Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83) und P. Flor (1986–99).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. e-mail *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Redaktion:

M. Drmota (TU Wien, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
J. Wallner (TU Graz)
R. Winkler (TU Wien)

Ständige Mitarbeiter der Redaktion:

C. Binder (TU Wien)
R. Mlitz (TU Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 206 (61. Jahrgang) **Dezember 2007**

Inhalt

Die Illustration auf der Titelseite zeigt die Flussarme des Pregel im Stadtzentrum von Königsberg und die heute vorhandenen Brücken. Im Gegensatz zum 18. Jahrhundert gibt es nunmehr einen Eulerweg, bei dem jedoch Anfangs- und Endpunkt verschieden sind (siehe auch *http://maps.google.com/?ie=UTF8&om=1&t=k&ll=54.70604,20.50993&spn=0.010501,0.021865&z=16*

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 206 (2007), 1–19

Sudoku Squares and Chromatic Polynomials

Agnes M. Herzberg and M. Ram Murty
Queen's University, Canada

The Sudoku puzzle has become a very popular puzzle that many newspapers carry as a daily feature. The puzzle consists of a 9×9 grid in which some of the entries of the grid have a number from 1 to 9. One is then required to complete the grid in such a way that every row, every column, and every one of the nine 3×3 sub-grids contain the digits from 1 to 9 exactly once. The sub-grids are shown in Figure 1.

Recall that a Latin square of rank n is an $n \times n$ array consisting of the numbers such that each row and column has all the numbers from 1 to n. In particular, every Sudoku square is a Latin square of rank 9, but not conversely because of the condition on the nine 3×3 sub-grids. Figure 2 (taken from [6]) shows one such puzzle with seventeen entries given.

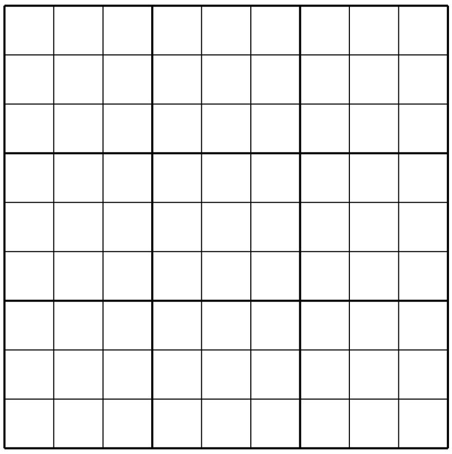

Figure 1: A Sudoku grid.

This article has been published in *Notices AMS*, Volume **54**/6,708–717 and is reprinted here with friendly permission of the publisher and the authors.

ISSN 0020-7926.

							1	
4								
	2							
				5		4		7
		8				3		
		1		9				
3			4			2		
	5		1					
			8		6			

Figure 2: A Sudoku puzzle with 17 entries.

For anyone trying to solve a Sudoku puzzle, several questions arise naturally. For a given puzzle, does a solution exist? If the solution exists, is it unique? If the solution is not unique, how many solutions are there? Moreover, is there a systematic way of determining all the solutions? How many puzzles are there with a unique solution? What is the minimum number of entries that can be specified in a single puzzle in order to ensure a unique solution? For instance, Figure 2 shows that the minimum is at most 17. (We leave it to the reader that the puzzle in Figure 2 has a unique solution.) It is unknown at present if a puzzle with 16 specified entries exists that yields a unique solution. Gordon Royle [6] has collected 36,628 distinct Sudoku puzzles with 17 given entries. We will reformulate many of these questions in a mathematical context and attempt to answer them. More precisely, we reinterpret the Sudoku puzzle as a vertex coloring problem in graph theory. This enables us to generalize the questions and view them from a broader framework. We will also discuss the relationship between Latin squares and Sudoku squares and show that the set of Sudoku squares is substantially smaller than the set of Latin squares.

Chromatic Polynomials

For the convenience of the reader, we recall the notion of proper coloring of a graph. A λ-coloring of a graph G is a map f from the vertex set of G to $\{1,2,\ldots,\lambda\}$. Such a map is called a *proper coloring* if $f(x) \neq f(y)$ whenever x and y are adjacent in G. The minimal number of colors required to properly color the vertices of a graph G is called the *chromatic number* of G and denoted $\chi(G)$. It is then not difficult to see that the Sudoku puzzle is really a coloring problem. Indeed, we associate a graph with the 9×9 Sudoku grid as follows. The graph will have 81 vertices with each vertex corresponding to a cell in the grid. Two distinct vertices will be *adjacent* if and only if the corresponding cells in the grid are either in the same row, or same column, or the same sub-grid. Each completed Sudoku square then corresponds to a proper coloring of this graph. We put this in a slightly more general context. Consider an $n^2 \times n^2$ grid. To each cell in the grid, we associate a vertex labeled (i, j) with $1 \leq i$, $j \leq n^2$. We will say that (i, j) and (i', j') are adjacent if $i = i'$ or $j = j'$ or $\lceil i/n \rceil = \lceil i'/n \rceil$ and $\lceil j/n \rceil = \lceil j'/n \rceil$ (Here, the notation $\lceil \cdot \rceil$ means that we round to the nearest greater integer.) We will denote this graph by X_n and call it the *Sudoku graph* of rank n. A Sudoku square of rank n will be a proper coloring of this graph using n^2 colors. A Sudoku puzzle corresponds to a partial coloring and the question is whether this partial coloring can be completed to a total proper coloring of the graph. We remark that, sometimes, it is more convenient to label the vertices of a Sudoku graph of rank n using (i, j) with $0 \leq i,\ j \leq n^2 - 1$. Then, (i, j) and $(i', j')$are adjacent if $i = i'$ or $j = j'$ or $[i/n] = [i'/n]$ and $[j/n] = [j'/n]$, where now $[\cdot]$ indicates the greatest integer function. That is, $[x]$ means the greatest integer which is less than or equal to x. Recall that a graph is called *regular* if the degree of every vertex is the same. An easy computation shows that X_n is a regular graph with each vertex having degree $3n^2 - 2n - 1 = (3n + 1)(n - 1)$. In the case $n = 3$, X_3 is 20-regular and in case $n = 2$, X_2 is 7-regular. The number of ways of coloring a graph G with colors is well known to be a polynomial in of degree equal to the number of vertices of G. Our first theorem is that given a partial coloring C of G, the number of ways of completing the coloring to obtain a proper coloring using colors is also a polynomial in λ, provided that is greater than or equal to the number of colors used in C. More precisely, this is stated as Theorem 1.

Theorem 1. *Let G be a finite graph with v vertices. Let C be a partial proper coloring of t vertices of G using d_0 colors. Let $p_{G,C}(\lambda)$ be the number of ways of completing this coloring using colors to obtain a proper coloring of G. Then, $p_{G,C}(\lambda)$ is a monic polynomial (in λ) with integer coefficients of degree $v - t$ for $\lambda \geq d_0$.*

We will give two proofs of this theorem. The most direct proof uses the theory of partially ordered sets and Möbius functions, which we briefly review. A partially ordered set (or poset, for short) is a set P together with a partial ordering denoted by $\leq$ that satisfies the following conditions: (a) $x \leq x$ for all $x \in P$; (b) $x \leq y$ and $y \leq x$ implies $x = y$; (c) $x \leq y$ and $y \leq z$ implies $x \leq z$. We will consider only finite posets. Familiar examples of posets include the collection of subgroups of a finite group partially ordered by set inclusion and the collection of positive divisors of a fixed natural number n partially ordered by divisibility. A less familiar example is given by the following construction. Let G be a finite graph and e an edge of G. The graph obtained from G by identifying the two vertices joined by e (and removing any resulting multiple edges) is denoted G/e and is called the contraction of G by e. In general, we say that the graph G is a contraction of G if G is obtained from G by a series of contractions. The set of all contractions of a finite graph G can now be partially ordered by defining that $A \leq B$ if A is a contraction of B. Given a finite poset P with partial ordering $\leq$, we define the Möbius function $\mu : P \times P \to \mathbb{Z}$ recursively by setting

$$\mu(x,x) = 1, \quad \sum_{x \leq y \leq z} \mu(x,y) = 0, \text{ if } x \neq z.$$

The main theorem in the theory of Möbius functions is the following. If $f : P \to \mathbb{C}$ is any complex valued function and we define

$$g(y) = \sum_{x \leq y} f(x),$$

then

$$f(y) = \sum_{x \leq y} \mu(x,y) g(x),$$

and conversely. We refer the reader to [5] for amplification of these ideas.

Proof of Theorem 1. We will use the theory of Möbius functions outlined to prove Theorem 1. Let (G,C) be given with G a graph and C a proper coloring of some of the vertices. We will say (G',C) is a subgraph of (G,C) if G is obtained by contracting some edges of G with at most one end-point in C. This gives us a partially ordered set. The minimum contraction would be the vertices of C with the adjacencies amongst them preserved. We will also use the letter C to denote this minimum graph in our poset. For each subgraph (G',C) of this poset, let $p_{G',C}(\lambda)$ be the number of ways of properly coloring G' with colors with the specified colorings for C. Let $q_{G',C}(\lambda)$ be the number of ways of coloring (not necessarily proper) the vertices of G' using colors, with the specified colorings for C. Clearly, $q_{G',C}(\lambda) = \lambda^{v'-t}$, where v' is the number of vertices of G and t is the number of vertices of C. If $\lambda \geq d_0$, then given any λ -coloring of (G,C), we may derive a proper coloring of a unique subgraph (G',C) simply by contracting the edges whenever two adjacent vertices of (G,C) have the same color assigned. In this way, we obtain the relation

$$q_{G,C}(\lambda) = \lambda^{v-t} = \sum_{C \leq G'} p_{G',C}(\lambda).$$

By Möbius inversion, we deduce that

$$p_{G,C}(\lambda) = \sum_{C \leq G'} \mu(C,G') \lambda^{v'-t},$$

and the right-hand side is a monic polynomial with integer coefficients, of degree $v-t$, as stated. $\square$

We can also prove Theorem 1 without the use of Möbius functions. We apply induction on the number of edges of the graph (G,C). We consider three cases:

(1) Let us suppose that e is an edge connecting two vertices of G at most one of which is contained in C. We will use the following notation. $G-e$ will denote the graph obtained from G by deleting the edge e, but not its end-points. The graph obtained from G by identifying the two vertices joined by e (and removing any multiple edges) will be denoted G/e. With this notation, we have

$$p_{G,C}(\lambda) = p_{G-e,C}(\lambda) - p_{G/e,C}(\lambda)$$

because each proper coloring of G is also a proper coloring of $G-e$ and a proper coloring of $G-e$ gives a proper coloring of G if and only if it gives distinct colors to the end-points x, y of e. Thus, the number of proper colorings $p_{G,C}(\lambda)$ can be obtained from $p_{G-e,C}(\lambda)$ by subtracting those colorings that assign the same color to both x and y, and this number corresponds to $p_{G/e,C}(\lambda)$. Each of $G-e$ and G/e have fewer edges than G. Thus, we may apply induction and complete the proof in this case.

(2) Now suppose that G has one vertex v_0 not contained in C. If this vertex is not adjacent to any vertex of C, then $G = C \cup v_0$, which is the disjoint union of C and the vertex v_0. Thus, we can color v_0 using any of the colors. Thus, $p_{G,C}(\lambda) = \lambda$ in this case. If this vertex is adjacent to d vertices of C, and these vertices use d_0 colors, then, $p_{G,C}(\lambda) = max(\lambda - d_0, 0)$.

(3) Every vertex of G is contained in C. In this case, we already have a coloring of G and $p_{G,C}(\lambda) = 1$.

Thus, by induction on the number of edges of the graph, the theorem is proved. $\square$

In a later section, we will examine the implications of this theorem for the Sudoku puzzle. For now, we remark that given a Sudoku puzzle, the number of ways of completing the graph is given by $p_{X_3,C}(9)$. A given Sudoku puzzle (X_3, C), has a unique solution if and only if this number $p_{X_3,C}(9) = 1$. It would be extremely interesting to determine under what conditions a partial coloring can be extended to a unique coloring. In this direction, we have the following general result.

Theorem 2. *Let G be a graph with chromatic number $\chi(G)$ and C be a partial coloring of G using only $\chi(G)-2$ colors. If the partial coloring can be completed to a total proper coloring of G, then there are at least two ways of extending the coloring.*

Proof. Since two colors have not been used in the initial partial coloring, these two colors can be interchanged in the final proper coloring to get another proper extension. $\square$

Theorem 2 implies that if C is a partial coloring of G that can be completed uniquely to a total coloring of G, then C must use at least $\chi(G)-1$ colors. In particular, we have that in any 9×9 Sudoku puzzle, at least eight of the colors must be used in the "given" cells. In general, for the $n^2 \times n^2$ Sudoku puzzle, at least $n^2 - 1$ colors must be used in the "given" partial coloring in order that the puzzle has a unique solution.

Scheduling and Partial Colorings

Given a graph G with a partial coloring, we may ask if this can be extended to a full coloring of the graph. It is well known that coloring problems of graphs encode scheduling problems in real life. The extension from a partial coloring to a total coloring corresponds to a scheduling problem with additional constraints, where, for example, we may want to schedule meetings of various committees in time slots, with some committees already pinned down to certain time slots. Of course, the corresponding adjacency relation is that two committees are joined by an edge if they have a member in common. This is a question that is of interest in its own right, and it seems difficult to determine criteria for when a partial proper coloring can be extended to a proper coloring of the whole graph. A similar situation arises for frequency channel assignments. Suppose there are television transmitters in a given region and they need to be assigned a frequency channel for transmission. Two transmitters within 100 miles of each other are to be assigned different channels, for otherwise there will be interference in the signal. It is often the case that some transmitters have already been assigned their frequency channels and new transmitters are to be assigned new channels with these constraints. This is again a problem of completing a partial coloring of a graph to a proper coloring. Indeed, we associate a vertex to each transmitter and join two of them if they are within 100 miles of each other. A channel assignment corresponds to a "color" assigned to that vertex. We can multiply our examples to many different "real life" contexts. In each case, the problem of completing a partial coloring of a graph to a proper coloring emerges as the archetypal theme. Latin squares and Sudoku squares are then only special cases of this theme. However, they can also be studied independently of this context. The explicit construction of Latin squares is well known to have applications to the design of statistical experiments. In agricultural studies, for example, one would like to plant v varieties of plants in v rows and v columns so that the pecularities of the soil in which they are planted do not have bearing on the experiment. Agriculturists have always used a $v \times v$ Latin square to design such an experiment. This serves to balance the treatments of the experiment before randomization takes place. In this context, if one were interested in also testing the role of various fertilizers on the growth of these plants, a Sudoku square might be used, where each sub-grid (or each band) has a different fertilizer applied to it, thus having each fertilizer on each treatment.

