counts for individual papers in a journal is highly skewed, approximating a so-called power law. ([Seglen 1996], [Garfield 1987]) This has consequences that can be made precise with an example.

The distribution for papers in the *Proceedings of the American Mathematical Society* over the period 2000–2004 can be seen below. The *Proceedings* publishes short papers, normally shorter than ten pages in length. During this period, it published 2,381 papers (about 15,000 pages). Using 2005 journals in the *Math Reviews* citation database, the average citation count per article (that is, the impact factor) is .434.





The *Transactions of the AMS* publishes longer articles that are usually more substantial, both in scope and content. Over the same period of time, the *Transactions* published 1,165 papers (more than 25,000 pages), with citation counts ranging from 0 to 12. The average number of citations per article was .846 – about twice that of the *Proceedings*.

Now consider two mathematicians, one publishing a paper in the Proceedings and the other a paper in the Transactions. Using some of the institutional practices cited above, the second would be judged superior to the first, publishing a paper in a journal with higher impact factor – in fact, twice as high! Is this a valid assessment? Are papers in the *Transaction of the AMS* twice as good as those in the *Proceedings*?

When we assert that an individual *Transactions* paper is better (in the sense of citations) than an individual *Proceedings* paper, we need to ask not a question about averages, but rather a question about probabilities: What is the probability that we are wrong? What is the probability that a randomly selected *Proceedings* paper has at least as many citations as a randomly selected *Transactions paper*?

This is an elementary calculation, and the answer is 62%. This means that we are wrong 62% of the time, and a randomly selected *Proceedings* paper will be just as good as (or better than) a randomly selected *Transactions* paper – in spite of the fact that the *Proceedings* impact factor is only half that of the Transactions! We are more often wrong than right. Most people find this surprising, but it is a consequence of the highly skewed distribution and the narrow window of time used to compute the impact factor (which is the reason for the high percentage of uncited papers).[5] It shows the value of precise statistical thinking rather than intuitive observation. This is typical behavior for journals, and there is nothing special about the choices of these two journals. (For example, the *Journal of the AMS* over the same period has an impact factor 2.63 – six times that of the *Proceedings*. Yet a randomly selected *Proceedings* article is at least as good as a *Journal* article, in the sense of citations, 32% of the time.)

Thus, while it is incorrect to say that the impact factor gives no information about individual papers in a journal, the information is surprisingly vague and can be dramatically misleading.

It follows that the kinds of calculations performed in the three examples above – using the impact factor as a proxy for actual citation counts for individual papers – have little rational basis. Making assertions that are incorrect more than half the time (or a third of the time) is surely not a good way to carry out an assessment.

---

[5]The skewed distribution combined with the narrow window (using only one year's journals as the source of citations and five years as the target) means that a large number of articles have either none or very few citations. This makes it intuitively obvious that randomly chosen articles are often equivalent.

The fact that many articles have no citations (or only a few) is also a consequence of the long citation time for mathematics – articles often take many years to accumulate citations. If we choose longer periods of time for both source journals and target years, then the citation counts increase substantially and it becomes easier to distinguish journals by citation behavior. This is the approach used in [Stringer et al. 2008] to analyze citations. They show that for sufficiently long periods of time, the distribution of citation counts for individual articles appears to be log-normal. This provides a mechanism for comparing two journals by comparing the distributions, and is certainly more sophisticated than using impact factors. Again, however, it considers only citations and nothing else.

> *While it is incorrect to say that the impact factor gives no information about individual papers in a journal, the information is surprisingly vague and can be dramatically misleading.*

Once one realizes that it makes no sense to substitute the impact factor for individual article citation counts, it follows that it makes no sense to use the impact factor to evaluate the authors of those articles, the programs in which they work, and (most certainly) the disciplines they represent. The impact factor and averages in general are too crude to make sensible comparisons of this sort without more information.

Of course, ranking people is not the same as ranking their papers. But if you want to rank a person's papers using only citations to measure the quality of a particular paper, you must begin by counting that paper's citations. The impact factor of the journal in which the paper appears is not a reliable substitute.

4 Ranking scientists

While the impact factor has been the best known citation-based statistic, there are other more recent statistics that are now actively promoted. Here is a small sample of three of these statistics meant to rank individuals.

h-index: A scientist's h-index is the largest *n* for which he/she has published *n* articles, each with at least *n* citations. This is the most popular of the statistics mentioned here. It was proposed by J.E. Hirsch [Hirsch 2006] in order to measure "the scientific output of a researcher" by focusing on the highend "tail" of a person's citation distribution. The goal was to substitute a single number for publications counts and citation distributions.

m-index: A scientist's m-index is the h-index divided by the number of years since his/her first paper. This was also proposed by Hirsch in the paper above. The intention is to compensate junior scientists because they have not had time to publish papers or gain many citations.

g-index: A scientist's g-index is the largest *n* for which the *n* most cited papers have a total of at least n2 citations. This was proposed by Leo Egghe in 2006 [Egghe 2006]. The h-index does not take into account the fact that some papers in the top *n* may have extraordinarily high citation counts. The g-index is meant to compensate for this. There are more indices – many more of them – including variants of those above that take into account the age of papers or the number of authors. ([Batista-Campiteli-Kinouchi-Martinez 2005], [Batista-Campiteli-Kinouchi 2006], [Sidiropouls-Katsaros-Manolopoulos 2006])

In his paper defining the h-index, Hirsch wrote that he proposed the h-index as "an easily computable index, which gives an estimate of the importance, significance, and broad impact of a scientist's cumulative research contributions." [Hirsch 2005, p. 5] He went on to add that "this index may provide a useful yardstick to compare different individuals competing for the same resource when an important evaluation criterion is scientific achievement."

Neither of these assertions is supported by convincing evidence. To support his claim that the h-index measures the importance and significance of a scientist's cumulative research, Hirsch analyzes the h index for a collection of Nobel Prize winners (and, separately, members of the National Academy). He demonstrates that people in these groups generally have high h-indices. One can conclude that it is likely a scientist has a high h-index given the scientist is a Nobel Laureate. But without further information, we know very little about the likelihood someone will become a Nobel Laureate or a member of the National Academy, given that they have a high h-index. That is the kind of information one wants in order to establish the validity of the h-index.

In his article, Hirsch also claims that one can use the h-index to compare two scientists:

> *"I argue that two individuals with similar h are comparable in terms of their overall scientific impact, even if their total number of papers or their total number of citations is very different. Conversely, that between two individuals (of the same scientific age) with similar number of total papers or of total citation count and very different h-value, the one with the higher h is likely to be the more accomplished scientist." [Hirsch 2005, p. 1]*

These assertions appear to be refuted by common sense. (Think of two scientists, each with 10 papers with 10 citations, but one with an additional 90 papers with 9 citations each; or suppose one has exactly 10 papers of 10 citations and the other exactly 10 papers of 100 each. Would anyone think them equivalent?)[6]

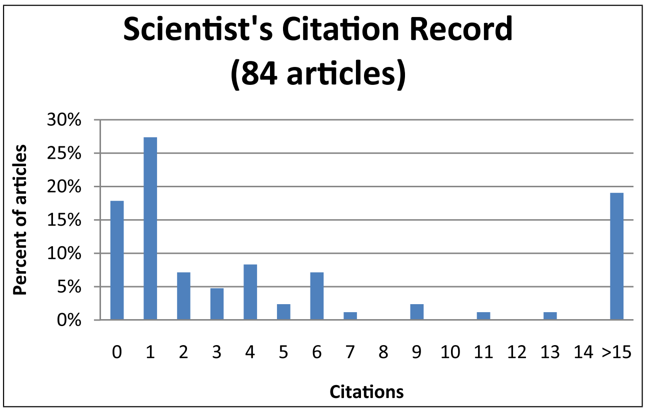
Hirsch extols the virtues of the h-index by claiming that "h is preferable to other single-number criteria commonly used to evaluate scientific output of a researcher..." [Hirsch 2005, p. 1], but he neither defines "preferable" nor explains why one wants to find "single-number criteria."

While there has been some criticism of this approach, there has been little serious analysis. Much of the analysis consists of showing "convergent validity," that is, the h-index correlates well with other publication/citation metrics, such as the number of published papers or the total number of citations. This correlation is unremarkable, since all these variables are functions of the same basic phenomenon – publications. In one notable paper about the h-index [Lehmann-Jackson-Lautrup 2006] the authors carry out a more careful analysis and demonstrate that the h-index (actually, the m-index) is not as “good” as merely considering the mean number of citations per paper. Even here, however, the authors do not adequately define what the term “good” means. When the classical statistical paradigm is applied [Lehmann-Jackson-Lautrup 2006], the h-index proves to be less reliable than other measures.

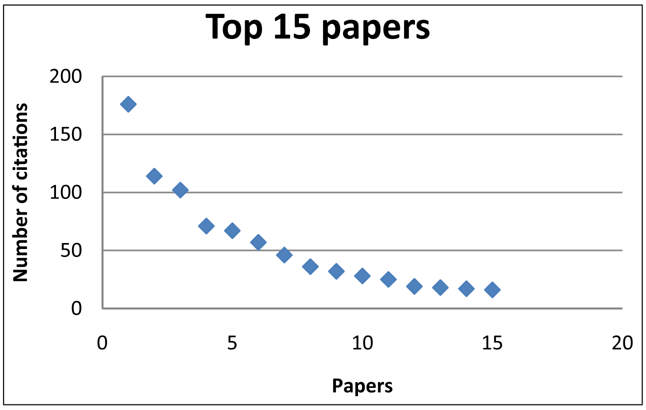
Understanding ought to be the goal when assessing research, not merely ensuring that any two people are comparable.

A number of variants of the h-index have been devised to compare the quality of researchers not only within a discipline but across disciplines as well. ([Batista-Campiteli-Kinouchi 2006], [Molinari-Molinari 2008]) Others claim that the h-index can be used to compare institutes and departments. [Kinney 2007] These are

[6] To illustrate how much information one loses when using only the h-index, here is a reallife example of a distinguished midcareer mathematician who has published 84 research papers. The citation distribution looks like the following:



Notice that slightly under 20% of the publications have 15 or more citations. The distribution of actual citation counts for these 15 papers is:



In Hirsch’s analysis, however, all this information is thrown away. One only remembers that the h-index is 15, meaning that the top 15 papers have 15 or more citations.

often breathtakingly naïve attempts to capture a complex citation record with a single number. Indeed, the primary advantage of these new indices over simple histograms of citation counts is that the indices discard almost all the detail of citation records, and this makes it possible to rank any two scientists. Even simple examples, however, show that the discarded information is needed to understand a research record. Surely understanding ought to be the goal when assessing research, not merely ensuring that any two people are comparable.

In some cases, national assessment bodies are gathering the h-index or one of its variants as part of their data. This is a misuse of the data. Unfortunately, having a single number to rank each scientist is a seductive notion – one that may spread more broadly to a public that often misunderstands the proper use of statistical reasoning in far simpler settings.

5 The meaning of citations

Those who promote citation statistics as the predominant measure of research quality do not answer the essential question: What do citations mean? They gather large amounts of data about citation counts, process the data in order to derive statistics, and then assert the resulting assessment process is "objective". Yet it is the *interpretation* of the statistics that leads to assessment, and the interpretation relies on the *meaning* of citations, which is quite subjective.

In the literature promoting this approach, it is surprisingly difficult to find clear statements about the meaning of citations.

> *"The concept behind citation indexing is fundamentally simple. By recognizing that the value of information is determined by those who use it, what better way to measure the quality of the work than by measuring the impact it makes on the community at large. The widest possible population within the scholarly community (i.e. anyone who uses or cites the source material) determines the influence or impact of the idea and its originator on our body of knowledge." [THOMPSON: HISTORY]*

> *"Although quantifying the quality of individual scientists is difficult, the general view is that it is better to publish more than less and that the citation count of a paper (relative to citation habits in the field) is a useful measure of it quality." [Lehman-Jackson-Lautrup 2006, p. 1003]*

> *"Citation frequency reflects a journal's value and the use made of it ... " [Garfield 1972, p. 535]*

> *"When a physician or a biomedical researcher cites a journal article, it indicates that the cited journal has influenced him or her in some*

manner." [Garfield 1987, p. 7] "Citations are an acknowledgement of intellectual debt." [THOMPSON: FIFTY YEARS]

The relevant terms are "quality", "value", "influence", and "intellectual debt". The term "impact" has become the generic word used to assign meaning to citations – a term that first arose in a short paper written in 1955 by Eugene Garfield to promote the idea of creating a citation index. He wrote:

> *"Thus, in the case of a highly significant article, the citation index has a quantitative value, for it may help the historian to measure the influence of the article – that is, its 'impact factor."' [Garfield 1955, p. 3]*

It is fairly clear that here, as elsewhere, the term "impact factor" is intended to suggest that the citing paper has been "built upon" the work of the cited – that citations are the mechanism by which research propagates itself forward.

There is a rich literature about the actual meaning of citations that suggests citations are more complicated than these vague statements lead us to believe. For example, in their 1983 paper on assessing research, Martin and Irvine write:

> *"Underlying all these problems with the use of citations as a measure of quality is our ignorance of the reasons why authors cite particular pieces of work and not others. The problems described above ...Simple citation analysis presupposes a highly rational model of reference giving, in which citations are held to reflect primarily scientific appreciation of previous work of high quality or importance, and potential citers all have the same chance to cite particular papers... " [Martin-Irvine 1983, p. 69]*

In her 1988 paper on the meaning of citations [Cozzens 1989], Cozzens asserts that citations are the result of two systems underlying the conduct of scientific publication, one a "reward" system and the other "rhetorical." The first kind have the meaning most often associated with a citation – an acknowledgment that the citing paper has "intellectual debt" to the cited. The second, however, have a meaning quite different – a reference to a previous paper that explains some result, perhaps not a result statistics are not nearly as of the cited author at all. Such rhetorical citations are merely a way to carry on a scientific conversation, not establish intellectual indebtedness. Of course, in some cases, a citation can have both meanings.

The meaning of citations is not simple and citation-based "objective" as proponents assert.

Cozzens makes the observation that *most* citations are rhetorical. This is confirmed by the experience of most practicing mathematicians. (In the *Math Reviews* citations database, for example, nearly 30% of the more than 3 million citations are to books and *not* to research articles in journals.) Why is this important? Because unlike "reward" citations, which tend to refer to seminal papers, the choice of which paper to cite rhetorically depends on many factors – the prestige of the cited author (the "halo" effect), the relationship of the citing and cited authors, the availability of the journal (Are open access journals more likely to be cited?), the convenience of referencing several results from a single paper, and so forth. Few of these factors are directly related to the "quality" of the cited paper.

Even when citations are "reward" citations, they can reflect a variety of motives, including "currency, negative credit, operational Information, persuasiveness, positive credit, reader alert, and social consensus". [Brooks 1996] In most cases, citations were motivated by more than one of these. Some notable results can suffer the "obliteration" effect, immediately being incorporated into the work of others, which then serves as the basis for further citations. Other citations are not rewards for outstanding research, but rather warnings about flawed results or thinking. The present report provides many examples of such "warning" citations.

The sociology of citations is a complex subject – one that is beyond the scope of this report. Even this cursory discussion, however, shows that the meaning of citations is not simple and that citation-based statistics are not nearly as "objective" as proponents assert.

Some might argue that the meaning of citations is immaterial because citation-based statistics are highly correlated with some other measure of research quality (such as peer review). For example, the *Evidence* report mentioned earlier argues that citation-statistics can (and should) replace other forms of evaluation because of this correlation:

> *"Evidence has argued that bibliometric techniques can create indicators of research quality that are congruent with researcher perception." [Evidence Report 2007, p. 9]*

The conclusion seems to be that citation-based statistics, regardless of their precise meaning, should replace other methods of assessment, because they often agree with them. Aside from the circularity of this argument, the fallacy of such reasoning is easy to see.

6 Using statistics wisely

The zealous over-reliance on objective metrics (statistics) to assess research is neither a new nor an isolated phenomenon. It is eloquently described in the 2001 popular book, *Damned lies and statistics*, written by the sociologist Joel Best:

"There are cultures in which people believe that some objects have magical powers; anthropologists call these objects fetishes. In our society, statistics are a sort of fetish. We tend to regard statistics as though they are magical, as though they are more than mere numbers. We treat them as powerful representations of the truth; we act as though they distill the complexity and confusion of reality into simple facts. We use statistics to convert complicated social problems into more easily understood estimates, percentages, and rates. Statistics direct our concern; they show us what we ought to worry about and how much we ought to worry. In a sense, the social problem becomes the statistic and, because we treat statistics as true and incontrovertible, they achieve a kind of fetish-like, magical control over how we view social problems. We think of statistics as facts that we discover, not numbers we create." [Best 2001, p 160]

This mystical belief in the magic of citation statistics can be found throughout the documentation for research assessment exercises, both national and institutional. It can also be found in the work of those promoting the h-index and its variants.

This attitude is also evident in recent attempts to improve on the impact factor using more sophisticated mathematical algorithms, including page rank algorithms, to analyze citations. ([Bergstrom 2007], [Stringer-Sales-Pardo-Nunes 2008]) Their proponents make claims about their efficacy that are unjustified by the analysis and difficult to assess. Because they are based on more complicated calculations, the (often hidden) assumptions behind them are not easy for most people to discern.[7] We are meant to treat the numbers and rankings with awe – as truths rather than creations.

If one consults with doctors when practicing medicine, surely one ought to consult with statisticians when practicing statistics.

[7]The algorithm in [Bergstrom 2007] uses a page rank algorithm to give each citation a weight, and then computes an "impact factor" by using the weighted averages for citations. Page rank algorithms have merit because they take into account the "value" of citations. On the other hand, their complexity can be dangerous because the final results are harder to understand. In this case, all "sel-fcitations" are discarded – that is, all citations from articles in a given journal *J* to articles published in *J* during the preceding five years are discarded. These are not "self-citations" in any normal sense of the word, and a glance at some data from the Math Reviews Citations database suggests that this discards roughly one third of all citations.

The algorithm in [Stringer-et al. 2008] is interesting, in part because it attempts to address the differing timescales for citations as well as the issue of comparing randomly selected papers in one journal with those from another. Again, the complexity of the algorithms makes it hard for most people to evaluate their results. One notable hypothesis is slipped into the paper on page 2: "Our first assumption is that the papers published in journal *J* have a normal distribution of 'quality'. . . " This seems to contradict common experience.

Research is not the first publicly funded activity to come under scrutiny, and over the past decades people have tried to carry out quantitative performance assessments of everything from educational systems (schools) to healthcare (hospitals and even individual surgeons). In some cases, statisticians have stepped in to advise those doing the measuring about sensible metrics and the proper use of statistics. If one consults with doctors when practicing medicine, surely one ought to consult with (and heed the advice of) statisticians when practicing statistics. Two excellent examples can be found in [Bird 2005] and [Goldstein-Spiegelhalter 1996]. While they each deal with performance assessment of things other than research – public sector performance monitoring in the first and healthcare/education in the second – each provides insight about the sensible use of statistics in assessing research.

The paper by Goldstein and Spiegelhalter in particular deals with the use of League Tables (rankings) based on simple numbers (for example, student achievements or medical outcomes), and it is particularly relevant to assessing research by ranking journals, papers, or authors using citation statistics. In their paper, the authors outline a threepart framework for any performance assessment:

Data

> *"No amount of fancy statistical footwork will overcome basic inadequacies in either the* appropriateness *or the* integrity *of the data collected." [Goldstein-Spiegelhalter 1996, p. 389]*

This is an important observation for citation-based performance assessment. The impact factor, for example, is based on a subset of data, which includes only those journals selected by *Thompson Scientific*. (We note that the impact factor itself is the major part of the selection criterion.) Some have questioned the integrity of this data [Rossner-Van Epps-Hill 2007]. Others point out that other data sets might be more complete. [Meho-Yang 2007] Several groups have pushed the idea of using Google Scholar to implement citation-based statistics, such as the h-index, but the data contained in Google Scholar is often inaccurate (since things like author names are automatically extracted from web postings). Citation statistics for individual scientists are sometimes difficult to obtain because authors are not uniquely identified, and in some settings and certain countries, this can be an enormous impediment to assembling accurate citation data. The particular collection of data one uses for citation analysis is frequently overlooked. One is likely to draw faulty conclusions from statistics based on faulty data.

Statistical Analysis and Presentation

> *"We shall pay particular attention to the specification of an appropriate statistical* model*, the crucial importance of uncertainty in the presentation of all results, techniques for adjustment of outcomes for confounding factors and finally the extent to which any reliance may be placed on explicit rankings." [Goldstein-Spiegelhalter 1996, p. 390]*

As we have written previously, in most cases in which citation statistics are used to rank papers, people, and programs, no specific model is specified in advance. Instead, the data itself suggests a model, which is often vague. A circular process seems to rank objects higher because they are ranked higher (in the database). There is frequently scant attention to uncertainty in *any* of these rankings, and little analysis of how that uncertainty (for example, annual variations in the impact factor) would affect the rankings. Finally, confounding factors (for example, the particular discipline, the type of articles a journal publishes, whether a particular scientist is an experimentalist or theoretician) are frequently ignored in such rankings, especially when carried out in national performance assessments.

