Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83) und P. Flor (1986–99).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. e-mail *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

Vorstand:

R. Tichy (TU Graz): Vorsitzender
W. Schachermayer (TU Wien): Stellvertretender Vorsitzender
M. Drmota (TU Wien): Herausgeber der IMN
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Schriftführer
I. Fischer (Univ. Wien): Stellvertretende Schriftführerin
H. Pottmann (TU Wien): Kassier
F. Rendl (Univ. Klagenfurt): Stellvertretender Kassier
G. Teschl (Univ. Wien): Web-Beauftragter (kooptiert)

Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:

L. Reich (Graz)
A. Ostermann (Innsbruck)
H. Kautschitsch (Klagenfurt)
G. Larcher (Linz)
P. Hellekalek (Salzburg)
C. Schmeiser (Wien)
W. Schlöglmann (Didaktikkommission)

Beirat:

A. Binder (Linz)
C. Christian (Univ. Wien)
U. Dieter (TU Graz)
H. Engl (Univ. Linz)
G. Gottlob (TU Wien)
P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
E. Hlawka (TU Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
R. Mlitz (TU Wien)
W. Müller (Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
N. Rozsenich (Wien)
F. Schweiger (Univ. Salzburg)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
H. Stachel (TU Wien)
H. Strasser (WU Wien)
G. Teschl (Univ. Wien)
H. Troger (TU Wien)
W. Wurm (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionsvorsitzende gehören statutengemäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 203 (60. Jahrgang) **Dezember 2006**

Inhalt

Die Titelseite zeigt eine Schlüsselpassage aus der Arbeit von Kurt Gödel über *formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, erschienen in den „Monatsheften für Mathematik und Physik“, 38 (1931), 173–198. „17 Gen *r*“ steht für jene unentscheidbare und wahre Aussage, die ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 203 (2006), 1–16

Gödels konstruktibles Universum

Martin Goldstern

Technische Universität Wien

1 Mengentheoretische Axiome

Das Universum aller Mengen wird durch die ZFC-Axiome beschrieben. Die meisten dieser Axiome sind eigentlich „Postulate“; sie *fordern* die Existenz gewisser Mengen. So wie man in der axiomatischen Geometrie verlangt, dass es zu je zwei Punkten eine Gerade gibt, die beide Punkte enthält, verlangt das „Paarmengenaxiom“, dass es für je zwei Mengen x und y eine Menge gibt, die beide enthält:

$$\forall x \forall y \exists P (x \in P \wedge y \in P)$$

oder in einer schärferen Version, dass es eine Menge gibt, die *nur* x und y enthält:

$$\forall x \forall y \exists P \forall z (z \in P \leftrightarrow z = x \vee z = y).$$

Weitere Axiome/Postulate fordern

- die Existenz der Potenzmenge jeder Menge (also: zu jeder Menge A gibt es eine Menge B, die [genau] die Teilmengen von A enthält),
- die Existenz der Vereinigungsmenge einer Familie von Mengen (oder Menge von Mengen)
- sowie die Existenz einer unendlichen Menge.

Das unbeschränkte Komprehensionsprinzip, welches für jede Eigenschaft $E(\cdot)$ die Existenz einer Menge

$$\{x : E(x)\}$$

fordert, liefert einen Widerspruch, das Russell-Paradoxon: Es kann nämlich sicher keine Menge R geben, die genau jene x enthält, welche $x \notin x$ erfüllen. Die Intuition der meisten Mengentheoretiker führt diesen Widerspruch auf die enorme „Größe“ der postulierten Menge zurück; die Doktrin der „limitation of size“ verlangt, dass nur die Existenz „halbwegs kleiner“ Mengen postuliert werden darf.

ISSN 0020-7926

Daher beschränkt man sich auf eine schwächere Variante, das „Aussonderungsaxiom“: Zu jeder Menge A und jeder Eigenschaft $E(\cdot)$ gibt es eine Menge B, die genau die Mengen $x \in A$ enthält, die $E(x)$ erfüllen. Eine stärkere Variante des Aussonderungsaxioms ist das „Ersetzungsaxiom“: Für jede Menge A und jede „Abbildungsvorschrift“[1] F gibt es eine Menge, die genau alle $F(a)$ mit $a \in A$ enthält.

Schließlich erklärt das Extensionalitätsaxiom eine weitere charakteristische Eigenschaft von Mengen: Zwei Mengen sind (genau) dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. (Insbesondere kann es also nur eine einzige leere Menge geben.)

Die genannten Axiome[2] werden nach Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel *ZF-Axiome* genannt. Zusammen mit dem Auswahlaxiom AC bilden sie das System ZFC.

Es hat sich gezeigt, dass diese Axiome ausreichen, um praktisch alle mathematischen Konstruktionen durchzuführen. Die reellen Zahlen kann man zum Beispiel via Dedekind-Schnitte durch Mengen rationaler Zahlen repräsentieren, die rationalen Zahlen sind (als Quotientenkörper) Äquivalenzklassen von Paaren ganzer Zahlen, diese erhält man ähnlich aus den natürlichen Zahlen, und letztere kann man zum Beispiel durch die Mengen $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, etc. darstellen.

Noch wichtiger ist aber die Erfahrungstatsache, dass die ZFC-Axiome fast alle[3] in der Mathematik betrachteten Sätze entscheiden (also beweisen oder widerlegen) können; jedenfalls sind die anerkannten Beweise so gut wie immer (natürlich nur im Prinzip) auf ZFC-Axiome zurückführbar.

Diese „Erfahrungstatsache“ gilt allerdings nicht in der Mengenlehre selbst, wo die Unvollständigkeit der ZFC-Axiome eine wichtige Rolle spielt. Dies bedeutet, dass es (mengentheoretische) Aussagen gibt, die von ZFC weder bewiesen noch widerlegt werden können. Die historisch erste und wohl wichtigste solche Aussage ist die Kontinuumshypothese CH, die eine Antwort auf die Frage „Wie viele reelle Zahlen gibt es?“ gibt. Kurt Gödel hat 1938 in [5] mithilfe seines „konstruktiblen Universums“ gezeigt, dass CH von den ZFC-Axiomen nicht widerlegt werden kann (dass also die Negation von CH nicht beweisbar ist); Paul Cohen hat 1963 mit der Erfindung der „forcing“-Methode gezeigt, dass CH auch nicht beweisbar ist.

[1] Dies kann leicht formalisiert werden: eine Abbildungsvorschrift ist einfach eine Formel $\varphi(x,y)$, für die man $\forall x \in A \exists! y \varphi(x,y)$ voraussetzt. Für das eindeutig bestimmte y mit $\varphi(x,y)$ schreibt man $F(x)$.

[2] Ein weiteres Axiom, das „Regularitäts-“ oder „Fundierungsaxiom“, übergehe ich hier, da es in der Mathematik außerhalb der eigentlichen Mengenlehre so gut wie nie gebraucht wird.

[3] Dies ist die subjektive Einschätzung des Autors.

Gödels Grundidee war die folgende: In jedem Universum V der Mengenlehre (also in jeder Struktur, die die ZFC-Axiome erfüllt) kann man ein Unteruniversum L finden, welches ZFC erfüllt, aber nur jene Mengen enthält, deren Existenz aufgrund der ZFC-Axiome absolut notwendig ist, sozusagen das von der leeren Menge (oder genauer: von den Ordinalzahlen) „erzeugte" Universum. Dieses Universum L hat eine sehr übersichtliche Struktur, da man den Prozess, der die Elemente von L erzeugt, gut kontrollieren kann. Daher kann man auch „berechnen", wie viele „konstruktible" reelle Zahlen es gibt.

2 Wohlordnung und ω_1

Eine *Wohlordnung* ist eine lineare Ordnung, in der jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element hat. Wohlordnungen erlauben es, die von den natürlichen Zahlen bekannten „induktiven" Definitionen und Konstruktionen auch ins Transfinite fortzusetzen. In einer induktiven Definition einer Funktion, deren Definitionsbereich $\mathbb{N}$ sein soll, „darf" man bei der Definition des Wertes an der Stelle n bereits die Kenntnis aller Werte an früheren Stellen voraussetzen; man darf also

$$f(n) := H(\langle f(0), \ldots, f(n-1)\rangle)$$

für eine beliebige Funktion H setzen[4] und weiß, dass trotz der scheinbaren Zirkularität der Definition, in der die zu definierende Funktion nicht nur links, sondern auch rechts auftritt, es eine eindeutige bestimmte Funktion f gibt, die die obige Definition erfüllt.

Ein analoger Satz charakterisiert[5] die Wohlordnungen; für jede Wohlordnung $(W, \leq)$ und jede beliebige Vorschrift H[6] gibt es genau eine Funktion f, die auf ganz W definiert ist, und für alle $w \in W$ die Eigenschaft

$$f(w) = H(\langle f(v) : v < w\rangle) \qquad (*)$$

erfüllt.[7]

[4] Mit $\langle a, b, \ldots\rangle$ bezeichnen wir die endliche oder unendliche Folge der Objekte $a, b, \ldots$

[5] Wir interessieren uns hier nur für die eine Implikation; es gilt auch die folgende Umkehrung: wenn $(W, \leq)$ keine Wohlordnung ist, dann gibt es eine Funktion H, sodass keine Funktion f die Rekursion $(*)$ erfüllt.

[6] Falls H auf einem zu kleinen Definitionsbereich definiert sein sollte, vereinbaren wir, dass für alle $s \notin \mathrm{dom}(H)$ der Ausdruck $H(s)$ als 0 gelesen werden soll.

[7] Mit $\langle f(v) : v < w\rangle$ ist hier die (im Allgemeinen unendliche) Folge von Funktionswerten von f gemeint, die zu Argumenten $< w$ gehören; eine alternative Schreibweise wäre $f \restriction \{v : v < w\}$.

„Initiale“ Wohlordnungen

Eine Wohlordnung $(W, \leq)$ heißt „initial“, wenn sie zu keinem Anfangsabschnitt $W_{x<w_0} := \{x \in W : x < x_0\}$ gleichmächtig[8] ist. Wenn $(W, \leq)$ nicht initial ist, so sei w^* das kleinste Element mit $W \approx W_{<w^*}$. Die Wohlordnung $(W_{<w^*}, \leq)$ ist dann initial; wegen $W \approx W_{<w^*}$ lässt sich auch W initial wohlordnen.

Beispiel einer transfiniten Konstruktion

Mit transfiniter Induktion entlang einer initialen Wohlordnung von $\mathbb{R}^3$ kann bewiesen werden, dass der dreidimensionale Raum sich als disjunkte Vereinigung von kongruenten Kreisen (oder anderen Figuren) schreiben lässt.