Explicit Coloring for X_n

In this section, we will show how one may properly color the Sudoku graph X_n. Recall that the chromatic number of a graph is the minimal number of colors needed to properly color its vertices. Thus, the complete graph K_n consisting of n vertices in which every vertex is adjacent to every other vertex has chromatic number n.

Theorem 3. *For every natural number n, there is a proper coloring of the Sudoku graph X_n using n^2 colors. The chromatic number of X_n is n^2.*

Proof. Let us first note that all the cells of the upper left corner $n \times n$ grid are adjacent to each other and this forms a complete graph isomorphic to K_{n^2}. The chromatic number of K_{n^2} is n^2 and thus, X_n would need at least n^2 colors for a proper coloring. Now, we will show that it can be colored using n^2 colors. As remarked earlier, it is convenient to label the vertices (i,j) with $0 \le i,\ j \le n^2-1$. Consider the residue classes mod n^2. For $0 \le i \le n^2-1$, we write $i = t_i n + d_i$ with $0 \le d_i \le n-1$ and $0 \le t_i \le n-1$ and similarly for $0 \le j \le n^2-1$, as well. We assign the "color" $c(i,j) = d_i n + t_i + nt_j + d_j$, reduced modulo n^2 , to the (i,j)-th position in the $n^2 \times n^2$ grid. We claim that this is a proper coloring. To see this, we should show that any two adjacent coordinates (i,j) and (i',j') have distinct colors. Indeed, if $i = i'$, then we must show $c(i,j) \neq c(i',j')$ unless $j = j'$. If $c(i,j) = c(i,j')$, then $nt_j + d_j = nt_j + d_j$ which means $j = j'$. Similarly, if $j = j'$, then $c(i,j) \neq c(i',j')$ unless $i = i'$. If now, $[i/n] = [i'/n]$ and $[j/n] = [j'/n]$, then $d_i = d_{i'}$ and $d_j = d_{j'}$ If $c(i,j) = c(i',j')$, then

$$t_i + nt_j = t_{i'} + nt_{j'}.$$

Reducing this mod n gives $t_i = t_{i'}$. Hence, $t_j = t_{j'}$ so that $(i,j) = (i',j')$ in this case also. Therefore, this is a proper coloring. $\square$

Counting Sudoku Solutions

We will address briefly the question of uniqueness of solution for a given Sudoku puzzle. It is not always clear at the outset if a given puzzle has a solution. In this section, we derive some necessary conditions for there to be a unique solution. Figure 3 gives an example of a Sudoku puzzle which affords precisely two solutions.

We leave it to the reader to show that the puzzle in Figure 3 leads to the configuration in Figure 4.

Clearly, one can insert either of the arrangements in Figure 5 to complete the grid. Thus, we have two solutions.

9		6		7		4		3
			4			2		
	7			2	3		1	
5						1		
	4		2		8		6	
		3						5
	3		7				5	
		7			5			
4		5		1		7		8

Figure 3: A Sudoku puzzle with exactly two solutions.

9	2	6	5	7	1	4	8	3
3	5	1	4	8	6	2	7	9
8	7	4	9	2	3	5	1	6
5	8	2	3	6	7	1	9	4
1	4	9	2	5	8	3	6	7
7	6	3	1			8	2	5
2	3	8	7			6	5	1
6	1	7	8	3	5	9	4	2
4	9	5	6	1	2	7	3	8

Figure 4: The "solution" to the puzzle in Figure 3.

This observation leads to the following remark. If in the solution to a Sudoku puzzle, we have a configuration of the type indicated in Figure 6 in the same vertical stack, then at least one of these entries must be included as a "given" in the initial puzzle, for otherwise, we would have two possible solutions to the initial puzzle simply by interchanging a and b in the configuration.

As remarked earlier, if the distinct number of "colors" used in a given Sudoku puzzle is at most seven, then there are at least two solutions to the puzzle. We noted that this was so because we could interchange the two unused colors and still get a valid solution. The multiplicity of solutions can also be seen from the chromatic polynomial. If d_0 is the number of distinct colors used, we have seen that $p_{X_3,C}(\lambda)$ is a polynomial in λ provided $\lambda \geq d_0$. Since the chromatic number of X_3 is 9,

9	4
4	9

4	9
9	4

Figure 5: Two ways of completing the puzzle in Figure 4.

a	b
b	a

Figure 6: A configuration leading to two solutions.

we must have $p_{X_3,C}(\lambda) = 0$ for $\lambda = d_0, d_0 + 1, \ldots 8$. As $p_{X_3,C}(\lambda)$ is a monic polynomial with integer coefficients, we can write

$$p_{X_3,C}(\lambda) = (\lambda - d_0)(\lambda - (d_0 + 1)) \cdots (\lambda - 8)q(\lambda),$$

for some polynomial $q(\lambda)$ with integer coefficients. Putting $\lambda = 9$ gives $p_{X_3,C}(9) = (9 - d_0)!q(9)$ and the right hand side is greater than or equal to 2 if $d_0 \leq 7$. This gives us the stated necessary condition for there to be a unique solution, provided that there is a solution, which is a tacit assumption in every given Sudoku puzzle. In the last section, we give a Sudoku puzzle that uses only eight colors and has 17 given entries.

Counting Sudoku Squares of Rank 2

In a recent paper [3], Felgenhauer and Jarvis computed the number of Sudoku squares by a brute force calculation. There are

$$6,670,903,752,021,072,936,960$$

valid Sudoku squares. This is approximately 6.671×10^{21}, a very tiny proportion of the total number of 9×9 Latin squares which is (see [1])

$$\begin{gathered} 5,524,751,496,156,892,842,531,225,600 \\ \approx 5.525 \times 10^{27}. \end{gathered}$$

This mammoth number of Sudoku squares can be cut down to size if we make a few simple observations. First, beginning with any Sudoku square, we can create $9! = 362880$ new Sudoku squares simply by relabelling. More precisely, if a_{ij} represents the (i, j)-th entry of a Sudoku square, and σ is a permutation of the set $\{1, 2, \ldots, 9\}$, then the square whose (i, j)-th entry is $\sigma(a_{ij})$ is also a valid Sudoku square. There are other symmetries one can take into account. For example, the

1	2		
3	4		

Figure 7: A $\times 4$ Sudoku grid.

transpose of a Sudoku square is also a Sudoku square. We can also permute any of the three bands, or the three stacks and the rows within a band, or the columns within a stack. When all these symmetries are taken into account, the number of essentially different Sudoku squares is the more manageable number

$$5,472,730,538,$$

approximately 5.47×10^9, as was shown in [4]. These calculations can be better understood if we consider the case of the number of distinct 4×4 Sudoku squares. Without loss of generality, we may as well label the entries in the first 2×2 block as in Figure 7. It is not hard to see that there are at most 2^4 ways of completing this grid. However, we can be a bit more precise. One can show that taking into account the obvious symmetries already indicated, there are essentially only two 4×4 Sudoku squares! Indeed, since permuting the last two columns is an allowable symmetry, we may suppose without loss of generality that the last two entries in the first row are $(3,4)$ in this order. Similarly, since we may interchange the last two rows, we may suppose that our square is as shown in Figure 8.

1	2	3	4
3	4		
2			
4			

Figure 8: A $\times 4$ Sudoku puzzle.

Then, 1 and 4 are the only possible entries in the diagonal position $(3,3)$ and it is easily seen that the choice of 1 leads to a contradiction. This leads to the following arrangements.

The squares can be completed easily as shown in Figure 10. However, the last configuration is equivalent to the second one upon taking the transpose and interchanging 2 and 3. Thus, there are really only two nonequivalent solutions for the 4×4 Sudoku square. From this reasoning, we also see that without taking into

1	2	3	4
3	4		
2		4	
4			1

1	2	3	4
3	4		
2		4	
4			2

1	2	3	4
3	4		
2		4	
4			3

Figure 9: Three 4×4 Sudoku puzzles.

account the symmetries, we get a total of $4! \times 2 \times 2 \times 3 = 288$ Sudoku squares of rank 2. In this context, it is interesting to determine the minimum number of cells filled in a 4×4 Sudoku puzzle that leads to a unique solution. Figure 11 gives one with four entries. Is there one with three? We will indicate a proof that there is not.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Figure 10: Three 4×4 Sudoku squares determined from Figure 9.

1			
			2
		4	
	3		

Figure 11: A 4×4 Sudoku puzzle with 4 cells filled in.

As we remarked earlier, the number of "colors" used in any partial coloring of the Sudoku graph of rank n must be at least $n^2 - 1$ in order that there be a unique solution. Thus, in the puzzle in Figure 11, we must use at least 3 colors. To prove that the minimum number for the rank 2 Sudoku graph is four, we must show if only three distinct "colors" are filled in, we do not have a unique solution. This is easily done by looking at the two inequivalent 4×4 Sudoku grids given in Figure 10 and checking the cases that arise one by one.

Permanents and Systems of Distinct Representatives

In this section, we will review several theorems on permanents and systems of distinct representatives that will be used in the next section in our enumeration of Sudoku squares. For further details, we refer the reader to [5]. If A is an $n \times n$ matrix, with the (i, j)-th entry given by a_{ij}, the *permanent* of A, denoted $\operatorname{per} A$, is by definition

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

where $\mathfrak{S}_n$ denotes the symmetric group on the n symbols $\{1, 2, \ldots, n\}$. The matrix A is said to be doubly stochastic if both the row sums and column sums are equal to 1. In 1926 B. L. van der Waerden posed the problem of determining the minimal permanent among all $n \times n$ doubly stochastic matrices. It was felt that the minimum is attained by the constant matrix all of whose entries are equal to $1/n$. Over the years, this feeling changed into the conjecture that

$$\operatorname{per} A \geq \frac{n!}{n^n}, \tag{1}$$

for any doubly stochastic matrix A and was then referred to as the van der Waerden conjecture. By 1981 two different proofs of the conjecture appeared, one by D. I. Falikman and another by G. P. Egoritsjev. As for upper bounds, H. Minc conjectured in 1967 that if A is a $(0, 1)$ matrix with row sums r_i, then

$$\operatorname{per} A \leq \prod_{i=1}^{n} r_i!^{1/r_i}. \tag{2}$$

This conjecture was proved in 1973 by L. M. Brégman (see p. 82 of [5]). We will utilize both the upper and lower bounds for the permanents in our enumeration of Sudoku squares. The application will be via the theorem of Phillip Hall (sometimes called the marriage theorem), which we now describe.

Suppose that we have subsets $A_1, A_2, \ldots, A_n$ of the set $\{1, 2, \ldots n\}$. We would like to select distinct elements $a_i \in A_i$. Such a selection is called a system of distinct representatives. The theorem gives necessary and sufficient conditions for when this can be done (see [5]). If for every subset S of $\{1, 2, \ldots, n\}$, we let

$$N(S) = \bigcup_{j \in S} A_j,$$

then a little reflection shows that it is necessary that $|N(S)| \geq |S|$ for there to exist a selection. (Here, $|S|$ indicates the cardinality of the set S .) Hall's theorem states that this is also sufficient. The number of ways this can be done is given by the permanent of the $n \times n$ matrix A defined as follows. It is a $(0,1)$ matrix whose (i,j)-th entry is 1 if and only if $i \in A_j$. We will refer to A as the Hall matrix associated with the sets $A_1,\ldots,A_n$.

These results can be used to obtain upper and lower bounds for the number of Latin squares of order n (as in [5]). Since we will need the lower bound in the next section, we give the details of this calculation. For an $n\times$ n Latin square, the number of ways of filling in the first row is clearly $n!$. Suppose we have completed k rows of the Latin square. We now want to fill in the $(k+1)$-st row. For each cell i of the $(k+1)$-st row, we let Ai be the set of numbers not yet used in the i-th column. The size of Ai is therefore $n-k$. To fill in the $(k+1)$-st row of our Latin square is tantamount to finding a set of distinct representatives of the sets $A1,...,An$. The number of ways this can be done is the permanent of the corresponding Hall matrix A. Since $(n-k)^{-1}A$ is doubly stochastic, equation (1) shows that there are at least

$$\frac{(n-k)^n n!}{n^n}$$

ways of doing this. Taking the product over k ranging from 0 to $n-1$ gives:

Lemma 4. *The number of Latin squares of order n is at least $n!^{2n}/n^{n^2}$.*

Corollary 5. *The number of Latin squares of order n^2 is at least*

$$n^{2n^4}e^{-2n^4+O(n^2\log n)}.$$

Proof. By Lemma 4, the number of Latin squares of order n^2 is at least

$$n^2!^{2n^2}/n^{2n^4}.$$

Using Stirling's formula,

$$\log n! = n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + O(1),$$

we obtain the stated lower bound. □

Latin Squares and Sudoku Squares

We can now prove:

Theorem 6. *The number of Sudoku squares of rank n is bounded by*

$$n^{2n^4}\cdot e^{-2.5n^4+O(n^3\log n)}$$

for n sufficiently large.