Interpretation and Impact

> *"The comparisons discussed in this paper are of great public interest, and this is clearly an area where careful attention to limitations is both vital and likely to be ignored. Whether adjusted outcomes are in any way valid measures of institutional 'quality' is one issue, while analysts should also be aware of the potential effect of the results in terms of future behavioural changes by institutions and individuals seeking to improve their subsequent 'ranking'." [Goldstein-Spiegelhalter 1996, p. 390]*

The assessment of research is *also* of great public interest. For an individual scientist, an assessment can have profound and long-term effects on one's career; for a department, it can change prospects for success far into the future; for disciplines, a collection of assessments can make the difference between thriving and languishing. For a task so important, surely one should understand both the validity and the limitations of the tools being used to carry it out. To what extent do citations measure the quality of research? Citation counts seem to be correlated with quality, and there is an intuitive understanding that high-quality articles are highly-cited. But as explained above, some articles, especially in some disciplines, are highly-cited for reasons other than high quality, and it does not follow that highly-cited articles are necessarily high quality. The precise interpretation of rankings based on citation statistics needs to be better understood. In addition, if citation statistics play a central role in research assessment, it is clear that authors, editors, and even publishers will find ways to manipulate the system to their advantage. [Macdonald-Kam 2007] The longterm implications of this are unclear and unstudied.

The article by Goldstein and Spiegelhalter is valuable to read today because it makes clear that the over reliance on simpleminded statistics in research assessment is not an isolated problem. Governments, institutions, and individuals have struggled with similar problems in the past in other contexts, and they have found ways to better understand the statistical tools and to augment them with other means of assessment. Goldstein and Spiegelhalter end their paper with a positive statement of hope:

> *"Finally, although we have been generally critical of many current attempts to provide judgments about institutions, we do not wish to give the impression that we believe that all such comparisons are necessarily flawed. It seems to us that the comparison of institutions and the attempt to understand why institutions differ is an extremely important activity and is best carried out in a spirit of collaboration rather than confrontation. It is perhaps the only sure method for obtaining objectively based information which can lead to understanding and ultimately result in improvements.* The real problem with the simplistic procedures which we have set out to criticize is that they distract both attention and resources from this worthier aim.*" [Goldstein-Spiegelhalter 1996, p. 406]*

It would be hard to find a better statement to express the goals that should be shared by everyone involved in the assessment of research.

References

1. Adler, Robert. 2007. The impact of impact factors. *IMS Bulletin*, Vol. 36, No. 5, p. 4. *http://bulletin.imstat.org/pdf/36/5*
2. Amin, M.; Mabe, M. 2000. Impact factor: use and abuse. *Perspectives in Publishing*, No. 1, October, pp. 16. *http://www.elsevier.com/framework_editors/pdfs/ Perspectives1.pdf*
3. Batista, Pablo Diniz; Campiteli, Monica Guimaraes; Kinouchi, Osame; Martinez, Alexandre Souto. 2005. Universal behavior of a research productivity index. arXiv:physics, v1, pp. 1–5. *arXiv:physics/0510142v1*
4. Batista, Pablo Diniz; Campiteli, Monica Guimaraes; Kinouchi, Osame. 2006. Is it possible to compare researchers with different scientific interests?. *Scientometrics*, Vol. 68, No. 1, pp. 179–189. *http://dx.doi.org/10.1007/s11192-006-0090-4*
5. Bergstrom, Carl. Eigenfactor: measuring the value and prestige of scholarly journals. *College & Research Libraries News*, Vol. 68, No. 5, May 2007 *http://www.ala.org/ala/acrl/acrlpubs/crlnews/backissues2007/may07/eigenfactor.cfm* (See also *http://www.eigenfactor.org/methods.pdf*.)

6. Best, Joel. 2001. Damned lies and statistics: untangling the numbers from the media, politicians, and activists. University of California Press, Berkeley.
7. Bird, Sheila; et al. 2005. Performance indicators: good, bad, and ugly; Report of a working party on performance monitoring in the public services. *J. R. Statist. Soc. A* (2005), 168, Part 1, pp. 1–27. *http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-985X.2004.00333.x*
8. Brooks, Terrence. 1986. Evidence of complex citer motivations. *Journal of the American Society for Information Science*, Vol. 37, No. 1, pp. 34–36, 1986. *http://dx.doi.org/10.1002/asi.4630370106*
9. Carey, Alan L.; Cowling, Michael G.; Taylor, Peter G. 2007. Assessing research in the mathematical sciences. *Gazette of the Australian Math Society*, Vol. 34, No. 2, May, pp. 84–89. *http://www.austms.org.au/Publ/Gazette/2007/May07/084CommsCarey.pdf*
10. Cozzens, Susan E. 1989. What do citations count? The rhetoric-first model. *Scientometrics*, Vol. 15, Nos 5-6, (1989), pp. 437–447. *http://dx.doi.org/10.1007/BF02017064*
11. Egghe, Leo. 2006. Theory and practice of the g-index. *Scientometrics*, vol. 69, No. 1, pp. 131–152. *http://dx.doi.org/10.1007/s11192-006-0144-7*
12. Evidence Report. 2007. The use of bibliometrics to measure research quality in the UK higher education system. (A report produced for the Research Policy Committee of Universities, UK, by Evidence Ltd., a company specializing in research performance analysis and interpretation. Evidence Ltd. has "strategic alliance" with Thompson Scientific.). *http://bookshop.universitiesuk.ac.uk/downloads/bibliometrics.pdf*
13. Ewing, John. 2006. Measuring journals. *Notices of the AMS*, vol. 53, no. 9, pp. 1049–1053. *http://www.ams.org/notices/200609/commewing.pdf*
14. Garfield, Eugene. 1955. Citation indexes for science: A new dimension in documentation through association of ideas. *Science*, 122(3159), p. 108–11, July 1955. *http://garfield.library.upenn.edu/papers/science1955.pdf*
15. ——. 1972. Citation analysis as a tool in journal evaluation. *Science*, 178 (4060), pp. 471–479, 1972. *http://www.garfield.library.upenn.edu/essays/V1p527y196273.pdf*
16. ——. 1987. Why are the impacts of the leading medical journals so similar and yet so different? *Current Comments* #2, p. 3, January 12, 1987. *http://www.garfield.library.upenn.edu/essays/v10p007y1987.pdf*
17. ——. 1998. Long-term vs. short-term journal impact (part II). *The Scientist* 12(14):12–3 (July 6, 1998). *http://garfield.library.upenn.edu/commentaries/tsv12(14)p12y19980706.pdf*
18. ——. 2005. Agony and the ecstasy – the history and meaning of the journal impact factor. Presented at the International Congress on Peer Review and Bibliomedical Publication, Chicago, September 16, 2005. *http://garfield.library.upenn.edu/papers/jifchicago2005.pdf*
19. Goldstein, Harvey; Spiegelhalter, David J. 1996. League tables and their limitations: Statistical issues in comparisons of institutional performance. *J. R. Statist. Soc. A*, 159, No. 3. (1996), pp. 385–443. *http://links.jstor.org/sici?sici=09641998%281996%29159%3A3%3C385%3ALTATLS%3E2.0.CO%3B25*, *http://dx.doi.org/10.2307/2983325*
20. Hall, Peter. 2007. Measuring research performance in the mathematical sciences in Australian universities. *The Australian Mathematical Soc. Gazette*, Vol. 34, No. 1, pp. 26–30. *http://www.austms.org.au/Publ/Gazette/2007/Mar07/26HallMeasuring.pdf*
21. Hirsch, J. E. 2006. An index to quantify an individual's scientific research output. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 102, No. 46, pp. 16569–16573. *http://dx.doi.org/10.1073/pnas.0507655102*
22. Kinney, A. L. 2007. National scientific facilities and their science impact on nonbiomedical research. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 104, No. 46, pp. 17943–17947. *http://dx.doi.org/10.1073/pnas.0704416104*
23. Lehmann, Sune; Jackson, Andrew D.; Lautrup, Benny E. 2006. Measures for measures, *Nature*, Vol 444, No. 21, pp. 1003–1004. *http://www.nature.com/nature/journal/v444/n7122/full/4441003a.html*

24. Macdonald, Stuart; Kam, Jacqueline. 2007. Aardvark et al.: Quality journals and gamesmanship in management studies. *Journal of Information Science*, Vol. 33, pp. 702–717. *http://dx.doi.org/10.1177/0165551507077419*
25. Martin, Ben R. 1996. The use of multiple indicators in the assessment of basic research, *Scientometrics*, Vol 36, No. 3 (1996), pp. 343–362. *http://dx.doi.org/10.1007/BF02129599*
26. Martin, Ben R., Irvine, John. 1983. Assessing basic research. *Research Policy*, Vol. 12 (1983), pp. 61–90. *http://dx.doi.org/10.1016/00487333(83)90005-7*
27. Meho, Lokman; Yang, Kiduk. 2007. Impact of data sources on citation counts and rankings of LIS faculty: Web of Science vs. Scopus and Google Scholar. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, Vol. 58, No. 13, pp. 2105–2125. *http://dx.doi.org/10.1002/asi.20677*
28. Molinari, J. F., Molinari, A. 2008. A new methodology for ranking scientific institutions. To appear in *Scientometrics*. *http://imechanica.org/files/paper.pdf*
29. Monastersky, R. 2005. The number that's devouring science. *Chronicle Higher Ed*. Vol. 52, No. 8. *http://chronicle.com/free/v52/i08/08a01201.htm*
30. Rossner, Mike; Van Epps, Heather; Hill, Emma. 2007. Show me the data. *Journal of Cell Biology*, Vol. 179, No. 6, December 17, pp. 1091–1092. *http://dx.doi.org/10.1083/jcb.200711140*
31. Seglen, P. O. 1997. Why the impact factor for journals should not be used for evaluating research; *BMJ*, 314:497 (15 February). *http://www.bmj.com/cgi/content/full/314/7079/497*
32. Sidiropoulos, Antonis; Katsaros, Dimitrios; Manolopoulos, Yannis. 2006. Generalized h-index for disclosing latent facts in citation networks. V1, *arXiv:cs/0607066v1 [cs.DL]*
33. Stringer M. J.; Sales-Pardo M.; Nunes Amaral L. A. 2008. Effectiveness of journal ranking schemes as a tool for locating information. *PLoS ONE* 3(2):e1683 *http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0001683*
34. [THOMPSON: JOURNAL CITATION REPORTS]. 2007. (Thompson Scientific website) *http://scientific.thomson.com/products/jcr/*
35. [THOMPSON: SELECTION]. 2007. (Thompson Scientific website) *http://scientific.thomson.com/free/essays/selectionofmaterial/journalsselection/*
36. [THOMPSON: IMPACT FACTOR] (Thompson Scientific website) *http://scientific.thomson.com/free/essays/journalcitationreports/impactfactor/*
37. [THOMPSON: HISTORY] (Thompson Scientific website) *http://scientific.thomson.com/free/essays/citationindexing/history/*
38. [THOMPSON: FIFTY YEARS] (Thompson Scientific website) *http://scientific.thomson.com/free/essays/citationindexing/50y-citationindexing/*

This is a report from the International Mathematical Union (IMU) in cooperation with the International Council of Industrial and Applied Mathematics (ICIAM) and the Institute of Mathematical Statistics (IMS)

The authors: Joint IMU/ICIAM/IMS Committee on Quantitative Assessment of Research.

Robert Adler, Technion – Israel Institute of Technology
John Ewing (Chair), American Mathematical Society
Peter Taylor, University of Melbourne

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 208 (2008), 27–30

A Bothersome Question

Saharon Shelah
Hebrew University of Jerusalem

With this article in the style of a newspaper interview the Israeli logician Saharon Shelah aims to introduce a general audience to the joy of highly abstract mathematical problems and especially to the fascination of infinite cardinals.

The article by Martin Goldstern on page 31 contains some historical facts and technical background to Shelah's theory.

For the next issue of this newsletter we are planning a more comprehensive interview with Saharon Shelah.

Q. — Mathematics, mathematics, hasn't everything been discovered already generations ago?

A. — What an educated person knows today generally was discovered hundreds of years ago. Concerning the mathematics of the 20th century, the educated person will in general neither know what has been discovered, nor what the questions are that mathematicians are asking now. This is a pity.

It seems to be like this: the more mathematics has advanced, deepened and become more beautiful, and its use has broadened and wonderful theories and basic puzzling questions have been answered, the more it has become unknown and closed to those outside of a select few. Physicists can assume that the reader has heard about black holes, and biologists – about DNA; a mathematician would be lucky if the reader knows something about the calculus of infinitesimals, discovered/invented by Leibnitz and Newton in the 17th century. Of course, as in all claims about society there are exceptions, most notably Fermat's last theorem.

Q. — What can be "beautiful"about mathematics?

A. — Michelangelo said that he just discovers the form hidden in the marble and I can identify with him.

Q. — Perhaps you can explain what you hope to discover?

ISSN 0020-7926

A. — I'll try to explain without cheating too much. A problem I love and that has been bothering me for many years, and that many have dealt with: what are the arithmetical laws of infinite numbers.

Q. — Infinite numbers??

A. — These are numbers which measure the number of elements in infinite sets. Usually when the question is asked: how many members/elements are there in a set, the notion of the number is already clear, which isn't the case in infinite sets.

Q. — What do you mean, isn't there only one infinite number – infinity!

A. — This has no meaning if we have not defined the infinite numbers. We can know when, trying to compare two sets, there is the same number of elements even if we haven't counted them, such as, for instance, the number of living people, which equals the number of brains of living people (I will omit the obvious joke about the reader's least favorite politician). In general, two sets, say the Tribe of Simeon and the Tribe of Levi, will be considered as having the same number of elements if one can find a "matching" between the Tribe of Simeon and the Tribe of Levi – to each Simeonite will be matched one single Levite and vice versa.

In this way, numbers can be defined, even infinite numbers. Cantor, towards the end of the 19th century, discovered them. He named the smallest infinite number $\aleph_0$; this is the number of elements the set of all finite numbers has.

Q. — What can one do with them?

A. — It turns out that you can naturally define arithmetic operations: addition, multiplication and exponentiation (among all numbers, finite and infinite).

Q. — Can you explain what these operations are? For instance, addition?

A. — In giving 2 disjoint sets (in other words, without a common element), the number of elements in the union will be the sum of the number of elements. It seems that $\aleph_0 = \aleph_0 + 2$, because the number of natural numbers $(0,1,2,3,\dots)$ equals the number of integers greater than -3 (i.e., $-2,-1,0,1,2,3,4,5,\dots$), why? Because one can "match" -2 to 0, -1 to 1, 0 to 2, and in general, n to $n+2$.

Q. — Doesn't this show that everything is nonsense? It negates Aristotle's great rule "the whole is greater than the part", and therefore for all numbers a, b greater than 0, $a+b > a$.

A. — It would be unreasonable to expect that all usual rules of arithmetic will continue to hold; what's so beautiful and surprising is that many of them *do* hold, e.g. the usual equations like $(a+b)c = ac+bc$ and $(a^b)^c = a^{bc}$ (and for the "pedantic": for every numbers, a,b, we have $a=b$ or $a<b$ or $b<a$).

Q. — So surely those operations are very awkward and it's impossible to compute anything about these numbers.

A. — To the contrary, in a certain way this arithmetic is more transparent. It was discovered that the sum of two numbers where at least one of them in infinite is the maximum of the two, and it is same with products (except that $x \cdot 0 = 0$ even for infinite x):

$$\begin{array}{ll} \kappa+\lambda=\lambda & \text{for all infinite } \lambda>\kappa \\ \kappa\cdot\lambda=\lambda & \text{for all infinite } \lambda>\kappa, \text{ if } \kappa>0. \end{array}$$

If this were true for finite numbers, it would mean that $7+123=123$. Wouldn't you prefer to make computations such as this in elementary school?

Q. — If so, it's all too simple, and in effect there is actually only one infinite number that is necessarily $\aleph_0$, which would solve all the problems.

A. — The number of natural numbers is not equal to the number of real numbers (in other words, infinite decimal fractions) or what is equivalent, the number of points in the plane. This can be seen as a particular case of the following: For every number a, "$2^a > a$". Also, for every number a there is a successor, the smallest number bigger than itself, which we will call a^+, so we can define $\aleph_1$ as the successor of $\aleph_0$, the number following $\aleph_0$; $\aleph_2$ as the successor of $\aleph_1$ and we can continue to define $\aleph_n$ for any natural number n.

Q. — And that's it?

A. — No, for example, for every n there exists the first number under which there are $\aleph_n$ numbers and it is called $\aleph_{\aleph_n}$.

Q. — If addition and multiplication are so simple, then probably the power operation is not so complicated.

A. — As you recall, we have two functions which increase the (infinite) number: the successor a^+ and the power 2^a. It's extremely tempting to hope that they are actually one and the same operation, i.e., for every infinite a, $2^a = a^+$; this hypothesis is called the Generalized Continuum Hypothesis. If this hypothesis is correct, then the power operation is very simple indeed, and we would completely understand all laws of arithmetic of infinite numbers.

Q. — Of what use would this be?

A. — Whoever wants to prove general theorems on "large" infinite sets or structure, this hypothesis will be very useful.

Q. — Do mathematicians truly consider this an important problem?

A. — When Hilbert, considered the outstanding mathematician since the beginning of the 20th century, prepared a list of the most important mathematical problems, with 23 questions (this is the best known list of its kind), he chose this as question number 1 (he asked: is $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, but he meant: find all the arithmetic laws for infinite numbers).

On the other hand, the majority of mathematicians whom I have met aren't particularly interested in it. All mathematicians are in agreement among themselves as to what is correct, but not necessarily about what is important, and what is beautiful and exciting. Mathematics is an Exact Art.

Q. — Presumably, do you hope to prove the Generalized Continuum Hypothesis? Or at least to refute it? Or have you missed the boat?

A. — Too late. Gödel showed that (from the usual axioms of set theory) it's impossible to contradict it. On the other hand, Cohen proved that it's impossible to prove it. Moreover, except for the obvious monotonicity: $2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_1} \leq \ldots$ (plus a little more) there aren't actually any additional restrictions.

Q. — If this is so, then there is nothing new to discover?

A. — No, because if you look at products of infinitely many but still "few" large numbers (for instance, just $\aleph_0$ numbers), there is a lot to say. For instance, if $2^{\aleph_0}$ is any $\aleph_n$, then the product of all the $\aleph_n$'s is not large, it is smaller than $\aleph_{\aleph_4}$.

Q. — Isn't there a typographical error here? It seems to me that you are talking about infinite numbers, so why in hell does 4 appear here?

A. — That's exactly what I want to find out, and I feel like it's a basic problem, the key to the mystery of the mathematical laws of infinite numbers.

Author's address:

Saharon Shelah
The Einstein Institute of Mathematics, Faculty of Science
Hebrew University of Jerusalem
shlhetal@math.huji.ac.il

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 208 (2008), 31–45

Kardinalzahlarithmetik

Martin Goldstern

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien

Einleitung

Die Mengenlehre begann mit Cantors Beweis der Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen; schon bald darauf formulierte Cantor die „Kontinuumshypothese“ (CH), die besagt, dass es nur zwei Arten von unendlichen Teilmengen der reellen Zahlen gibt: erstens die abzählbaren, und zweitens jene, die mit dem Kontinuum (der Menge aller reellen Zahlen, oder äquivalent: mit der Potenzmenge der natürlichen Zahlen) gleichmächtig sind.

Cantor glaubte sogar, dies beweisen zu können; möglicherweise dadurch motiviert, dass diese Vermutung für abgeschlossene Mengen und sogar für beliebige Borelmengen gilt. Tatsächlich gilt für Borelmengen sogar ein viel stärkerer Satz: Jede überabzählbare Menge enthält nicht nur eine injektive Kopie des Kontinuums, sondern eine perfekte Menge und somit ein stetiges injektives Bild der Cantormenge. Diese „effektive“ Kontinuumshypothese trifft allerdings auf beliebige Mengen nicht zu;[1] sogenannte „Bernsteinmengen“ sind überabzählbar, ohne eine perfekte Menge zu enthalten.

Die verallgemeinerte Kontinuumshypothese (GCH) besagt, dass ein analoger Sachverhalt auch für größere Mengen gilt, dass es also keine Kardinalität gibt, die strikt zwischen der Kardinalität einer unendlichen Menge X und der ihrer Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ liegt, dass also jede Teilmenge der Potenzmenge von X entweder gleichmächtig mit ganz $\mathfrak{P}(X)$ ist oder gleichmächtig mit einer Teilmenge von X.