Die Kardinalität von $\mathbb{R}$ heißt auch „das Kontinuum“. Wir werden eine initiale Wohlordnung verwenden; daher hat jeder Anfangsabschnitt unserer Wohlordnung weniger als Kontinuum viele Elemente.

Zunächst überlegt man, dass $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}^2$ (daher auch zu $\mathbb{R}^3$) gleichmächtig ist. Man kann sogar abzählbare Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine stetige Bijektion $f : \mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R}^2 \setminus B$ explizit angeben. Insbesondere gibt es also Kontinuum viele Punkte im $\mathbb{R}^3$, und auch Kontinuum viele Ebenen durch jeden Punkt.

Sei nun $(\mathbb{R}^3, \prec)$ eine initiale Wohlordnung.

Wir definieren eine Familie $(C_r : r \in \mathbb{R}^3)$ von kongruenten Kreisen mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $r \in \mathbb{R}^3$: $r \in C_r \subseteq \mathbb{R}^3$
2. Für alle $r, s \in \mathbb{R}^3$: $C_r \neq C_s \Rightarrow C_r \cap C_s = \emptyset$.

Wenn wir den Kreis C_r definieren, dürfen wir annehmen, dass $(C_s : s \prec r)$ schon definiert ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

– Wenn $r \in \bigcup_{s \prec r} C_s$ liegt, sei $C_r := C_s$ für jenes s mit $r \in C_s$.
– Wenn nicht, dann wählen wir eine Ebene E, die zwar den Punkt r enthält, aber keinen Kreis C_s mit $s \prec r$ ganz enthält. (So eine Ebene gibt es, denn die bisherigen Kreise spannen ja weniger als Kontinuum viele Ebenen auf.)

  Die Ebene E enthält also von jedem Kreis C_s, $s \prec r$, höchstens 2 Punkte. Unter allen zu C kongruenten Kreisen in E, die durch den Punkt r gehen, gibt es also weniger als Kontinuum viele, die einen der C_s, $s \prec r$, treffen; wir wählen als C_r einen Kreis in E, der r enthält und zu allen früheren C_s disjunkt ist.

Diese und ähnliche transfinite Konstruktionen werden ausführlich in Ciesielskis Buch [2] vorgestellt.

[8] Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig ($A \approx B$), wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt. (Diese Bijektion ist im Allgemeinen nicht strukturerhaltend.)

ω und ω_1

Die natürlichen Zahlen sind bis auf Isomorphie die einzige Wohlordnung $(W, \leq)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. W ist unendlich
2. Für alle $x \in W$ ist $\{y \in W : y < x\}$ endlich.

Die zweite Eigenschaft besagt, dass jede beschränkte Menge endlich ist. Überdies gelten auch die folgenden Aussagen:

3. Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist beschränkt.
4. Jede unendliche (= unbeschränkte) Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist gleichmächtig mit $\mathbb{N}$ selbst, und es gibt sogar einen eindeutig bestimmten Ordnungsisomorphismus $f_A : \mathbb{N} \to A$, der auch durch $f_A(n) = \min(A \setminus \{ f_A(k) : k < n\})$ charakterisiert wird.
5. Jede unendliche Wohlordnung W, die nicht isomorph zu den natürlichen Zahlen ist, muss ein $x_0 \in W$ enthalten, sodass $W_{<x_0}$ isomorph zu den natürlichen Zahlen ist, nämlich $x_0 := \min\{y : W_{<y} \text{ unendlich}\}$.

Analog definieren wir, dass eine unendliche Wohlordnung $(W, \leq)$ vom *Typ* ω_1 ist, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. W ist überabzählbar.
2. Für alle $x \in W$ ist $\{y \in W : y < x\}$ abzählbar.[9]

In der Mengenlehre wird eine spezielle Wohlordnung vom Typ ω_1 ausgezeichnet, die als Repräsentant ihrer Isomorphieklasse dient; sie heißt dann einfach ω_1.

Auch die oben genannten weiteren Eigenschaften von $\mathbb{N}$ haben ihre natürlichen Analogien:

3. Jede abzählbare Teilmenge von ω_1 ist beschränkt.
4. Jede überabzählbare (= unbeschränkte) Teilmenge $A \subseteq \omega_1$ ist gleichmächtig mit ω_1 selbst, und es gibt sogar einen eindeutig bestimmten Ordnungsisomorphismus $f_A : \omega_1 \to A$, der auch durch $f_A(w) = \min(A \setminus \{ f_A(v) : v < w\})$ charakterisiert wird.
5. Jede überabzählbare Wohlordnung W, die nicht isomorph zu ω_1 ist, muss ein $x_0 \in W$ enthalten, sodass $W_{<x_0}$ isomorph zu ω_1 ist, nämlich $x_0 := \min\{y : W_{<y} \text{ überabzählbar}\}$.

[9] mit „abzählbar“ ist in diesem Artikel immer „höchstens abzählbar“, also „endlich oder abzählbar unendlich“ gemeint.

Vergleichbarkeit von Wohlordnungen; Nachfolger

Für beliebige nichtisomorphe Wohlordnungen α und β muss stets gelten, dass eine der beiden (etwa α) zu einem Anfangsabschnitt der anderen (also $\{y \in \beta : y < y_0\}$) isomorph ist. Wir schreiben in diesem Fall $\alpha < \beta$.

Wenn $(I, \leq)$ eine Wohlordnung ist, verstehen wir unter $I+1$ eine Wohlordnung von $I \cup \{\infty\}$ mit einem beliebigen Objekt $\infty \notin I$, die die Wohlordnung auf I fortsetzt und $i < \infty$ für alle $i \in I$ erfüllt. Wohlordnungen der Form $I+1$ sind offenbar genau jene Wohlordnungen, die ein maximales Element haben.

Ordinalzahlen

Eine Menge A heißt *transitiv*, wenn für alle Mengen x, y aus $x \in y \in A$ auch $x \in A$ folgt, oder äquivalent $\bigcup_{y \in A} y \subseteq A$. Die später betrachteten Mengen L_α sind alle transitiv.

Eine Menge α heißt Ordinalzahl, wenn sie erstens durch die Relation $x \leq y \leftrightarrow x = y \vee x \in y$ wohlgeordnet wird und zweitens „transitiv“ ist. Beispiele für Ordinalzahlen sind

- Die Menge $3 = \{0, 1, 2\}$
- Die Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; in der Mengenlehre nennt man diese Menge meist ω.
- Die Mengen $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ und $\omega + 2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\}$ sowie die analog definierten Mengen $\omega + n$, für alle $n \in \omega$
- Die Menge $\omega + \omega = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$.
  Diese Menge ist (wie auch die vorigen) abzählbar.
- ω_1 ist die kleinste überabzählbare Ordinalzahl. Die Elemente von ω_1 sind genau die abzählbaren Ordinalzahlen.

Man kann zeigen, dass jede Wohlordnung zu genau einer Ordinalzahl isomorph ist. Die Ordinalzahlen bilden somit ein Repräsentantensystem für Isomorphieklassen von Wohlordnungen.

3 Wohlordnung des Kontinuums

Cantor prägte 1878 in seiner Arbeit [4] den Begriff der „Mächtigkeit“ einer Menge; bereits in [3] hatte er bewiesen, dass die reellen Zahlen überabzählbar sind. In [4] stellt er auch folgende Frage:

> „ … *fragt es sich, in* wie viel *und in welche Klassen die linearen Mannigfaltigkeiten*[10] *zerfallen, wenn Mannigfaltigkeiten von gleicher*

[10] In heutiger Sprechweise: unendliche Mengen reeller Zahlen.

Mächtigkeit in eine und dieselbe Klasse, Mannigfaltigkeiten von verschiedener Mächtigkeit in verschiedene Klassen gebracht werden.“

Weiters behauptet er:

> *„Durch ein Inductionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahe gebracht, dass die Anzahl der nach diesem Eintheilungsprinzip sich ergebenden Klassen eine endliche, und zwar, dass sie gleich zwei ist. [. . .] Eine genaue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit.“*

Diese Vermutung:

CH. *Jede Teilmenge von $A \subseteq \mathbb{R}$ ist entweder abzählbar oder gleichmächtig mit der ganzen Menge $\mathbb{R}$.*

wurde später „Kontinuumshypothese“ genannt. Als Motivation für die Kontinuumshypothese kann die Tatsache dienen, dass man keine solche Menge intermediärer Kardinalität finden konnte, und (zumindest rückblickend), dass man von vielen einfach definierbaren Mengen eine noch stärkere Eigenschaft beweisen kann. Der Satz von Cantor-Bendixson besagt, dass jede überabzählbare abgeschlossene Teilmenge der reellen Zahlen die Vereinigung einer abzählbaren mit einer perfekten Menge ist; jede perfekte Menge enthält aber eine Kopie der Cantormenge und ist somit gleichmächtig mit $\mathbb{R}$. Man kann auch zeigen, dass die Borelmengen (und auch noch kompliziertere Mengen) diese „perfect set property“ besitzen: jede überabzählbare Borelmenge enthält eine perfekte Menge und ist daher ebenfalls gleichmächtig mit $\mathbb{R}$.

David Hilbert wählte die Frage nach der Kardinalität des Kontinuums als die erste in seiner berühmten Liste von 23 Problemen. Gewissermaßen als Fußnote fragt Hilbert auch, ob oder wie die reellen Zahlen wohlgeordnet werden können.

Diese letzte Frage wurde bereits 1904 von Zermelo in [9] beantwortet. Unter der Voraussetzung, dass $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, die jeder nichtleeren Menge von reellen Zahlen eines ihrer Elemente zuordnet, kann man eine explizite Wohlordnung auf den reellen Zahlen definieren. (Die Definition der Wohlordnung verwendet natürlich den Parameter F.) Die Existenz einer solchen Funktion F folgt (zumindest nach Meinung vieler Mathematiker) unmittelbar aus der Anschauung; in einem formalen Zugang wird die Existenz einer solchen Funktion durch das Auswahlaxiom gefordert (oder, je nach Anschauung, „behauptet“ oder auch „garantiert“).