Proof. The $n^2 \times n^2$ Sudoku square is composed of n^2 sub-grids of size $n \times n$. The entries in each sub-grid can be viewed as a permutation of $\{1, 2, \ldots, n^2\}$. Thus, a crude upper bound for the number of Sudoku squares is given by

$$[(n^2)!]^{n^2}.$$

We begin by observing that there are n "bands" in the Sudoku grid. ("Bands" are groups of the n successive rows.) The number of ways of completing the first band can be estimated as follows. We have $n^2!$ choices for the first row. The number of ways of filling the second row is calculated by evaluating the permanent of the following matrix. We have an $n^2 \times n^2$ matrix whose rows parametrize the cells of the second row. Let us note that for each cell, we have $n^2 - n$ possibilities since we already used n colors in the corresponding $n \times n$ sub-grid. The number of ways of filling in the second row is the number of ways of choosing a system of distinct representatives from this list of possibilities. More precisely, we consider the $n^2 \times n^2$ matrix whose rows parametrize the cells of the second row, and whose columns parametrize the numbers from 1 to n^2 , and we put a 1 in the (i, j)-th entry if j is a permissible value for cell i and zero otherwise. This gives us a $(0, 1)$ matrix whose permanent is the number of ways of choosing the set of distinct representatives (see [5]). By equation (2), this quantity is bounded by

$$(n^2 - n)!^{\frac{n}{n-1}}.$$

Proceeding similarly gives the number of possiblities for the third row as

$$(n^2 - 2n)!^{\frac{n}{n-2}}.$$

In this way, we obtain a final estimate of

$$\prod_{k=0}^{n-1} (n^2 - kn)!^{\frac{n}{n-k}}$$

for the number of ways of filling in the first band consisting of n rows of a Sudoku square of rank n. Suppose now that $(i - 1)$ of the n bands have been completed. We calculate the number of ways of completing the i-th band. Here, we will give an upper bound. The number of possible entries for the first cell of the i-th band is

$$n^2 - (i - 1)n.$$

Thus, as before, the number of ways of completing the first row of the i-th band is bounded by

$$(n^2 - (i - 1)n)!^{\frac{n^2}{n^2-(i-1)n}},$$

since for each cell, we must exclude the entries already entered in the column to which the cell belongs. Similarly, the number of ways of completing the second row of the i-th band is at most

$$(n^2-((i-1)n+1))!^{\frac{n^2}{n^2-((i-1)n+1)}}.$$

We proceed in this way until the i-th row of the i-th band to get an estimate of

$$(n^2-((i-1)n+i))!^{\frac{n^2}{n^2-((i-1)n+i)}}.$$

For the $(i+1)$-th row, we change our strategy and exclude the numbers already entered in the sub-grid in which the cell belongs. This means we have entered $i\,n$ entries already in the subgrid and we must exclude these to get an estimate of

$$(n^2-in)!^{\frac{n^2}{n^2-in}},$$

for the number of ways of filling in the i-th row of the i-th band. Proceeding in this manner, we get that the number S_n of Sudoku squares of rank n is bounded by

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}(n^2-(i-1)n)!^{\frac{n^2}{n^2-(i-1)n}}\\
&(n^2-[(i-1)n+1])!^{\frac{n^2}{n^2-[(i-1)n+1]}}\ \dots\ (n^2-[(i-1)n+i])!^{\frac{n^2}{n^2-[(i-1)n+i]}}\\
&(n^2-i\,n)!^{\frac{n^2}{n^2-in}}\ \dots\ (n^2-(n-1)n)!^{\frac{n^2}{n^2-(n-1)n}}.
\end{aligned}$$

Thus,

$$\frac{\log S_n}{n^2}\le\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}\frac{\log(n^2-[(i-1)n+j])!}{n^2-(i-1)n+j}+\sum_{k=i}^{n-1}\frac{\log(n^2-k\,n)}{(n^2-k\,n)}\right).$$

We estimate the sum using Stirling's formula. It is

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}\log(n^2-[(i-1)n+j])+\sum_{k=i}^{n-1}\log(n^2-k\,n)\right)-n^2+O(\log^2 n).$$

This is easily seen to be

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left(i\log(n^2-(i-1)n)+\sum_{k=i}^{n-1}\log(n^2-k\,n)\right)-n^2+O(\log^2 n).$$

Thus, $(\log S_n)/n^2 + n^2 + O(n \log n)$ is

$$\leq \frac{1}{2} n^2 \log n + \sum_{i=1}^{n} \left(i \log(n-i+1) + (n-i)\log n + \sum_{k=i}^{n-1} \log(n-k) \right).$$

The summation over k is

$$\log(n-i)! = (n-i)\log(n-i) - (n-i) + O(\log n),$$

by Stirling's formula. Combining all of this gives

$$\frac{\log S_n}{n^2} \leq 2n^2 \log n - 2.5n^2 + O(n \log n),$$

from which the theorem is easily derived. □

We have the following corollary.

Corollary 7. *Let p_n be the probability that a randomly chosen Latin square of order n^2 is also a Sudoku square. Then*

$$p_n \leq e^{-0.5n^4 + O(n^3 \log n)}.$$

In particular, $p_n \to 0$ as n tends to infinity.

Proof. By Theorem 6, the number of Sudoku squares of rank n is at most

$$n^{2n^4} e^{-2.5n^4 + O(n^3 \log n)}.$$

The number of Latin squares of rank n^2 is by Corollary 5, at least

$$n^{2n^4} e^{-2n^4 + O(n^2 \log n)}.$$

Thus, the probability that a random Latin square of order n^2 is also a Sudoku square is bounded by

$$e^{-0.5n^4 + O(n^3 \log n)},$$

which goes to zero as n tends to infinity. □

In fact, the theorem shows that the number of Sudoku squares is substantially smaller than the number of Latin squares.

Concluding Remarks

It is interesting to note that the Sudoku puzzle is extremely popular for a variety of reasons. First, it is sufficiently difficult to pose a serious mental challenge for anyone attempting to do the puzzle. Secondly, simply by scanning rows and columns, it is easy to enter the "missing colors", and this gives the solver some encouragement to persist. The novice is usually stumped after some time. However, the puzzle can be systematically solved by keeping track of the unused colors in each row, in each column, and in each sub-grid. A simple process of elimination often leads one to complete the puzzle. Some of the puzzles classified under the "fiendish" category involve a slightly more refined version of this elimination process, but the general strategy is the same. One could argue that the Sudoku puzzle develops logical skills necessary for mathematical thought.

What is noteworthy is that this simple puzzle has given rise to several problems of a mathematical nature that have yet to be resolved. We have already mentioned the "minimum Sudoku puzzle" problem, where we ask if there is a Sudoku puzzle with 16 or fewer entries that admits a unique solution.

We have already commented that if only 7 or fewer colors are used, the puzzle does not admit a unique solution. One may ask if there is a puzzle using only 8 colors with a minimum number of entries. In Figure 12, we give such a puzzle that again has only 17 given entries (taken from [6]).

							1	2
				3	5			
			6				7	
7					3			
			4			8		
1								
			1	2				
	8						4	
	5					6		

Figure 12: A Sudoku puzzle using only 8 colors.

These questions suggest the more general question of determining the "minimum Sudoku" for the general puzzle of rank n. It would be interesting to determine the asymptotic growth of this minimum as a function of n. Our discussion shows that this minimum is at least $n^2 - 1$. Is it true that the minimum is $o(n^4)$?

Another interesting problem is to determine the number of Sudoku squares of rank n. More precisely, if $p_{X_n}(\lambda)$ is the chromatic polynomial of the Sudoku graph of rank n, what is the asymptotic behavior of $p_{X_n}(n^2)$? If S_n is the number of Sudoku squares of rank n, it seems reasonable to conjecture that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log S_n}{2n^4 \log n} = 1.$$

It is clear that this limit, if it exists, is less than or equal to 1. We have already noted the various symmetries of the Sudoku square. For example, applying a permutation to the elements $\{1, 2, \ldots, n^2\}$, gives us a new Sudoku square. Thus, starting from one such square, we may produce $n^2!$ new Sudoku squares. There are also the band permutations, and these are $n!$ in number, as well as the stack permutations, which are also $n!$ in number. We may permute the rows within a band as well as columns within a stack and each of these account for $n!^n$ symmetries. In addition, we can take the transpose of the square. In total, this generates a group of symmetries, which can be viewed as a subgroup of $\mathbb{S}_{n4}$. It would be interesting to determine the size and structure of this subgroup. If we agree that two Sudoku squares are *equivalent* if one can be transformed into the other by performing a subset of these symmetries, then an interesting question is the asymptotic behavior of the number S_n^*, of the number of inequivalent Sudoku squares of rank n.
The question of determining the asymptotic behavior of S_n and S_n^* seems to be as difficult as the enumeration of the number of Latin squares of order n. In this context, there are some partial results. A $k \times n$ Latin rectangle is a $k \times n$ matrix with entries from $\{1, 2, \ldots, n\}$ such that no entry occurs more than once in any row or column. Godsil and McKay [2] have determined an asymptotic formula for the number of $k \times n$ Latin rectangles for $k = o(n^{6/7})$. This suggests that we consider the notion of a *Sudoku rectangle* of rank (k, n) with n^2 columns and kn rows with entries from $\{1, 2, \ldots, n^2\}$ such that no entry occurs more than once in any row or column or each $n \times n$ sub-grid. It may be possible to extend the methods of [2] to study the asymptotic behavior of the Sudoku rectangles of rank (k, n) for k in certain ranges.

Acknowledgements. We thank Cameron Franc, David Gregory, and Akiko Manada for their helpful comments on an earlier version of this paper.

We also thank Jessica Teves for assistance in the literature search.

References

1. S. BAMMEL and J. ROTHSTEIN, The number of 9×9 Latin squares, *Discrete Math.* **11** (1975), 93-95.

2. C. D. GODSIL and B. D. MCKAY, Asymptotic enumeration of Latin rectangles, *J. Comb. Theory Ser. B* **48** (1990), no. 1, 19-44.

3. B. FELGENHAUER and A. F. JARVIS, Mathematics of Sudoku I, *Mathematical Spectrum* **39** (2006), 15-22.

4. E. RUSSELL and A. F. JARVIS, Mathematics of Sudoku II, *Mathematical Spectrum* **39** (2006), 54-58.

5. J. H. VAN LINT and R. M. WILSON, A Course in Combinatorics, Cambridge University Press, 1992.

6. See *http://www.csse.uwa.edu.au/gordon/sudokumin.php*.

Agnes M. Herzberg is professor emeritus of mathematics at Queen's University, Canada. Her email address is *herzberg@post.queensu.ca*.

M. Ram Murty is professor of mathematics at Queen's University, Canada. His email address is *murty@mast.queensu.ca*.

Research of both authors is partially supported by Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) grants.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 206 (2007), 21–23

Endlich: Filz-Medaillen an Wiener Professoren vergeben!

Karl Sigmund
Universität Wien

Einem ehrwürdigen akademischen Brauch gemäß wird eine Professur zumeist dann besetzt, wenn der vorige Inhaber ausgeschieden (oder hingeschieden) ist. Schon das Wort „Planstelle“ ist eigentlich deprimierend, so gern man eine solche auch antritt. Den wissenschaftlichen Fortschritt kann man ja nicht planen. Schon gar nicht sollte man ihn demographischen Zufälligkeiten überlassen. Etwas mehr Marktwirtschaft täte gut: zumindest mehr Rücksicht, auch bei Professuren, auf Angebot und Nachfrage in den einzelnen Fächern, denn diese ändern sich rasch.

Das hat der WWTF beherzigt, der Wiener Wissenschafts- und Technologiefonds, der erst vor fünf Jahren gegründet worden ist. Er finanziert Stiftungsprofessuren. Die Finanzierung ist auf fünf Jahre ausgelegt: dann sollen die Universitäten übernehmen. Eine Konstruktion, die auch die Rektoren befriedigt, war nicht leicht zu finden. Aber sie gelang. Das ist, weit über die Wiener Stadtgrenzen hinaus, eine bemerkenswerte Entwicklung.

Die ersten beiden Stiftungsprofessuren gingen an die Bioinformatik. Wer wie ich miterleben musste, wie endlos lang es gedauert hat, bis hierzulande eine Lehrkanzel für Genetik etabliert wurde (an Mendels Universität!), wird abschätzen können, wie wertvoll die rasche Installierung der Bioinformatik ist. Ein besonderes Herz scheint der WWTF aber für die angewandte Mathematik zu haben. Neben zwei höchst erfolgreichen Calls über „Mathematik und?“ sind nunmehr auch zwei Stiftungsprofessuren auf diesem Gebiet ausgeschrieben und am 1. Oktober 2007 auch schon besetzt worden: nämlich eine in „Mathematik und Finanzwissenschaften“, die andere in „Mathematik und Biologie“. Die Fächer wurden nicht willkürlich ausgewählt, sondern drängten sich nach einer sehr sorgfältigen Prüfung des wissenschaftlichen Potentials an den Wiener Universitäten geradezu auf. Die Auswahl unter den zahlreichen Bewerbungen erfolgte durch hochkarätige internationale Jurys und stieß auf allgemeine Begeisterung in den betroffenen wissenschaftlichen Gemeinschaften. Und dass der WWTF-Schwerpunkt auf der

ISSN 0020-7926

angewandten Mathematik der weiteren Entfaltung der reinen Mathematik nicht schadet, zeigt sich am heurigen Startpreis für Lamel und am Wittgensteinpreis für Krattenthaler.

Die WWTF Stiftungsprofessur für Finanzmathematik ging an Damir Filipovic. Er wurde vom Lehrstuhl für Finanz- und Versicherungsmathematik an der Ludwig-Maximilian-Universität nach Wien wegberufen. Der 37jährige Filipovic wuchs in der Schweiz auf, er promovierte an der ETH Zürich und verbrachte Postdoc-Jahre in Stanford und Princeton. Besonders hervorzuheben ist seine Verbindung von beinahe klassisch anmutender Funktionalanalysis mit praktischen Aufgaben: so war er maßgeblich an der Entwicklung des Schweizer Solvenztests beteiligt, der von allen Schweizer Versicherungsunternehmen durchgeführt wird und antizipiert, was EU-weit unter 'Solvency II' zur Anwendung kommen wird: ein Verfahren zur Messung aller technischen und finanziellen Risiken, die ein Versicherungsunternehmen eingeht. Filipovic wird im neu geschaffenen Vienna Institute of Finance über optimale Kapital- und Risikostrukturen forschen.