Unter Verwendung des Auswahlaxioms[2] kann man zeigen, dass es zu jeder Kardi-

[1] Hier muss schon das Auswahlaxiom verwendet werden.

[2] Als axiomatischen Hintergrund verwenden wir in diesem Artikel – wie es, ob bewusst oder unbewusst, die meisten Mathematiker tun – das in der Mengenlehre übliche Axiomensystem ZFC, die Zermelo-Fraenkel-Axiome mit Auswahlaxiom. Die Verwendung des Auswahlaxioms müsste also nie explizit erwähnt werden. An einigen Stellen erwähne ich es trotzdem, wenn mir nämlich die Notwendigkeit dieses Axioms bemerkenswert erscheint. An dieser Stelle erscheint es mir deshalb bemerkenswert, weil ohne AC die Notation κ^+ undefiniert ist oder zumindest genauer erklärt werden müsste.

ISSN 0020-7926

nalität κ eine kleinste größere Kardinalität gibt; diese nennt man κ^+. Wenn X die Kardinalität κ hat, schreibt man 2^κ für die Kardinalität der Potenzmenge von X. In dieser Notation lautet die verallgemeinerte Kontinuumshypothese also so:

GCH: *Für alle unendlichen Kardinalitäten* κ *gilt* $2^\kappa = \kappa^+$.

Die Frage nach der Größe des Kontinuums war die erste auf Hilberts berühmter Liste von 23 Problemen, die er 1900 auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris vorstellte.

Wir wissen mittlerweile, dass keine Instanz der allgemeinen Hypothese (also auch nicht CH selbst) widerlegbar oder beweisbar ist.

Aber gibt es vielleicht schwächere Rechengesetze für Kardinalzahlen, insbesondere für die Kontinuumsfunktion $\lambda \mapsto 2^\lambda$ und die Potenzfunktion $(\kappa,\lambda) \mapsto \lambda^\kappa$? Nach der Entdeckung der Forcing-Methode durch Paul Cohen (1963) gab es eine ganze Welle von Resultaten, die in Richtung „Nein“ zu deuten schienen: Die Kontinuumsfunktion kann in verschiedenen Modellen der Mengenlehre ganz verschiedene Verläufe haben und sogar fast beliebige Verläufe, wenn man sie nur auf „regulären“ Kardinalzahlen betrachtet. Erst Silvers Satz (1974) zeigte, dass diese Unabhängigkeitsresultate nicht zufällig auf die Potenzen regulärer Kardinalzahlen beschränkt waren: für singuläre Kardinalzahlen κ mit überabzählbarer Kofinalität[3] kann man zum Beispiel aus der verallgemeinerten Kontinuumshypothese für Kardinalzahlen $< \kappa$ auch auf die Gültigkeit der Kontinuumshypothese an der Stelle κ schließen.

Die von Saharon Shelah entwickelte „pcf-Theorie“ lässt sich einerseits als weitreichende Verallgemeinerung von Silvers Satz verstehen, die erstens auch aus schwächeren Voraussetzungen an die Kontinuumsfunktion unterhalb von κ Schranken für den Wert von 2^κ finden kann und zweitens auch für singuläre Kardinalzahlen κ mit abzählbarer Kofinalität funktioniert.

Andererseits aber deuten Shelahs Resultate darauf hin, dass ein neuer Standpunkt fruchtbringender sein könnte: in der Kardinalzahlarithmetik im Shelahschen Sinn stehen nicht *Kardinalitäten* wie 2^κ oder λ^κ im Mittelpunkt, sondern *Kofinalitäten*; gemessen wird also nicht die Größe einer nackten, strukturlosen Menge, sondern eine Art „Höhe“ von diversen (miteinander eng verwandten) natürlich auftretenden partiellen Ordnungen. Statt $\kappa^{\aleph_0}$, der Anzahl der Funktionen von den natürlichen Zahlen in eine Menge der Größe κ, interessiert man sich für das Ideal $\binom{\kappa}{\aleph_0}$ aller abzählbaren Teilmengen einer Menge der Größe κ; dieses wird durch die Inklusionsrelation natürlich geordnet.

[3]Eine Kardinalität κ hat überabzählbare Kofinalität, wenn man eine Menge der Größe κ nicht als Vereinigung von abzählbar vielen Mengen kleinerer Kardinalität schreiben kann. Die unten definierte Kardinalzahl $\aleph_\omega$ ist überabzählbar, hat aber abzählbare Kofinalität.

1 Kardinal- und Ordinalzahlen

Blicke doch auf zum Himmel,
und zähle die Sterne,
wenn du sie zählen kannst!
– Genesis 15,5

In der naiven Mengenlehre ist eine Kardinalität eine Klasse von gleichmächtigen Mengen. Praktischer ist es, in jeder Äquivalenzklasse einen (kanonischen) Repräsentanten zu finden; diese Repräsentanten nennen wir Kardinalzahlen. Der Repräsentant der Klasse aller 2-elementigen Mengen ist die Menge $\{0,1\}$, die wir der Einfachheit halber „2“ nennen; der Repräsentant der Klasse aller abzählbaren Mengen ist die Menge $\omega = \{0,1,2,\dots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen. In seiner Rolle als Kardinalzahl nennen wir ω aber meistens $\aleph_0$; der Index 0 deutet an, dass es sich um die kleinste unendliche Kardinalzahl handelt: jede unendliche Menge enthält nämlich eine injektive Kopie von ω, ist also mächtiger als ω, oder gleichmächtig (also abzählbar).

Man kann zeigen, dass es eine „kleinste“ Menge ω_1 gibt, die nicht abzählbar ist (also „überabzählbar“). D.h.: jede überabzählbare Menge enthält eine injektive Kopie von ω_1.

1.1 Wohlordnungen

Der kanonische Repräsentant in der Klasse aller abzählbar unendlichen Mengen ist die Menge der natürlichen Zahlen; wir fassen sie aber nicht als strukturlose Menge auf, sondern sehen sie immer zusammen mit der üblichen linearen Ordnung. Diese Ordnung erlaubt *induktive* Konstruktionen; in diesen Konstruktionen ist es erstens wichtig, dass es immer einen „nächsten“ Schritt gibt, und zweitens oft sehr praktisch, dass kein Schritt auf unendlich viele Schritte zurückschauen muss (während am Ende der Konstruktion sehr wohl ein unendliches Objekt konstruiert worden ist).

Eine ähnliche Situation finden wir bei ω_1, der kanonischen Menge der Kardinalität $\aleph_1$, vor: ω_1 trägt eine natürliche lineare Ordnung, in der jedes Element einen direkten Nachfolger hat, und jedes Element nur abzählbar viele Vorgänger hat, während die ganze Menge ω_1 sehr wohl überabzählbar ist.

Wozu Wohlordnungen?

Wohlordnungen lassen sich als Hilfsmittel zum Verständnis von Kardinalzahlen sehen, aber auch als Hilfsmittel für „lange“ Konstruktionen auf beliebigen Mengen.

Jede Menge lässt sich wohlordnen; üblicherweise haben die Wohlordnungen einer Menge aber nicht mit der Struktur zu tun (z.B. gibt es keine „schöne“ Wohlordnung der reellen Zahlen).

Beispiel: Für unendliche Mengen A gilt $A \approx A \times A$, d.h., A und $A \times A$ sind gleichmächtig.

Diesen Satz kann man auf ganz verschiedene Arten beweisen. Ein Beweis mit Hilfe des Zornschen Lemmas ist zwar kurz, aber intransparent; wenn aber eine Wohlordnung W_1 von A bekannt ist, kann man explizit eine Wohlordnung W_2 von $A \times A$ konstruieren, sodass $(A \times A, W_2)$ zu (A, W_1) isomorph ist, daher erst recht gleichmächtig.

1.2 $\aleph_2$, $\aleph_\omega$, und so weiter

$\aleph_2$ ist die kleinste Kardinalzahl $> \aleph_1$, analog sind $\aleph_3$, etc. definiert.

$\aleph_\omega$ ist die kleinste Kardinalzahl, die größer als jedes $\aleph_n$ ist, und $\aleph_{\omega+1}$ ist die nächste.

Für jede natürliche Zahl n ist ω_n der kanonische Repräsentant der Klasse aller Mengen, die $\aleph_n$ Elemente haben. ω_n ist so wohlgeordnet, dass jedes Element von ω_n nur weniger als $\aleph_n$ viele Vorgänger hat.[4]

Nach $\aleph_\omega$ folgen $\aleph_{\omega+1}$, $\aleph_{\omega+2}$, etc. $\aleph_{\omega+\omega}$ ist die erste Kardinalzahl, die größer als alle $\aleph_{\omega+n}$ ist. Alle in diesem Absatz genannten Kardinalzahlen λ haben die Eigenschaft, dass es abzählbar unendlich viele Kardinalzahlen gibt, die kleiner als λ sind.

Die erste Kardinalzahl λ mit der Eigenschaft, dass überabzählbar viele Kardinalzahlen kleiner als λ sind, heißt $\aleph_{\omega_1}$. Die Menge der Kardinalzahlen $< \aleph_{\omega_1}$ ist, als lineare Ordnung betrachtet, isomorph zur Ordnung ω_1.

Die Kardinalzahl $\aleph_{\omega_4}$ wird gegen Ende dieses Artikels noch eine Rolle spielen; sie ist die erste Kardinalzahl mit der Eigenschaft, dass es $\aleph_4$ viele Kardinalzahlen gibt, die kleiner sind. (Diese sind so wie ω_4 geordnet).

Wo liegt nun auf dieser Skala das Kontinuum? Die Kontinuumshypothese sagt: bei $\aleph_1$. Aber auch $\aleph_2$ oder $\aleph_{2008}$ sind genauso gute Kandidaten, jedenfalls aus der Sicht des formalen Systems ZFC. Der Satz von König besagt, dass $\aleph_\omega$ sicher nicht der Wert des Kontinuums sein kann.[5] $\aleph_{\omega+1}$ oder $\aleph_{\omega_1}$ sind aber wieder möglich.

Vereinbarung: Im Folgenden stehen κ, λ, μ immer für unendliche Kardinalzahlen.

[4] Für $n > 0$ heißt dies: „höchstens $\aleph_{n-1}$ viele“; für $n = 0$ heißt dies „nur endlich viele“.

[5] Ebensowenig wie $\aleph_{\omega+\omega}$ oder wie jede andere Kardinalzahl, die ein echtes Supremum einer abzählbaren Menge von Kardinalzahlen ist.

1.3 Warum Kardinalzahlen?

Eine triviale Anwendung von Kardinalzahlen sind Abzählargumente; wenn man weiß, dass es nur κ viele Objekte mit der Eigenschaft X gibt, aber $\lambda > \kappa$ viele mit der Eigenschaft Y, dann kann man schließen, dass es ein Objekt mit der Eigenschaft $(\neg X) \wedge Y$ gibt, ohne dieses Objekt explizit zu konstruieren.

Eine möglicherweise untypische Anwendung dieses Arguments ist Cantors Beweis der Existenz transzendenter Zahlen; diese folgt daraus, dass es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt, aber überabzählbar viele reelle Zahlen.[6]

Die Frage nach der Kardinalität einer Menge ist aber vor allem eine erste Testfrage für Strukturverständnis. Statt „Wie sehen alle X aus?" (wobei X= Teilmenge von $\mathbb{N}$, oder X= separabler Hilbertraum, oder X= Lösungen des Gleichungssystems P, etc.) fragen wir zuerst nur: „Wie viele X gibt es?" Typischerweise muss man für die Beantwortung dieser Frage verstehen, wie alle X (oder zumindest recht viele X) aussehen – insbesondere dann, wenn es relativ wenige solche Strukturen gibt.

(Einen ähnlichen Zusammenhang gibt es auch in der endlichen Kombinatorik: um zu verstehen, wie viele Objekte es gibt, die eine bestimmte Eigenschaft haben, muss man die betrachteten Objekte systematisch klassifizieren.)

In den folgenden Abschnitten werden wir sehen, dass Fragen nach der Kardinalität einer Menge, wie λ^κ oder $\binom{\lambda}{\kappa}$ (der Menge aller Funktionen von κ nach λ, bzw. der Menge aller Teilmengen von λ der Größe κ) immer wieder nur durch Verständnis der Struktur dieser Menge beantwortet werden können.

1.4 Reguläre und singuläre Kardinalitäten

Eine (unendliche) Kardinalität κ heißt „singulär", wenn man eine Menge A der Größe κ als Vereinigung von *wenigen kleinen* Mengen schreiben kann, wobei „wenig" und „klein" als „$< \kappa$" zu lesen ist. Mit anderen Worten, wenn es Mengen I, $(A_i : i \in I)$ gibt, die

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i \qquad |I| < \kappa \qquad (\forall i \in I)\ |A_i| < \kappa$$

erfüllen. Die kleinstmögliche Kardinalität $|I|$, die in so einer Darstellung auftreten kann, heißt *Kofinalität* von κ, oder kurz $\mathrm{cf}(\kappa)$.

Andere Kardinalzahlen heißen „regulär". κ ist also regulär, wenn $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$ gilt.

[6] Dieser Beweis ist insofern untypisch, als Cantors Argument ein direkter und kein indirekter Beweis ist; Cantor gibt eine explizite Aufzählung aller algebraischen Zahlen an und zeigt, wie man aus einer Aufzählung irgendeiner Menge eine Zahl konstruieren kann, die nicht in dieser Menge liegt. Diese Konstruktion ist effektiv (wenn auch nicht effizient).

Zum Beispiel ist $\aleph_0$ regulär, weil die Vereinigung von endlich vielen endlichen Mengen wieder endlich ist. Ebenso ist $\aleph_1$ regulär; im Kontext von $\aleph_1$ heißt „klein“ nämlich „höchstens abzählbar“, und die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist sicher[7] wiederum abzählbar.

$\aleph_\omega$ ist das erste Beispiel einer singulären Kardinalzahl; die Kofinalität von $\aleph_\omega$ ist $\aleph_0$, weil die abzählbare Vereinigung

$$A_0 \cup A_1 \cup \cdots \qquad\qquad (\forall n \in \omega)\ |A_n| = \aleph_n$$

Kardinalität $\aleph_\omega$ hat.

1.5 Einfache Rechenoperationen auf Kardinalzahlen

The four branches of arithmetic:
Ambition, distraction,
uglification and derision.
– Lewis Caroll

Die Summe zweier Kardinalzahlen κ, μ ist als Kardinalität einer disjunkten Vereinigung $A \cup B$, mit $|A| = \kappa$, $|B| = \mu$ definiert. Das Produkt ist als Kardinalität des kartesischen Produktes $\kappa \times \mu$ definiert: $\kappa \cdot \mu = |\kappa \times \mu|$. [8]

Summe und Produkt von zwei unendlichen Kardinalzahlen lassen sich sehr leicht berechnen, es gilt nämlich

$$(\forall \kappa, \mu)\ \kappa + \mu = \kappa \cdot \mu = \max(\kappa, \mu)$$

Die unendliche Summe $\sum_{i \in I} \kappa_i$ ist als Kardinalität einer disjunkten Vereinigung $\bigcup_{i \in I} A_i$ mit $|A_i| = \kappa_i$ definiert; wenn alle $\kappa_i > 0$ sind, so ist $\sum_{i \in I} \kappa_i = |I| \cdot \sup\{\kappa_i : i \in I\}$.

Das unendliche Produkt $\prod_{i \in I} \kappa_i$ ist als Kardinalität des kartesischen Produktes $\prod_{i \in I} A_i = \{f : \mathrm{dom}(f) = I, (\forall i)\, f(i) \in A_i\}$ mit $|A_i| = \kappa_i$ definiert. In der Praxis[9] ergibt sich für so ein Produkt immer der Wert $(\sup\{\kappa_i : i \in I\})^{|I|}$.

---

[7] Dass hier das Auswahlaxiom verwendet wird, stört uns natürlich nicht, soll aber erwähnt werden.

[8] Man beachte, dass κ und μ hier eine Doppelrolle spielen: auf der linken Seite der Gleichung steht eine Rechenoperation auf den Kardinalzahlen, die man hier auch als abstrakte Äquivalenzklassen von gleichmächtigen Mengen lesen kann; auf der rechten Seite sind κ und μ zwei konkrete Mengen, nämlich Elemente ihrer Gleichmächtigkeitsklasse, und $\kappa \times \mu$ ist die Menge aller Paare (i, j) mit $i \in \kappa$, $j \in \mu$.

[9] Genauer: Wenn I selbst eine Kardinalzahl ist, und die Folge der κ_i schwach monoton wachsend ist; auf diesen Fall kann man beliebige Produkte zurückführen. In diesem Artikel betrachten wir nur Produkte der Form $\prod_{n \in \omega} \kappa_n$ mit $\kappa_0 \leq \kappa_1 \leq \cdots$.

1.6 Exponentiation

The exponential function:
This is the most important function
in mathematics.
– Walter Rudin[10]

Als Spezialfall des Produktes ergibt sich wie in der endlichen Arithmetik die Potenz: λ^κ ist Anzahl der Abbildungen von einer κ-großen Menge in eine λ-große, oder kürzer: Anzahl der Abbildungen von κ nach λ.

Zum Beispiel ist $2^{\aleph_0}$ die Kardinalität der Menge der Funktionen von ω nach 2, somit auch die Kardinalität der Potenzmenge von ω. Weitere Mengen dieser Kardinalität sind:

- $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen, da man durch eine leichte Modifikation der binären Entwicklungen eine explizite Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{P}(\omega)$ angeben kann.
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, da man eine explizite Bijektion zwischen der Geraden und der Ebene angeben kann.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die Menge aller Folgen reeller Zahlen.
- $C(\mathbb{R})$, die Menge aller reellwertigen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.
- Jeder überabzählbare vollständige separable metrische Raum.

Allgemein ist 2^λ die Kardinalität

- der Potenzmenge von λ;
- der Menge $\binom{\lambda}{\lambda}$ aller λ-großen Teilmengen von λ sowie
- der Menge λ^λ aller Funktionen von λ nach λ.

Wir verwenden die Schreibweise λ^κ sowohl für die *Menge* aller Abbildungen von κ nach λ, als auch für die Kardinalität dieser Menge. Der Kontext macht immer klar, was gemeint ist: Im Zusammenhang $\lambda^\kappa \leq \cdots$ ist die Kardinalität gemeint, im Zusammenhang $\lambda^\kappa \subseteq \cdots$ die Menge. Analog verwenden wir die Notation $\prod_{i \in I} \lambda_i$ sowohl für das kartesische Produkt (also eine gewisse Menge von Funktionen mit Definitionsbereich I) als auch für die Kardinalität dieser Menge.

[10] Die Idee, Walter Rudins Zitat aus dem Kontext der Analysis zu reißen und es – vielleicht auch gegen seine Überzeugung – hier anzuwenden, stammt nicht von mir; ich kann mich aber an die Quelle nicht mehr erinnern.

2 Unabhängigkeitsresultate

Die Kontinuumshypothese CH besagt, dass es nur zwei Mächtigkeiten von unendlichen Teilmengen der reellen Zahlen gibt, d.h.:

$$\mathrm{CH}: \ (\forall A \subseteq \mathbb{R})\,(A \text{ endlich } \vee A \approx \mathbb{N} \vee A \approx \mathbb{R}).$$

Die verallgemeinerte Kontinuumshypothese GCH besagt, dass sich dieses Verhalten bei jeder anderen unendlichen Kardinalität wiederholt: Die Kardinalität der Potenzmenge von A ist die kleinste Kardinalität, die größer als die von A ist; jede Teilmenge von $\mathfrak{P}(A)$ ist entweder zu ganz $\mathfrak{P}(A)$ oder zu einer Teilmenge von A gleichmächtig.

Gödel und Cohen haben gezeigt, dass die üblichen Axiome der Mengenlehre nicht ausreichen, um diese Frage zu beantworten. Mithilfe von Cohens Forcing-Methode haben Solovay und Easton gezeigt, dass für reguläre Kardinalzahlen κ nicht viel über 2^κ ausgesagt werden kann: Zwar ist die Kontinuumsfunktion $\kappa \mapsto 2^\kappa$ schwach[11] monoton, und der Satz von König besagt, dass die Kofinalität von 2^κ immer $> \kappa$ sein muss (was insbesondere die Gleichung $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$ ausschließt). Darüber hinaus lassen sich aber keine Rechenregeln für die Kontinuumsfunktion beweisen, da jede mögliche Funktion auf den regulären Kardinalzahlen, die die Monotonie und Königs Kofinalitätsbedingung erfüllt, in einem geeigneten Modell die Kontinuumsfunktion sein kann.