Wie oben erwähnt, hat jede Wohlordnung W vom Typ ω_1 die in der Kontinuumshypothese beschriebene Eigenschaft von $\mathbb{R}$ (d.h., dass also jede überabzählbare Teilmenge mit W gleichmächtig ist). Man zeigt auch leicht (ohne Auswahlaxiom), dass eine wohlordenbare Menge genau dann diese Eigenschaft hat, wenn sie im Typ ω_1 wohlgeordnet werden kann. Unter Voraussetzung einer Wohlordnung der reellen Zahlen (heutzutage scheint diese Voraussetzung nicht mehr erwähnenswert, aber für Hilbert war sie keineswegs selbstverständlich) kann man die Kontinuumshypothese also auch so formulieren:

CH. *Die reellen Zahlen lassen sich im Typ* ω_1 *wohlordnen.*

4 Definierbarkeit

Was bedeutet es, dass eine Menge (etwa von natürlichen Zahlen) „definierbar" ist? Jeder wird zustimmen, dass etwa die Menge $\{1, 14, 141, 1414, 14142, 141421, \ldots\}$, in der Anfangsabschnitte der dezimalen Entwicklung von $\sqrt{2}$ aufgelistet werden, dieses Prädikat verdient, da wir ja eine explizite Definition angeben können.[11] Aber wie kann man von einer Menge zeigen, dass sie *nicht* definierbar ist? Wie kann man eine undefinierbare Menge angeben? Gibt es solche Mengen überhaupt?

Es scheint offensichtlich, dass nur abzählbar viele Mengen definierbar sind, und da es überabzählbar viele Teilmengen der natürlichen Zahlen gibt, muss es darunter wohl auch undefinierbare geben.

Das folgende Beispiel, auch Richard-Paradoxon genannt, zeigt, dass allzu naive Überlegungen in diese Richtung leicht einen Widerspruch erzeugen können:

> Es gibt nur endlich viele „kurze" Beschreibungen, das seien Beschreibungen, die mit höchstens 1.000 Buchstaben auskommen. Also gibt es nur endlich viele natürliche Zahlen, die kurz beschrieben werden können. Sei n_0 die kleinste Zahl, die nicht kurz beschrieben werden kann.

Aber gerade habe ich n_0 mit weniger als 1.000 Buchstaben beschrieben. Seltsam ...

Eine als Rätsel formulierte Variante des Paradoxons deutet auch schon an, wie das Paradoxon gelöst werden kann:

> Was ist die größte Zahl, die mit 3 Buchstaben beschrieben werden kann?

Die naive Antwort lautet „elf", aber mit geeigneten Sprachkenntnissen kann man dies leicht übertrumpfen. Im Polnischen hat „sto" (100) nur 3 Buchstaben, im Hebräischen ist sogar 1.000 = אלף („elef"), und wenn man auch römische Zahlzeichen zulässt, erhält man mit MMM = 3.000 eine noch größere Zahl. Hier sehen wir aber, dass schon die Angabe ungenau war: wann immer man von einer

[11] Zum Beispiel: $\{n \in \mathbb{N} : \exists k\,(n^2 < 2 * 10^{2k} < (n+1)^2)\}$.

„Beschreibung“ spricht, muss man explizit die Sprache spezifizieren, in der diese Beschreibung gehalten sein soll.

Bei einer mathematischen Beschreibung muss diese Sprache und ihre Semantik auch mathematisch spezifiziert werden; das Richard-Paradoxon zeigt, dass so eine Spezifikation niemals in der Sprache selbst erfolgen kann, sondern nur in einer „Metasprache“.

Die unten stehende Gödelsche Konstruktion kann so interpretiert werden, dass man zu einer vorgegebenen Sprache nicht nur eine Metasprache, sondern auch eine Meta-Meta-Sprache, eine Meta^3-Sprache, etc. bildet, und diesen Prozess auch noch transfinit oft iteriert.

Am Richard-Paradoxon sehen wir, dass der naive Begriff der Definierbarkeit[12] nicht so leicht befriedigend formalisiert werden kann. Im Folgenden gebe ich eine (relativ schwache) mögliche Formalisierung des Definierbarkeitsbegriffs an, nämlich die „Definierbarkeit in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe mit Parameter“. Dieser Begriff erweist sich als praktisches Hilfsmittel in der Konstruktion des Gödelschen Universums, auch wenn viele intuitiv definierbare Mengen in diesem Sinn nicht definierbar sind.

Sei A eine beliebige Menge, dann bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$ die Menge aller jenen Teilmengen von A, die in der relationalen Struktur $(A, \in)$ definierbar sind, also Mengen der Form $\{x \in A : \varphi(x)\}$, mit einer beliebigen Formel φ. Wir beschränken uns hier auf Formeln in der Prädikatenlogik erster Stufe mit Parametern aus A. Das heißt, dass in solchen Definitionen Formeln verwendet werden dürfen, die (endlich viele) Elemente aus A erwähnen, die weiters die Zeichen $\in$ und $=$ sowie die logischen Junktoren $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$, $\ldots$ enthalten dürfen, und in denen alle Quantoren $\forall x$ und $\exists x$ sich nur auf Elemente (und nicht etwa Teilmengen) von A beziehen.

Für $a \in A$ definiert die Formel $x = a$ also die Menge $\{x \in A : x = a\} = \{a\}$. Da die definierbaren Teilmengen von A sicher eine Boolesche Algebra bilden, sind somit auch alle endlichen Teilmengen definierbar.

Die Formel $x \in a$ definiert die Menge $\{x \in A : x \in a\} = A \cap a$. Wenn A transitiv ist, dann gilt $A \cap a = a$ für alle $a \in A$, somit ist $A \subseteq \mathcal{D}(A)$.

Die Formel $x = x$ definiert die Menge $\{x \in A : x = x\} = A$, daher gilt $A \in \mathcal{D}(A)$.

Beispiele

Um den Begriff der erststufigen Definierbarkeit besser einordnen zu können, mag das folgende Beispiel hilfreich sein. Statt der Sprache der Mengenlehre, in der

[12] Im Gegensatz etwa zum naiven Begriff der *Berechenbarkeit* einer Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; für letzteren gibt es gleich mehrere mögliche natürliche Definitionen, die immer wieder auf den selben Begriff führen.

als einziges nichtlogisches Symbol das Relationssymbol $\in$ vorkommt, verwende ich hier die vertrautere Sprache der Körper, in der als nichtlogische Zeichen die zweistelligen Funktionssymbole $+$ und $*$ vorkommen, weiters das einstellige Funktionssymbol $-$ und die Konstanten 0 und 1:

Beispiel 1. Im Körper $(\mathbb{R},+,-,\cdot,0,1)$ der reellen Zahlen ist die Menge der positiven Zahlen definierbar, weil die Formel $x > 0$ zur Formel $\neg(x = 0) \wedge \exists y : (x = y * y)$ äquivalent ist.

Beispiel 2. Im Ring $(\mathbb{Z},+,-,\cdot,0,1)$ der ganzen Zahlen ist die Menge der positiven Zahlen definierbar.
Der naive Versuch „x ist ein Element der von 1 erzeugten Unterhalbgruppe" führt zwar nicht zu einer Formel in der Prädikatenlogik erster Stufe. Nach dem Satz von Lagrange sind aber die positiven ganzen Zahlen genau jene ganzen Zahlen, die sich als Summe von 4 Quadraten ganzer Zahlen schreiben lassen (und ungleich 0 sind); diese Eigenschaft lässt sich leicht in eine erststufige Formel fassen.

Beispiel 3. Im Körper $(\mathbb{R},+,-,\cdot,0,1)$ der reellen Zahlen ist die Menge der natürlichen Zahlen (und daher auch die Menge der ganzen Zahlen) nicht definierbar. (Das ist nicht trivial. Man kann diese Aussage als Korollar zweier Sätze von Gödel und Tarski erhalten: Gödel hat gezeigt, dass die Menge der in $\mathbb{N}$ gültigen Formeln sehr kompliziert und insbesondere unentscheidbar ist, während Tarski ein Verfahren angegeben hat, das die Gültigkeit beliebiger Formeln in $\mathbb{R}$ entscheiden kann.)

Variante: Gödel-Operationen

Die folgende alternative Konstruktion vermeidet (scheinbar) den Begriff der Definierbarkeit: Für jede Menge A sei $\mathcal{G}(A)$ die kleinste Menge, die $A \subseteq \mathcal{G}(A)$ erfüllt und unter den folgenden 10 Operationen abgeschlossen ist:

$$\begin{array}{lll} G_1(a,b) = \{a,b\}, & G_2(a,b) = a \times b, & G_3(a,b) = \in\restriction(a \times b), \\ G_4(a,b) = a \setminus b, & G_5(a,b) = a \cap b, & \\ G_6(a) \;\;= \bigcup a, & G_7(a) \;\;= \mathrm{dom}(a), & G_8(a) \;\;= \sigma_{21}(a), \\ G_9(a) \;\;= \sigma_{132}(a), & G_{10}(a) \;\;= \sigma_{231}(a), & \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{l} \in\restriction a \times b := \{(x,y) : x \in a, y \in b, x \in y\}, \\ \sigma_{12}(a) := \{(x,y) : (y,x) \in a\}, \\ \sigma_{132}(a) := \{(x,z,y) : (x,y,z) \in a\}, \\ \sigma_{231}(a) := \{(y,z,x) : (x,y,z) \in a\}. \end{array}$$

Dann kann man (mit Induktion über die Komplexität von Formeln) zeigen, dass $\mathcal{D}(A)$ genau jene Teilmengen von A enthält, die in $\widehat{\mathcal{G}}(A) := \mathcal{G}(A \cup \{A\})$ liegen,[13]

[13] Man beachte, dass hier nicht nur Elemente von A, sondern auch A selbst als Parameter der Gödelfunktionen zugelassen wird. Die Verwendung von A selbst kann als Übergang

also $\mathcal{D}(A) = \widehat{\mathcal{G}}(A) \cap \mathcal{P}(A)$. Die Konstruktion mit diesen zehn „Gödeloperationen“ ist zwar elementarer als der Zugang über Definierbarkeit, in der Praxis ist es aber sehr mühsam, eine vorgegebene definierbare Menge tatsächlich durch eine Kombination von Gödeloperationen darzustellen. (Man versuche etwa, nachzurechnen, dass für beliebige Mengen A die Menge $S = \{\{a\} : a \in A\}$ aller Singletons in $\widehat{\mathcal{G}}(\widehat{\mathcal{G}}(A))$ liegt. Dass sie in $\mathcal{D}(\mathcal{D}(A))$ liegt, kann man leicht durch eine Definition belegen, die nur den Parameter $A \in \mathcal{D}(A)$ verwendet, wie etwa die folgende

$$S = \{X \in \mathcal{D}(A) : \exists y\,(y \in A \wedge X = \{y\})\},$$

wobei $X = \{y\}$ eine Abkürzung für $y \in X \wedge \forall z\,(z \in X \to z = y)$ ist.)