Die WWTF-Stiftungsprofessur für Biomathematik ging an den ebenfalls 37jährigen Joachim Hermisson, der zunächst in Tübingen theoretische Physik studierte. Er ging dann als postdoc an das Departement of ecology and evolutionary biology in Yale, und kehrte dann mit einem Emmy Noether-Stipendium nach Deutschland zurück, auch er an die Ludwig-Maximilian-Universität in München, wo er eine Gruppe in theoretischer Populationsgenetik aufbaute. Er interessiert sich besonders für die Wechselwirkungen innerhalb des Genoms und zwischen Genom und Umwelt sowie für die Evolution der Evolvierbarkeit. Da man jetzt so viele Genome gut kennt, lässt sich nach sogenannten 'genetic sweeps' suchen (da reißt ein vorteilhaftes Gen in seinem Siegeszug gleich die ganze Umgebung mit). Das kann Information liefern über selektiv vorteilhafte Gene und also auch für den Zusammenhang von Genotyp mit Phänotyp, eine bis vor Kurzem noch kaum zugängliche, grundlegende Frage der Biologie. Hermisson gehört sowohl zur Fakultät für Mathematik der Universität Wien als auch zum Institut für molekulare Biologie in der Bohrgasse.

Einer interessierten Öffentlichkeit darf ich mitteilen, dass der Geschäftsführer des WWTF, Dr. Stampfer, immer schon viel zu jung ausgeschaut hat für sein Alter. Ich weiß das genau, denn Dr. Stampfer hatte sich vor mehr als zehn Jahren bei mir zu einem Gespräch angemeldet. Damals gab es den WWTF noch nicht, Stampfer war ein aufstrebender Ministerialbeamter. Ich hielt an diesem Vormittag eine mündliche Prüfung nach der anderen ab. Als Stampfer eintrat, hielt ich ihn für den nächsten Prüfling und bat ihn, die Tafel zu löschen – ich hätte im Sekretariat zu tun und käme gleich wieder zurück. Und als ich zurückkam – die Tafel blitzblank – fragte ich ganz jovial, denn der junge Mensch sah aufgeweckt aus: „Nun, was können Sie denn am besten?“

Irgendwie klärte sich dann das Missverständnis, und so weiß ich leider bis heute noch nicht, was Stampfer nun wirklich am besten kann. Aber als WWTF-Leiter


Links: Damir Filipovic und Joachim Hermisson. Rechts: die Filz-Medaille

macht er seine Sache brillant; und außerdem scheint er kein humorloser Mensch zu sein. Inzwischen weiß er genug über junge Mathematiker, um den Stellenwert der „Fields“-Medaillen einschätzen zu können. Daher überreichte er im Rahmen der Begrüßungsfeier für Filipovic und Hermisson den beiden die ‚Wiener Filz-Medaille’, die aus bestem Filz hergestellt und von einem flotten Designer-Duo entworfen worden ist. In seiner Dankesrede hielt Filipovic dann sein Erstaunen darüber fest, dass er, noch kaum angekommen, schon mit dem Wiener Filz Bekanntschaft machen durfte.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 206 (2007), 25–28

Die 48. Internationale Mathematikolympiade in Hanoi

Robert Geretschläger
Graz

Zum bereits achten Mal nahm ich in diesem Jahr an einer Internationalen Mathematikolympiade (IMO) teil, aber zum ersten Mal in der Rolle des Team Leaders. Aus diesem Anlass habe ich während der Veranstaltung eine Art Tagebuch des Geschehens geführt, der vorliegende Text ist eine Kurzfassung meiner Notizen aus Vietnam.

Einen besonderen Reiz bildete bei dieser IMO der Ort des Geschehens, nämlich die Sozialistische Republik Vietnam. Man konnte sich schon im Vorfeld fragen, wie sich die etwas exotisch anmutende Lokalität wohl auswirken würde. IMOs laufen ja immer nach dem gleichen Muster ab, und es ist oft gar nicht ohne Weiteres während des Geschehens erkennbar, wo man sich eigentlich befindet.

Es stellte sich zunächst einmal heraus, dass die 48. IMO offensichtlich für den Staat Vietnam von höchster Priorität war. Dies war an vielen Details zu sehen. Sowohl die Eröffnungszeremonie als auch die Abschlusszeremonie fanden unter Teilnahme höchster politischer Funktionäre (Premierminister, Präsident, Unterrichtsminister) statt, und wurden auch live im staatlichen Fernsehen national übertragen. Es wurde auch in allen Nachrichtensendungen des nationalen Fernsehens darüber ausführlich berichtet. Selbst ein Interview mit dem österreichischen Deputy Leader Heinrich Gstöttner wurde im Rahmen der Berichterstattung im nationalen Fernsehen ausgestrahlt. Derart großes öffentliches Interesse ist man von den IMO-Veranstalterländern üblicherweise nicht gewohnt.

Alle Zeremonien, die Abschlussfeier und der Wettbewerb selbst fanden im riesigen neuen Kongresszentrum Hanois statt, das erst seit einigen Monaten fertig gestellt war. Besonders auffällig waren auch die vielen IMO-Banner in Englisch und Vietnamesisch. Diese waren überall zu sehen, wo sich IMO-Teilnehmer aufhalten könnten.

Wie üblich war die Jury getrennt von den Teilnehmern untergebracht. Während die Schüler und Deputy Leader in Hanoi verweilten, wurden die Leader mit Bus-

ISSN 0020-7926

sen an die Küste verfrachtet, und zwar an die landschaftlich spektakuläre Ha Long Bay.

Nach der Ankunft war es das Wichtigste, die Konferenzunterlagen zu besorgen, vor allem die 30 Aufgaben der "Short List", von denen 6 Beispiele für den Wettbewerb auszuwählen waren. Wie üblich wurden die Aufgaben am ersten Tag noch ohne Lösungen ausgegeben, was eine realistische Einschätzung des jeweiligen Schwierigkeitsgrades wesentlich erleichtert. In diesem Jahr war es besonders bemerkenswert, dass fünf der für die Short List ausgewählten Aufgaben von Österreichern vorgeschlagen wurden. Eine stammte von Stephan Wagner (derzeit in Südafrika tätig) und vier von Gerhard Wöginger (derzeit in den Niederlanden tätig). Beide waren erfolgreiche ehemalige IMO-Teilnehmer.

Ein ungewöhnlicher Aspekt der IMO in Vietnam war die vorgeschriebene Klausur. Es scheint in diesem Land eine nationale Vorschrift für deratige Wettbewerbe zu geben, wonach bis zum Wettbewerb niemand das Hotelgelände verlassen darf. Dies drohte schon am zweiten Tag einige Leute in den Wahnsinn zu treiben, und es gab zu diesem Zeitpunkt auch schon einige interessante Geschichten zu hören. So ist etwa ein Leader in die neben dem Hotel liegende Bank zum Geld wechseln gegangen, wobei er durchgehend von einem bewaffneten Wachmann dezent begleitet wurde. Ein weiterer hat versucht kurz spazieren zu gehen, wobei er dieses Vorhaben allerdings freiwillig sofort abgebrochen hat als er bemerkte, dass ihn ein ebenfalls bewaffneter Dreimanntrupp hauteng begleitete. Ein in einer Jurysitzung gestellter Antrag, zumindest Spaziergänge im Freien in Gruppen zuzulassen wurde mit dem Hinweis abgeschmettert, es stünde dem Chef der Jury nicht zu, dies zu erlauben, da es um eine nationale Regel ginge. Trotzdem durften ab diesem Zeitpunkt Gruppen von mindestens fünf Personen hinausgehen, wenn es gerade keine Jurysitzung gab und wir schriftlich festhielten, wer geht, uns bei den Wachposten abmeldeten, immer in der Gruppe blieben, und gemeinsam wieder bis spätestens 9 Uhr Abends zurückkamen.

Nach fünf Tagen Klausur waren die Schüler in Hanoi angekommen, und es war Zeit für die Eröffnungszeremonie. Da diese in Hanoi stattfand, war es notwendig, alle in Ha Long untergebrachten Jurymitglieder und Organisatoren in Bussen dorthin zu chauffieren. Dies geschah in recht eindrucksvoller Weise mit durchgehender Polizeieskorte und Sirenengeheul, was in Hanoi selbst wegen des Dauerstaus der allgegenwärtig hupenden und einander überholenden Mopeds auch höchst vorteilhaft war, auf der freien Landstraße zwischen Reisfeldern und vereinzelten Radfahrern aber eher surreal.

Bei der eigentlichen Eröffnung ist aber "Austria" nicht nur als eines der ersten Länder beim Aufmarsch auf der Bühne aufgefallen, sondern vor allem durch einen vorbildlichen Wiener Walzer, der von Sara Kropf und Peter Gila auf die Bühne gezaubert wurde, während der Rest der Mannschaft die österreichische Fahne über die Bühne führte. Diese Bilder waren in den nächsten Tagen noch oft im Vietnamesischen Fernsehen zu bewundern.

Am nächsten Tag begann der eigentliche Wettbewerb. Während die Schülerinnen und Schüler mit rauchenden Köpfen mathematische Beweise strukturierten, durfte die Jury eine kurze Junkenfahrt in der Ha Long Bay genießen. Am zweiten Wettbewerbstag kamen die Deputy Leaders wie üblich zum Leaderquartier in Ha Long, und die Zeit der Korrektur konnte beginnen. Während die Schülerinnen und Schüler in den nächsten Tagen mehrere interessante touristische Ausflüge machen durften, oblag es uns, die Schülerarbeiten zu beurteilen. Nach gelegentlich aufwändigen Debatten konnten wir schließlich zu Punkteergebnissen gelangen, die dann in die offizielle Wertung übernommen werden konnten.

Die gesamte österreichische Mannschaft (vier Schüler davon mit IMO-Erfahrung) hatte sich gut auf die Olympiade vorbereitet. Vor dem Abflug nach Hanoi hatte es noch ein dreitägiges Trainingscamp in Eisenstadt gegeben, das von Thomas Mühlgassner organisiert worden war. Die Betreuung erfolgte dabei durch Walther Janous, Gerd Baron und Heinrich Gstöttner. Mit 80 Punkten belegte Österreich in der (inoffiziellen) Länderreihung den 42. Platz. Die ersten fünf Plätze belegten Russland mit 184 Punkten, China mit 181, Vietnam und Südkorea mit jeweils 168 und die USA mit 155. Nach einigen Jahren Pause gab es wieder eine Silbermedaille für Österreich durch Yimin Ge, und Bronzemedaillen errangen jeweils Peter Gila, Fabian Mayrhuber und Philipp Schönbauer. Georg Heise und Sara Kropf konnten sich trotz guter Ideen leider nicht in den Medaillenrängen platzieren (Bronze gab es für mindestens 14 Punkte, Silber für mindestens 21 und Gold für mindestens 29).

Insgesamt nahmen 510 Schülerinnen und Schüler aus 93 verschiedenen Ländern teil; beide Zahlen sind neue Rekordmarken. Aufgabe 6 der heurigen IMO war statistisch die schwerste Aufgabe der bisherigen IMO-Geschichte mit durchschnittlich 0,021 Punkten je Teilnehmer.

Weitere Statistiken und Informationen der heurigen IMO findet man unter *http://www.imo2007.edu.vn/index.htm*. Ab sofort gibt es auch eine offizielle Website der IMO. Unter *http://www.imo-official.org* findet man künftig die gesamte Geschichte der IMO (Aufgaben, Ergebnisse, etc.). Diese Website wird von den slowenischen Veranstaltern der IMO 2006 verwaltet.

Die 49. IMO findet vom 10. bis 22. Juli 2008 in Madrid statt, und die 50. Jubiläums-IMO in Bremen.

Aufgaben der 48. Internationalen Mathematikolympiade

1. Gegeben seien eine positive ganze Zahl n und reelle Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$. Für jedes i $(1 \leq i \leq n)$ sei
$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$
und sei
$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Man beweise für beliebige reelle Zahlen $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$:

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \tag{1}$$

(b) Man beweise, dass es reelle Zahlen $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ gibt, die Gleichheit in (1) liefern.

2. Gegeben seien fünf Punkte A, B, C, D und E, sodass $ABCD$ ein Parallelogramm ist und $BCED$ ein konvexes Sehnenviereck. Sei ℓ eine Gerade durch A, welche die Strecke DC im inneren Punkt F und die Gerade BC in G schneidet. Ferner gelte $EF = EG = EC$. Man beweise, dass ℓ die Winkelhalbierende von $\angle DAB$ ist.

3. In einem mathematischen Wettbewerb sind einige Teilnehmende miteinander befreundet. Freundschaft beruhe auf Gegenseitigkeit. Eine Gruppe von Teilnehmenden heiße Clique, wenn je zwei von ihnen befreundet sind (Insbesondere ist jede Gruppe von weniger als zwei Teilnehmenden eine Clique). Die Größe einer Clique ist die Anzahl ihrer Mitglieder. Die maximale Größe einer Clique in diesem Wettbewerb sei gerade. Man beweise, dass die Teilnehmenden so auf zwei Räume aufgeteilt werden können, dass die maximale Größe einer Clique in einem Raum gleich der maximalen Größe einer Clique im anderen Raum ist.

4. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Die Winkelhalbierende von $\angle BCA$ schneidet den Umkreis im Punkt R ($R \neq C$), die Mittelsenkrechte der Seite BC im Punkt P und die Mittelsenkrechte der Seite AC im Punkt Q. Der Mittelpunkt von BC sei K und der Mittelpunkt von AC sei L.

   Man beweise, dass die Dreiecke RPK und RQL den gleichen Flächeninhalt haben.

5. Es seien a und b positive ganze Zahlen.

   Man beweise: Wenn $4ab - 1$ ein Teiler von $(4a^2 - 1)^2$ ist, so gilt $a = b$.

6. Es sei n eine positive ganze Zahl. Gegeben sei

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\},$$

   eine Menge von $(n+1)^3 - 1$ Punkten des dreidimensionalen Raumes.

   Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Ebenen, deren Vereinigung die Menge S umfasst, aber nicht den Punkt $(0, 0, 0)$.

Anmerkung der Redaktion. Im September 2007 fand in Österreich die erste *Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade* statt. Einen Bericht findet man auf Seite 48.

Buchbesprechungen

E. del Barrio, P. Deheuvels, S. van de Geer: Lectures on Empirical Processes. Theory and Statistical Applications. (EMS Series of Lectures in Mathematics.) EMS, Zürich, 2007, IX+254 S. ISBN 978-3-03719-027-2, P/b € 39,50.

This book consists of three separate papers: (i) Eustasio del Barrio: *Empirical and Quantile Processes in the Asymptotic Theory of Goodness-of-fit Tests*, (ii) Paul Deheuvels: *Topics on Empirical processes*, (iii) Sara van de Geer: *Oracle Inequalities and Regularization*. It also contains a preface written by J. A. Cuesta Albertos and Carlos Matrán.