Jack Silver hat zum Erstaunen der Mengentheoretiker gezeigt, dass für singuläre Kardinalzahlen λ mit überabzählbarer Kofinalität der Wert von 2^λ stark vom Verlauf der Kontinuumsfunktion unterhalb von λ abhängt, d.h. von der Funktion $\mu \mapsto 2^\mu$ für $\mu < \lambda$. Ein Spezialfall seines Satzes lautet:

> Wenn λ singulär mit überabzählbarer Kofinalität ist, und die verallgemeinerte Kontinuumshypothese für alle (oder sogar schon für „viele“) $\mu < \lambda$ gilt, dann gilt sie auch für λ selbst:
>
> $$\left[\aleph_0 < \mathrm{cf}(\lambda) < \lambda \wedge (\forall \mu < \lambda)\, 2^\mu = \mu^+\right] \ \Rightarrow\ 2^\lambda = \lambda^+.$$

3 Kleine Exponenten: $\lambda^{\aleph_0}$ statt 2^λ

Für singuläre Kardinalzahlen κ kann man 2^κ auch als eine Potenz mit kleinem Exponenten darstellen; wir betrachten aus didaktischen Gründen hier den Fall $2^{\aleph_\omega}$: Es gilt $\aleph_\omega = \sum_{n\in\omega} \aleph_n$; die Gleichung

$$2^{\sum_{n\in\omega} \aleph_n} = \prod_{n\in\omega} 2^{\aleph_n}$$

[11] Nicht einmal die strenge Monotonie kann bewiesen werden.

kann mithilfe einer expliziten Bijektion zwischen den zugrunde liegenden Mengen bewiesen werden.

Für das Produkt $\prod_{n\in\omega} 2^{\aleph_n}$ gibt es nun 2 Möglichkeiten:

- Die Folge $(2^{\aleph_n} : n \in \omega)$ ist schließlich konstant (mit einem Wert $2^{\aleph_{n_0}} = \lambda$, der natürlich $> \aleph_\omega$ sein muss).
  Dann ist $\prod_{n\in\omega} 2^{\aleph_n} = \lambda^{\aleph_0} = (2^{\aleph_{n_0}})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_{n_0}} = \lambda$.
- Die Folge $(2^{\aleph_n} : n \in \omega)$ hat ein echtes Supremum λ (d.h. $2^{\aleph_n} < \lambda$ für alle n). In diesem Fall hat λ Kofinalität ω, und es ist

$$\prod_{n\in\omega} 2^{\aleph_n} = \lambda^{\aleph_0} = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}.$$

Ähnliche Rechnungen können für andere singuläre Kardinalzahlen durchgeführt werden. Es ergibt sich, dass die Exponentialfunktion $\kappa \mapsto 2^\kappa$ zwei sehr unterschiedliche Verhaltensweisen hat:

1. Für reguläre Kardinalzahlen κ kann man über den Wert 2^κ fast nichts beweisen, auch nicht, wenn man die Werte der Exponentialfunktion unterhalb von κ schon kennt. (Satz von Easton).
2. Für singuläre Kardinalzahlen κ lässt sich 2^κ als Wert $\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}$ für ein geeignetes λ berechnen, welches sich aus den Werten der Kontinuumsfunktion unterhalb von κ berechnen lässt; oft[12] gilt sogar $\lambda = \kappa$.

Wir interessieren uns jetzt also für den Wert von $\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}$ für singuläre[13] Kardinalzahlen λ. Im Folgenden werden wir zur Vereinfachung der Notation nur den (allerdings sehr typischen) Spezialfall $\lambda = \aleph_\omega$ betrachten. Weiters werden wir gelegentlich zur Vereinfachung der Sachlage annehmen, dass $2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ für alle $n \in \omega$ (oder zumindest für $n = 0$) gilt.

Ich erinnere daran, dass $\aleph_\omega$ die erste unendliche Kardinalzahl mit unendlich vielen Vorgängern (nämlich $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$) ist. $\aleph_\omega^{\mathrm{cf}(\aleph_\omega)} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$ ist nun die Kardinalität der folgenden Mengen:

1. $\prod_{n\in\omega} \aleph_\omega =$ Menge aller Funktionen von ω nach $\aleph_\omega$, d.h. aller Folgen $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ von Elementen von $\aleph_\omega$.
2. Die Menge aller injektiven (oder sogar: streng wachsenden) Funktionen von von ω nach $\aleph_\omega$.
3. Die Menge der Wertebereiche alle solchen Funktionen, d.h., aller abzählbaren Teilmengen von $\aleph_\omega$. Aus mnemotechnischen Gründen werde ich in diesem Artikel für die Menge dieser Mengen das Symbol des Binomialkoeffizienten[14] verwenden: $\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}$.

[12] Dies kann man auch quantifizieren.

[13] Für reguläres λ ist $\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \lambda^\lambda = 2^\lambda$.

[14] In der Literatur ist $[\aleph_\omega]^{\aleph_0}$ oder $\mathfrak{P}_{<\aleph_1}(\aleph_\omega)$ oder nur $\mathfrak{P}_{\aleph_1}(\aleph_\omega)$ üblich.

4. $\prod_{n\in\omega} \aleph_n =$ Menge alle Folgen $(\alpha_0, \alpha_{,1}, \ldots)$, die $(\forall i)\ \alpha_i \in \aleph_i$ erfüllen.
5. Falls $(\forall n \in \omega)\ 2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$ gilt, dann ist $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ auch die Kardinalität $2^{\aleph_\omega}$.

$2^{\aleph_\omega}$ ist die Kardinalität der Potenzmenge von $\aleph_\omega$, also einer gewissen Booleschen Algebra. Diese algebraische Struktur liefert aber leider keine Erkenntnis über die „Größe" dieser Kardinalität. Stattdessen betrachten wir die Menge $\prod_{n\in\omega} \aleph_n$, eine durch die punktweise Ordnung halbgeordnete Menge. Shelahs pcf-Theorie zeigt, dass diese Ordnungsstruktur tiefere Einblicke zulässt.

4 Schärferer Fokus: Kofinalität statt Kardinalität

Wie groß ist die Menge $\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}$, wie viele abzählbare Teilmengen hat $\aleph_\omega$? Jedenfalls gilt $\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$. Wenn das Kontinuum groß ist, lässt sich dieser Wert auch genauer „berechnen":

> Wenn $2^{\aleph_0} \geq \aleph_\omega$, dann ist $2^{\aleph_0} \leq \aleph_\omega^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$,
> also $\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0} = \aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Hier entsteht der Eindruck, dass die gesuchte *Information* über die Anzahl (und auch Struktur) der abzählbaren Teilmengen von $\aleph_\omega$ durch das *Rauschen* des großen Kontinuums überdeckt wird. Die einfache Rechnung in Beobachtung 2 zeigt, dass die Frage nach der Größe von $\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}$ in Wirklichkeit in 2 Fragen von sehr verschiedenem Charakter aufgespalten werden kann (und soll):

- Die erste ist die nach der Größe des Kontinuums (von der wir wissen, dass wir sie nur auf Basis der üblichen ZFC-Axiome nicht beantworten können, weil mit der Forcing-Methode Modelle konstruiert werden können, in denen das Kontinuum beliebig groß wird).
- Die zweite Frage nach der *Kofinalität* der partiellen Ordnung $(\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}, \subseteq)$ führt aber auf robustere Sachverhalte.

Definition 1. $\mathrm{cf}\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}$ ist die Kardinalität der kleinsten Menge, die in $\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}$ (mit der durch $\subseteq$ gegebenen partiellen Ordnung) kofinal ist. Das heißt: $\mathrm{cf}\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}$ ist die Antwort auf die Frage:

> Wie viele abzählbare Teilmengen von $\aleph_\omega$ brauche ich, um alle abzählbaren Teilmengen von $\aleph_\omega$ zu überdecken?

Die erwähnte „Aufspaltung" der Frage nach der Kardinalität von $\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}$ ergibt sich durch die folgenden triviale Rechnung:

Beobachtung 2.

$$\left|\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}\right| = \mathrm{cf}\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0}.$$

Anders als die Größe des Kontinuums, über die in ZFC nur sehr wenig beweisbar ist, lässt sich die Kardinalität von $\mathrm{cf}\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}$ mithilfe der pcf-Theorie gut analysieren. Man kann nämlich den folgenden Satz zeigen:

Satz 3.

$$\mathrm{cf}\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0} = \max \mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\}).$$

Weiters kann man zeigen, dass $\max \mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})$ nicht allzu groß werden kann. ($\mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})$ wird im Abschnitt 4.3 definiert.)

4.1 Reduzierte Produkte

Die Menge $\prod_n \aleph_n$ ist durch die Relation

$$f \leq g \;\Leftrightarrow\; \forall n\, f(n) \leq g(n)$$

partiell geordnet. Diese Ordnung gibt aber nicht viel her; interessanter ist die Quasiordnung[15] $\leq_{\text{fin}}$, die durch

$$f \leq_{\text{fin}} g \;\Leftrightarrow\; \exists k \forall n \geq k\, f(n) \leq g(n)$$

definiert ist. Allgemeiner kann man für jeden Filter[16] F auf der Indexmenge ω die Quasiordnung $\leq_F$ durch

$$f \leq_F g \;\Leftrightarrow\; \{n : f(n) \leq g(n)\} \in F$$

definieren. Solche Quasiordnungen (bzw. ihre natürlichen Quotienten) heißen „reduzierte Produkte“.

Je größer der Filter, umso mehr nähern sich diese reduzierten Produkte einer linearen Ordnung; wenn F ein Ultrafilter ist, so ist $\leq_F$ tatsächlich eine lineare Ordnung.[17]

[15]Eine Quasiordnung ist eine reflexive transitive Relation $\leq^*$; die Relation $x \leq^* y \wedge y \leq^* x$ ist dann eine Äquivalenzrelation $\sim$, deren Klassen in natürlicher Weise partiell geordnet sind. Oft ist es praktisch, eine Quasiordnung $(Q, \leq^*)$ mit der partiellen Ordnung $Q/\sim$ zu identifizieren.

[16]Statt eines Filters betrachtet man auch gerne das zugehörige Ideal, das sind jene Teilmengen der Indexmenge, deren Komplemente im Filter liegen.

[17]Die Struktur $\prod_n \aleph_n/F$ heißt dann Ultraprodukt.

4.2 True cofinality

Die Kofinalität einer partiellen Ordnung (oder Quasiordnung) P, $\mathrm{cf}(P)$, ist als die kleinste Kardinalität einer kofinalen Menge definiert; $C \subseteq P$ heißt kofinal, wenn $(\forall p \in P)(\exists c \in C)\ p \leq c$ gilt. ($\mathrm{cf}(\emptyset) = 0$, und $\mathrm{cf}(P) = 1$ genau dann, wenn es ein größtes Element gibt. Für unsere partiellen Ordnungen wird immer $\mathrm{cf}(P) > 1$ und sogar $\mathrm{cf}(P) \geq \aleph_0$ gelten.)

Im Allgemeinen wird eine kofinale Menge nicht linear geordnet sein. Wenn es eine kofinale linear geordnete (oder äquivalent: kofinale wohlgeordnete) Menge gibt, so nennen wir die kleinste Kardinalität einer solchen Menge die „wahre Kofinalität (true cofinality) von P“, $\mathrm{tcf}(P)$.[18] So eine wahre Kofinalität ist immer eine reguläre Kardinalzahl.

Beispiel 4.

1. *Jede lineare Ordnung hat eine wahre Kofinalität.*
2. *Für jede lineare Ordnung L hat $L \times L$ (mit der Produktordnung) eine wahre Kofinalität, und es gilt* $\mathrm{tcf}(L \times L) = \mathrm{tcf}(L)$.
3. $\omega \times \omega_1$ *hat keine wahre Kofinalität; es gibt nämlich keine überabzählbare echt aufsteigende Kette, und eine abzählbare Kette kann nicht kofinal sein.*

4.3 pcf

Um nun die Kardinalität (und Kofinalität) des Produkts $\prod_n \aleph_n$ zu analysieren, untersucht Shelah die homomorphen Bilder dieses Produkts, und zwar nur solche, die

1. reduzierte Produkte sind, also von der Form $\prod_n \aleph_n / F$;
2. eine wahre Kofinalität haben. (Insbesondere schließt dies alle Ultraprodukte ein.)

Mit $\mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})$ (*possible cofinalities*) bezeichnen wir die Menge aller dieser wahren Kofinalitäten. Man sieht zum Beispiel leicht, dass jedes $\aleph_k$ ein Element dieser Menge ist (weil der Hauptfilter F_k aller Mengen, die k enthalten, ein reduziertes Produkt $\prod_n \aleph_n / F$ liefert, welches zu $\aleph_k$ isomorph ist), und dass alle nichttrivialen Ultrafilter ein Element $\lambda > \aleph_\omega$ in dieser Menge induzieren.

Wenn GCH gilt, dann enthält $\mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})$ neben den $\aleph_n$ nur mehr ein weiteres Element, nämlich $\aleph_{\omega+1}$. (Warum? Weil unter GCH das Produkt $\prod_n \aleph_n$ nur diese Kardinalität hat.) Die pcf-Theorie kann nun zeigen, dass diese Menge auch ohne diese besonders starke Voraussetzung nicht allzu groß werden kann.

[18] Wenn $\mathrm{tcf}(P)$ existiert, dann ist $\mathrm{tcf}(P) = \mathrm{cf}(P)$.

Eine kurze Erinnerung: Statt der ursprünglichen Frage nach $2^{\aleph_\omega}$ interessiert uns jetzt $\aleph_\omega^{\aleph_0}$; wegen der oben in Beobachtung 2 erwähnten Faktorisierung brauchen wir uns nur mehr um $\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}$ kümmern, und wegen der Gleichung in Satz 3 geht es in Wirklichkeit nur mehr um die Menge $\mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})$, bzw. um eine Abschätzung ihres Maximums.

Ein fundamentaler Satz der pcf-Theorie besagt nun, dass

1. $\mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})$ ein maximales Element hat;
2. $\max \mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\}) = \mathrm{cf}(\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0})$;
3. die Menge $\mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})$ keine Lücken hat, d.h.: alle regulären Kardinalzahlen zwischen $\aleph_\omega$ und $\max \mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})$ kommen in dieser Menge vor.

Daraus kann man bereits Schlüsse ziehen. Nehmen wir z.B. an, dass $2^{\aleph_0} = \aleph_3$ und $2^{\aleph_3} = \aleph_7$ gilt. Aus der Tatsache, dass es auf der abzählbaren Menge ω nur $2^{2^{\aleph_0}}$ viele Filter gibt, schließen wir, dass zwischen $\aleph_\omega$ und $\max \mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})$ höchstens $\aleph_7$ Kardinalzahlen liegen können. Daraus folgt

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} = \max \mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\}) < \aleph_{\aleph_8}.$$

Ohne die obige Voraussetzung über das Verhalten der Exponentialfunktion unterhalb vom $\aleph_\omega$ erhält man den folgenden Satz[19]:

Satz 5.

1. $|\mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})| \leq 2^{2^{\aleph_0}}$.
2. $\mathrm{cf}\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0} < \aleph_\kappa$, *wenn* κ *die erste Kardinalzahl* $> 2^{2^{\aleph_0}}$ *ist, d.h.* $\kappa = (2^{2^{\aleph_0}})^+$.
3. $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_\kappa$ *mit* $\kappa = (2^{2^{\aleph_0}})^+$.

4.4 Von $2^{2^{\aleph_0}}$ zu $2^{\aleph_0}$

Filter (und besonders Ultrafilter) sind noch immer sehr unhandlich. Aber bereits auf Seite 9 seines Buches „Cardinal Arithmetic“ verbessert Shelah die obige Abschätzung um eine Größenordnung. Es gibt nämlich nicht nur eine Folge $(F_\lambda : \lambda \in \mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\}))$ von Filtern, die $\mathrm{tcf}(\prod_n \aleph_n / F_\lambda) = \lambda$ erfüllen, sondern es gibt auch eine Folge $(F_\lambda, A_\lambda : \lambda \in \mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\}))$, für die die folgenden Eigenschaften gelten:

[19] Dieser Satz ist vielleicht etwas schwer zu lesen. Ich führe ihn nur deshalb detailliert an, um dem Leser die Möglichkeit zu geben, ihn mit den verbesserten Abschätzungen in Satz 6 und Satz 7 zu vergleichen.

1. Die Folge F_λ ist aufsteigend (bezüglich $\subseteq$).[20]
2. $A_\lambda \subseteq \omega$.
3. $\operatorname{tcf} \prod_{n \in A_\lambda} \aleph_n / F_\lambda = \lambda$.

Daraus kann man schließen, dass die Mengen A_λ alle verschieden sein müssen. Statt lauter verschiedenen Filtern (theoretisch $2^{2^{\aleph_0}}$ viele) hat man also lauter verschiedene Teilmengen von ω gefunden, das sind maximal $2^{\aleph_0}$ viele, also Kontinuum viele. Die obige Abschätzung

$$|\operatorname{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})| \leq 2^{2^{\aleph_0}}$$

kann daher zu

$$|\operatorname{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})| \leq 2^{\aleph_0}$$

verbessert werden, was eine bessere Abschätzung für $\max \operatorname{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})$ und somit auch für $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ liefert, nämlich:

Satz 6.

1. $|\operatorname{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})| \leq 2^{\aleph_0}$.
2. $\operatorname{cf}\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0} < \aleph_\kappa$, *wenn* κ *die erste Kardinalzahl* $> 2^{\aleph_0}$ *ist, d.h.* $\kappa = (2^{\aleph_0})^+$.
3. $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_\kappa$ *mit* $\kappa = (2^{\aleph_0})^+$.

Wenn etwa die Kontinuumshypothese gilt, kann man daraus die Abschätzung $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\aleph_2}$ gewinnen.

4.5 Von $2^{\aleph_0}$ zu $\aleph_4$ (oder $\aleph_1$?)

Man könnte einwenden, dass diese Abschätzung

$$\operatorname{cf}\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$$

noch immer nichts bringt, weil ja die Größe des Kontinuums unbekannt ist, und weil es ja der Sinn des Satzes 2 war, dass $\operatorname{cf}\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}$ unabhängig vom Kontinuum abgeschätzt werden sollte. Ein Spezialfall der noch unbewiesenen[21] pcf-Vermutung besagt

$$|\operatorname{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})| \leq \aleph_0.$$

Daraus würde[22]

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_1}$$

[20] und lässt sich durch eine sehr einfache Rekursion auch relativ explizit berechnen.

[21] aber auch noch unwiderlegten

[22] Allerdings nur im Fall $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$. Wenn $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$ gilt, dann ist aus trivialen Gründen $\aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, wie oben ausgeführt.

folgen. Es ist bekannt, dass eine bessere Abschätzung nicht möglich ist. Das (nach heutigem Stand) wohl verblüffendste Ergebnis der pcf-Theorie ist aber, dass es sehr wohl eine „absolute" Schranke für $\mathrm{cf}\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0}$ gibt:

Satz 7.

1. $|\mathrm{pcf}(\{\aleph_n : n \in \omega\})| \leq \aleph_3$.
2. $\mathrm{cf}\binom{\aleph_\omega}{\aleph_0} < \aleph_{\aleph_4}$.
3. $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\aleph_4}$ *(wenn $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$).*

Dass hier die Zahl 4 auftaucht, ist höchst unerwartet. Wie schon oben erwähnt, erwartet man eher die Abschätzung $\aleph_{\aleph_1}$.

5 Literatur

Die „Bibel" von Shelahs pcf-Theorie ist sein Buch [5], welches auch Versionen von vielen frühen pcf-Arbeiten enthält. Seit Erscheinen dieses Buchs gibt es aber viele neue Resultate von Shelah; die meisten findet man unter *http://www.arXiv.org* und *http://shelah.logic.at*.

[2] ist ein sehr lesbarer (aber auch schon ein bisschen veralteter) Übersichtsartikel über die frühen Resultate der pcf-Theorie. Eine „self contained version" des Satzes über $\aleph_{\omega_4}$ findet man in [3].

Auf Menachem Kojmans Homepage findet man mehrere Arbeiten, die wichtige Konzepte und Aspekte der pcf-Theorie detailliert erklären, darunter auch die Arbeit [4]. Auch der Artikel [1] im demnächst erscheinenden *Handbook of Set Theory* ist zu empfehlen.

1. Uri Abraham and Menachem Magidor. Cardinal arithmetic. In *Handbook of Set Theory*. To appear. *http://www.tau.ac.il/~/host.html*.
2. Maxim R. Burke and Menachem Magidor. Shelah's pcf theory and its applications. *Ann. Pure Appl. Logic*, 50(3):207–254, 1990.
3. Thomas Jech. Singular cardinal problem: Shelah's theorem on $2^{\aleph_\omega}$. *Bull. London Math. Soc.*, 24(2):127–139, 1992.
4. Menachem Kojman. The abc of pcf. Preprint available at *http://www.cs.bgu.ac.il/~kojman/paperslist.html*.
5. Saharon Shelah. *Cardinal Arithmetic*, volume 29 of *Oxford Logic Guides*. Oxford University Press, 1994.