In jedem Fall ist aber klar, dass für abzählbare Mengen A auch die Menge $\widehat{\mathcal{G}}(A)$ abzählbar ist. Wir können nämlich die Menge aller iterierten Gödeloperationen (wie z.B. die Abbildung, die (x,y,z) auf $G_1(G_2(z, G_{10}(x)), y)$ abbildet) in einer abzählbaren Liste $G_1, G_2, \ldots, G_{10}, G_{11}, \ldots$ anordnen (indem wir z.B. Terme für diese Iterationen zunächst nach ihrer Länge und dann lexikographisch ordnen); jedes Element von $\widehat{\mathcal{G}}(A)$ ist dann von der Form $G_n(a_1, \ldots, a_k)$ für ein $n, k \in \mathbb{N}$ mit $a_1, \ldots, a_k$ in $A \cup \{A\}$. Mit A sind aber auch $A \cup \{A\}$ und $\bigcup_j (A \cup \{A\})^j$ abzählbar.

Konstruktion von *L*

Für jede Wohlordnung[14] α werden wir eine Menge L_α angeben; L_α sind dann die „in höchstens α Schritten konstruierbaren Mengen“.

Wenn α die leere Wohlordnung ist, dann sei $L_\alpha = L_0 = \emptyset$.

Wir definieren L_α so: Wenn $\alpha = \beta + 1$, dann ist $L_\alpha = \mathcal{D}(L_\beta)$. Wenn α eine Wohlordnung ohne größtes Element ist, dann betrachten wir zunächst die Familie $(\alpha_{<x} : x \in \alpha)$ aller Anfangsabschnitte von α; diese Familie induziert eine Kette $(L_{\alpha_{<x}} : x \in \alpha)$; wir setzten L_α gleich der Vereinigung dieser Kette.[15] Man zeigt leicht, dass die Folge der L_α monoton ist: Wenn $\alpha < \beta$, dann ist $L_\alpha \subseteq L_\beta$ (und auch $L_\alpha \in L_{\alpha+1} \subseteq \beta$).

So gilt zum Beispiel (wenn wir die natürliche Zahl n als n-elementige Wohlordnung $\{0, \ldots, n-1\}$ auffassen):

---

von der Sprache zu einer Metasprache gedeutet werden, und ist auch verantwortlich dafür, dass $\widehat{\mathcal{G}}(\widehat{\mathcal{G}}(A))$ eine echte Obermenge von $\widehat{\mathcal{G}}(A)$ ist.

[14] Die hier gegebene Definition von L_α hat offenbar die Eigenschaft, dass $L_\alpha = L_\beta$ gilt, wenn die Wohlordnungen α und β isomorph sind; daher genügt es, L_α für ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen von Wohlordnungen zu definieren. Üblicherweise wird L_α auch nur für Ordinalzahlen α definiert.

[15] Wenn wir statt Wohlordnungen Ordinalzahlen betrachten, vereinfacht sich hier die Notation; für Ordinalzahlen α gilt nämlich, dass auch jedes $x \in \alpha$ Ordinalzahl ist, und überdies ist die Wohlordnung $\alpha_{<x}$ gleich der Menge x selbst. Man kann dann einfach $L_\alpha = \bigcup_{x \in \alpha} L_x$ schreiben.

$$L_0 = \emptyset, \quad L_{n+1} = \mathcal{D}(L_n) = \mathcal{P}(L_n)$$

für alle natürlichen Zahlen n. Also zum Beispiel hat $L_1 = \mathcal{P}(L_0) = \{\emptyset\}$ ein Element, und $L_2 = \mathcal{P}(L_1) = \{\emptyset, L_0\}$ hat zwei Elemente. $L_3 = \mathcal{P}(L_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{L_0\}, L_1\}$ hat vier Elemente. Die Wohlordnung aller natürlichen Zahlen wird mit ω bezeichnet; nach Definition gilt dann $L_\omega = L_0 \cup L_1 \cup \cdots$.

Mit L bezeichnen wir die Klasse aller Mengen, die in irgendeinem L_α liegen. Diese Klasse ist bereits so groß, dass sie keine Menge mehr ist.

5 *L* erfüllt ZF

Es ist klar, dass L unter allen Gödeloperationen abgeschlossen ist; daraus kann man zum Beispiel folgern, dass das Paarmengenaxiom und das Vereinigungsmengenaxiom auch im Universum L gelten.

Man kann nicht erwarten, dass mit jeder Menge $A \in L$ auch die Potenzmenge von A in L liegt. Dies ist aber gar nicht nötig, damit das Potenzmengenaxiom in L erfüllt ist. Man muss nur zeigen, dass es für jede Menge $A \in L$ eine Menge $P \in L$ gibt, die genau aus jenen Teilmengen von A besteht, die auch selbst in L liegen.

Teil 1 des folgenden Lemma besagt also einfach, dass in L das Potenzmengenaxiom gilt; Teil 2 ist entscheidend für den Beweis der Kontinuumshypothese:

Lemma (Kleine Potenzmenge). *Sei α eine unendliche Wohlordnung, und sei $A \in L_\alpha$. Dann gilt:*
1. Es gibt eine Wohlordnung β, sodass $\mathcal{P}(A) \cap L \subseteq L_\beta$. (Da $\mathcal{P}(A) \cap L$ sicher in L definierbar ist, gilt dann auch $\mathcal{P}(A) \cap L \in L_{\beta+1}$.)
2. β ist sogar kleinstmöglich: Wenn α abzählbar ist, dann kann $\beta = \omega_1$ gewählt werden; im allgemeinen Fall kann für β die kleinste Wohlordnung gewählt werden, deren Kardinalität größer als die von α ist.

Absolutheit

Wenn man eine Struktur A und eine Unterstruktur $B \subseteq A$ betrachtet, so gibt es oft Elemente von B, die in Bezug auf B andere Eigenschaften als in Bezug auf A haben. So trifft zum Beispiel die Eigenschaft $\exists y\,(y + y = x)$ (die hier durch eine Formel $\varphi(x)$ in der erststufigen Sprache der Prädikatenlogik ausgedrückt wird) für $x = 3$ zu, wenn wir die Struktur $A = (\mathbb{Q}, +, 0)$ der rationalen Zahlen betrachten, und ist falsch, wenn wir die Struktur der natürlichen Zahlen $B = (\mathbb{N}, +, 0)$ betrachten. Die genannten Sachverhalte kürzen wir mit

$$\mathbb{Q} \models \varphi(3) \quad \text{bzw} \quad \mathbb{N} \models \neg\varphi(3)$$

ab. Wir nennen eine Eigenschaft $\varphi(x)$ „absolut“ zwischen A und B, wenn für alle $b \in B$ die Äquivalenz

$$A \models \varphi(b) \quad \Leftrightarrow \quad B \models \varphi(b)$$

gilt. Der entscheidende Schritt beim Überprüfen der Gültigkeit der ZF-Axiome in L ist das folgende Lemma:

Reflexionslemma. *Sei φ eine Formel (in der Sprache der Mengenlehre). Dann gibt es eine Wohlordnung (oder Ordinalzahl) β, sodass die Formel φ absolut zwischen L und L_β ist. Überdies kann β beliebig groß (also größer als jede vorgegebene Wohlordnung α_0) gewählt werden.*

Mit diesem Hilfsmittel kann man nun das Aussonderungsaxiom und das Ersetzungsaxiom nachprüfen. Sei $A \in L$, sagen wir $A \in L_{\alpha_0}$, und sei $\varphi(x)$ eine Formel. Das Aussonderungsaxiom (in L) verlangt nun, dass es (in L!) eine Menge $B \subseteq A$ gibt, die genau jene Elemente $a \in A$ enthält, für die $L \models \varphi(a)$ gilt.

Bei der Konstruktion von L mithilfe definierbarer Mengen haben wir in die Menge L_{α_0+1} auch die Menge

$$B' := \{x \in L_{\alpha_0} : x \in A \wedge L_{\alpha_0} \models \varphi(x)\}$$

aufgenommen, weil diese Menge mit Hilfe der Formel $x \in A \wedge \varphi(x)$ in $(L_{\alpha_0}, \in)$ erststufig definierbar war. Es ist aber nicht gesagt, dass diese Menge B' gleich der gesuchten Menge B ist, da die Existenz- und Allquantoren, die in der Definition

$$B = \{x \in A : L \models \varphi(x)\}$$

vorkommen, sich ja auf ganz L beziehen; dieselben Quantoren werden in der Definition von B' aber als Quantoren über L_{α_0} interpretiert.

Das Reflexionslemma erlaubt uns nun, eine Wohlordnung β zu finden, sodass die Formel $\varphi(x)$ zwischen L_β und L absolut ist. Daraus folgt, dass die Menge

$$B = \{x \in A : L_\beta \models \varphi(x)\}$$

spätestens als Element von $L_{\beta+1}$ auftritt.

6 Eine globale Wohlordnung: *L* erfüllt ZFC

Jedes Element von $L_{\alpha+1}$ lässt sich laut Definition in der Form $G_n(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_i \in L_\alpha \cup \{L_\alpha\}$ schreiben. Jene x_i, die nicht gleich L_α sind, lassen sich wiederum als Resultat von Gödeloperationen ausdrücken, sodass schließlich jedes Element von L sich in der Form $G_n(L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_k})$ für eine geeignete Gödeloperation G_n und geeignete Wohlordnungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ schreiben lässt. Diese Darstellung ist nicht eindeutig, aber wir können jedem $x \in L$ ein eindeutiges Tupel

$$d_x = (\alpha_x, n_x, k_x, \alpha_{x,1}, \ldots, \alpha_{x,k_x})$$

mit folgende Eigenschaften zuordnen:

- G_{n_x} ist eine k_x-stellige Gödeloperation
- $x = G_{n_x}(L_{\alpha_{x,1}}, \ldots, L_{\alpha_{x,k}})$
- $\alpha_x = \max(\alpha_{x,1}, \ldots, \alpha_{x,k})$
- $d_x = (\alpha_x, n_x, k_x, \alpha_{x,1}, \ldots, \alpha_{x,k_x})$ ist das lexikographisch kleinstmögliche Tupel mit den genannten Eigenschaften.

Daraus kann man eine natürliche Ordnung auf ganz L definieren: $x < y$ genau dann, wenn d_x lexikographisch vor d_y liegt. Man überzeugt sich leicht, dass diese Ordnung sogar eine Wohlordnung ist.

Jedes Element von L ist auch Teilmenge von L und wird durch diese Ordnung somit auch wohlgeordnet. Insbesondere kann man eine Wohlordnung auf den „konstruktiblen“ reellen Zahlen explizit angeben. Die manchmal gehörte Aussage „Es mag zwar eine Wohlordnung der reellen Zahlen geben, aber diese ist intuitiv nicht vorstellbar, weil nicht definierbar“ ist also etwas ungenau. Richtig ist:

- Es gibt eine explizit definierbare Wohlordnung auf einer gewissen „großen“ (ebenfalls definierbaren) Teilmenge $\mathbb{R} \cap L$ der reellen Zahlen.
- Dass diese Teilmenge ganz $\mathbb{R}$ ist, lässt sich zwar nicht beweisen, aber auch nicht widerlegen.