From the preface the reader can learn that the above three papers are based on the lectures of the authors given on an EMS Summer School on Empirical Processes Laredo (Spain) in September 2004.

The main aim of this book (according to the preface) is "to get a sound idea of the main techniques and results that today comprise the Empirical Processes toolbox. They give not only a wide panorama of the points of view adopted by the main schools of contributors to the theory. Moreover, through these lectures one can even analyze the gains that the adoption of one or other point of view could give when addressing a particular problem."

The authors of the the preface and the first two lectures consider the invariance principles as the main tool of the theory of empirical processes.

E. del Barrio collects the most important invariance principles and presents their nicest applications like goodness of fit in parametric and non-parametric case, tests based on Wasserstein distance, correlation and regression tests. The last chapter of this lecture is devoted to the properties and applications of the quantile process.

P. Deheuvels emphasizes the theoretical results of the approximation of the empirical and related processes by Gaussian processes. A significant part of the lecture investigates the weighted empirical processes.

The lecture of S. von de Geer is the most applied part of this volume. She wishes to show that one can study the properties (even their limit properties) of the Empirical Processes without invariance principle. The reader can learn from this lecture the theory and practical use of most popular statistical methods like M-estimator (penalized M-estimator), density estimation, maximum likelihood method, regression estimation.

P. Révész (Wien)

S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy: Algorithms in Real Algebraic Geometry. With 40 Figures. (Algorithms and Computation in Mathematics, Vol. 10) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2003, VIII+602 S. ISBN 3-540-00973-6 H/b € 69,95.

Dieses inzwischen bereits in der zweiten Auflage erschienene inhaltsreiche Werk unterscheidet sich in mehrfacher Hinsicht von anderen Monographien zur algorithmischen algebraischen Geometrie. Zum einen wird auf den ersten 240 Seiten eine weitgehend geschlossene Darstellung der im 2. Teil benötigten mathematischen Grundlagen aus Algebra, Geometrie, Topologie und Logik präsentiert. Hier findet man etwa Puiseux-Reihen und den Hilbertschen Nullstellensatz ebenso wie die Euler-Riemann-Charakteristik, Morsetheorie oder den Satz von Sard. Zum zweiten liegt ein Schwerpunkt auf semialgebraischen Varietäten, also den Lösungsmengen einer endlichen Anzahl von polynomialen Gleichungen und Ungleichungen.

Der zweite, rund 340 Seiten umfassende Teil ist algorithmischen Fragen gewidmet. Hier kommt der Abzählung der reellen Nullstellen univariater Polynome eine fundamentale Bedeutung zu. Diese spielt eine Rolle, wenn es etwa um die Entscheidung über die Existenz von Lösungen eines Gleichungssystems geht oder um Komplexitätsfragen oder auch um topologische Eigenschaften semialgebraischer Varietäten wie beispielsweise die Abzählung der Zusammenhangskomponenten, wie sie neuerdings bei der Bewegungsplanung in der Robotik benötigt wird.

H. Stachel (Wien)

R. E. Greene, St. G. Krantz: Function Theory of One Complex Variable. Third Edition. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 40.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2006, XIX+504 S. ISBN 0-8218-3962-4, H/b $ 79,–.

In the present third edition of this well-established graduate textbook, no new material has been added. However, many proofs and exercises have been revised. Or, as the authors describe it, “The mathematical roads that this new edition follows are the same as before, but we hope that the ride is considerably smoother.” I don’t feel there is much more to add and I can only warmly recommend this new edition to both students and teachers.

G. Teschl (Wien)

G. David: Singular Sets of Minimizers for the Mumford-Shah Functional. (Progress in Mathematics, Vol. 233.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2005, XIV+581 S. ISBN 3-7643-7182-X H/b € 118,80.

The Mumford-Shah functional is used to approximate functions by 'simpler' functions which are allowed to have singularities in some small set. It was introduced for the purposes of image segmentation in 1985 and has spawned a rich theory. Its exact definition is as follows: If Ω is a domain (mostly we think of $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$) and $u \in L^\infty(\Omega)$ is an 'image', the approximant u minimizes $J(u,K)$ where K is a closed subset of Ω and u is a function; $J(u,k)$ is a positive linear combination of $\|u-g\|_2^2$, $(n-1)$-dimensional Hausdorff measure $H^{n-1}(K)$, and $\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega\setminus K)}$.

This comprehensive work discusses the known theory in detail, and describes the state of the still unproved Mumford-Shah conjecture which in dimension 2 says that the singular sets K are essentially smooth curves except for discrete branch points. The nature of the subject makes any thorough exposition long and full of technical details. This book, which has been awarded the Ferran Sunyer i Balaguer 2004 prize nevertheless succeeds in being self-contained, and in maintaining a good style throughout. It is an indispensable resource for anyone working in that area.

J. Wallner (Graz)

L. Hathout: Crimes and Mathdemeanors. Illustrated by K. H. Hofmann. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2007, XI+196 S. ISBN-13 978-1-56881-260-1, ISBN-10 1-56881-260-4, P/b $ 14,95.

I'm afraid this is not a proper mathematics book. It is a book about criminal cases whatsoever: crimes and misdemeanors (sorry: mathdemeanors). Ravi, the main actor of the plot, is a sharp witted college student aged 14. On and off he stumbles over particular criminal cases which he successfully solves by means of mathematical logic.

A whole range of methods from graph theory, combinatorics, geometry, number theory are employed, to name but a few. Each of the different cases is presented, analysed and eventually solved in detail. The mathematics behind the story is being outlined and explained. In a short final chapter you can even read where the idea to every case originates from.

So, in a way, this book is about mathematics. But the mathematical tasks come in an unforeseen guise. They come all of a sudden. I have to admit that I took delight in reading this booklet.

J. Lang (Graz)

J. M. Howie: Fields and Galois Theory. With 22 Figures. (Springer Undergraduate Mathematics Series.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006, X+225 S. ISBN-10 1-85233-983-1, ISBN-13 978-1-85233-986-9, P/b € 34,95.

To write such a book on a widely known but genuinely non-trivial topic is a challenge. The author has to pave his way through the preparatory subjects. He has to carefully weigh each example and each application he decides to present. The whole thing ought to give a consistent picture of the subject.

J. M. Howie did exactly what it takes. And he did it with such vigour and skill that the outcome is indeed absorbing and astounding. After some preparation on groups, rings, fields and polynomials the book leads to field extensions, Galois groups and the problem of solving equations. Applications to geometry (ruler and compass constructions) are a welcome sidestep on this tour which eventually leads to insoluble quintics and the construction of regular polygons.

Every paragraph has been scheduled with utmost care and the proofs are crystal clear. On the other hand the connecting text in-between is short but really helpful and motivating. This is why the reader will never feel forlorn amidst brilliant theorems, which makes the book such a good read. To my mind, this is the best thing you can say about a serious mathematical textbook.

J. Lang (Graz)

D. Khoshnevisan: Probability. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 80). American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2007, XVI+224 S. ISBN-13 978-0-8218-4215-7, ISBN-10 0-8218-4215-3, H/b $ 45,–.

Wie der Autor in seinem Vorwort schreibt, ist das Buch aus der Notwendigkeit entstanden, graduierten Studierenden einen einsemestrigen maßtheoretisch orientierten Kurs über Wahrscheinlichkeitstheorie anzubieten. Dementsprechend knapp und gedrängt ist die Darstellung in dem ohnehin nicht allzu dicken Band. Viele Beweise sind nur skizzenhaft ausgeführt oder gänzlich weggelassen, weil der Autor voraussetzt, dass die entsprechenden Themen in Einführungskursen abgehandelt wurden. Deshalb ist das Buch auch nicht für Einsteiger ohne mathematischen Hintergrund zu empfehlen (wofür es erklärtermaßen auch nicht vorgesehen ist). Vielmehr eignet es sich als Zusatzliteratur für Leser, die mit der Materie einigermaßen vertraut sind, ihr Vorwissen abrunden oder in einem konzisen Band nachschlagen wollen.

Nach einer kurzen Wiederholung elementarer Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie werden die wichtigsten maßtheoretischen Ergebnisse wie Fortsetzungssatz, Integrale, Konvergenzarten oder der Satz von Radon-Nikodým gebracht. Daran schließen Kapitel über Produkträume, Folgen unabhängiger Zufallsvariablen mit Gesetzen der großen Zahlen, über den zentralen Grenzwertsatz, Martingale und Brownsche Bewegung an. Am Ende findet sich noch ein Kapitel über stochastische Integration. Die einzelnen Kapitel werden durch zahlreiche Beispiele und einige Anmerkungen ergänzt. N. Kusolitsch (Wien)

F. Lorenz: Algebra. Volume I: Fields and Galois Theory. With the collaboration of the translator, S. Levy. (Universitext.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006, VII+293 S. ISBN-10 0-387-28930-5, ISBN-13 978-0387-28930-4, P/b € 42,95.

This textbook is a translation of the 1987 German edition. It is an introduction into the classical parts of algebra with a focus on fields and Galois theory. The clear and well written exposition requires only some basics from linear algebra.

Classical geometrical problems concerning constructions with ruler and compass, like the construction of a regular *n*-gon in the first chapter, first lead to fundamental algebraic notions like field extensions, and later to Galois theory.

The book consists of the following chapters: 1. Constructibility with ruler and compass, 2. Algebraic extension, 3. Simple extensions, 4. Fundamentals of divisibility, 5. Prime factorization in polynomial rings. Gauss' theorem, 6. Polynomial splitting fields, 7. Separable extensions, 8. Galois extensions, 9. Finite fields, cyclic groups and roots of unity, 10. Group actions, 11. Applications of Galois theory to cyclotomic fields, 12. Further steps into Galois theory, 13. Norm and trace, 14. Binomial equations, 15. Solvability of equations, 16. Integral ring extensions, 17. Transcendence of π, 18. Transcendental field extensions, 19. Hilbert's Nullstellensatz.

The book ends with an appendix containing exercises and notes on the previous parts of the book. It also includes brief historical comments. It can be highly recommended.

A. Winterhof (Linz)

C. Reid: From Zero to Infinity. What Makes Numbers Interesting. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2006, XVII+188 S. ISBN-13 978-1-56881-273-1, ISBN-10 1-56881-273-6, P/b \$ 19,95.

Wenn ein Buch nach 50 Jahren in fünften Auflage erscheint, so spricht vieles für seine Qualität. Tatsächlich ist es spannend zu lesen, und über weite Strecken reichen schulische Mathematikkenntnisse aus. Der Inhalt wurde inzwischen erweitert und vor allem, was die Suche nach großen Primzahlen betrifft, ergänzt. Es handelt sich um eine geschickt formulierte Mischung aus der Geschichte der Mathematik und einer Einführung in mathematisches Denken. Ein Beispiel genüge: Im Kapitel *Eight* wird die Zahl 8 als $8 = 2 \times 2 \times 2$ eingeführt und dann auf die Darstellung der Kuben als Summe aufeinanderfolgender ungerader Zahlen hingewiesen, die auf Nikomachos zurückgeht. Aber letztlich landet man beim Waringschen Problem und seiner Geschichte.

F. Schweiger (Salzburg)

V. Scheidemann: Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2005, VIII+171 S. ISBN 3-7643-7490-X P/b € 25,–.

The present textbook is an example-driven introduction to selected topics from complex analysis in several variables requiring minimal prerequisites. It starts with basic multidimensional theory and then moves on with focus on extension phenomena. In particular, it covers biholomorphic maps, analytic sets and the Riemann removable singularity theorems, Hartogs' Kugelsatz, Bochner's tube theorem, Cartan-Thullen theory, and local properties of holomorphic functions including the Weierstrass preparation theorem and Hilbert's Nullstellensatz.

It is easy to read and the numerous examples and exercises make it a valuable source for students who want a brief introduction to this subject as well as teachers preparing a course.

G. Teschl (Wien)

J. Stillwell: Yearning for the Impossible. The Surprising Truths of Mathematics. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2006, XIII+230 S. ISBN-13 978-1-56881-254-0, ISBN-10 1-56881-254-X, H/b $ 29,95.

Der Autor schreibt im Vorwort: "Mathematics is a story of close encounters with the impossible because *all its great discoveries are close to the impossible*. The aim of this book is to tell the story, briefly and with few prerequisites, by presenting some representative encounters across the breadth of mathematics. With this approach I also hope to capture some of the feeling of *ideas in flux*, which is usually lost when discoveries are written up."

Das ist ihm gut gelungen. Das Buch gliedert sich in 9 Kapitel. In "The Irrational" beginnt er mit der pythagoreischen Erkenntnis, dass harmonische Tonintervalle ganzzahligen Saitenverhältnisse entsprechen und schildert, wie der davon inspirierte pythagoreische Traum, dass die ganze Welt durch natürliche Zahlen beherrscht wird, durch die Entdeckung irrationaler Verhältnisse in der Geometrie erschüttert wurde. Er erklärt dann, wie man die irrationalen Zahlen durch Vergleich mit den rationalen Zahlen beschreiben kann und geht kurz auf Dezimalbrüche und periodische Kettenbrüche für quadratische Irrationalitäten ein. Das nächste Kapitel ist den imaginären Zahlen gewidmet. Es zeigt, wie Rafael Bombelli im Jahr 1572 das Rechnen mit komplexen Zahlen so weit beherrschte, dass er die Lösung $x = 4$ der Gleichung $x^3 = 15x + 4$ aus der Cardanoschen Formel ableiten konnte. So wie Neptun schon lange vor seiner Entdeckung von Galilei gesichtet wurde (allerdings ohne zu erkennen, dass es sich dabei um einen Planeten handelt), vermutet er, dass die imaginären Zahlen schon von Diophant intuitiv vorweggenommen wurden, als er (am Beispiel der Zahl $65 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2) = 4^2 + 7^2)$ sah, dass das Produkt von Summen zweier Quadrate wieder eine Summe von zwei Quadraten ist. Im Abschnitt über die Entstehung der projektiven Geometrie, die er als Geometrie des Sehens im Gegensatz zur alten Geometrie des Messens bezeichnet, geht er speziell auf den Satz von Pappus ein und weist darauf hin, dass alle Rechenregeln der Addition und Multiplikation reeller Zahlen aus ihm abgeleitet werden können. Auf ähnliche Weise werden in den weiteren Kapiteln einige Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung, der nichteuklidischen Geometrie, der Quaternionen, der Primfaktorzerlegung und der Idealtheorie, der Topologie und der Mengenlehre behandelt.