Adresse des Autors: Martin Goldstern, Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstr. 8–10/104, A 1040 Wien.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 208 (2008), 47–56

ATS – der „österreichische Vortragsserver“

Manfred Mayer und Hans Georg Feichtinger
Universität Wien

Österreich ist insbesondere in den letzten Jahren zu einem internationalen Zentrum der mathematischen Forschung geworden, mit vielen anerkannten Forschungsgruppen, zwei mathematischen Forschungsinstituten (ESI und WPI) und mehreren START- und Wittgenstein-Preisträgern. Es wurden und werden regelmäßig interessante mathematische Veranstaltungen abgehalten, es gibt eine Vielzahl mathematischer Fachvorträge, die von mehreren Veranstaltern, insbesondere im Nahbereich der Wiener Universitäten, abgehalten werden. Darüber hinaus haben die populärwissenschaftlichen Präsentationen der Mathematik, insbesondere durch den von Prof. Taschner initiierten *math.space* im Rahmen des Museums-Quartiers, große Erfolge zu verzeichnen.

Der österreichische Vortragsserver (ATS = Austrian Talk Server) soll eine Plattform bilden, um eine Infrastruktur zu schaffen, die die Sichtbarkeit der oben genannten Aktivitäten für die interessierte Öffentlichkeit deutlich verbessern soll und zwar, indem:

- Vorträge aus möglichst vielen Quellen an einer zentralen Stelle gesammelt werden, um damit ein möglichst breites Publikum anzuziehen und
- die Ankündigung eines Vortrages so weit zu vereinfachen, dass damit auch Veranstaltungen angekündigt werden können, für die bis dato entweder gar nicht oder nur in einem lokalen Rahmen geworben wurde.

Zu diesem Zweck bietet der österreichische Vortragsserver (im Folgenden auch ATS genannt) mehrere Dienste an:

Veranstaltungskalender: Dieser Kalender ist öffentlich zugänglich, d.h. jeder registrierte Benutzer kann seine Vorträge und Konferenzen (i.e. Veranstaltungen,

ISSN 0020-7926

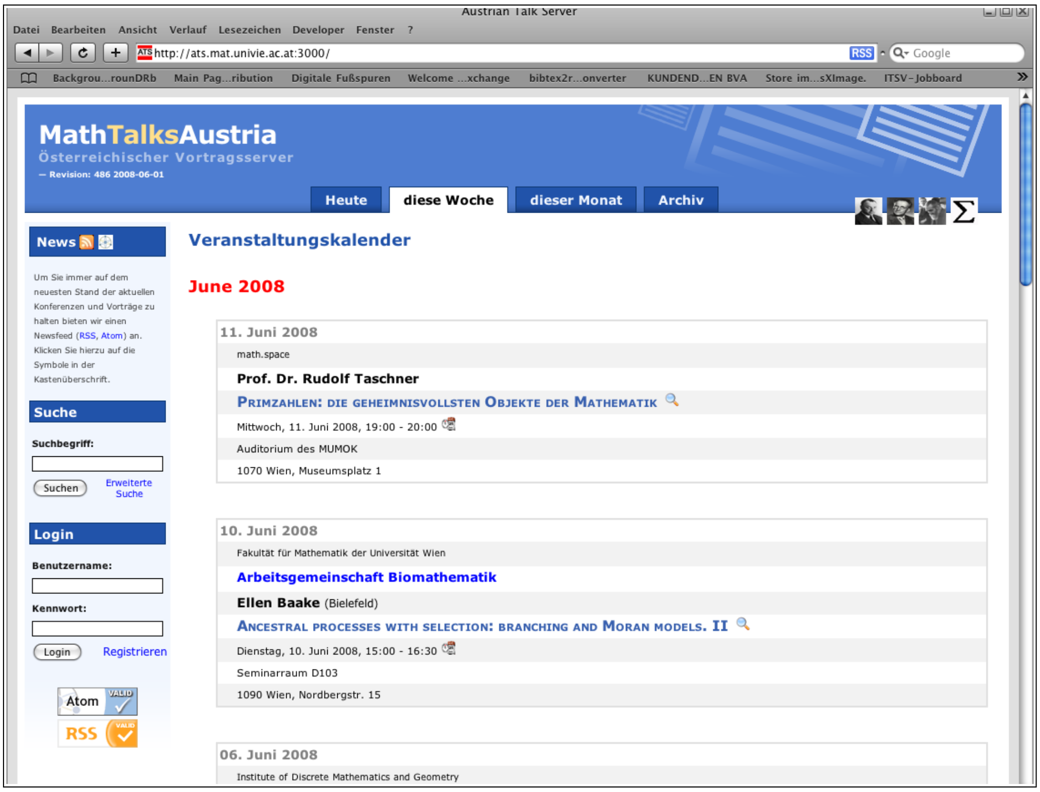


Abbildung 1: Die Einstiegsseite zum Vortragsserver.

die an mehreren Orten oder Tagen stattfinden) mittels eines Formulars[1] eintragen (siehe Abbildung 2) und sollten sich Terminverschiebungen ergeben oder die Veranstaltung abgesagt werden müssen, auch jederzeit wieder ändern.

Die eingegebenen Vorträge können zusätzlich deutsch oder englisch verschlagwortet werden, wobei die Verschlagwortung entweder durch Auswahl aus einer Liste schon bekannter Schlagwörter oder durch Neuanlegen eines Schlagwortes erfolgt. Jedem Vortrag bzw. jeder Konferenz können beliebig viele Schlagworte zugeteilt werden.

Zur Vereinfachung der Eingabe immer wiederkehrender Veranstaltungen bietet der ATS an dieser Stelle eine Template-Funktion an, d.h. ein Vortrag kann als Vorlage abgespeichert werden und bei Anlegen eines ähnlichen Vortrages wieder geladen werden. Damit erübrigt sich das erneute Eingaben bereits bekannter weitgehend konstanter Daten (Adressen, Telefonnummern, Email-Adressen der Ansprechpartner).

[1]Die Pflichtfelder, d.h. Felder, ohne die ein Vortrag nicht angelegt werden kann, i.e. der Titel des Vortrages, der Name des Vortragenden, der Ort und das Datum des Vortrages, sind farblich hervorgehoben.

Bei Bedarf können auch zusätzliche Dokumente (Preprints, Veranstaltungsprogramme, etc.) bzw. auch die Portraits von Konferenzteilnehmern zu den Vorträgen mitgegeben werden. Diese Dokumente stehen dann in der Detailansicht des Vortrages (siehe Abbildung 3) zum Download zur Verfügung. Portraits werden im Passfotoformat in der Liste der Konferenzvortragenden angezeigt. Zur Überprüfung, ob der Vortrag auch richtig dargestellt wird, steht eine Vorschaufunktion zur Verfügung.

Um einem Missbrauch des Veranstaltungskalenders vorzubeugen, muss jedoch der Vortrag, bevor er im Kalender tatsächlich angezeigt wird, von einem Redakteur genehmigt werden (bei Einzelvorträgen ist das der Administrator der ATS-Website, bei Konferenzen entweder der Administrator oder der Konferenzveranstalter).

Automatischer Import: Für Institutionen mit einem hohen Volumen an Vorträgen und Konferenzen ist ein automatischer Import der Vortragsdaten vorgesehen. Derzeit befinden sich die Importfunktionen für das Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics (ESI) und das Wolfgang Pauli Institute (WPI) in der Erprobungsphase.

Newsfeed: Mittels der vom ATS angebotenen Newsfeeds (siehe Abbildung 4) kann sich ein Benutzer über neu eingegangene Vorträge und Konferenzen auf dem Laufenden halten und sich die Detaildaten der Vorträge bei Interesse sofort anzeigen lassen und den Termin anschließend per Mausklick auch sofort in den privaten Kalender übernehmen (Outlook oder andere PIMs).

Bei Abonnement eines Feeds wird der ATS vom Newsreader automatisch in regelmäßigen Abständen auf neue Nachrichten abgefragt. Da bei den gängigen Web-Browsern (Internet Explorer, Firefox) ein Newsreader bereits im Funktionsumfang enthalten ist, können die Nachrichtigen auch gleich im Browser gelesen werden.[2]

Derzeit existieren Newsfeeds für:

- die Vorträge an der mathematischen Fakultät der Universität Wien
- die öffentlichen Defensiones an der Mathematischen Fakultät
- die mathematischen Colloquia an der Mathematischen Fakultät
- ATS gesamt (alle mathematischen Vorträge).

[2] Im *Internet Explorer* ist diese Funktion allerdings etwas versteckt – durch Betätigen der Tastenkombination *Strg+J* öffnet die Liste der abonnierten Newsfeeds. Sofern man die Standardeinstellungen des Web-Browsers nicht geändert hat, erfolgt die automatische Aktualisierung einmal täglich.

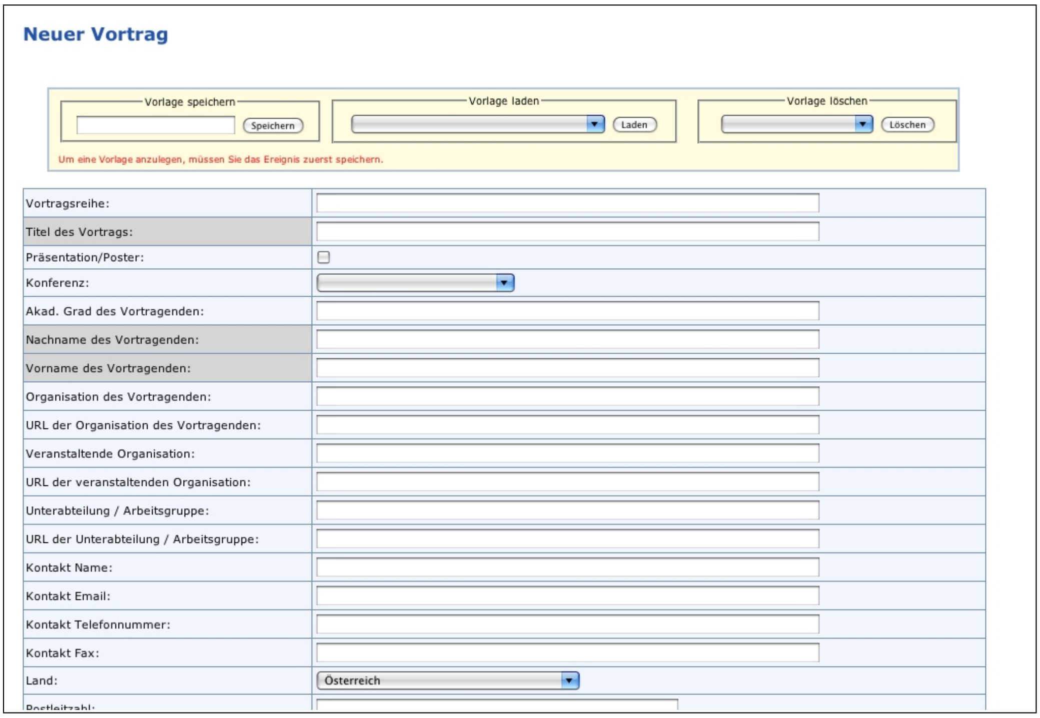


Abbildung 2: Eingabeformular und Darstellung im Vortragsserver: Anlegen eines neuen Vortrages.

Abbildung 3: Eingabeformular und Darstellung im Vortragsserver: Detailansicht eines Vortrages.

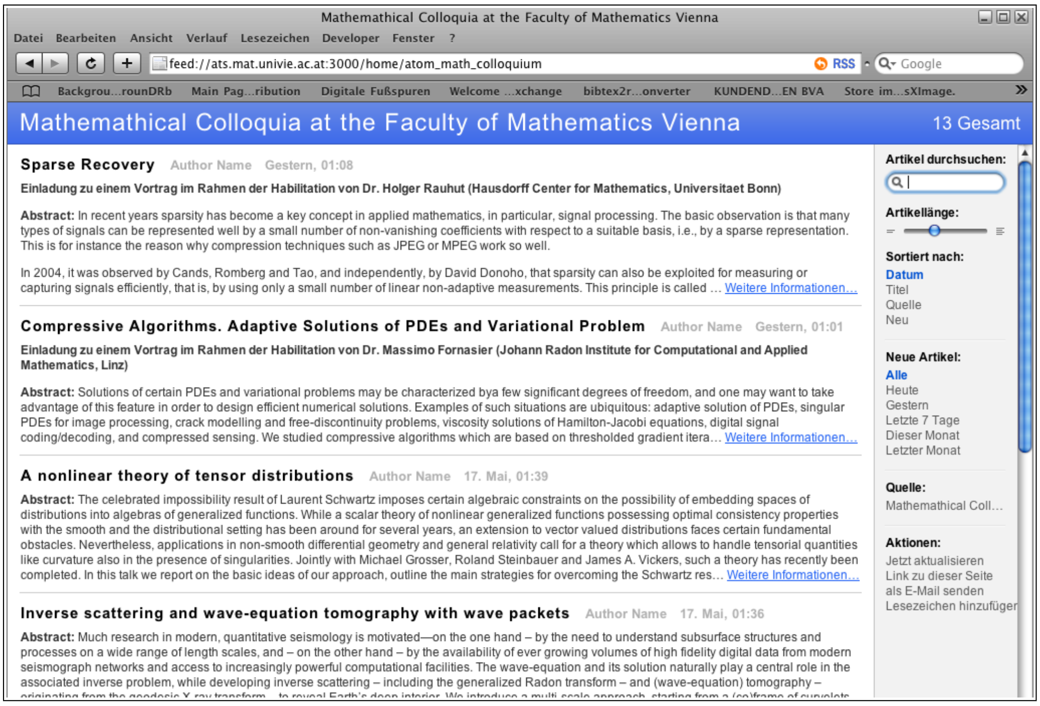


Abbildung 4: Ein Nachrichten-Feed des Vortragsservers.

Suchmaschine: Der ATS besitzt eine eingebaute Suchmaschine[3], mit der der gesamte Datenbestand nach Stichwörtern durchsucht werden kann (siehe Abbildung 5). Sollte das nicht ausreichen, so können mittels der Funktion „erweiterte Suche“ die Suchparameter noch genauer spezifiziert werden und so die Suche z.B. auf einen bestimmten Veranstalter bzw. einen Zeitraum eingeschränkt werden (siehe Abbildung 6).

Verwaltungs- und Berichtsfunktionen: Als hauptsächliches Verwaltungsinstrument dient die Anzeige einer Liste der zu einem Benutzer gehörenden Vorträge (siehe Abbildung 7). Das sind einerseits die vom Benutzer selbst angelegten Vorträge, kann aber auch Vorträge umfassen, die von anderen Benutzern angelegt wurden, wenn es sich um Vorträge, die Teil einer Konferenz sind, handelt.

Für jeden Vortrag wird jeweils der Votragende, der Titel, das Datum, die Uhrzeit, der Ersteller und bei Konferenzvorträgen auch der Titel der Konferenz angezeigt. Der Status eines Vortrags, d.h. ob er neu, geändert, abgelehnt oder abgesagt ist, wird durch ein Häkchen in der betreffenden Spalte dargestellt.

Die Listeneinträge können nach mehreren Kriterien auf und absteigend (durch Klicken in die jeweilige Spalte der Tabellenüberschrift) sortiert und auch gefil-

[3]Es handelt sich um eine Portierung der bekannten *Apache Lucene*-Suchmaschine.

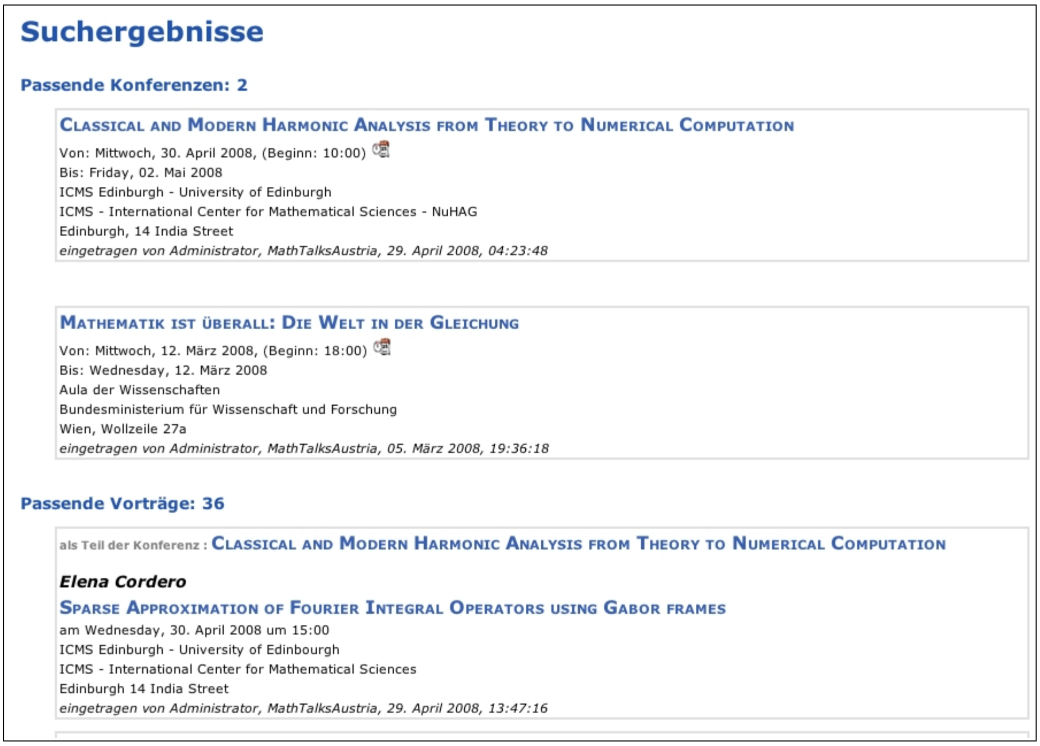


Abbildung 5: Suchfunktionen im Vortragsserver: Ergebnis einer Suchanfrage.

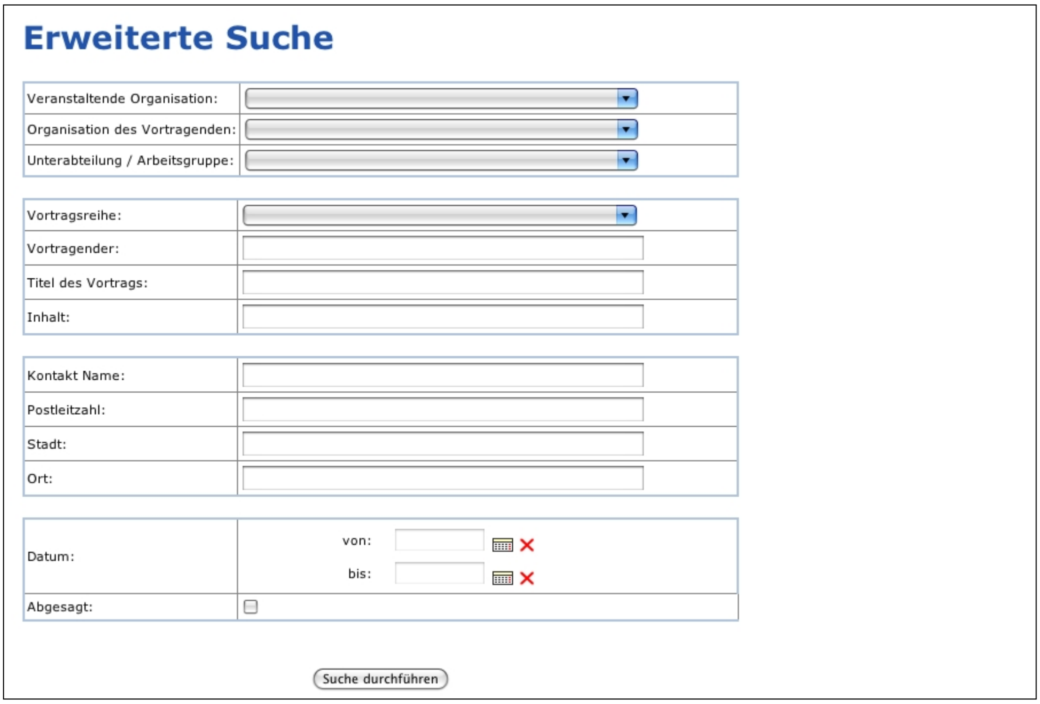


Abbildung 6: Suchfunktionen im Vortragsserver, Erweiterte Suche: Suche mit Datumseinschränkungen bzw. Suche nach der Organisation des Vortragenden.