Die Gödelsche Konstruktion des konstruktiblen Universum lässt sich bereits auf Basis der ZF-Axiome durchführen; das Auswahlaxiom muss dabei nicht verwendet werden. In L gilt also der Wohlordnungssatz und daher auch das Auswahlaxiom. Somit zeigt die Gödelsche Konstruktion:

Wenn ZF konsistent (= erfüllbar[16]) ist, dann ist auch ZFC konsistent.

7 CH

Da das Universum L alle Axiome von ZFC erfüllt, ist es in ZFC nicht beweisbar, dass es auch nichtkonstruktible Mengen gibt. Die Annahme *Alle Mengen liegen in L*, die üblicherweise mit $V = L$ abgekürzt wird, ist also aus den ZFC-Axiomen nicht widerlegbar. Wir zeigen nun, dass aus den Axiomen ZFC + $V = L$ die Kontinuumshypothese folgt. Es ist klar (genauer: kann mit transfiniter Induktion bewiesen werden), dass für jede abzählbare Wohlordnung α auch die Menge L_α

[16] Eine Menge von Formeln heißt konsistent, wenn aus diesen Formeln kein Widerspruch herleitbar ist; sie heißt erfüllbar, wenn es eine Struktur gibt, in der alle Formeln der Menge gelten. Nach dem Gödelschen Vollständigkeitssatz sind die konsistenten Mengen (von erststufigen Formeln) genau die erfüllbaren.

abzählbar ist. (Wenn nämlich L_α abzählbar ist, dann auch $L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha)$.) Daraus kann man leicht sehen, dass die Menge L_{ω_1} (die Vereinigung aller L_α mit abzählbarem α) gleichmächtig mit ω_1 ist.

Wir nehmen nun $V = L$ an. Aus dem oben angeführten Lemma über „kleine Potenzmengen" folgt, dass die Potenzmenge von $\omega = \{0,1,2,\dots\}$ eine Teilmenge von L_{ω_1} ist, und daher gleichmächtig mit ω_1 ist.

8 Gibt es nichtkonstruktible Mengen?

Man kann sich fragen, ob die Gödelsche Konstruktion nicht vielleicht das gesamte mengentheoretische Universum ausschöpft. Wie schon erwähnt, ist die Annahme $V = L$ nicht widerlegbar; man könnte daher erwägen, die Formel $V = L$ als zusätzliches Axiom zu den ZFC-Axiomen hinzuzufügen. Dies hätte den Vorteil, dass das neue Axiomensystem ZFC + $V = L$ die Frage nach der Kardinalität der reellen Zahlen (und auch viele andere in ZFC unentscheidbare Fragen, wie die nach der Existenz einer Suslingeraden[17]) beantworten kann.

Als Motivation für das Akzeptieren eines neuen Axioms reicht aber die Stärke dieses Axioms nicht aus. Axiome sollten doch, in einem naiven Sinn, „wahr" oder zumindest plausibel sein. Das Axiom $V = L$ scheint den meisten Mengentheoretikern nicht plausibel. Die Mengentheorie versucht ja, das „gesamte (mathematische) Universum" zu beschreiben, und möchte daher den Begriff der Menge möglichst weit fassen. Die Aussage „alle Mengen sind konstruktibel" wird hingegen als Einschränkung empfunden, weil es nichtkonstruktible Mengen ausschließt. So gut wie alle Mengentheoretiker betrachten das Universum L daher zwar als interessantes Modell von ZFC, dessen Struktur wert ist, genau untersucht zu werden, aber nicht als „richtiges" Bild des tatsächlichen mengentheoretischen Universums.

Ein beträchtlicher Teil der derzeitigen mengentheoretischen Forschung beschäftigt sich mit „großen Kardinalzahlen"; die Existenz solcher Kardinalzahlen ist zwar nicht in ZFC beweisbar, wird aber von vielen als plausibler empfunden als deren Nichtexistenz. Aus der Existenz geeigneter großer Kardinalzahlen[18] folgt aber, dass das konstruktible Universum sehr „schmal" ist, wenn man es mit dem tatsächlichen Universum vergleicht – insbesondere, dass es nur abzählbar viele konstruktible reelle Zahlen gibt.

[17] Jede lineare Ordnung mit einer dichten, abzählbaren Teilmenge ist isomorph zu einer Teilmenge von $\mathbb{R}$; eine lineare Ordnung, in der es keine überabzählbare Familie disjunkter offener Intervalle gibt, die aber nicht isomorph zu einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ (oder äquivalent: nicht separabel) ist, heißt Suslingerade.

[18] Aus jeder der folgenden Aussagen kann man beweisen, dass es nur abzählbar viele konstruktible reelle Zahlen gibt: (i) Es gibt einen freien σ-vollständigen Ultrafilter auf einer unendlichen Menge. (ii) Es gibt ein σ-additives totales Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathcal{P}([0,1]) \to [0,1]$ mit $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Literatur

1. G. Cantor. *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, volume 2 of *Teubner-Archiv zur Mathematik*. Teuber, Leipzig, 1984.
2. Krzysztof Ciesielski. *Set theory for the working mathematician*, volume 39 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
3. Georg Cantor. Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77: 258–262, 1874.
4. Georg Cantor. Über einen Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84: 242–258, 1878.
5. Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 24: 556–557, 1938. Consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, *Annals of Math. Studies* 3: 1–66, 1940.
6. Kurt Gödel. *Collected works.* The Clarendon Press, New York, 1986ff.
7. Thomas Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.
8. Jean van Heijenoort, editor. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002. A source book in mathematical logic, 1879–1931, Reprint of the third printing of the 1967 original.
9. Ernst Zermelo. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen*, 59: 514–516, 1904.

Adresse des Autors: Martin Goldstern, TU Wien, Wiedner Hauptpstr. 8–10/104, 1040 Wien. e-mail *martin.goldstern@tuwien.ac.at*

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 203 (2006), 17–21

Impressionen vom Internationalen Kongress der Mathematiker

Peter Michor
Universität Wien

"I regret that Dr. Perelman has declined to accept the Fields Medal." Sir John Ball, der Präsident der internationalen mathematischen Union, gab damit bekannt, was viele Mitglieder des Internationalen Kongresses der Mathematiker 2006 in Madrid schon vermutet hatten und wenige Geheimnisträger wussten. Über 4.000 Mitglieder und viele Begleitpersonen hatten die strengen Sicherheitsüberprüfungen geduldig ertragen, um an der Eröffnung unter dem Vorsitz des spanischen Königs Juan Carlos I teilzunehmen. Wenige Tage zuvor hatte der König endgültig zugesagt, und die Ordnung der Eröffnung war vom spanischen Hofprotokoll stark beeinflusst worden. Die drei anderen Fields-Medaillen wurden während der Eröffnung vom König überreicht: An Andrei Okounkov für seine Beiträge, die Wahrscheinlichkeitstheorie, Darstellungstheorie und algebraische Geometrie verbinden. Okounkov, ein russischer Mathematiker, der nun an der Universität Princeton arbeitet und der auch einige Zeit in Wien am Erwin Schrödinger-Institut verbracht hat, stellte in seinem Vortrag eine Formel vor: diese verbindet zwei erzeugende Funktionen, deren Koeffizienten zwei Arten der Zahl der algebraischen komplexen Kurven von festem Grad und Geschlecht sind, die durch gerade so viele Punkte in einer komplex dreidimensionalen algebraischen Varietät (ein durch Polynome beschreibbarer Raum) gehen, dass ihre Zahl positiv, aber endlich ist. Für gewisse dieser Varietäten ist das bewiesen, im Allgemeinen noch offen. Auch die Geschichte der Lösung der Poincaréschen Vermutung findet im Dreidimensionalen statt.

Terence Tao, ein australischer, 31-jähriger Mathematiker, der jetzt in Los Angeles tätig ist, ein Problemlöser höchsten Grades, erhielt die dritte Fields-Medaille für seine Arbeiten zu partiellen Differentialgleichungen, zur Kombinatorik, zur harmonischen Analysis und zur additiven Zahlentheorie. In seinem Vortrag erklärte Tao, dass man unter den Primzahlen beliebig lange arithmetische Folgen finden kann (Folgen der Art $a+k$, $a+2$k, $a+3k,\dots,a+nk$; hier ist die Schrittweite k und die Länge n). Den Beweis, den er mit Ben Green gefunden hat, nannte Tao "a sort of cheat", weil er auf Wahrscheinlichkeiten beruht und wenig Zahlentheo-

ISSN 0020-7926

rie verwendet. Leider hat man keine Kontrolle über k, daher ist immer noch nicht bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Inzwischen wurde Terence Tao auch mit einem MacArthur Fellowship ausgezeichnet.

Die vierte Fields-Medaille ging an Wendelin Werner, einen deutschen mathematischen Physiker, der nun in Paris lebt und arbeitet, für seine Arbeiten zur stochastischen Loewner-Evolution, zur Geometrie der zweidimensionalen Brownschen Bewegung und zur konformen Feldtheorie. (Seinen Vortrag habe ich leider nicht mehr gehört, weil ich zum Flughafen musste.)

Der Nevanlinna-Preis für Mathematik in den Informationswissenschaften ging an Jon Kleinberg, 35 Jahre, von der Cornell University. Er erhielt den Preis für seine Arbeiten zu Netzwerktheorie, Data Mining, komparative Genetik und Strukturanalyse von Proteinen. Sein Vortrag über die Struktur von Infortionsnetzwerken beschäftigte sich mit kleinen Welten von Internet-Benutzern und wie man diese kleinen Welten benützen kann, um in Internet-Suchmaschinen wie *Altavista*, *Google* und *Jeeves* viel schneller Rangordnungen berechnen zu können als dies ursprünglich von Brin und Page (den Gründern von *Google*) getan wurde.

Stark beeindruckt hat mich auch der Vortrag “Higher composition laws and applications” von Manjul Barghava. Er gab erst eine graphische Version der Multiplikation von binären quadratischen Formen nach Gauß, indem er die Koeffizienten an die Ecken eines Würfels verteilte und dann die Koeffzienten des Produktes vom gedrehten Würfen ablas. Das führte zu Verallgemeinerungen der Gauß-Multiplikation auf andere Räume von symmetrischen Formen und zu einer mysteriösen Verbindung zwischen solchen Multiplikationen und exzeptionellen Liegruppen. Ich denke, Barghava wird 2010 eine Fields-Medaille erhalten.