Das Buch illustriert alle Ideen an typischen Beispielen und kann vor allem Studienanfängern sehr empfohlen werden.

J. Cigler (Wien)

K. Tapp: Matrix Groups for Undergraduates. (Student Mathematical Library, Vol. 29.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005, V+166 S. ISBN 0-8218-3785-0 P/b $ 29,–.

Matrizengruppen sind, kurz gesagt, Gruppen invertierbarer Matrizen. Diese wiederum können interpretiert werden als Bewegungen in Vektorräumen, sodass Matrizengruppen gleichzeitig algebraische und geometrische Natur aufweisen. Sie treten häufig bei der Untersuchung symmetrischer Objekte auf (z.B. von Molekülen in der Chemie, Elementarteilchen in der Physik, projektiven Räumen in der Geometrie) und erfreuen sich mannigfaltiger Anwendungen in verschiedenen Gebieten (z.B. algebraische Geometrie, komplexe Analysis, Ringtheorie, Quantenphysik, spezielle Relativitätstheorie, Fourierreihen, Kombinatorik).

Das vorliegende Buch gibt eine Einführung in die Theorie der Matrizengruppen für Studierende im ersten Studienabschnitt. Den Leser erwarten 9 Kapitel mit folgenden Inhalten: Zusammenstellung der benötigten Grundlagen über Matrizen (Kap. 1); Matrizengruppen und orthogonale Gruppen (Kap. 2 und 3); Topologie und Lie-Algebren von Matrizengruppen (Kap. 4 und 5); die Matrizen-Exponentialfunktion (Kap. 6); Matrizengruppen als analytische Mannigfaltigkeiten (Kap. 7); die Lie-Klammer und maximale Tori (Kap. 8 und 9). Jedes Kapitel beginnt mit einem motivierenden Beispiel (hauptsächlich aus der Geometrie) und schließt mit ausgewählten Übungsaufgaben zur Vertiefung des Stoffes. Am Buchschluss findet man ein kurzes Literaturverzeichnis sowie ein Stichwortverzeichnis.

Für die Lektüre reichen die üblichen Grundlagenkenntnisse aus der Algebra, linearen Algebra und Analysis völlig aus. Mit seinem Buch verfolgt der Autor die Absicht, Studierende der Mathematik in einem relativ frühen Stadium mit Matrizengruppen vertraut zu machen und damit auf einen Diplomandenkurs über Liesche Gruppen vorzubereiten. Mit Kristopher Tapps Buch liegt eine sehr nützliche und gut lesbare Kurzeinführung in das Titelthema vor. Leser, die ausführlichere Darstellungen über Matrizengruppen bzw. Liesche Gruppen benötigen, werden gerne zu den Monografien von A. Baker (2002) und M. L. Curtis (1979) bzw. B. C. Hall (2003) und W. Rossmann (2006) greifen.

A. R. Kräuter (Leoben)

R. J. Williams: Introduction to the Mathematics of Finance. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 72.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2006, VIII+150 S. ISBN 0-8218-3903-9, H/b $ 39,–.

Dieses Buch stellt eine sehr gelungene Einführung in die Grundlagen der Finanzmathematik dar. In den vier großen Kapiteln des Buches werden sowohl Märkte in diskreter Zeit als auch anhand des Black-Scholes-Modells in stetiger Zeit behandelt.

Ausgehend vom Binomialmodell in einem und danach in mehreren Zeitschritten werden die Grundbegriffe der Finanzmathematik (Bewertungsprinzip, risikoneutrales Maß) relativ intuitiv und ohne tiefgehende Wahrscheinlichkeits- oder Martingaltheorie vorgestellt. Bereits hier wird auch die Behandlung von Amerikanischen Optionen dargelegt. Etwas störend an diesem Kapitel ist, dass hier noch sämtliche Formeln anhand des nicht-diskontierten Preisprozesses formuliert sind und daher etwas komplizierter wirken als nötig.

Im darauf folgenden Kapitel werden schließlich allgemeinere diskrete Märkte (endliche Anzahl an Marktzuständen sowie an Zeitschritten) behandelt und die Begriffe aus dem vorigen Kapitel darauf verallgemeinert sowie die beiden Fundamentalsätze formuliert und bewiesen.

Der zweite Teil des Buches bespricht in zwei Kapiteln das Black-Scholes-Modell in einer sowie in mehreren Dimensionen. Obwohl hin und wieder auf den Itô-Calculus verwiesen und dieser auch benutzt wird, reichen oberflächliche Kenntnisse zum Verständnis aus. Auch diese beiden Kapiteln folgen demselben Schema wie die ersten beiden: Vorstellung des Marktes, äquivalentes Martingalmaß, Europäische Optionen, Amerikanische Optionen inklusive replizierender Handelsstrategien.

R. Kainhofer (Wien)

Internationale Mathematische Nachrichten

Atle Selberg (1917-2007)

The renowned Norwegian mathematician Atle Selberg, Professor Emeritus at the Institute for Advanced Study in Princeton, died on 6 August 2007. Among his many honors was the Fields Medal (1950) for his elementary proof of the prime number theorem.

(IMU)

"Special Semester" über Zahlentheorie in Graz

Während des Sommersemesters 2007 wurden an der Technischen Universität Graz in Zusammenarbeit mit dem nationalen Forschungsnetzwerk *Analytic Combinatorics and Probabilistic Number Theory* mehrere internationale Tagungen und Workshops veranstaltet.

Dieses besondere der Zahlentheorie gewidmete Semester begann mit den *Journées de Numération*, organisiert von Guy Barat, Peter Grabner und Jörg Thuswaldner an der TU Graz. Diese Veranstaltung war die 6. Konferenz in einer Reihe von Konferenzen, die seit 1999 veranstaltet werden. Die Tagung befasste sich mit verschiedenen Aspekten von Zahldarstellungen, damit verbundenen fraktalen Strukturen, Kombinatorik auf Wörtern und symbolischer Dynamik.

Im Folgenden wird das Vortragsprogramm wiedergegeben:

Valérie Berthé: Multidimensional continued fractions, numeration and discrete geometry.

Hiromi Ei: Stepped surfaces generated by automorphisms of the free group.

Sierk Rosema: Sturmian substitutions, cutting paths and their projections.

Paul Surer: Fractal tiles associated to generalised radix representations and shift radix systems.

Horst Brunotte: On relationships between shift radix systems and canonical number systems.

Attila Pethö: On the number of Pisot polynomials.

Jean-Louis Verger-Gaugry: On the dichotomy of Perron numbers and higher-order Parry numbers.

Attila Kovács: Algorithmic problems in the research of number expansions.

Benoît Loridant: Fractal crystallographic tilings.

Anne Siegel: Topological properties of central tiles for substitutions.

Tai-Man Tang: Can rep-tiles be wild.

Gerhard Dorfer: A digital description of the fundamental group of fractals I.

Reinhard Winkler: A digital description of the fundamental group of fractals II.

Zuzana Mazáková: Affine factor complexity of infinite words associated with simple Parry numbers.

Petr Ambroz: Defects of fixed points of subsitutions.

Lubomíra Balkova: Combinatorial and Arithmetical Properties of Infinite Words Associated with Non-simple Quadratic Parry Numbers.

Wolfgang Steiner: Signed β-expansions of minimal weight.

Clemens Heuberger: Digital expansions in quadratic algebraic number fields and their applications in cryptography.

Christiaan van de Woestijne: On noncanonical number systems.

Jean-Claude Bajard: Numeration and computer arithmetic: some examples.

Joël Rivat: On Gelfond's conjectures about the sum of digits function.

Thomas Stoll: The sum of digits of primes in $\mathbb{Z}[i]$.

Michael Drmota: Block additive functions on Gaussian integers.

Ligia-Loretta Cristea: Order statistics of the Cantor-Fibonacci distribution.

Pierre Liardet: Harmonic structure of digital sequences.

Jean-Pierre Gazeau: A generalized Weyl algebra for aperiodic spectrum.

Sébastien Ferenczi: Combinatorial structure of symmetric k-interval exchange transformations.

Víctor Sirvent: About the classification of sub-adic systems and their geometrical realizations.

De-Jun Feng: Bernoulli convolutions associated with certain algebraic numbers.

Shigeki Akiyama: Coding of an irrational rotation, a different view.

Christian Steineder: Subword complexity and projection bodies.

Michel Rigo: On the amortized complexity of the odometer.

Émilie Charlier: Structural properties of bounded languages with respect to multiplication by a constant.

Von 2.7.-6.7.2007 fand in Strobl am Wolfgangsee die Tagung *Dynamical Systems and Number Theory*, organisiert von Guy Barat, Mathias Beiglböck, Gerhard Dorfer, Peter Grabner, Klaus Schmidt, Jörg Thuswaldner und Reinhard Winkler, statt. Die Themenschwerpunkte dieser Veranstaltung waren neueste Resultate aus der Ergodentheorie und deren Anwendungen in der Zahlentheorie.

Das Programm dieser Veranstaltung in Strobl war wie folgt:

Jon Aaronson: Entropy of conservative endomorphisms.

Vitaly Bergelson: Some recent results and open problems in ergodic Ramsey theory.

Anatole Katok: Applications of harmonic analysis to measure rigidity for commuting automorphisms of the torus.

Michael Keane: A conditionally sure ergodic theorem with an application to percolation.

Jeffrey Lagarias: The Skolem-Mahler-Lech theorem and dynamical systems.

Imre Leader: The Homomorphism problem for $\beta\mathbb{N}$.

Yakov Pesin: Thermodynamics of towers and the liftability problem.

Imre Ruzsa: Meditations on the Bohr topology.

Benjamin Weiss: A new look on the "Unsolved problems" of Paul R. Halmos.

Fritz Schweiger: 2-dimensional continued fraction algorithms as dynamical systems.

Hitoshi Nakada: On the non-monotonicity of the entropy of α-continued fraction transformations.

Paul Surer: Three dimensional symmetric Shift Radix Systems.

Arno Berger: On digits and mantissae in simple dynamical systems.

Christoph Aistleitner: On the discrepancy of $\{n_k x\}$.

Manfred Madritsch: Generating normal numbers over Gaussian integers.

Yann Bugeaud: On a mixed Littlewood conjecture in Diophantine approximation.

Johan Nilsson: The fine structure of dyadically badly approximable numbers.

Jörg Schmeling: A general concept of Diophantine approximation.

Michael Hochman: Computational aspects of symbolic dynamics.

Andrei Khrennikov: P-adic dynamical systems: cyclic and ergodic behavior.

András Biró: A note on an ergodic theorem of Bourgain.

Mark Pollicott: The Selberg zeta function via one dimensional dynamics.

Richard Miles: Dirichlet series for finite combinatorial rank dynamics.

Christian Steineder: A geometric interpretation of the subword complexity.

Clemens Fuchs: Substitutions and the space filling property.

Valérie Berthé: Brun's continued fraction algorithm and discrete geometry.

Eli Glasner: Enveloping semigroups in topological dynamics.

Marek Lampart: Chaos on hyperspaces.

Fabien Durand: Topological factors of self-similar tiling systems.

Von 9. 7.-13. 7. 2007 war dem selben Themenbereich eine Sommerschule in Graz gewidmet. Die 57 internationalen Teilnehmer wurden durch ein Auswahlverfahren bestimmt. Großteils waren die Teilnehmer PhD-Studenten und junge PostDocs von renommierten Universitäten, wie etwa aus Princeton, Tel Aviv, Jerusalem, Ohio State Univ. etc. Die Sommerschule wurde vom FWF-Präsidenten Christoph Kratky eröffnet und es wurden vier hochaktuelle und attraktive Vortragsserien angeboten:

Vitaly Bergelson (Ohio State Univ.): Ramsey Theory, Uniform Distribution, and Ergodic Theory.

Manfred Einsiedler (Ohio State Univ.): Dynamics on locally homogeneous spaces.

Douglas Lind (Univ. Washington): Dynamics, Algebra, and Number Theory.

Thomas Ward (Univ. of East Anglea): Dynamical properties of commuting automorphisms.

Mit dieser Sommerschule ist es gelungen, ein äußerst anspruchsvolles Ausbildungsprogramm im Rahmen des NFN "Analytic Combinatorics and Probabilistic Number Theory" zu etablieren.

Von 26.7.–27. 7. 2007 wurde aus Anlass des 60. Geburtstages von Hans Peter Schlickewei ein Zahlentheoretisches Kolloquium mit dem Themenschwerpunkt *Diophantische Approximationen* von Wolfgang Schmidt und Robert Tichy organisiert. Einen besonderen Schwerpunkt bildeten neueste Entwicklungen auf dem Gebiet des "Subspace Theorems".

Das Programm war wie folgt:

Wolfgang Schmidt: Das Werk Schlickeweis und Diophantische Gleichungen vom polynom-exponentiellen Typ.

Leonhard Summerer: On the automorphism group of decomposable forms.

Carlo Viola: The permutation group method in Diophantine Approximation.

Umberto Zannier: On composite lacunary polynomials and a conjecture of Schinzel.

Johannes Schoissengeier: On functions of bounded remainder.

Christoph Baxa: On the Khintchine-Levy theorem in the metrical theory of continued fractions.

Klaus Schmidt: Mixing properties of dynamical systems and additive relations in fields.

David Masser: Points on linear varieties: a theorem and an application.

Clemens Fuchs: Integral points on certain algebraic varieties.

Dale Brownawell: Algebraic independence in positive characteristic.

Hans Peter Schlickewei: Closing lecture.

Die vier Veranstaltungen während des "Special Semesters" gaben eine breite Sicht auf hochaktuelle Teilgebiete der Zahlentheorie: von kombinatorischen Fragestellungen über dynamische Systeme bis hin zu diophantischer Analysis mit starken algebraischen und geometrischen Aspekten.

Die Autoren sind der Überzeugung, dass diese Veranstaltungen einen nachhaltigen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik in Österreich haben werden und bedanken sich an dieser Stelle bei den beiden wesentlichen finanziellen Unterstützern, nämlich dem Österreichischen Wissenschaftsfonds (FWF) und der Technischen Universität Graz.