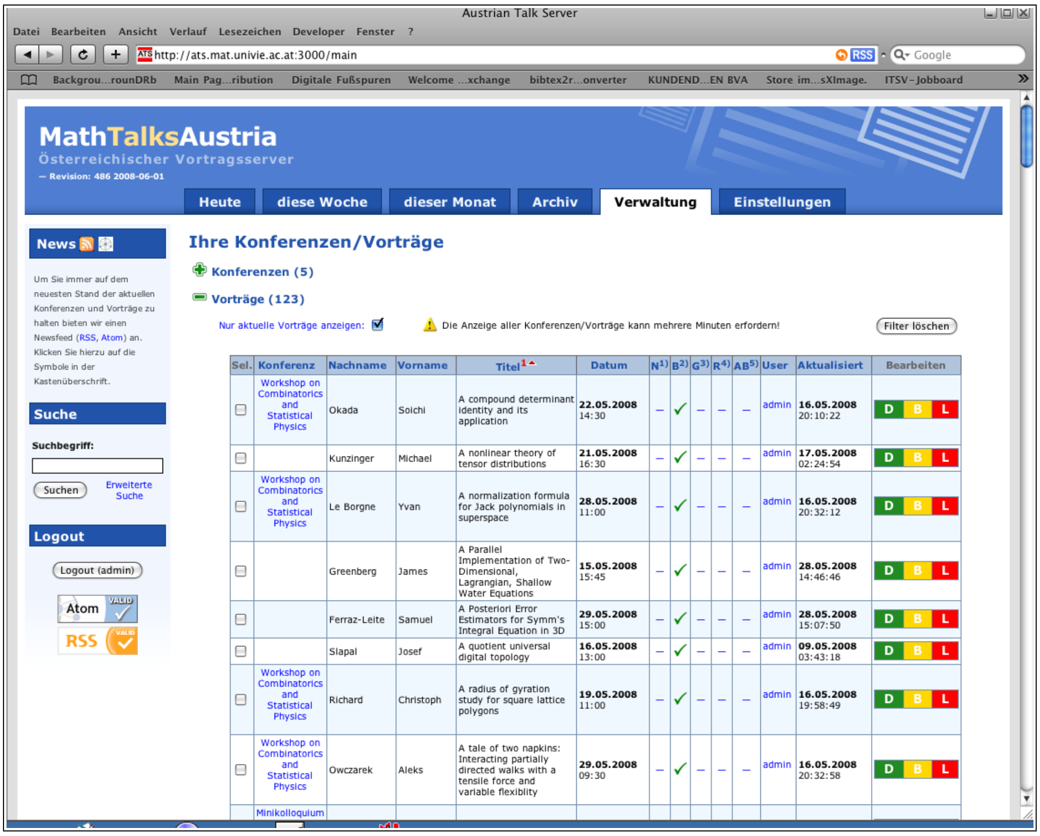


Abbildung 7: Verwaltungsansicht für Vorträge (Sortierung nach Titel).

tert werden (z.B. nur die Vorträge einer bestimmten Konferenz). Durch Klicken auf das Bedienpanel auf der rechten Seite jedes Datensatzes kann der Datensatz editiert, gelöscht oder aber auch eine Detailansicht des in der Datenbank abgespeicherten Datensatzes aufgerufen werden.

Um die Daten dem Benutzer zur weiteren Verarbeitung wieder zur Verfügung zu stellen, bietet der Vortragsserver eine Exportfunktion. Der Export erfolgt aufgrund der weiten Verbreitung des MS Office Paketes (bzw. *Open Office*) im *Excel*-Format (CSV und XML sind in Vorbereitung).

Teilnehmerverwaltung: Als weitere Administrationsvereinfachung bietet der ATS die Möglichkeit, bei Konferenzen nicht nur die Ankündigung der Veranstaltungen und der zugehörigen Einzelvorträge, sondern auch die Verwaltung der Veranstaltungsteilnehmer bzw. ihrer Unterbringungswünsche (das Durchführen der Buchungen selbst kann jedoch nicht mehr vom ATS durchgeführt werden, da sich daraus möglicherweise Regressansprüche ergeben) zu erfassen (siehe Abbildung 8).

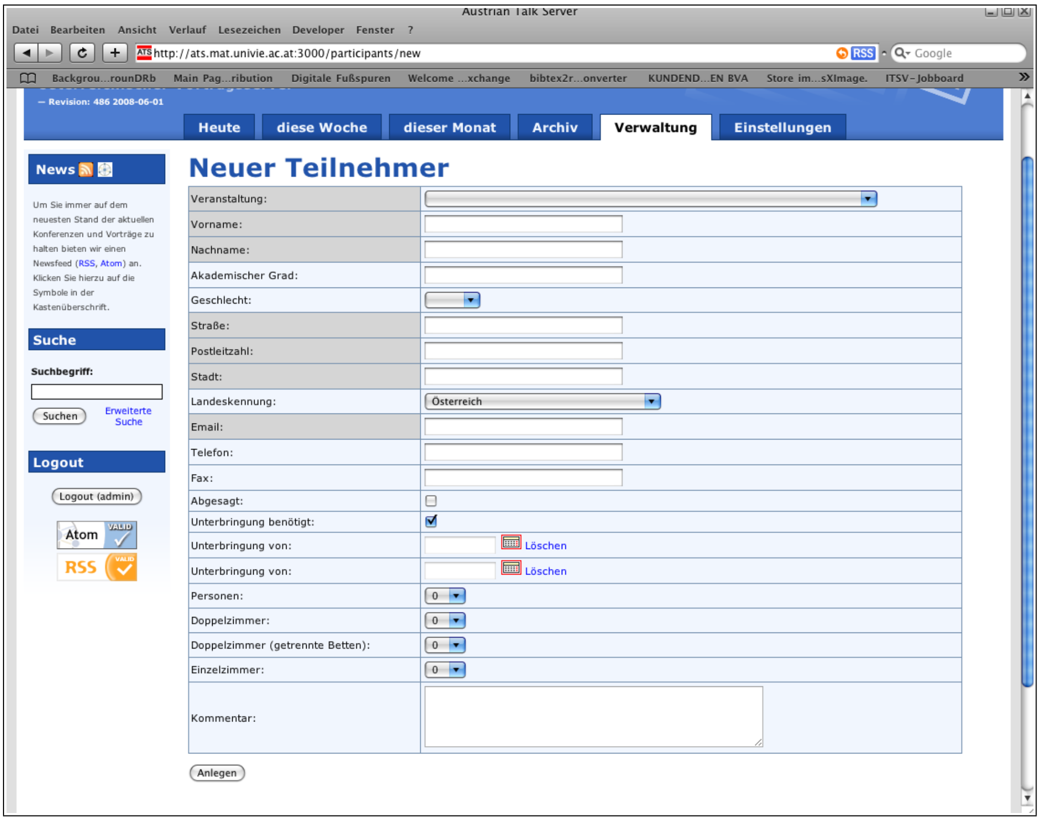


Abbildung 8: Anmeldeformular für Veranstaltungsteilnehmer – Unterbringungswünsche.

Konferenzablaufplanung: Als einfaches Planungswerkzeug bietet der ATS für den Konferenzveranstalter die Möglichkeit an, auf einfache Weise einen Ablaufplan (d.h. wann und wo finden die Vorträge statt) für die von ihm zugelassenen Vorträge zu erstellen (siehe Abbildung 9). Geänderte Vorträge (andere Session i.e. Ort, anderes Datum bzw. Uhrzeit) werden sofort an der richtigen Stelle eingereiht und Ablauffehler wie z.B Zeitüberlappungen farblich hervorgehoben. Das Ergebnis der Planung wird sofort in die Detailansicht der Konferenz übernommen (siehe Abbildung 10).

Insgesamt bietet der ATS also auf einfache Weise die Möglichkeit, mathematische Veranstaltungen an das Publikum zu bringen.

Da die Eingabe formularbezogen ist und aus den eingegebenen Eckdaten der Veranstaltung die Darstellung automatisch erzeugt wird, erübrigen sich HTML- bzw. Programierkenntnisse sowie der Aufwand, eine eigene Website zu betreiben und diese auch aktuell halten zu müssen, was vor allem für Veranstaltungen und Institutionen ohne bzw. mit nur kleinem Budget interessant sein dürfte.

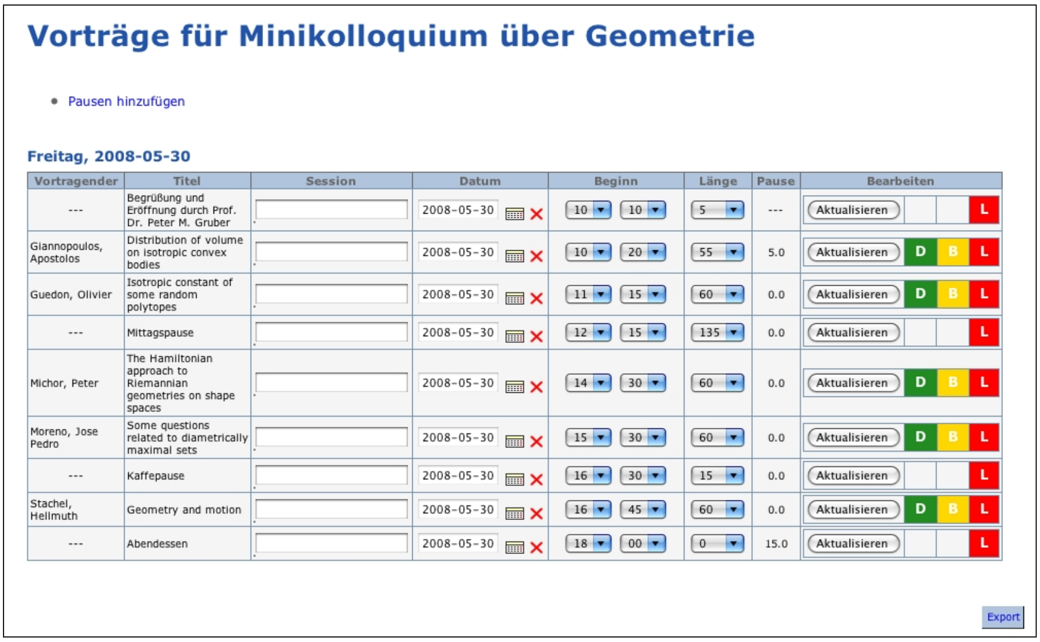


Abbildung 9: Automatische Erstellung des Konferenzprogrammes mittels der Ablaufplanung.

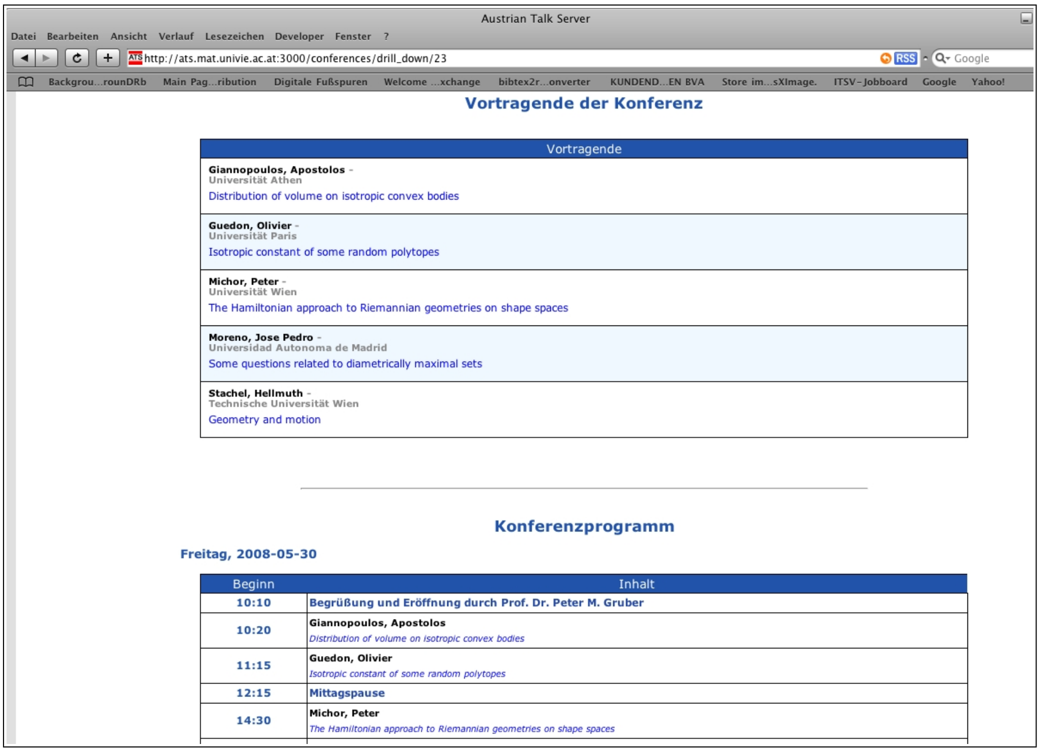


Abbildung 10: Ergebnisse der Ablaufplanung in der Detailansicht einer Konferenz.

Für periodisch wiederkehrende Veranstaltungen wird der Aufwand der Eingabe noch zusätzlich durch die Möglichkeit, benutzerdefinierte Vorlagen zu erstellen, weiter vereinfacht.

Der Zugang ist weltweit und aufgrund der weitgehenden Automatisierung auch rund um die Uhr möglich, d.h. der Dienst kann von den Interessierten z.B. auch bei Auslandsaufenthalten genützt werden.

Eine Veranstaltung kann zunächst nur mit groben Rahmendaten (Zeit, Ort, Thema) angekündigt und detaillierte Information später hinzugefügt werden (z.B. erst nach Zusage eines wichtigen Gastredners oder nach Eintreffen von Preprints bzw. Abstracts).

Dadurch, dass standardisierte Abläufe vom System übernommen werden, bleiben dem Veranstalter mehr Zeit und Möglichkeiten, sich um die restlichen Aufgaben (z.B. fachliche Vorbereitung) zu kümmern; dadurch erhöht sich die Qualität der Veranstaltung.

Adresse der Autoren

Hans Georg Feichtinger, Manfred Mayer
Institute für Mathematik, Universität Wien
Nordbergstrasse 15, A-1090 Wien

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 208 (2008), 57–63

Über den Tangens rationaler Winkel

Gerald Kuba
Universität für Bodenkultur, Wien

Wir bestimmen alle (im Gradmaß gemessenen) rationalen Winkel, bei denen die Quadrate der Winkelfunktionen rationale Werte annehmen, und wenden die Resultate auf Gitterdreiecke und reguläre Polygone an.

1 Einleitung

Im Mathematikunterricht gab es immer schon die Tendenz, beim Erstellen von Übungs- bzw. Prüfungsaufgaben die numerischen Konstanten sowohl in der Angabe als auch in der Lösung möglichst *ganzzahlig* hinzubekommen. In der Analytischen Geometrie stehen diesem Bestreben jedenfalls dann prinzipielle Grenzen entgegen, wenn Winkel ins Spiel kommen, die Teiler des vollen Winkels sind bzw. ein rationales Vielfaches von π darstellen. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage:

> *Für welche rationalen Zahlen q sind die Zahlen* $\cos(q\pi)$, $\sin(q\pi)$, $\tan(q\pi)$ *rational?*

Da bei der Berechnung des Winkels zweier Vektoren mit ganzen Komponenten stets die Quadratwurzel einer rationalen Zahl auftritt, stellt sich ferner auch die Frage:

> *Für welche rationalen Zahlen q ist die Zahl* $\cos^2(q\pi)$ *rational?*

Wegen $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ und $1 + \tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$ und der Tatsache, dass das Quadrat einer Zahl nur dann irrational ist, wenn die Zahl selbst irrational ist, werden beide Fragen vollständig durch den folgenden Satz beantwortet.

Satz. Ist q eine rationale Zahl, sodass $\tan^2(q\pi)$ (definiert und) verschieden von 0, $1/3$, 1, 3 ist, dann ist $\tan^2(q\pi)$ irrational.

Dieses weniger bekannte Resultat kann als interessante Ergänzung des berühmten Satzes von Lambert und Legendre angesehen werden, nach dem $\tan q$ irrational für jedes rationale $q \neq 0$ ist.

ISSN 0020-7926

2 Anwendungen

Nach unserem Satz gilt für rationale q mit $0 < q < 1/2$:

- $\tan^2(q\pi)$ *ist genau dann rational, wenn* $q = 1/6$ *oder* $q = 1/4$ *oder* $q = 1/3$ *gilt.*

Wegen $1 + \tan^2 \alpha = |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 / (\vec{v} \cdot \vec{w})^2$ für den Winkel α zwischen zwei nichtorthogonalen Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und der offensichtlichen Tatsache, dass ein Winkel im Gradmaß genau dann rational ist, wenn er im Bogenmaß ein rationales Vielfaches von π ist, erhält man daher folgenden Satz:

(1) *Es gibt kein spitzwinkeliges Dreieck im n-dimensionalen euklidischen Raum, dessen Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben, sodass einer der Dreieckswinkel im Gradmaß eine rationale Zahl verschieden von* 30*,* 45*,* 60 *ist.*

Weiters gilt nach unserem Satz für rationale q mit $0 < q < 1/2$:

- $\tan(q\pi)$ *ist genau dann rational, wenn* $q = 1/4$ *gilt.*

Damit bekommen wir im Zweidimensionalen folgende Verschärfung von (1):

(2) *Es gibt kein spitzwinkeliges Dreieck in der euklidischen Ebene, dessen Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben, sodass einer der Dreieckswinkel im Gradmaß eine rationale Zahl verschieden von* 45 *ist.*

Beweis. Die nicht zur y-Achse parallelen Trägergeraden der Seiten eines solchen Dreiecks haben offensichtlich einen *rationalen* Anstieg. Wegen

$$\tan(\varphi - \psi) = \frac{\tan\varphi - \tan\psi}{1 + \tan\varphi \tan\psi}$$

muss daher der Tangens eines Dreieckswinkels ebenfalls *rational* sein und somit ist jeder der drei Winkel im Gradmaß entweder gleich 45 oder irrational. □

In engem Zusammenhang mit (1) und (2) steht

(3) *Für* $n \geq 3$ *sind Quadrate die einzigen regulären n-Ecke in der euklidischen Ebene, deren Eckpunkte durchwegs ganzzahlige Koordinaten haben können. Im dreidimensionalen Raum sowie in höherdimensionalen Räumen ist dies außer für Quadrate nur noch für gleichseitige Dreiecke sowie reguläre Sechsecke möglich.*

Beweis. Der spitze Winkel zwischen den Trägergeraden zweier benachbarter Seiten im regulären n-Eck beträgt gerade $2\pi/n$. Somit stellt (3) für $n \neq 8$ eine unmittelbare Folgerung von (1) und (2) dar, da z.B. $(3,0,0)$, $(2,2,-1)$, $(0,3,0)$, $(-1,2,2)$, $(0,0,3)$, $(2,-1,2)$ die Eckpunkte eines regulären Sechsecks sind. Den Spezialfall $n = 8$ mit elementarer Vektorrechnung zu verifizieren, sei dem Leser als Aufgabe überlassen. □

Für reguläre Polygone gewinnen wir schließlich aus unserem Satz auch noch ein hübsches Inkommensurabilitätsresultat:

(4) *Bezogen auf ein reguläres n-Eck ist für $n \geq 4$ das Verhältnis zwischen dem Umkreisradius und dem Inkreisradius stets irrational. Für $n \geq 3$ und $n \neq 6$ ist auch das Verhältnis zwischen dem Umkreisradius und der Seitenlänge stets irrational. Schließlich ist für $n \geq 5$ (und natürlich auch für $n = 3$) das Verhältnis zwischen dem Inkreisradius und der Seitenlänge stets irrational. Für $n \geq 5$ und $n \neq 6$ sind sogar die Quadrate dieser drei Verhältnisse immer irrational.*

Beweis. Für die Seitenlänge s, den Umkreisradius r und den Inkreisradius ρ eines regulären n-Ecks gelten offensichtlich die Proportionen $\rho : r = \cos(\pi/n)$, $s : r = 2 \cdot \sin(\pi/n)$, $s : \rho = 2 \cdot \tan(\pi/n)$. □

3 Der erste Anlauf

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst alle rationalen Winkel bestimmen, für die der Tangens rational ist.

Dazu betrachten wir beliebige komplexe Zahlen $z = a + bi$, deren Realteil a und deren Imaginärteil b jeweils *rationale* Zahlen sind. Die Menge all dieser Zahlen ist bekanntlich ein *Körper*, der mit $\mathbb{Q}[i]$ bezeichnet wird. Dieser Körper enthält einen wichtigen Teilring, nämlich den *Ring der ganzen Gaußschen Zahlen*, der durch

$$\mathbb{Z}[i] = \{\, a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}$$

gegeben ist. Es gibt im Verhältnis zwischen dem Körper $\mathbb{Q}[i]$ und dem Ring $\mathbb{Z}[i]$ eine starke Analogie zum Verhältnis zwischem dem Körper $\mathbb{Q}$ und dem Ring $\mathbb{Z}$. In beiden Fällen ist der Körper gleich dem Quotientenkörper des Ringes. Und so wie aufgrund der eindeutigen Primfaktorzerlegung im Ring $\mathbb{Z}$ die Potenz einer rationalen Zahl nur dann ganz sein kann, wenn bereits die Zahl selbst ganz ist, bekommt man folgendes Analogon mithilfe der eindeutigen Primfaktorzerlegung im Ring $\mathbb{Z}[i]$:

Lemma 1. Wenn für $z \in \mathbb{Q}[i]$ und eine positive ganze Zahl n die Potenz z^n im Ring $\mathbb{Z}[i]$ liegt, dann liegt bereits z im Ring $\mathbb{Z}[i]$.