Der Internationale Kongress der Mathematiker findet seit 1897 in der Regel alle vier Jahre statt. Die Mathematik ist die einzige Wissenschaft, die ihre Einheit auf einem gemeinsamen regelmäßigen Kongress betont. J.C. Fields, der Organisator des Kongresses 1924 in Toronto, schlug vor, den Überschuss aus dem Budget seines Kongresses dazu zu verwenden, junge Mathematiker (die heute gültige Interpretation heißt unter 40) für eine hervorragende Arbeit mit einem Preis zu belohnen. Daher werden seit 1936 in der Regel alle vier Jahre während des Internationalen Kongresses der Mathematiker bis zu vier Fields-Medaillen verliehen. M. Grötschel, der Organisator des Internationalen Kongresses 1998 in Berlin, erwirtschaftete ebenfalls einen Überschuss. Dieser wird seit 2006 dazu verwendet, die Gauß-Medaille für Anwendungen der Mathematik alle vier Jahre zu verleihen. Diese Medaille ehrt Wissenschaftler, deren mathematisches Werk großen Einfluss außerhalb der Mathematik hat, in Technologie, Wirtschaft oder im Alltagsleben. Die Gauß-Medaille wurde in Madrid zum ersten Mal vergeben. Der König überreichte sie stellvertretend für Kiyoshi Itô (90) an seine Tochter. Itô ist der Begründer der stochastischen Analysis. Stochastische Differentialgleichungen spielen eine große Rolle in der Meteorologie, der Finanzmathematik, der Biologie, etc. In Österreich tätige Vertreter dieser Richtung sind Walter Schachermayer

(Wittgensteinpreis 1998) und Josef Teichmann (START-Preis 2006).

Doch der Star dieses Kongresses war abwesend: Grigori Perelman, dessen Beweis der Poincaréschen Vermutung die Aufmerksamkeit der Weltöffentlichkeit erregt hat. *"Annals of Mathematics Manifolds Destiny. A legendary problem and the battle over who solved it"* von Sylvia Nasar und David Gruber im *New Yorker* vom 28.8.2006 (siehe *http://www.newyorker.com/fact/content/articles/060828fa_fact2*). ist ein 14-seitiger Artikel, der sich wie ein Kriminalroman liest. Er hat Helden und Bösewichte und schildert rücksichtslos, aber durchaus zutreffend, die spannende Geschichte, die zu Perelmans Ablehnung der Fields-Medaille führte. Richard Hamilton aus New York hielt den Eröffnungvortrag des Kongresses über den Ricci-Fluss und erwähnte Perelman ausführlich. Seit seiner ersten Arbeit zum Ricci-Fluss im Dreidimensionalen träumte Hamilton davon, ihn zum Beweis der Poincaréschen Vermutung zu benützen. Die Ricci-Krümmung ist eine Komponente der Krümmung einer Metrik (das ist die infinitesimale Geometrie) eines Raumes, die im Vierdimensionalen der wichtigste Teil der Einstein-Gleichung der allgemeinen Relativitätstheorie ist. Man kann die Ricci-Krümmung als infinitesimalen Erzeuger eines dynamischen Systems auffassen: eine gewöhnliche Differentialgleichung am Raum der Metriken, der eine schwach hyperbolische partielle Differentialgleichung auf der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht. Sie wirkt auf die Metrik ähnlich wie Wärmeleitung und verteilt die Geometrie gleichmäßig auf den dreidimensionalen Raum, wenn sie nicht in endlicher Zeit in Singularitäten läuft: Die möglichen Singularitäten (vergleichbar schwarzen Löchern) der Geometrie kann man so beschreiben: Eine unendlich lange, unendlich dünne Zigarre (mal einem Kreis), oder eine 3-Sphäre, die nur an einem unendlich langen unendlich dünnen Hals am Raum hängt (*bubbling off*). Alles dies hat Hamilton bewiesen, doch er sah keinen Weg, die Singularitäten zu behandeln. Perelman hat in den Neunzigern des vorigen Jahrhunderts in Berkeley dieses Problem kennengelernt. Er suchte nach einer Funktion auf den Metriken, für die der Ricci-Fluss zum Gradientenfluss wird, fand sie, und nannte sie (geometrische) Entropie. Sie wächst entlang des Flusses und ist negativ unendlich auf der Zigarrensingularität. Daher tritt diese nicht auf. Die *bubbling off*-Singularitäten behandelte Perelman so, dass er den Hals abschnitt und die Wunde durch eine 3-Kappe heilte. Dann musste er sein Funktional neu berechnen und den Ricci-Fluss neu starten. Außerdem darf dies nur endlich oft geschehen: die Singularitäten dürfen sich nicht in endlicher Zeit häufen. Am Ende erhält man einen Ricci-flachen Raum. Das entspricht einer Vakuumlösung der Einsteingleichung. Im Dreidimensionalen ist das ein Raum konstanter Schnitt- (oder Gauß-) Krümmung, und für diese ist die Poincaréschen Vermutung sehr leicht zu lösen.

Perelman hat seine drei Arbeiten in den Jahren 2002 und 2003 im Preprint Server *http://www.arXiv.org* online zugänglich gemacht und sie nicht bei einer Zeitschrift eingereicht. Sie sind sehr kurz gehalten und zum Teil skizzenhaft. Drei mehrere hundert Seiten lange Artikel sind 2006 erschienen und enthalten Ausarbeitun-

John Ewing und Peter Michor

gen von Perelmans Artikel mit Hintergrund: Cao, Zhu: *A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures – Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow*, Asian Journal of Mathematics (*http://www.ims.cuhk.edu.hk/~ajm/vol10/10_2.pdf*); Morgan, Tian: *Ricci Flow and the Poincare Conjecture* (*http://de.arxiv.org/abs/math.DG/0607607*); Kleiner, Lott: *Notes on Perelman's papers* (*http://de.arxiv.org/abs/math.DG/0605667*). Die Abstracts der Artikel spielen eine Rolle im Drama um die Lösung der Poincaréschen Vermutung. Die beiden letzteren schreiben alle Ideen Perelman zu, der erste reklamiert die letzten Schritte für sich.

Das *ArXiv*, wo man Perelmans Artikel findet, wurde von Paul Ginsparg in Los Alamos begonnen. Es stellt wissenschaftliche Artikel unreferiert, aber moderiert der Wissenschaft schnell und gratis zur Verfügung. Die Gründung war eine Reaktion auch auf die hohen Preise wissenschaftlicher Journale. Das *ArXiv* ist der Gegenstand einer Wette, die beim gemeinsamen Mittagessen aller anwesenden Komiteemitglieder der Internationalen Mathematischen Union (IMU) während des Kongresses abgeschlossen wurde. Beteiligt sind John Ewing, der *Executive Director* der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft, und der Autor dieses Artikels, der von 1999–2002 Vorsitzender des Komitees für elektronische Information und Kommunikation der IMU war. Ich behaupte, dass in 20 Jahren, am 26.

August 2026, alle Artikel, die im Jänner 2006 ins *ArXiv* geladen wurden, immer noch ohne Schwierigkeiten heruntergeladen und gedruckt werden können. John Ewing bestreitet dies. Es geht um 100 Euro wertgesichert. Der Fields-Medaillenträger Vaughan Jones hat die Wette fotographisch festgehalten. Diese Wette soll weltweit in mathematischen Nachrichten publiziert werden. Der Hintergrund der Wette ist, ob man heute schon genug Gewicht auf das Langzeitarchivieren elektronischer Dokumente legt, und ob die heutigen Datenformate in 20 Jahren noch lesbar oder hinreichend in neue Formate portiert sein werden. Es geht also um die Zukunft des Wissens der Menschheit. Die Wette soll die Diskussion um diese Fragen beleben.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 203 (2006), 23–24

Nachruf auf Walter Philipp

Robert Tichy

Technische Universität Graz

Am 19. Juli 2006 starb Walter Philipp völlig unerwartet nach einer Bergtour in der Nähe von Graz. Er war weltweit bekannt, sowohl als Mathematiker als auch als Alpinist. Walter Philipp wurde 1936 in Wien geboren, wo er seine Schulbildung erhielt. Von 1955 bis 1960 studierte er Mathematik und Physik an der Universität Wien. In dieser Zeit war er auch sehr aktiv als Alpinist und als solcher international bekannt. Zum Beispiel gelang ihm (gemeinsam mit dem Physiker Dieter Flamm) die Erstbegehung einer berühmten Route in der Civetta, einer Bergkette in den italienischen Dolomiten. Nach seiner Promotion 1960 mit einer Dissertation unter der Betreuung von Edmund Hlawka an der Universität Wien wurde er dort Assistent. Seine ersten Arbeiten widmete er metrischen Problemen der Theorie der Gleichverteilung und der abstrakten Algebra. Er wurde stark beeinflusst von Johann Cigler und Wilfried Nöbauer. In den 60er-Jahren habilitierte er sich an der Universität Wien. Ab dieser Periode arbeitete Walter Philipp vorwiegend in der Wahrscheinlichkeitstheorie und in der probabilistischen Zahlentheorie. Sehr bald wurde er Professor in den USA; zunächst in Montana und 1964 an der Universität von Illinois in Urbana-Champaign, wo er im Jahr 2000 emeritierte. In den 70er-Jahren gab es dort eine weltweit bekannte Forschungsgruppe auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, verknüpft mit den Namen J. Doob und P. Wolfowitz. Walter Philipp war Mitglied des Instituts für Mathematik und Statistik, welchem er auch für einige Jahre vorstand. Überdies war er Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften im Ausland, Fellow am Institute for Mathematical Statistics und Fakultätsmitglied am Beckman Institute for Advanced Science and Technology.