Peter Grabner und Robert Tichy (TU Graz)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Protokoll der Generalversammlung der ÖMG

Zeit: Dienstag, 18. September 2007, 20:00-20:55

Ort: Hotel Permon, Podbanske, Konferenzraum

Tagesordnung:

1. Feststellung der Beschlussfähigkeit
2. Berichte des Vorsitzenden und weiterer Vorstandsmitglieder, insbesondere des Kassiers
3. Berichte aus den Landessektionen
4. Bericht zum Entwurf der neuen Statuten
5. Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstandes
6. Neuwahl des Vorstandes und Veränderungen im Beirat
7. Verleihung der Förderungspreises
8. Allfälliges

TOP 1: Es sind 19 Mitglieder anwesend, darunter 4 Vorstandsmitglieder. Die Beschlussfähigkeit ist gegeben.

TOP 2: Tichy: Die diesjährigen Studienpreise sind an Frau DI Sarah Engleder (TU Graz) für ihre Diplomarbeit „Stabilisierte Randintegralgleichungen für äußere Randwertprobleme der Helmholtz-Gleichung“ und an Herrn Mag. Dr. Siegfried Hörmann (TU Graz, dzt. University of Utah) für seine Dissertation ‘Fluctuation analysis of dependent random processes’ ergangen. Die Verleihung fand im Rahmen der letzten Vorstandssitzung statt.

Am 6.6. 2008 findet am RISC (Research Insitute for Symbolic Computation) eine Feier anlässlich seines 20-jährigen Bestehens statt.

Die ÖMG richtet mit Unterstützung der Gruppe von Hans-Georg Feichtinger ein mathematisches Portal ein, das Software für Vortragsankündigungen, Konferenzen und Ähnliches bereitstellen soll. Es wird ein Vertrag mit Feichtinger für 5 Jahre abgeschlossen. Die Kosten betragen 5.000 Euro, die in zwei Raten ausbezahlt werden. Ein erster Test wird die ÖMG-Tagung 2009 in Graz sein.

Wien hat sich für die EMS-Tagung 2012 beworben. Drmota und Krattenthaler haben die entsprechenden Unterlagen zusammengestellt. Ende September 2007 findet ein Besuch von EMS-Verantwortlichen statt. Mitbewerber sind Krakau und Prag. Die Entscheidung soll im Frühjahr 2008 fallen.

Drmota (für die IMN): Monika Ludwig ist wegen ihres Rufs nach New York aus der Redaktion ausgeschieden. Hans Humenberger (Uni Wien) wurde neu aufgenommen und soll insbesondere Aspekte der Schulmathematik abdecken.

Angeregt durch Helmberg folgt eine Diskussion über das Engagement der ÖMG in Sachen Mathematikausbildung an den Schulen, Weiterbildung von MathematiklehrerInnen und Förderung von begabten SchülerInnen. Es wird über diverse Aktivitäten in dem Zusammenhang berichtet und man ist einhellig der Meinung, dass das ein zentrales Thema der ÖMG sein muss.

Der Kassier und auch sein Stellvertreter können an der Generalversammlung nicht teilnehmen, deshalb wurde Drmota beauftragt, den Bericht zu präsentieren (siehe S. 46).

TOP 3: Salzburg, vorgetragen durch Schmid in Vertretung von Hellekalek:
– Informationsgespräche des Landesvorsitzenden mit Schulklassen über das Studium der Mathematik sowie über Berufsaussichten und Berufsbilder von Mathematikerinnen und Mathematikern;
– Kurzvorträge des Landesvorsitzenden vor Schulklassen über Themen der mathematischen Forschung (im Bereich angewandte Zahlentheorie);
– weiters wurden Gastvorträge mitfinanziert bzw. eine Ausfallshaftung für Gastvorträge übernommen. (Anmerkung: Die Haftung musste nicht in Anspruch genommen werden.)
– Regelmäßig wiederkehrende (Werbe-)Aktionen sind zum Beispiel eine kostenlose zweijährige Neu-Mitgliedschaft in der ÖMG für den/die jeweilige Hans-Stegbucher-PreisträgerIn. Diese Mitgliedschaft wird aus den Mitteln der Landessektion finanziert, die letztjährigen Preisträger waren alle bereits ÖMG-Mitglieder, sodass hier keine Kosten anfielen.

Wien, vorgetragen durch Tichy in Vertretung von Schmeiser: Zahlreiche Aktivitäten, insbesondere am ESI und im math.space, wo beispielsweise demnächst eine Ausstellung von Herwig Hauser präsentiert wird.

Graz (Tichy): Die TU Graz engagiert sich mit Kursen zur Vorbereitung auf die Mathematikolympiade. Tichy plant weitere starke Betätigungen in Graz zur Anwerbung von talentierten Schülerinnen und Schülern für das Mathematikstudium.

TOP 4. Aufgrund des neuen Vereinsgesetzes und um einige Neuerungen vorzunehmen, hat eine Kommission – bestehend aus I. Fischer, G. Helmberg, A. Ostermann, L. Reich (Vorsitz), M. Reitzner, J. Teichmann und G. Teschl – einen Entwurf für neue Statuten erarbeitet. Der Entwurf wurde bereits im Vorstand umfangreich diskutiert und auch dem Beirat vorgelegt. Als nächster Schritt soll er über E-mail allen Mitgliedern zur Kenntnis gebracht werden. In einer weiteren Sitzung werden sich Vorstand und Beirat mit den Kommentaren auseinandersetzen. Schliesslich soll der Entwurf dann der nächsten Generalversammlung zum Beschluss vorgelegt werden.

TOP 5. Die Rechnungsprüfer Feichtinger und Szmolyan sind beide nicht anwesend, haben aber Drmota beauftragt, ihren Bericht vorzulegen: Die Abrechnung wurde stichprobenartig überprüft und es wurden keine Unregelmäßigkeiten festgestellt. P. Grabner beantragt daher die Entlastung des Vorstandes, der einhellig zugestimmt wird.

TOP 6. Tichy verlässt den Raum, und Helmberg präsentiert folgenden Vorschlag für den neuen Vorstand:

Vorsitzender: R. Tichy
stv. Vorsitzender: M. Drmota
Kassier: H. Pottmann
stv. Kassier: F. Rendl
Schriftführer: M. Oberguggenberger
stv. Schriftführerin: I. Fischer
Herausgeber der IMN: J. Wallner
Web und Öffentlichkeitsarbeit: G. Teschl (kooptiert)

In der geheimen Abstimmung des neuen Vorsitzenden entfallen 17 Stimmen auf Tichy und eine auf Oberguggenberger. Tichy nimmt die Wahl an. Kirschenhofer stellt den Antrag, den restlichen Vorstand im Block abzustimmen. Der Antrag wird angenommen und der obige Vorschlag bestätigt.

Schachermayer möchte vom Vorstand in den Beirat wechseln, wo er Gottlob ersetzen könnte, der seine Haupttätigkeit nach Oxford verlegt hat und daher aus dem Beirat ausscheiden möchte. Im Vorstand wird Schachermayer ja durch Drmota ersetzt, was insbesondere günstig wäre, wenn Wien den Zuschlag für die EMS Tagung 2012 bekäme. Die Generalversammlung stimmt den Änderungen im Beirat zu.

TOP 7. Den heurigen Förderungspreis erhält *Bernhard Lamel* (Universität Wien). F. Haslinger hält eine Laudatio auf B. Lamel, danach übergibt R. Tichy den Preis.

Die Ausschreibungsfrist für die nächsten Preise endet am 15. März 2008.

TOP 8. Auf Anregung von Kirschenhofer gratuliert die Generalversammlung Tichy zu seinem in Kürze stattfindenden 50. Geburtstag.

Vorsitz: R. Tichy *Schriftführerin:* I. Fischer

Einnahmen- und Ausgabenrechnung der ÖMG 2006

	Saldo laut Buchhaltung	nach Ausgliederung außergewöhnlicher Positionen
Einnahmen 2006		
Annoncen	1373,85	1373,85
IMN-Verkauf Inland	159,09	159,09
IMN-Verkauf EU-Ausland	1502,00	1502,00
IMN-Verkauf - Ausland	164,65	164,65
Mitgliedsbeiträge Inland	8325,82	8325,82
Mitgliedsbeiträge EU-Ausland	1475,01	1475,01
Mitgliedsbeiträge Ausland	393,00	393,00
Spenden, USt-pflichtig (Buch)	629,00	629,00
Spenden, USt-frei	344,00	344,00
Subvention für Didaktiktag in Wien	3410,00	3410,00
Tagung Einnahmen (Klagenfurt)	8478,40	
Zinsen, Kurswertänderung	481,39	481,39
Summe Einnahmen	26736,21	18257,81
Ausgaben 2006		
Ausgaben: Didaktiktag	2993,77	2993,77
Büromaterial	280,88	280,88
Mitarbeiterhonorare	4833,40	4833,40
Preise	2000,00	2000,00
Diverse Ausgaben	171,24	171,24
Druckkosten IMN, Lektorat	5249,26	5249,26
Porto	2796,90	2796,90
Mitgliedsbeiträge (OCG, EMS)	2273,51	2273,51
Vortragsspesen, Bewirtungen, Reisesp.	3682,96	3682,96
Buchungs- und Bankgebühren	556,58	556,58
Mathematik-Evaluierung	188,00	
Summe Ausgaben	25026,50	24838,50
Zusammenstellung		
Einnahmen	26736,21	18257,81
Ausgaben	-25026,50	-24838,50
Verlust/Überschuss	1709,71	-6580,69

Laudatio für Bernhard Lamel anlässlich der Verleihung des Förderungspreises der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Bernhard Lamel wurde 1971 in Wien geboren, ging in Wien und Klosterneuburg zur Schule und begann das Studium der Mathematik 1990 an der Universität Wien. Das Studienjahr 1995/96 verbrachte er an der University of California at San Diego. 1997 schloss er das Diplomstudium der Mathematik an der Universität Wien ab, mit der Diplomarbeit „Die Cauchytransformation und Hardyräume" (Betreuer F. Haslinger). Von 1998 bis 2000 studierte er an der University of California at San Diego und beendete 2000 sein PhD Studium mit der Arbeit "Mappings between real submanifolds in complex spaces of different dimensions" (Betreuer: Salah M. Baouendi und Linda P. Rothschild). Danach verbrachte er als postdoc ein Jahr an der Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm und war 2001–2002 *J.L. Doob Research Assistant Professor* an der University of Illinois, Urbana-Champaign. Seit dem Wintersemester 2002/2003 ist er als Assistent, bzw. Forschungsassistent (finanziert über FWF-Projekte) an der Universität Wien tätig. 2006 habilitierte er sich an der Universität Wien mit der Habilitationsschrift "Mapping Problems in Several Complex Variables". Er erhielt 2000 den Teaching Assistant Award der University of California, San Diego und 2001 den Studienpreis der ÖMG für seine Doktorarbeit. Er wurde zu Vorträgen am Erwin Schrödinger-Institut für Mathematische Physik in Wien eingeladen, sowie an das Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, an das American Institute of Mathematics, Palo Alto, und an das Banach Center, Warschau.

Bernhard Lamel hat bis jetzt 15 wissenschaftliche Arbeiten verfasst, von denen zwei Publikationen von besonderer Bedeutung sind:

– B. LAMEL, N. MIR: Parametrization of local CR automorphims by finite jets and applications. *Journal of the Amer. Math. Soc.* **20** (2007), 519–572.
– B. LAMEL, N. MIR: Finite jet determination of CR mappings. *Advances in Math.* **216** (2007), 153–177.

In diesesen Arbeiten betrachten die Autoren reell-analytische Hyperflächen $M \subset \mathbb{C}^N$, die keine komplex-analytischen Subvarietäten positiver Dimension enthalten, und zeigen, dass für jeden Punkt $p \in M$ die lokalen reell-analytischen CR-Automorphismen, die p fix lassen, auf reell-anlytische Weise durch ihre ℓ_p-jets in p parametrisiert werden können. Als Konsequenz daraus ergibt sich eine Liegruppenstruktur auf $\mathrm{Aut}(m, p)$, die mit der Topologie verträglich ist. Weiters folgen weitgehende Verallgemeinerungen des Eindeutigkeitssatzes von H. Cartan.

Bernhard Lamel hat in seinen wissenschaftlichen Arbeiten eine Vielzahl tiefliegender Methoden in der Komplexen Analysis entwickelt, die auch in der algebraischen Geometrie, in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, in der Harmonischen Analysis und in der theoretischen Physik (String- und Twistor-Theorie) Anwendung finden.

Bernhard Lamel hat keine reguläre Anstellung an der Universität Wien. Seine vielversprechenden wissenschaftlichen Pläne konnte und kann er durch FWF-Eigenprojekte verwirklichen:

— P17222: “Mappings of real submanifolds in complex spaces” (2004–2007)
— P19667: “Mapping problems in several complex variables” (2007–2010).

(F. Haslinger, Universität Wien)

1. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade in Eisenstadt im September 2007

Knapp 30 Jahre lang bot der Österreichisch-Polnische Mathematische Wettbewerb den besten sechs Schülerinnen und Schülern der beiden beteiligten Länder, die sich bei der nationalen Mathematischen Olympiade nicht für die Teilnahme an der internationalen Mathematik-Olympiade qualifiziert hatten, die Möglichkeit, Wettbewerbserfahrung auf internationalem Niveau zu sammeln und Kontakte zu knüpfen.

Im Sommer 2007 wurde der Kreis der teilnehmenden Länder deutlich vergrößert, sodass sich insgesamt sieben Delegationen (Kroatien, Österreich, Polen, Schweiz, Slowakei, Slowenien, Tschechien) vom 20.–26. September zur ersten Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade in Eisenstadt trafen. Nach wie vor besteht der Wettbewerb aus einem Einzelwettbewerb und einem Teamwettbewerb, bei letzterem arbeiten die Schülerinnen und Schüler der jeweiligen Länder gemeinsam die Lösungen der gestellten Probleme aus.

Organisiert wurde diese erste „MEMO“ von Thomas Mühlgassner, während Gerd Baron, der bei allen Österreichisch-Polnischen Mathematischen Wettbewerben die Leitung der österreichischen Delegation inne hatte, die Leitung der Jury übernahm. Die Leitung der österreichischen Delegation lag in den Händen von Walther Janous und seinem Stellvertreter Kurt Schoißwohl.