Wir sind nun gerüstet, die Rationalität von $\tan\alpha$ zu klären, wenn der Winkel α ein rationales Vielfaches von π ist. Dabei genügt es natürlich, den Bereich $0 < \alpha < \pi/2$ zu betrachten. Wegen $\tan\alpha = 1/\tan(\pi/2 - \alpha)$ und $\tan(\pi/4) = 1$ können wir uns sogar gleich auf den Bereich $0 < \alpha < \pi/4$ einschränken. Wir behaupten nun:

Proposition 1. Es sei q eine rationale Zahl, sodass $0 < q < 1/4$. Dann ist $\tan(q\pi)$ irrational.

Beweis. Wir nehmen indirekt an, dass $\tan(q\pi)$ eine *rationale* Zahl sei. Dann ist die komplexe Zahl $z = 1 + i \cdot \tan(q\pi)$ ein Element des Körpers $\mathbb{Q}[i]$, dessen Real- und Imaginärteil jeweils positiv ist und dessen Argument gerade $q\pi$ beträgt. Wir dividieren nun z durch ihre konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = 1 - i \cdot \tan(q\pi)$ und erhalten als Quotienten die ebenfalls in $\mathbb{Q}[i]$ liegende Zahl $z/\bar{z}$. Das Argument von $z/\bar{z}$ ist nach den Rechenregeln der komplexen Division gerade der doppelte Wert des Arguments von z, also gleich $2q\pi$ und somit positiv und kleiner als $\pi/2$. Damit sind auch Real- und Imaginärteil von $z/\bar{z}$ beide positiv. Nun sei n irgendeine positive ganze Zahl, für die nq eine ganze Zahl ist. (Man nehme für n z.B. den Nenner irgendeiner Bruchdarstellung von q.) Wegen $|z| = |\bar{z}|$ gilt $|z/\bar{z}| = 1$ und daher muss nach der Regel von de Moivre $(z/\bar{z})^n = 1$, insbesondere also $(z/\bar{z})^n \in \mathbb{Z}[i]$ gelten. Nach Lemma 1 muss daher bereits $z/\bar{z} \in \mathbb{Z}[i]$ gelten. Mit positivem Real- und Imaginärteil ist dies aber unmöglich, weil für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $a, b > 0$ klarerweise $|a + bi| \geq \sqrt{2} > 1$ gilt, wir dagegen $|z/\bar{z}| = 1$ haben. Die indirekte Annahme, dass $\tan(q\pi)$ eine *rationale* Zahl sei, ist somit falsch. $\square$

4 Beweis des Satzes

Um die Rationalität von $\tan^2 \alpha$ zu entscheiden, orientieren wir uns an der Vorgangsweise des vorigen Abschnitts, benötigen dazu aber ein wenig mehr Algebra. Man nennt eine positive ganze Zahl n *quadratfrei*, wenn n nicht durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist. Quadratfreie Zahlen sind also alle Primzahlen sowie 1, 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 30 usw. (Nicht quadratfrei sind 4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28 usw.) Ist q irgendeine positive rationale Zahl, dann gibt es für die Quadratwurzel aus q immer eine Darstellung $\sqrt{q} = r\sqrt{d}$, wobei r eine rationale und d eine quadratfreie Zahl ist. (Man betrachte einfach die Primfaktorzerlegungen des Zählers und des Nenners einer gekürzten Bruchdarstellung von q. So gilt z.B. $\sqrt{20/27} = \frac{2}{9}\sqrt{15}$.)

Nun definieren wir zu jeder quadratfreien Zahl d die durch

$$\mathbb{Q}[\sqrt{-d}] = \{\, a + b\sqrt{-d} \mid a, b \in \mathbb{Q} \,\} = \{\, a + i \cdot b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q} \,\}$$

gegebene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Man kann sich leicht überzeugen, dass so wie im Falle $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ auch allgemein die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ immer einen Unterkörper von $\mathbb{C}$ bildet. Auch ist durch

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = \{\, a + i \cdot b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}$$

ein Teilring von $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ gegeben.

Im Allgemeinen ist das Verhältnis zwischen dem Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ und seinem Teilring $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ nicht so eng wie im Spezialfall $d = 1$. Es gilt aber das folgende abgeschwächte Analogon von Lemma 1.

Lemma 2. Wenn für $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ und eine positive ganze Zahl n die Potenz z^n im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ liegt, dann liegt jedenfalls die Zahl $2z$ im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$.

Bemerkung. Für gewisse quadratfreie d (z.B. $d = 5$ und $d = 13$ und $d = 17$) gilt das direkte Analogon zu Lemma 1. (Das ist insofern bemerkenswert, als der in $\mathbb{Z}[i]$ gültige Satz von der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in keinem der Ringe $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-17}]$ gültig ist.) Es kann aber vorkommen, dass z^n in $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ liegt, z jedoch nicht. (So ist etwa $(\frac{7}{2} + i \cdot \frac{5}{2}\sqrt{11})^3 = -679 - i \cdot 80\sqrt{11}$.)

Lemma 2 ist eine unmittelbare Folgerung aus einem wichtigen Theorem der algebraischen Zahlentheorie, nämlich der universellen Klassifikation der Ganzheitsringe quadratischer Zahlkörper. Wir wollen jedoch nicht mit Kanonen auf Spatzen schießen, sondern einen elementaren Beweis von Lemma 2 geben. Da man dazu ein wenig weiter ausholen muss, verschieben wir den Beweis aufs nächste Kapitel und erledigen nun den Satz, der sich wegen $\tan^2 \alpha = 1/\tan^2(\pi/2 - \alpha)$ sofort aus der folgenden Proposition ergibt.

Proposition 2. Es sei q eine rationale Zahl, sodass $0 < q < 1/4$. Wenn $\tan^2(q\pi)$ rational ist, dann gilt $q = 1/6$.

Beweis. Es sei $\tan^2(q\pi)$ eine rationale Zahl. Zieht man die Quadratwurzel, so kann man $\tan(q\pi) = r\sqrt{d}$ mit einer positiven rationalen Zahl r und einer quadratfreien ganzen Zahl d schreiben. Die komplexe Zahl $z = 1 + i \cdot r\sqrt{d}$ ist dann ein Element des Körpers $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$, deren Real- und Imaginärteil jeweils positiv ist und deren Argument gerade $q\pi$ beträgt. Wieder dividieren wir die Zahl z durch ihre konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = 1 - i \cdot r\sqrt{d}$ und erhalten die ebenfalls in $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ liegende Zahl $z/\bar{z}$. Das Argument von $z/\bar{z}$ ist gleich $2q\pi$. Der Real- und der Imaginärteil von $z/\bar{z}$ ist jeweils positiv. Wieder sei n irgendeine positive ganze Zahl, für die nq eine ganze Zahl ist. Wegen $|z/\bar{z}| = 1$ muss dann $(z/\bar{z})^n = 1$, insbesondere also $(z/\bar{z})^n \in \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ gelten. Nach Lemma 2 muss daher $2z/\bar{z} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ gelten. Wir schreiben $2z/\bar{z} = a + i \cdot b\sqrt{d}$ mit ganzen Zahlen a, b. Die Zahl $2 \cdot z/\bar{z}$ hat natürlich dasselbe Argument wie die Zahl $z/\bar{z}$. Daher sind a und b beide positiv. Aus $|a + i \cdot b\sqrt{d}| = 2$ erhalten wir die Gleichung $a^2 + b^2 d = 4$. Die Gleichung $a^2 + b^2 d = 4$ ist aber für positive ganze a, b und $d > 3$ offensichtlich unlösbar. Man sieht auch sofort, dass es für $d = 1$ oder $d = 2$ ebenfalls keine Lösungen geben kann. Nur im Falle $d = 3$ gibt es eine Lösung, nämlich $a = b = 1$. Da dies der einzige Fall ist, der infrage kommt, muss $2z/\bar{z} = 1 + i \cdot \sqrt{3}$ gelten. Da $2q\pi$ das Argument der komplexen Zahl $2z/\bar{z}$ ist, erhalten wir $\tan(2q\pi) = \sqrt{3}$ und somit $q = 1/6$. □

5 Beweis von Lemma 2

Zum Beweis von Lemma 2 benötigen wir zwei Resultate über Polynome. Wie üblich bezeichnen wir mit $R[X]$ den Ring aller Polynome in der einen Unbestimmten X mit Koeffizienten aus dem kommutativen Ring R. Für zwei Polynome $p,q \in R[X]$ ist p ein *Teiler* von q genau dann, wenn $p \cdot r = q$ für ein Polynom $r \in R[X]$ gilt. Ist $p = aX^n + bX^{n-1} + \cdots$ ein standardmäßig dargestelltes Polynom (mit Grad n), so heißt der Koeffizient a der *Leitkoeffizient* von p. Ein Polynom aus $\mathbb{Z}[X]$ nennt man *primitiv*, wenn der größte gemeinsame Teiler aller Koeffizienten gleich 1 ist. Es ist ein zentrales Prinzip der elementaren Zahlentheorie, dass das Produkt zweier primitiver Polynome stets ein primitives Polynom ist („Lemma von Gauß").

Bemerkung. Dieses Prinzip zu verifizieren, ist eine schöne Übungsaufgabe: Eine Primzahl, die alle Koeffizienten von $p \cdot q$ für $p,q \in \mathbb{Z}[X]$ teilt, muss alle Koeffizienten von p oder alle Koeffizienten von q teilen.

Lemma 3. Sind p,q Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$ mit Leitkoeffizienten 1 dergestalt, dass p ein Teiler von q ist und q in $\mathbb{Z}[X]$ liegt, dann muss auch p in $\mathbb{Z}[X]$ liegen.

Beweis. Wir schreiben $p \cdot r = q$ mit passendem $r \in \mathbb{Q}[X]$. Zwangsläufig hat auch r den Leitkoeffizienten 1. Nun wählen wir ganze Zahlen $n,m > 0$ *so klein wie möglich* dergestalt, dass die Polynome $n \cdot p$ und $m \cdot r$ in $\mathbb{Z}[X]$ liegen. Automatisch sind dann $n \cdot p$ und $m \cdot r$ primitiv und somit ist auch das Produkt $(n \cdot p) \cdot (m \cdot r) = nm \cdot q$ primitiv. Das kann wegen $q \in \mathbb{Z}[X]$ aber nur dann sein, wenn $nm = 1$ und somit $n = 1$ und daher $p \in \mathbb{Z}[X]$ gilt. □

Ist p ein Polynom aus $\mathbb{C}[X]$, so bezeichnen wir mit $\overline{p}$ dasjenige Polynom aus $\mathbb{C}[X]$, das man aus p erhält, indem man jeden Koeffizienten von p komplex konjugiert. (Hat man z.B. $p = 5X^2 + (2+3i)X - 7i$, so gilt $\overline{p} = 5X^2 + (2-3i)X + 7i$.) Offensichtlich liegt das Polynom $p + \overline{p}$ für beliebiges $p \in \mathbb{C}[X]$ in $\mathbb{R}[X]$. Darüber hinaus gilt das

Lemma 4. Für $p \in \mathbb{C}[X]$ gilt stets $p \cdot \overline{p} \in \mathbb{R}[X]$.

Beweis. Ein Beweis von Lemma 4 ist durch vollständige Induktion nach dem Grad der Polynome schnell erbracht. Für Polynome vom Grad 0 gilt Lemma 4 natürlich, da solche Polynome einfach komplexe Zahlen sind. Angenommen, Lemma 4 ist für alle Polynome p vom Grad n schon bewiesen. Ist nun $q \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad $n+1$, so haben wir $q = p \cdot X + c$ mit $p \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad n und $c \in \mathbb{C}$. Wegen $\overline{q} = \overline{p} \cdot X + \overline{c}$ folgt $q \cdot \overline{q} = p \cdot \overline{p} \cdot X^2 + (\overline{c}p + c\overline{p}) \cdot X + c \cdot \overline{c}$ und somit wie gewünscht $q \cdot \overline{q} \in \mathbb{R}[X]$, da $p \cdot \overline{p} \in \mathbb{R}[X]$ wegen der Induktionsvoraussetzung gilt und natürlich $c \cdot \overline{c} \in \mathbb{R}$ sowie $(\overline{c}p + c\overline{p}) = r + \overline{r} \in \mathbb{R}[X]$ mit $r = \overline{c}p \in \mathbb{C}[X]$ gilt. □

Nun sind wir gerüstet, Lemma 2 zu beweisen. Es sei $z \in \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ und z^n liege in $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$. Wir betrachten die beiden Polynome $p = X - z$ und $q = X^n - z^n$ im Ring $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}][X]$, wobei q sogar im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}][X]$ liegt. Es ist klar, dass p ein Teiler von q ist, dass also $p \cdot r = q$ für passendes $r \in \mathbb{Q}[\sqrt{-d}][X]$ gilt. (Natürlich hat man $r = X^{n-1} + zX^{n-2} + z^2X^{n-3} + \cdots + z^{n-2}X + z^{n-1}$.) Die drei Polynome $\overline{p}$, $\overline{r}$, $\overline{q}$

liegen natürlich auch im Ring $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}][X]$ und es gilt auch $\overline{p}\cdot\overline{r}=\overline{q}$. Daher haben wir $(p\cdot\overline{p})\cdot(r\cdot\overline{r})=q\cdot\overline{q}$. Da die Koeffizienten der Polynome $p\cdot\overline{p}$ $r\cdot\overline{r}$ $q\cdot\overline{q}$ nach Lemma 4 durchwegs reell sein müssen, liegen diese drei Polynome im Ring $\mathbb{Q}[X]$ und das Polynom $q\cdot\overline{q}$ sogar im Ring $\mathbb{Z}[X]$. Wegen Lemma 3 liegt somit auch $p\cdot\overline{p}$ in $\mathbb{Z}[X]$. Wir setzen $z=a+bi\sqrt{d}$ mit $a,b\in\mathbb{Q}$ und betrachten das Polynom

$$p\cdot\overline{p}=\big(X-(a+bi\sqrt{d})\big)\big(X-(a-bi\sqrt{d})\big)=X^2-2aX+(a^2+b^2d)$$

genauer. Wegen $p\cdot\overline{p}\in\mathbb{Z}[X]$ sind $2a$ und a^2+b^2d ganze Zahlen. Somit ist auch $(2b)^2d=4(a^2+b^2d)-(2a)^2$ eine ganze Zahl. Da d quadratfrei ist, muss naturgemäß $2b$ eine ganze Zahl sein. Wir bekommen also $2a,2b\in\mathbb{Z}$ und somit wie in Lemma 2 behauptet $2z\in\mathbb{Z}[\sqrt{-d}][X]$.

Adresse des Autors:

Gerald Kuba
Institut für Mathematik, Universität für Bodenkultur
A-1180 Wien

Neue Mitglieder

Laura Kovács, Dr. – École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Schweiz. geb. 1980. 2007 Doktorat an der Universität Linz, Seit November 2007 Postdoc in der Gruppe *Models of Theory of Computation* in Lausanne. e-mail *laura.kovacs @epfl.ch*.

Franz Luef, Mag. Dr. – Universität Wien. geb. 1975. 2005 Dissertation *Gabor analysis meets non-commutative geometry* an der Universität Wien (Betreuer: H. G. Feichtinger), derzeit Postdoc im Rahmen des Marie Curie Excellence Grant EUCETIFA. e-mail *franz.luef@univie.ac.at*.

Buchbesprechungen

J. Bewersdorff: Galois Theory for Beginners (G. PILZ) 66
S. Bosch: Lineare Algebra (P. PAUKOWITSCH) 66
I. Chajda, G. Dorfer, G. Eigenthaler, R. Halaš, W. B. Müller, R. Pöschel (eds.): Contributions to General Algebra 16 (G. PILZ) 67
G. Dorfer, G. Eigenthaler, M. Goldstern, W. B. Müller, R. Winkler (Eds.): Contributions to General Algebra 17 (G. PILZ) 67
M. Emmer: Mathematics and Culture II (F. SCHWEIGER) 67
W. Forst, D. Hoffmann: Gewöhnliche Differentialgleichungen (H. PRODINGER) 68
H. Havlicek: Lineare Algebra für Technische Mathematiker (G. PILZ) . . 68
A. Kanel-Belov, L. H. Rowen: Computational Aspects of Polynomial Identities (G. PILZ) 69
J. Nocedal, S. J. Wright: Numerical Optimization (F. RENDL) 69
H.-J. Petsche: Graßmann (D. GRONAU) 70
L. E. Renner: Linear Algebraic Monoids (W. A. SCHMID) 71
L. H. Rowen: Graduate Algebra: Commutative View (G. PILZ) 72
M. Stroppel: Locally Compact Groups. (R. WINKLER) 72
G. Schuppener, K. Mačák: Stanislav Vydra (1741–1804) (P. PAUKOWITSCH) 73
D. Werner: Funktionalanalysis (H. G. FEICHTINGER) 74

J. Bewersdorff: Galois Theory for Beginners. A Historical Perspective. Translated by D. Kramer. (Student Mathematical Library, Vol. 35) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2006, XX+180 S. ISBN 978-0-8218-3817-4, P/b $ 35,–.

Das Buch folgt im Wesentlichen der historischen Entwicklung von den kubischen Gleichungen über diejenigen 4. und 5. Grades hin zum sog. Fundamentalsatz der Algebra. An dieser Stelle sieht der Leser sicher die Notwendigkeit von mehr Theorie; es folgen Ausführungen über Polynome (insbes. der Hauptsatz über symmetrische Polynome), Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, das Kriterium von Eisenstein und die schon selten zu sehenden Tschirnhaus-Transformationen. Sodann folgt die Galoisgruppe einer Gleichung und dann die volle Galoistheorie mit ihren Anwendungen auf Gleichungen und die (anderen) klassischen Probleme. Es handelt sich um eine sehr gelungene Darstellung der Galoistheorie mit möglichst elementaren Mitteln; die Ausdrucksweise ist vorbildlich klar, die Beweise „schwindeln“ sich nicht um schwierige Klippen herum; es wird alles entwickelt, was gebraucht wird. Die Theorie wird an sehr sorgfältig ausgewählten Beispielen erläutert. Insgesamt: ein besonders gelungenes Werk!

G. Pilz (Linz)

S. Bosch: Lineare Algebra. Mit 20 Abbildungen. Dritte Auflage. (Springer-Lehrbuch) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006, X+295 S. ISBN-10 3-540-29884-3, ISBN-13 978-3-540-29884-7, P/b € 26,95.

Die vorliegende überarbeitete Form der Erstauflage aus 2001 (vgl. die Besprechung in IMN Nr. 189) ist inhaltlich und methodisch in ausgezeichneter Weise als Grundlage einer zweisemestrigen Einführungsvorlesung zur Linearen Algebra geeignet, und zwar sowohl für Dozenten als auch für Studierende: Dazu tragen die jeden Abschnitt einleitenden *„Vorbemerkungen“* wesentlich bei, welche im jeweiligen mathematischen Umfeld die Hauptanwendungsfälle der dann folgenden Definitionen und die jeweils relevanten Strategien aufzeigen.

Aufgrund der Konzeption als Einführungswerk bietet der stoffliche Umfang des Buches keine wesentlichen Besonderheiten, es genügt daher die Aufzählung der Kapitelüberschriften: Vektorräume, Lineare Abbildungen, Matrizen, Determinanten (mit einem Abschnitt über äußere Produkte), Polynome, Normalformentheorie, Euklidische und unitäre Vektorräume.

Viele Übungsaufgaben runden diesen sehr empfehlenswerten Band ab.

P. Paukowitsch (Wien)

I. Chajda, G. Dorfer, G. Eigenthaler, R. Halaš, W. B. Müller, R. Pöschel (eds.): Contributions to General Algebra 16. Proceedings of the 68th Workshop on General Algebra, University of Technology Dresden, June 10–13, 2004, and of the Summer School 2004 on General Algebra and Ordered Sets, Malá Morávka, September 5–11, 2004. Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, 2005, VI+297 S. ISBN 3-7084-0163-8, P/b € 35,–.

The Workshops on General Algebra (Arbeitstagung Allgemeine Algebra, AAA) form a remarkable series of algebra conferences, starting from 1970. This volume collects the proceedings of the AAA no. 68 (June 2004, Dresden), along with the Proceedings of the Summer School on General Algebra and Ordered Sets in the Czech Republic in September 2004. This makes sense since both conferences were devoted to similar topics. As usual for this series, most papers concern universal algebra (in particular, (pseudo)varieties and clones), lattices, generalized rings, and semigroups.