Walter Philipp war ein international höchst angesehener und äußerst aktiver Forscher, auch nach seiner Emeritierung 2000, als er besonderes Interesse für die Grundlagen der Quantenmechanik entwickelte. Mehrere in dieser Zeit publizierte gemeinsame Arbeiten mit dem ebenfalls aus Wien stammenden Physiker K. Hess fanden große Beachtung. Das mathematische Werk von Walter Philipp erstreckt sich über die Gebiete Wahrscheinlichkeitstheorie, Zahlentheorie und mathematische Statistik. Besonders bekannt ist er als Experte für metrische Gleichverteilung und Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie. Er veröffentlichte etwa 90

ISSN 0020-7926

Forschungsartikel. Eine vollständige Liste findet man im *MathSciNet*. Ein Höhepunkt in Walter Philipps Werk ist die Lösung eines bekannten Problems von P. Erdős aus der probabilistischen Zahlentheorie. Dieses Resultat wurde in den Acta Arithmetica [2] veröffentlicht und enthält ein Gesetz vom iterierten Logarithmus für die Diskrepanz $D_N(a_n x)$, wobei (a_n) eine lakunäre Folge positiver ganzer Zahlen ist:

$$0 < C_1 \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{D_N(a_n x)}{\sqrt{N \log\log N}} \leq C_2 \tag{1}$$

für fast alle reellen Zahlen x. Philipps ursprünglicher Beweis fußt auf komplizierten Abschätzungen trigonometrischer Summen und verwendet Hilfsresultate von Takahashi. Später gab er stärker probabilistische Beweise dieses Resultates. Er entwickelte mehrere fast sichere Invarianzprinzipien und verwandte gleichmäßige Gesetze vom iterierten Logarithmus, vgl. [DT]. Ein wichtiger Überblick über derartige Resultate für Partialsummen schwach abhängiger Zufallsgrößen stammt von W. Philipp und W. Stout [3]. Walter Philipp konnte viele Freunde und Kollegen für diese Art von Problemen interessieren. Auf diese Weise erschienen viele gemeinsame Arbeiten mit verschiedenen Koautoren. Unter diesen Koautoren finden sich I. Berkes, A. Dabrowski, H. Dehling, M. Denker, R.M. Dudley, R. Kaufman, M.T. Lacey, M.B. Marcus, G. Morrow, D. Monrow, R. Mück, H. Niederreiter und W. Stout. 1994 veröffentlichte Walter Philipp eine bemerkenswerte Arbeit [4], wo er das Gesetz (1) vom iterierten Logarithmus ausweiten konnte auf eine spezielle Klasse nicht-lakunärer Folgen (a_n). Damit war ein auf R. C. Baker zurückgehendes Problem gelöst, der dieses für jene Folgen (a_n) formuliert hatte, welche eine multiplikative Halbgruppe bilden, die von endlich vielen teilerfremden ganzen Zahlen erzeugt wird. Diese Arbeit war der Ausgangspunkt für eine intensive Zusammenarbeit mit I. Berkes und R. Tichy über verwandte Probleme. Der entscheidende Punkt in diesen Untersuchungen ist die Kombination von Ideen aus der Theorie diophantischer Gleichungen mit probabilistischen Methoden wie Martingalungleichungen und Invarianzprinzipien. Walter Philipp besuchte Österreich in den letzten Jahren sehr oft und war ein sehr inspirierender und aktiver Kollege in den FWF-Forschungsprojekten „Diophantische Probleme“ and „Probabilistische Diskrepanztheorie“.

Ich persönlich habe einen sehr guten Freund verloren.

---

[1] Drmota, M., Tichy, R., *Sequences, Discrepancies and Applications*, Lect. Notes Math. 1651, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1997).

[2] *Limit theorems for lacunary series and uniform distribution* mod 1, Acta Arith. 26 (1974/75), no. 3, 241–251.

[3] Philipp, W., Stout, W., *Almost sure invariance principles for partial sums of weakly dependent random variables*, Memoirs AMS 2 (1975), issue 2, no. 161, IV+140 pp.

[4] Philipp, W., *Empirical distribution functions and strong approximation theorems for dependent random variables. A problem of Baker in probabilistic number theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 345 (1994), no. 2, 705–727.

Buchbesprechungen

Featured Review

Karl Sigmund, John Dawson, Kurt Mühlberger: Kurt Gödel. Das Album – The Album. Vieweg 2006, 225 S. ISBN 3-8348-0173-9. H/b € 29,90.

Um das Gödel-Jahr 2006 ist eine Reihe von Büchern über Kurt Gödel und sein Werk erschienen. Das vorliegende Buch des Wiener Mathematikers Karl Sigmund, des Mathematikers und Archivars des Gödel-Nachlasses in Princeton, John Dawson, und des Archivars der Universität Wien, Kurt Mühlberger, unterscheidet sich aber ganz wesentlich von den übrigen. Es ist keine mehr oder minder populäre Einführung in den Gödelschen Unvollständigkeitssatz und auch keine übliche Biographie. Es ist – wie der Titel sagt – ein „Album" über das Leben diese außergewöhnlichen Logikers, das ganz und gar nicht so „vernünftig" war wie seine These: „Erstens, die Welt ist vernünftig".

Entstanden ist das Buch aus der Gestaltung der Ausstellung *Gödels Jahrhundert – Gödel's Century*, die zuerst im Rahmen der Tagung *Horizons of Truth* im April 2006 zum 100. Geburtstag Gödels an der Universtität Wien und darauf u.a. im *MuseumsQuartier* und in der Wiener Hofburg gezeigt wurde. Neben unfangreichem Bildmaterial wurde eine Vielzahl von Originaldokumenten wie Briefe und Manuskripte ausgestellt.

Das Buch folgt dem systematischen Aufbau der Ausstellung. Es beginnt mit Gödels Kindheit in Brünn und seiner Wiener Zeit. Seine abenteuerliche ,,Flucht um die Erde" über Sibirien und den Pazifik nach Princeton sowie sein ziemlich abgekapseltes Leben in Princeton werden ebenso dokumentiert wie sein tragisches Ende. Der zweite Teil des Buches widmet sich dann Gödels Werk, aber – wie bereits erwähnt – nicht in Form einer (formalen) Einführung in seine Hauptresultate, sondern in Form einer mit vielen Briefen an und von Kollegen in den wissenschaftlich-historischen Kontext gestellten Darstellung.

Es ist im besten Sinn ein *Lesebuch*, es gibt einen sehr persönlichen Einblick in die Welt Gödels sowie in sein Umfeld. Hervorzuheben ist auch die große Fachkenntnis der Autoren und die große Vollständigkeit der gezeigten Dokumente, die auf einer äußerst gründlichen Recherche basieren.

Der in der Einleitung formulierte Anspruch, „es soll eine leicht verdauliche, einfache und anschauliche Einführung bieten, gedacht für jene, die sich für die menschlichen und kulturellen Aspekte der Wissenschaft interessieren", ist mehr als erfüllt.

M. Drmota (Wien)

A. D. Alexandrov: Convex Polyhedra. With 165 Figures. (Springer Monographs in Mathematics) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, XI+539 S. ISBN 3-540-23158-7 H/b € 99,–.

Alexandrovs inzwischen klassisches Buch über konvexe Polyeder im dreidimensionalen Raum ist 1950 auf Russisch und 1958 in deutscher Übersetzung erschienen. Dies ist nun die erste englische Übersetzung des Textes. Neu sind die Fußnoten von V. A. Zalgaller zu inzwischen gelösten Problemen, kurze Anhänge von Yu. A. Volkov and L. A. Shor und das aktualisierte Literaturverzeichnis.

Die zentrale Fragestellung des Buches ist: durch welche Daten kann ein konvexes Polyeder im dreidimensionalen Raum (eindeutig) beschrieben werden? Nach Einführung der grundlegenden Begriffe in Kapitel 1 und 2 wird in Kapitel 3 der Cauchysche Starrheitssatz beschrieben. In den folgenden beiden Kapiteln wird untersucht, inwieweit ein konvexes Polyeder durch seine polyedrische Metrik bestimmt ist. In Kapitel 6 und 7 werden die Minkowskischen Existenz- und Eindeutigkeitssätze und deren Verallgemeinerungen dargestellt. In Kapitel 8 und 9 werden Resultate der Brunn-Minkowski-Theorie dargestellt und auf Extremalprobleme angewendet. Darüber hinaus wird das Problem der Existenz von Polyedern mit Ecken auf vorgegeben Strahlen behandelt. In den letzten beiden Kapiteln werden Starrheitsfragen behandelt.

Viele der dargestellten schönen Resultate und Beweise stammen von Alexandrov selbst. Es ist daher ein Buch, das sehr inspirierend ist.

M. Ludwig (Wien)

J.-Y. Beziau (ed.): Logica Universalis. Towards a General Theory of Logic. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2005, X+228 S. ISBN 3-7643-7259-1 P/b € 52,80.

Universelle Logik ist keine weitere neue Logik, sondern das Bestreben, angesichts tausender in den letzten Jahrzehnten entstandener neuer Logiken – Zitat aus dem Vorwort: “By the mid eighties, there were more logics on earth than atoms in the universe” – ein gemeinsames Fundament zu schaffen und Überblick zu gewinnen über die chaotische Vielfalt, damit anknüpfend an eine Tradition, die aus der polnischen Logik (vor allem Tarski) kommt. Der Herausgeber dieses Sammelbandes prägte die Begriffsbildung (seine Dissertation 1995 trägt den Titel: «Recherches sur la Logique Universelle») in Analogie zur Universellen Algebra. Letztlich geht es um die Frage: Was ist eine Logik? Die Antworten darauf sind kaum weniger vielfältig als die Logiken selbst (vielleicht wird es in einigen Jahrzehnten als Überbau eine „universelle“ universelle Logik geben).

Viele Wissenschaftler in der ganzen Welt widmeten sich unabhängig voneinander seit etwa 20 Jahren dieser Problemstellung. Die 12 Artikel herausragender Vertreter ihres Faches sind 3 Abschnitten zugeordnet: Die Arbeiten in “I. Universal Logic: Frameworks and Structures” greifen auf Grundlagen aus der Modelltheorie, Algebra, Topologie, Kategorientheorie zurück, "II. Identity and Nature of Logical Structures" widmet sich der zentralen Frage der Identität zwischen logischen Strukturen – gemeint ist die Auffassung einer Logik als (Äquivalenz-)Klasse von Strukturen. Hier kommen kategorientheoretische und beweistheoretische Methoden zum Zug, "III. Tools and Concepts for Universal Logic" enthält Arbeiten über logische Matrizen, Weiterentwicklungen des Tarskischen Folgerungsoperators, Unterscheidbarkeit von Formeln im Zusammenhang mit logischer Stärke.

P. Telec (Wien)

A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky: Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 131) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2002, XI+462 S. ISBN 3-7643-6672-9 H/b € 115,14.

In this monograph the authors set sail to study the modern and fashionable (but rather specialised) topic of convolution operators from the point of view of C^*-algebras, and to apply their study to the theory of factorization of almost periodic and semi-almost periodic matrix functions. This a good introduction to the subject, containing a readable exposition of the topic, with complete proofs. As the authors themselves point out, there is a large amount of material split in small pieces, and this certainly makes the reading of the rather dry and abstract subject much easier. The book consists of 23 chapters, with a special emphasis on Wiener-Hopf operators, both in the scalar and the matrix case. The important topic of Toeplitz operators (which has many applications in quantum mechanics) is studied in Chapters 16 and 18; this is a welcome addition to the general theory. I am sure that this book will be welcomed not only by all mathematicians working in the venerable but still expanding field of Wiener-Hopf operators but also by those interested in the applications to engineering of some advanced mathematical techniques.

M. de Gosson (Wien)

L. Caffarelli, S. Salsa: A Geometric Approach to Free Boundary Problems. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 68.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005, IX+270 S. ISBN 0-8218-3784-2 H/b $ 49,–.