Die österreichischen Ergebnisse waren insbesondere beim Einzelwettbewerb mit einer Silber- (Johannes Hafner) und drei Bronze-Medaillen (Stephan Eisenhaber, Joachim Orthaber und Martin Köberl) sehr erfreulich – das ergab in der inoffiziellen Länderwertung Platz 2 –, beim Mannschaftswettbewerb erreichte Österreich (zwar punktegleich mit dem drittplazierten Tschechien) entsprechend dem Reglement den fünften Platz. Gewonnen wurde der Mannschaftswettbewerb von der polnischen vor der kroatischen Mannschaft.

Im Jahr 2008 wird die 2. MEMO in Tschechien stattfinden.

(C. Heuberger)

Stellungnahme der Didaktikkommission der ÖMG zum Lehramtsstudium im Unterrichtsfach Mathematik

Um ein aktuelles und kritisch reflektiertes Bild der Mathematik und ihrer Anwendungen zu erhalten, müssen zukünftige Mathematiklehrerinnen und -lehrer ihre Ausbildung an Einrichtungen absolvieren, die Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Pädagogik in Forschung und Lehre anbieten können. Die Ausbildung der Lehrerinnen und Lehrer an Höheren Schulen muss daher weiterhin an den *Universitäten* erfolgen, wo aktive Wissenschaftler die jeweilige Lehre in ihrem Gebiet (Mathematik, Fachdidaktik, Pädagogik) abdecken. Mittelfristig sollte das auch für alle Lehrer der Sekundarstufe 1 so sein.

Die Universitäten müssen auch maßgebend in die fachliche und fachdidaktische *Fortbildung* der Mathematiklehrerinnen und -lehrer eingebunden werden.

An allen Standorten des Lehramtsstudiums im Unterrichtsfach Mathematik wird festgestellt, dass die Motivation der Lehramtsstudierenden für ihre fachliche Ausbildung im Allgemeinen geringer ist als die der Studierenden des Diplom- oder Bachelorstudiums. Diese Motivationsprobleme der Lehramtsstudierenden sind bekannt[2] und strukturell bedingt: Nach einer gut bestandenen Matura aus Mathematik und eventuell auch erfolgreicher Tätigkeit als Nachhilfelehrer bzw. Nachhilfelehrerin haben viele Studierende den Eindruck, schon (fast) alles zu wissen, was sie für den Unterricht brauchen, sowohl was das Fachwissen als auch die Vermittlung desselben betrifft. Das Lehramtsstudium wird nur als Ausleseinstrument empfunden, das für das Ziel, später in der Schule einen guten Mathematikunterricht zu geben, eigentlich nichts bringt. Es ist wichtig, dass die mit dem Lehramtsstudium befassten Lehrenden an den Universitäten diese bei den Lehramtsstudierenden verbreitete Einstellung zur Kenntnis nehmen und nicht mit Frustration und Ärger darauf reagieren oder gar den Mathematikunterricht an den Schulen dafür verantwortlich machen. Vielmehr müssen die mit dem Lehramtsstudium verbundenen Probleme angesprochen werden und entsprechende Konsequenzen für

– die Beratung der Studierenden
– die Erstellung des Curriculums und
– die Durchführung der Lehrveranstaltungen gezogen werden.

• Zur Beratung der Studierenden: Bereits bei der Studienberatung von Schülerinnen und Schülern muss deutlich darauf hingewiesen werden, dass neben den pädagogischen Fähigkeiten und der persönlichen Eignung die fachliche Qualifikation und das Interesse sowie die Freude an der Mathematik unverzichtbare Vor-

[2]Für die *Einschätzung des Lehramtsstudiums durch Lehramtsstudierende* sei auf die Untersuchung von Anina Mischau und Andrea Blunck verwiesen: „Mathematikstudierende, ihr Studium und ihr Fach: Einfluss von Studiengang und Geschlecht“, DMV-Mitteilungen 14-1/2006. Zum Thema *Wirksamkeit des Lehramtstudiums* verweisen wir auf Sigrid Blömeke: „Empirische Befunde zur Wirksamkeit der Lehrerbildung“, in Blömeke et al. (Hrsg.): Handbuch Lehrerbildung. Julius Klinkhardt. 2004, 59–91.

aussetzungen für den Beruf der Lehrerin bzw. des Lehrers im Fach Mathematik sind.

• Zur Erstellung des Curriculums: Die Fachausbildung soll die Studierenden in die Lage versetzen, zumindest die für die Schulen relevanten Themen der Mathematik einfach und verständlich erklären sowie gut motivieren zu können. Dazu ist ein sehr gutes Verständnis dieser Bereiche und ihrer wissenschaftlichen Zusammenhänge erforderlich („einfach und verständlich erklären kann man nur das, was man selbst gut verstanden hat"). Das Lehramtsstudium umfasst derzeit nur 9 Semester, davon sind ein Semester für die Diplomarbeit und ein Semester für die pädagogische und schulpraktische Ausbildung abzuziehen. Für jedes Unterrichtsfach verbleiben also dreieinhalb Semester für die fachliche und fachdidaktische Ausbildung. Deren Inhalte müssen also sehr sorgfältig ausgewählt werden, die Relevanz für das Lehramtsstudium muss erkennbar sein. Bei den Semesterempfehlungen muss darauf geachtet werden, dass für die Mathematik maximal die Hälfte der Arbeitszeit der Studierenden zur Verfügung steht. Eine Verlängerung des Lehramtsstudiums auf 10 Semester wäre sinnvoll.

• Zur Durchführung der Lehrveranstaltungen: Bei Lehrveranstaltungen, die für das Lehramtsstudium und das Diplomstudium Mathematik bzw. Technische Mathematik gemeinsam angeboten werden, muss darauf geachtet werden, dass die Inhalte für beide Studienrichtungen wichtig sind. Gemeinsame Lehrveranstaltungen sind in den meisten Universitäten nötig, weil Synergien genutzt werden müssen, um mit den personellen Ressourcen auszukommen. Sie könnten aber auch den positiven Effekt haben, dass sich Lehramtsstudierende verstärkt auch als Mathematikstudierende empfinden. Die Lehrveranstaltungen für Lehramtsstudierende müssen sowohl gute mathematische Qualität als auch Relevanz für den Schulunterricht haben.

• Der systematische Aufbau der Mathematik sollte im Studium von Grund auf neu erfolgen. Das heißt nicht, dass Verständnis und Fertigkeiten aus dem Schulunterricht unwichtig wären – im Gegenteil! – , aber beim Duktus des ganzen Aufbaus (Definitionen, Sätze, Begründungen) sollte man sich nicht auf den Schulunterricht beziehen. Dies hat mehrere Gründe: Erstens steht in der Schule nicht der präzise und streng logische Aufbau der Mathematik im Vordergrund, sondern es soll eher um Grundvorstellungen, Plausibilitätsbetrachtungen und Anwendungen des Gelernten in Aufgaben gehen. Zweitens kommen die Studierenden aus verschiedenen Schultypen (mit entsprechend verschiedenem Mathematikunterricht) und auch jene mit weniger Mathematikunterricht in der Schule sollten nicht von vornherein vom Lehramtsstudium Mathematik ausgeschlossen sein. Drittens soll weder das Motivationsproblem mancher Studierenden („Was ich eigentlich brauche, soll ich schon aus der Schule wissen") verstärkt werden, noch die leider weit verbreitete falsche Einschätzung, wonach alles, was für den Schulunterricht notwendig ist, ohnedies schon aus der Schule bekannt sei (siehe oben).

Vorträge in den Bereichen Analysis, Versicherungsmathematik und Zahlentheorie an der TU Graz

19. 1. 2007: *Arne Winterhof* (Johann Radon Institut, Linz): Stream Ciphers and Number Theory.

19. 1. 2007: *Helmut Prodinger* (Univ. Stellenbosch): Über Abstiege in geometrisch verteilten Wörtern.

2. 3. 2007: *Ilia Toli* (Eurécom, Sophia Antipolis): Advanced Encryption System – State of the Art.

15. 3. 2007: *Horst Brunotte* (Düsseldorf): Periodicity of certain piecewise affine planar maps.

11. 5. 2007: *Martin Zeiner* (TU Wien): Functional limit theorems in combinatorics.

11. 5. 2007: *Tomislav Doslic* (Univ. Zagreb): Seven (lattice) paths to log-convexity.

24. 5. 2007: *Miroslav Husek* (Karlsuniv. Prag): Extensions of continuous functions and metrics – a survey.

24. 5. 2007: *Ladislav Misik* (Univ. Ostrava): On metric dimension.

24. 5. 2007: *János Tóth* (Univ. Ostrava): Asymptotic distribution functions of certain block sequences.

1. 6. 2007: *Ralf Korn* (Univ. Kaiserslautern): Dividenden, Inflation und dynamische Mortalität.

1. 6. 2007: *Wim Schoutens* (K.U. Leuven): Levy Processes jumping into Credit Risk.

1. 6. 2007: *Jürgen Hartinger* (Kärntner Landesversicherung, Klagenfurt): Solvency II – Aktuarielle Herausforderungen im neuen Aufsichtssystem für Versicherungen.

1. 6. 2007: *Peter Rohrer* (Raiffeisen Landesbank Graz): Neue Mäkte – Chancen und Herausforderungen im Geld- und Kapitalmarktgeschäft am Beispiel der RLB Steiermark.

1. 6. 2007: *Mario Kasper* (Merkur Versicherung Graz): Auswirkungen aktueller rechtlicher Entwicklungen auf die Kalkulation in der Lebensversicherung.

1. 6. 2007: *Günther Puchtler* (Grazer Wechselseitige Versicherung): Wirkungen der Lebensversicherung auf die Unternehmensbilanz.

21. 6. 2007: *J. Kostra* (Univ. Ostrava): On normal basis of ideals in extension of degree 2l.

21. 6. 2007: *M. Matejdes* (Univ. Ostrava): Generalized notions of continuity of multifunctions.

28. 6. 2007: *V. Rijmen* (TU Graz): The design of Rijndael (AES): applications of

finite fields and coding theory.

28. 6. 2007: *Clemens Heuberger* (TU Graz): Hamming Weight of the Non-Adjacent-Form under Various Input Statistics.

28. 6. 2007: *Christiaan van de Woestijne* (TU Graz): Representations of numbers without the digit zero.

18. 10. 2007: *Gisbert Wüstholz* (ETH Zürich): Geometric Aspects of Transcendence.

18. 10. 2007: *Robert Tijdeman* (Univ. Leiden): On Words with Many Periods.

18. 10. 2007: *Jean-Paul Allouche* (CNRS, Paris): Extremal Properties of (Epi-) Sturmian Sequences and Applications.

19. 10. 2007: *Klaus Schmidt* (Univ. Wien): Mahler Measure and Entropy.

19. 10. 2007: *Reinhard Winkler* (TU Wien): Typically Regular of Irregular Distributionof Sequences.

19. 10. 2007: *Michael Drmota* (TU Wien): Digital Expansions, Prime Numbers and Uniform Distribution Modulo 1.

9. 11. 2007: *Christiane Frougny* (Univ. Paris 8): Univoque Pisot numbers.

14. 11. 2007: *Martin Goldstern* (TU Wien): Komplizierte Klone.

14. 11. 2007: *Michael Pinsker* (TU Wien): Unterverbände des Klonverbands.

30. 11. 2007: *Pierre Liardet* (Univ. Marseille): Chain sequences revisited.

14. 12. 2007: *Tomislav Doslic* (Univ. Zagreb): Graph-theoretic indicators of fullerene stability.

14. 12. 2007: *Alan Filipin* (TU Graz): The unit sum number problem of some number fields.

14. 12. 2007: *Stephan Wagner* (Univ. Stellenbosch): Some applications of number theory to graph-theoretical problems.

14. 12. 2007: *Volker Ziegler* (TU Graz): Thue Equations over function fields.

Aus der Redaktion

Mit dem neuen Vereinsjahr 2008 der ÖMG übernimmt *Johannes Wallner* (TU Graz) die Herausgabe der IMN. Er ist schon seit vielen Jahren Mitglied der Redaktion und war vor allem für die Buchbesprechungen und für das Layout der IMN verantwortlich.

Ich wünsche ihm viel Erfolg und alles Gute in dieser neuen Funktion!

Michael Drmota

Persönliches

Univ. Prof. *Christian Krattenthaler* (Univ. Wien) ist mit dem Wittgensteinpreis 2007 ausgezeichnet worden.
Priv. Doz. *Bernhard Lamel* (Univ. Wien) hat den START-Preis 2007 erhalten.

Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2008

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2008 wieder zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2006 oder 2007 eine Diplomarbeit bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Diplomarbeiten ist ein Abschluss eines Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Doktoratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlossenen Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten Mathematiker bzw. Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2008 bei mir einlangen und folgende Unterlagen enthalten:

1. Ein Exemplar der als besonders hoch qualifiziert bewerteten mathematischen Diplomarbeit bzw. Dissertation;
2. zwei begründete Bewertungen dieser Diplomarbeit bzw. Dissertation;
3. einen Lebenslauf des Kandidaten bzw. der Kandidatin einschließlich kurzer Beschreibung des Studienablaufes.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachtungskommission die Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500,– € dotiert. Jeder Preisträger erhält eine Urkunde.

Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird sie (er) auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Robert F. Tichy

Adresse:
o.Univ.-Prof. Dr. Robert F. Tichy
Institut für Mathematik der TU Graz,
Steyrergasse 30
8010 Graz

Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2008

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2008 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematiker oder Mathematikerinnen, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind. Ein wesentlicher Teil der Arbeiten muss in Österreich erbracht worden sein.

Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten habilitierten Mathematiker bzw. Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2008 bei mir einlangen und folgende Unterlagen enthalten:

1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung;
2. Publikationsliste;
3. wissenschaftlicher Lebenslauf.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine Begutachtungskommission den Preisträger oder die Preisträgerin aus. Der Preis ist mit 1.000,– € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird der Preisträger oder die Preisträgerin eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten.

Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er oder sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Robert F. Tichy

Adresse:
o.Univ.-Prof. Dr. Robert F. Tichy
Institut für Mathematik der TU Graz,
Steyrergasse 30
8010 Graz