G. Pilz (Linz)

G. Dorfer, G. Eigenthaler, M. Goldstern, W. B. Müller, R. Winkler (Eds.): Contributions to General Algebra 17. Proceedings of the 70th Workshop on General Algebra („70. Arbeitstagung Allgemeine Algebra"), Vienna University of Technology, May 26–29, 2005. Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, 2006, V+219 S. ISBN-10 3-7084-0194-8, ISBN-13 978-3-7084-0194-2 P/b € 35,–.

This is the Proceedings volume of the 70th Workshop on General Algebra (AAA), held in Vienna in May 2005 (for more on this series of conferences, see *http://www.math.tu-dresden.de/∼aaa/*). It was one of the larger meetings in this series, attended by about 100 participants. The main areas covered in this volume are topics in classical algebra, universal algebra (varieties, polynomials, clones,...), lattice theory, ordered sets, and the connections between algebra and logic.

G. Pilz (Linz)

M. Emmer: Mathematics and Culture II. Visual Perfection: Mathematics and Creativity. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, X+203 S. ISBN 3-540-21368-6 H/b € 79,95.

Dieses Buch mit dem Untertitel *Visual Perfection: pMathematics and Creativity* ist eine interessante Ergänzung zum ersten Band. Wiederum weitet sich der Blick der Mathematik auf verschiedene Felder und hilft, Mathematik besser als Teil unserer Kultur zu verstehen. 19 Beiträge werden unter den 3 Überschriften *Mathematics, Art and Architecture / Visual Mathematics and Computer Graphics / Mathematics, Literature and Cinema* geboten (hier findet man auch zwei Aufsätze von Doxiadis und Singh) und laden zu weiterführenden Gedanken ein.

F. Schweiger (Salzburg)

W. Forst, D. Hoffmann: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Theorie und Praxis – vertieft und visualisiert mit Maple. (Springer-Lehrbuch.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, XV+389 S. ISBN 3-540-22226-X P/b € 24,95.

Die Autoren schreiben: „Wir sind überzeugt, dass unser Buch langfristig neben den Klassikern der Theorie einen festen und besonderen Platz im Angebot einnehmen wird."

Zweifellos sind das selbstbewusste Worte, aber man kann den Autoren wünschen, dass sie Recht behalten. Für viele Menschen (Studierende und mathematische Normalverbraucher) ist, was das Buch präsentiert, genau das, was man kennen sollte. Und die Kombination mit *Maple* ist sehr geglückt. Denn kaum jemand, dem eine Differentialgleichung unterkommt, wird heutzutage auf Hilfsmittel wie *Maple* verzichten. Ich kenne hervorragende Gelehrte, die ihren Arbeitstag mehr oder minder damit beginnen, eine *Maple*-Session zu eröffnen! Und Differentialgleichungen ohne Computer zu studieren ist ähnlich, wie die Partitur zu lesen, ohne die Musik zu hören. Das kann reizvoll sein, bleibt jedoch dem Spezialisten vorbehalten.

Das Buch ist aber kein *Maple*-Handbuch, sondern entwickelt die nötige Theorie durchaus.

Man findet einige schnurrige Eigenheiten, aber eine kleine Prise Humor macht den Umgang mit Differentialgleichungen umso reizvoller.

Zum Abschluss wollen wir noch die Kapitelüberschriften dieses sehr geglückten, im besten Sinne „modernen" Werkes anführen: Einführende Überlegungen – Elementare Integrationsmethoden – Existenz- und Eindeutigkeitssatz – Lineare Differentialgleichungen und DGL-I und II – Nützliches, nicht nur für den Praktiker – Rand- und Eigenwertprobleme – Anhang über Matrixfunktionen – Anhang zu *Maple*.

Unbedingt empfehlenswert!

H. Prodinger (Stellenbosch)

H. Havlicek: Lineare Algebra für Technische Mathematiker. (Berliner Studienreihe zur Mathematik, Band 16) Heldermann Verlag, Lemgo, 2006, XII+405 S. ISBN 3-88538-116-8 H/b € 36,–.

Dies ist eine sehr gründliche Einführung in die Lineare Algebra, inklusive unendlich-dimensionaler Vektorräume, Jordanscher Normalformen u. dgl. Interessant ist die (gedankliche) Trennung zwischen Theorie (Körper, Vektorräume und linearen Abbildungen) und mehr algorithmischen Aspekten (wie Elementarumformungen, Diagonalisierbarkeit und Normalformen). Nach einem einleitenden Kapitel über Logik und Mengenlehre folgt der Aufbau der Linearen Algebra, der mittlerweise ziemlich festgelegt ist. Etwas ungewöhnlich (aber wohltuend) ist die Hereinnahme dreier Kapitel über Geometrie (affine und projektive Geometrie sowie Quadriken). Viele Übungsaufgaben (allerdings ohne Lösungen) erläutern den Text. Vielleicht hätte man diese Aufgaben mehr auf den im Titel angesprochenen Adressatenkreis der technischen Mathematiker ausrichten können. Erfreulich sind auch das erstaunlich reichhaltige Stichwortverzeichnis sowie die zahlreichen Skizzen und Bilder.

G. Pilz (Linz)

A. Kanel-Belov, L. H. Rowen: Computational Aspects of Polynomial Identities. (Research Notes in Mathematics, Vol. 9.) A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2005, XXI+378 S. ISBN 1-56881-163-2 H/b \$ 69,–.

Rings/algebras satisfying polynomial identities (PI-rings/algebras) can be considered to be “a little bit commutative”, since rings satisfying the identiy $xy = yx$ are “really” commutative. Full matrix algebras over a field are known to fulfill the famous Capelli identity (although they have a very small center). Algebras which can be embedded into full matrix algebras are called representable and play an important role in this book. Algebras which fulfill a given set of identities form a variety, and so there are natural connections to universal algebra, word reduction problems, logic, but also to algebraic geometry. This book, written by masters in this area, beautifully describes these (and other) approaches, partly following the historic development of some famous problems. One main problem concernes the T-ideal of an algebra (i.e., the set of all identities fulfilled by this algebra); Specht conjectured in 1950 that one can replace these identities by a finite number of them, similar to Hilbert’s Basis Theorem. This was solved for characteristic 0 in 1987 in a monumental work by Kemer, and the book contains a streamlined proof of this result. Other famous events concern Kaplansky’s solution of Kurosh’s problem (“are finitely generated algebraic algebras finite dimensional?”) for PI-algebras and the solution to the question of the nilpotence of the Jacobson radical of finitely generated PI-algebras by Amitsur, Razmyslov, Kemer, and Brown. Many other topics like combinatoric PI-theory, algebras satisfying a sparse identity, and the Gelfand-Kirillov dimension are also covered in this book, which nicely complements the recent book of Drensky and Formanek.

G. Pilz (Linz)

J. Nocedal, S. J. Wright: Numerical Optimization. Second Edition. (Springer Series in Operation Research and Financial Engineering.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006, XX+664 S. ISBN-10 0-387-30303-0, ISBN-13 978-0387-30303-1, H/b € 74,85.

Die vorliegende zweite Auflage stellt eine kleine Erweiterung des vor etwa 6 Jahren erschienenen Werkes dar. Der Aufbau folgt dabei vielen Standardwerken über nichtlineare Optimierung. In 19 Kapiteln und einem Anhang über Lineare Algebra, Analysis, Geometrie und Topologie wird zunächst Optimierung ohne Nebenbedingungen behandelt.

Dazu wird eindimensionale Suche (*line search*) theoretisch (Konvergenz) und auch praktisch (ungenaue line search, Armijo-Goldstein-Regel) abgehandelt. Das *Trust Region Model* verzichtet auf eine Suchrichtung und beschränkt die Suche nach einem neuen Iterationspunkt auf eine Nachbarschaft (trust region) des augenblicklichen Punktes. Danach folgen Abschnitte über konjugierte Gradienten und Quasi-Newton-Methoden. Hier wird auch auf Probleme großer Dimension eingegangen (limited memory BFGS). Ein kurzer Abschnitt ist der numerischen Berechnung von Ableitungen unter Berücksichtigung von Rundungsfehlern und der Maschinengenauigkeit gewidmet. Der Hauptabschnitt über unrestringierte Optimierung wird abgeschlossen durch Methoden, die keine Ableitungen verwenden. Weiters werden auch Least Squares-Probleme und nichtlineare Gleichungen als spezielle wichtige Problemklassen behandelt.

Die zweite Hälfte des Buches widmet sich Optimierungsaufgaben unter Nebenbedingungen und wird eröffnet mit einem Kapitel über notwendige und hinreichende Bedingungen an lokale Optima (Karush-Kuhn-Tucker Theorie). Danach werden lineare Optimierungsaufgaben (Simplexmethode und Innere-Punkte-Methoden), sowie quadratische Probleme und in der Folge allgemeine Probleme algorithmisch behandelt. Im Detail wird die augmentierte Lagrange-Methode, sequentielle quadratische Programmierung sowie ein allgemeiner Ansatz mittels Innerer-Punkte-Methoden ausgeführt.

Das Buch bietet eine detaillierte und gut lesbare Übersicht über den aktuellen Stand der Forschung in nichtlinearer Optimierung. Viele Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades bieten auch den Lernenden eine nützliche Unterstützung. Insgesamt halte ich dieses Werk als Grundlage für eine Lehrveranstaltung über nichtlineare Optimierung hervorragend geeignet und habe es bereits selbst erfolgreich eingesetzt.

F. Rendl (Klagenfurt)

H.-J. Petsche: Graßmann. (Vita Mathematica, Band 13.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2006, XXII+326 S. ISBN 3-7643-7257-5 H/b € 59,63.

Dieses Buch füllt eine Lücke in der historischen Bibliographie über große Mathematiker. Es gibt meines Wissens nach keine zeitgenössische Biographie über Hermann Günther Graßmann, geb. am 15. April 1809 in Stettin, gest. am 26. 9. 1877, ebendort.

Der Autor bescheibt das historische, politische und philosophische Umfeld, in das Graßmann hineingeboren wurde, sowie natürlich auch dessen familiären Rahmnen. Sein Vater ist selbst Gymnasialprofessor für Mathematik und Verfasser von durchaus originellen Büchern über Schulmathematik. Auch Graßmanns Bruder Robert studierte Mathematik, aber auch Philosophie. Beide haben großen Einfluss auf das mathematische Werk von Hermann Graßmann.

Nach den gesellschaftspolitischen und philosophischen Strömungen zur Zeit

Graßmanns, die der Autor ausführlichkeit und sehr interessant beschreibt, geht er auf die Beiträge Graßmanns und ihre mathematische Einordnung ein. Hier liest sich der Text etwas spröde und lässt in der Darstellung mathematischer Sachverhalte viele Fragen offen. Der Leser ist gut beraten, das eine oder andere im Original nachzulesen. Der Abschnitt „Das Eingreifen der Ideen Graßmanns in die Entwicklung der Mathematik" (Seite 227f.) ist wiederum von besonderem Interesse.

Eine ausführliche Bibliographie sowohl der Originalwerke Graßmanns wie auch einer reichhaltigen Sekundärliteratur machen das Buch sehr wertvoll.

D. Gronau (Graz)

L. E. Renner: Linear Algebraic Monoids. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 134) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, XII+246 S. ISBN 3-540-24241-4 H/b € 84,95.

Ein lineares algebraisches Monoid ist, in Verallgemeinerung des Begriffs der linearen algebraischen Gruppe, eine affine algebraische Varietät M (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K) mit einem Morphismus von M^2 nach M, sodass M mit der durch diesen definierten Operation ein Monoid (assoziativ und neutrales Element) ist. Bis auf Isomorphie sind dies gerade die Zariski-abgeschlossenen Untermonoide der Monoide $(M_n(K), \cdot)$, d.h. quadratische Matrizen über K mit Multiplikation.

Ein systematisches Studium dieser Strukturen wurde Ende der siebziger Jahre von M. Putcha und L. Renner, dem Autor dieses Buches, begonnen. In Buchform wurde es erstmals Ende der achtziger Jahre von M. Putcha behandelt. Seit dieser Zeit wurde eine Fülle neuer Resultate erzielt. Das vorliegende Buch gibt einen Überblick über den aktuellen Status dieses Gebiets und diskutiert mögliche zukünftige Entwicklungen sowie Querverbindungen zu verwandten Gebieten, etwa zur Darstellungstheorie endlicher reduktiver Monoide und zu Monoiden, die zu Kac-Moody -Gruppen assoziiert sind.

Notwendige Kenntnisse aus der algebraischen Geometrie, der Theorie algebraischer Gruppen und der Halbgruppentheorie werden zu Beginn des Buches zwar zusammengefasst, die Darstellung ist aber bewusst knapp. Das ist auch in anderen Teilen des Buches der Fall; insbesondere gilt dies für Themen, die bereits in Putchas Buch behandet wurden. Referenzen zu ausführlicheren Darstellungen werden aber stets gegeben. Die Gliederung in Kapitel, die jeweils eigene Einleitungen haben, ermöglicht auch, sich nur über einzelne Aspekte der Theorie zu informieren. Das Spektrum behandelter Themen ist breit und reicht von Abstraktem (wie universellen Konstruktionen) zu Konkretem (wie der Bestimmung der Anzahl von Faktorisierungen vorgegebener Länge von Elementen).

W. A. Schmid (Graz)

L. H. Rowen: Graduate Algebra: Commutative View. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 73) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2006, XVIII+438 S. ISBN 0-8218-0570-3, H/b $ 65,-.

This is a very thorough introduction into the most spectacular areas of commutative algebra. The central topic is the study of affine algebras (i.e., homomorphic images of polynomial algebras) and their roles in algebraic geometry. The main part of the book starts (part I) with the theory of finitely generated modules, in particular, f.g. modules over PIDs and composition series for modules. After a fairly complete account of the Galois theory of fields, affine algebras are introduced in part II. They quickly lead to topics like prime ideals, transcedence degrees, and the Krull dimension. Not everything can be done in the framework of affine algebras, hence more general concepts like rings and modules with chain conditions are needed in order to deal with localizations of rings. Finally, in part III algebraic geometry and its various applications are treated.

An interesting feature of this wonderful book is the easy-to-read-style of the basics of the theory, which is deepened in a large number of appendices, leading up to some very recent results. The exercises are carefully chosen. They are collected at the ends of the three parts, which causes quite a bit of looking back and forth in the book. The main "problem" with this book, however, is that is is very hard to stop reading in it. New insights come (for most readers) around every corner. The reviewer often had the experience "I always wanted to know this, and here it is, beautifully displayed".

It should be remarked that this book has a brother: volume 2 deals with the noncommutative theory.

G. Pilz (Linz)

M. Stroppel: Locally Compact Groups.. (EMS Textbooks in Mathematics.) EMS, Zürich, 2006, X+302 S. ISBN 3-03719-016-7, H/b € 52,–.

Mit diesem Lehrbuch wird zweifellos ein Bedarf befriedigt. Denn gibt es auch manch umfassendere klassische Monographie zum Thema, so liegt in Stroppels Buch über lokalkompakte Gruppen eine zeitgemäße und besonders leicht zugängliche Darstellung vor, die insbesondere als Lehrbuch schon für mäßig fortgeschrittene Mathematikstudenten hervorragend geeignet ist, weil sie vom Leser nur minimale Vorkenntnisse verlangt.

Entsprechend enthält das Buch Abschnitte, in denen die benötigte topologische und algebraische Strukturtheorie von Grund auf entwickelt wird. Die 8 Hauptkapitel (A bis H) sind in insgesamt 40 Abschnitte gegliedert. Ein nützliches Diagramm gibt Auskunft über den logischen Zusammenhang dieser 40 Abschnitte.

Die Hauptkapitel behandeln A: Präliminarien (topologisch), B: topologische Gruppen (u.a. auflösbare und nilpotente Gruppen), C: topologische Transformationsgruppen, D: das Haarsche Integral (mit Anwendungen auf lineare Darstellungen), E: Kategorien topologischer Gruppen (Produkte, Limiten, kompakte Gruppen), F: lokalkompakte abelsche Gruppen (insbesondere Pontryaginsche Dualität mit Anwendungen, Automorphismengruppen, lokalkompakte Ringe und Körper, homogene lokalkompakte Gruppen), G: lokalkompakte Halbgruppen (u.a. auch Einbettung in Gruppen, kompakte Halbgruppen) und H: das fünfte Hilbertsche Problem (mit mannigfachen Ausblicken). Mit Ausnahme des letzten Kapitels, wo weit ausgeholt und oft auf weitere Literatur verwiesen wird, sind fast alle Abschnitte mit zahlreichen Übungsaufgaben versehen. Dieser Umstand und die übersichtliche und relativ elementare Darstellung machen das Buch zu einer exzellenten Grundlage für Vorlesungen – nicht nur über lokalkompakte Gruppen, sondern auch über topologische Gruppen oder topologische Algebra generell.

R. Winkler (Wien)

G. Schuppener, K. Mačák: Stanislav Vydra (1741–1804). Zwischen Elementarmathematik und nationaler Wiedergeburt. Leipziger Universitätsverlag, Technische Universität Liberec, 2004, 248 S. ISBN 3-937029-77-8 P/b € 36,–.

Das vorliegende Buch erschien anlässlich der zweihundertsten Wiederkehr des Todestages des Prager Jesuiten und Mathematikers Stanislav Vydra. Darin wird das Wirken der Mitglieder des Jesuitenordens ab der Gründung des ersten Kollegs im Prager Klementinum im Jahre 1556 über den Zeitpunkt der Einbindung des Klementinums in die Prager Karls-Universität bis Jahre nach Aufhebung des Ordens im Jahre 1773 in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen der Prager Universität im Allgemeinen und der über dreißigjährigen Tätigkeit von Stanislav Vydra als Professor für Mathematik, Dekan der philosophischen Fakultät und Rektor der Prager Universität, im Speziellen beleuchtet. Sehr ausführlich werden die Entwicklung des Bildungswesens in den böhmischen Ländern im Zeitraum der Aufklärung sowie der Prozess der „tschechischen nationalen Wiedergeburt“, der sich über das ausgehende 18. Jahrhundert in die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts erstreckte und die Schaffung einer nationalen Ideologie und Kultur sowie einer Spracherneuerung zum Ziel hatte, dargestellt. Breiten Raum nehmen die Präsentation der Prager Universität, insbesondere ihrer philosophischen Fakultät, im 18. Jahrhundert sowie die Diskussion der mathematischen Lehrveranstaltungen und Publikationen in diesem Zeitraum ein.

Natürlich ist der Großteil dieser Biographie dem Ordensmann, Mathematiker und Universitätsprofessor Stanislav Vydra gewidmet: Neben der ausführlichen Darstellung seines Lebenslaufs finden sich wesentliche seiner Predigten und Resonanzen darauf, Korrespondenzen aus seinen unterschiedlichen Wirkungsbereichen, Ausschnitte seiner vielseitigen mathematischen und religiösen Veröffentlichungen sowie eine ausführliche Würdigung seiner universitären Lehr- und Leitungstätigkeit. Insbesondere werden die mathematischen Lehrbücher von Stanislav Vydra im Umfeld der Differenzial- und Integralrechnung sowie der Mechanik dargestellt und mit der historisch einschlägigen Literatur verglichen. Abschließend wird der

Einfluss der schillernden Persönlichkeit von Stanislav Vydra auf seine Schüler, zu denen auch Bernard Bolzano zählte, aufgezeigt.

P. Paukowitsch (Wien)

D. Werner: Funktionalanalysis. Fünfte, erweiterte Auflage. Mit 14 Abbildungen. (Springer-Lehrbuch) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, XIII+527 S. ISBN 3-540-21381-3 P/b € 34,95.

Eine ausführliche Darstellung des Inhalts der vorliegenden fünften Auflage dieser beispielhaften Einführung in die Funktionalanalysis erübrigt sich durch die Besprechungen der früheren Auflagen [1. Aufl. IMN 177 (1995), S. 53, 2. Aufl. IMN 179 (1997), S. 60, 3. Aufl. IMN 187 (2000), S. 70, 4. Aufl. IMN 194 (2002), S. 38]. Neu ist ein Abschnitt über Fixpunktsätze im Kapitel IV. Dabei werden auch die notwendigen Resultate über gleichmäßig konvexe Banachräume gesammelt. Auch die gleichmäßige Konvexität allgemeiner Lebesgueräume L^p, $1 < p < \infty$ wird bewiesen. Durch die Gliederung des Buches wird die Reflexivität gleichmäßig konvexer Räume erst im Kapitel VIII über schwache Topologien gezeigt. Mit den Anhängen ist dieses reichhaltige und fast ausnahmslos sehr gut verständliche Werk größtenteils in sich abgeschlossen.

H. G. Feichtinger (Wien)