Probleme mit freien oder sich bewegenden Rändern treten in vielen physikalischen Problemen auf. Typische Beispiele sind Gestaltoptimierung (kleinste Oberfläche für ein festes Volumen), Phasenübergänge (Schmelzen eines festen Körpers), Flüssigkeitsdynamik (kompressible und inkompressible Flüssigkeiten in porösen Medien) und vieles mehr. Die Konstruktion klassischer Lösungen (etwa beim Schmelzproblem) ist meist nur in niederen Dimensionen möglich. Ein anderer Weg ist die Konstruktion von Lösungen des Problems, indem man die

Übergangsbedingung in eine „schwache Lösung“ der Gleichung integriert, sei es durch die Erhaltungsgesetze, die sie in vielen Fällen definieren, oder durch eine Perron-artige Lösungsmethode, die darauf basiert, dass die „Glattheit“ der Übergangsprozesse mit einer Art von „Ellipzität“ der Übergangsbedingungen verknüpft ist. Die Herausforderung besteht darin, die Lücke zwischen schwachen und klassischen Lösungen zu schließen. Ein Vergleich mit der Variationsrechnung und der Theorie minimaler Oberflächen liegt nahe.

J. Hertling (Wien)

A. Chambert-Loir: A Field Guide to Algebra. With 12 Illustrations. (Undergraduate Texts in Mathematics) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, X+195 S. ISBN 0-387-21428-3 H/b € 49,95.

This book is indented as a second course in algebra focusing mainly on Galois theory of finite extensions of fields. It starts with presenting some necessary background material to prove the main theorem of Galois theory in Chapter 3. Along the way some results from analysis, namely transcendence of e and π, algebraic closedness of the complex numbers, and Puiseux’ theorem are proven as well.

In addition, there is a brief introduction to group theory (including solvable, nilpotent, and matrix groups) and several applications in the remaining three chapters. In particular, constructibility with ruler and compass, equations up to degree four, specializing Galois groups, Hilbert’s irreducibility theorem, and algebraic theory of differential equations. The book is easy to read and mostly self-contained. The large number of exercises at different level make it a valuable source both as the basis for a course or self-study.

G. Teschl (Wien)

Y. Eidelman, V. Milman, A. Tsolomitis: Functional Analysis. An Introduction. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 66) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004, XV+322 S. ISBN 0-8218-3646-3 H/b $ 55,–.

As the authors claim in their Preface, the goal of this book is to provide an introduction to the language and methods of functional analysis. There are of course many treatises on the market claiming similar goals: a rapid search on the Austrian site of *Amazon* shows that there are around three dozen recent books whose title contain the words “functional analysis”! So what makes this book different? First of all, it is concisely but at the same time very clearly written; new concepts are carefully introduced when the readers need them, and not three chapters before, as is the case in many “established” treatises. Another quality is that the text is rigorously written, without concessions to the reader, but at the same avoiding the Bourbachian rigor mortis style whose principal quality is to discourage the uninitiated reader! The book under review actually consists of two parts: “Hilbert spaces and Basic Operator Theory” and “Basics of Functional analysis”. In the first part, the authors start explaining from scratch the most basic notions from the theory of linear spaces and then proceed to a nice exposition of the fundamentals of Hilbert space theory (I liked their discussion of the notion of orthogonal projection). The notions of dual spaces, of bounded operators, and elements of spectral theory are then addressed. In the second part the “big” theorems (closed graph, Banach-Steinhaus, . . .) are studied and commented; there is also an short but illuminating introduction to Gelfand theory; the book then ends by some basic results on the difficult theory of unbounded operators (including a section on the Cayley transform).

I have read this book with great pleasure; it is certainly accessible to a wide audience and very appropriate for self-studies (there is a large number of exercises with solutions).

M. de Gosson (Wien)

J. C. Jantzen, J. Schwermer: Algebra. (Springer-Lehrbuch) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, 335 S. ISBN 3-540-21380-5 P/b € 24,95.

In einem sehr gut lesbaren und doch zügigem Stil breiten die Autoren einen umfassenden Überblick über grundlegende und speziellere Kapitel der Algebra aus. Es ist das ausgesprochene Ziel des Buches, in den ersten sechs Kapiteln den ‚klassischen Kanon‘ zu behandeln (Gruppen und ihre Strukturtheorie, Ringe, Polynomringe, Körpererweiterungen und Galoistheorie), um dann unter Betonung nichtkommutativer Aspekte auf Themen einzugehen, die den Verfassern am Herzen liegen, und die auch sonst nicht in vergleichbarer Weise in Lehrbüchern zu finden sind. Hingegen sind Gebiete wie etwa kommutative Algebra, Darstellungstheorie, oder Liesche Algebren ausgespart, wo eine vollständige Behandlung den Rahmen sprengen würde und außerdem gute Literatur zur Verfügung steht.

Die Kapitel im Einzelnen sind: I. Gruppen: Grundlagen, II. Gruppen: Strukturtheorie, III. Ringe, IV. Polynomringe, V. Elementare Theorie der Körpererweiterungen, VI. Galoistheorie. In der zweiten Hälfte des Bandes werden behandelt: VII. Moduln: Allgemeine Theorie und Moduln über Hauptidealringen, VIII. Halbeinfache und artinsche Moduln und Ringe, IX. Zentrale einfache Algebren, X. Ganze Ringerweiterungen und Dedekindringe. Es ist vielleicht interessant, diejenigen Unterkapitel aufzulisten, die die Autoren explizit als weiterführende Themen bezeichnen: Freie Gruppen, Erzeugende und Relationen sowie die allgemeine lineare Gruppe (in Kapitel II), Schiefpolynomringe (in IV), der Hilbertsche Basissatz, projektive und injektive Moduln sowie Erweiterungen von Moduln (in VII), Projektive Moduln über artinschen Ringen, Frobenius-Algebren, Darstellungen von Köchern (in VIII); und schließlich die allgemeine lineare Gruppe über Ringen (in X.). Insgesamt ein Werk, das als Vorlesungsunterlage, zum Selbststudium und als Referenz vielseitig verwendbar ist.

J. Wallner (Graz)

J. Korevaar: Tauberian Theory. A Century of Developments. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 329.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, XV+483 S. ISBN 3-540-21058-X H/b € 89,95.

What has started as an interesting observation on a converse to some statements about summability, made by the Austrian mathematician Tauber in 1897, turned into a veritable and important theory. Typically a *Tauberian Theorem* states that the asymptotic behavior of certain "moving averages" is comparable for a large family of convolution kernels. In combination with certain "slow variation conditions" this allows to conclude from the existence of limits of those averaged functions even that the function itself must have the same limit.

One cannot do justice to a big volume like this by listing all the important results provided. It is certainly *the* reference work in the fields for the years to come, hopefully inspiring continued research in this field, which is today still an active research area (e.g. in the context of locally compact groups). Let us just list the chapter headers, indicating the important mathematicians who have contributed to the field: (1) The Hardy-Littlewood Theorems; (2) Wiener's Theory; (3) Complex Tauberian Theorems; (4) Karamata's Heritage: Regular Variation; (5) Extensions of the Classical Theory; (6) Borel Summability and general Circle Methods; (7) Tauberian Remainder Theory, as well as almost 50 pages of references. The author has really done an excellent job in compiling classical and modern theory.

This reviewer is only sorry that his own contribution from 1987 on "An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem for the Euclidean n-space" did not make it into this excellent book [In: Harmonic analysis, symmetric spaces and probability theory, Cortona/Italy 1984, Symp. Math. 29, 267–301 (1987)]. It shows the validity of Wiener's Tauberian theorem for functions of bounded p-means (not just $p = 2$) of several variables for $p \in [1,\infty]$, using Banach algebra techniques, very much in the spirit of N. Wiener.

H. G. Feichtinger (Wien)

E. Kunz: Introduction to Plane Algebraic Curves. Translated from the original German by R. G. Belshoff. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2005, XII+293 S. ISBN 0-8176-4381-8 P/b € 52,80.

The present book is a translation of the German lecture Notes (University of Regensburg) „Ebene algebraische Kurven“ of the author which appeared 1991. The main goal is to present commutative ring theory together with algebraic curves as one of the important applications. The presentation of plane algebraic curves in this book stresses the algebraic point of view. Concerning topological and analytical aspects the reader is refered to the rich literature (e.g. Brieskorn-Knörrer: Plane algebraic curves, Birkhäuser 1986). The book is organized in a way that the algebraic facts are collected in eleven appendices which cover about one third of the book. The chapters are: Affine Algebraic Curves, Projective Algebraic

Curves, Coordinate Ring of an Algebraic Curve, Rational Functions on Algebraic Curves, Intersection Multiplicity and Intersection Cycle on Two Curves, Regular and singular Points of Algebraic Curves + Tangents, More on Intersection Theory + Applications, Rational Maps + Parametric Representations of Curces, Polars and Hessians of Algebraic Curves, Elliptic Curves, Residue Calculus, Applications of Residue Theory to Curves, The Riemann-Roch Theorem, The genus of an Algebraic Curve and of its Function Field, The Canonical Divisor Class, The Branches of a Curve Singularity, Conductor and Value Semigroup of a Curve Singularity.

The book provides many examples, exercises and figures illustrating the very clear written text. It is readable with basic knowledge in Algebra. This textbook can be highly recommended to everyone interested in the subject.

F. Manhart (Wien)

S. N. Mishra (ed.): Forum for Interdisciplinary Mathematics, Proceedings on Statistics, Combinatorics, and Related Areas. (American Series in Mathematical and Management Sciences, Vol. 46)[1] American Sciences Press, Columbus, 2001, 195 S. ISBN 0-935950-50-8 P/b $ 195,–.

Dieser Tagungsband enthält neun Arbeiten einer Konferenz des Forums for Interdisciplinary Mathematics, die sich auf einem hohen mathematischen Niveau mit speziellen Fragen der Statistik und den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigen. Die Arbeiten sind den folgenden fünf Bereichen zuzuordnen:

1. Experimental Design: Die Arbeit *Analysis of Nearly Saturated Designs Using Composite Variance Estimators* (K. K. Kinateder, D. T. Voss, W. Wang) behandelt Schätzmethoden für fast gesättigte Designs, wobei sowohl statistische Eigenschaften untersucht werden als auch SAS-Programme für die Schätzung präsentiert werden. *Efficient Computational Algorithms for Searching for Good Designs* (D. Ingram und B. Tang) stellt zwei Algorithmen zur Konstruktion von nichtregulären faktoriellen Designs vor, die auf Hadamard-Matrizen beruhen und ein effizientes Zeitverhalten haben.

2. Stochastische Prozesse: *Application of Hilbert Space Methods To Random Field Modelling and Estimation* (M. D. Ruiz-Medina, J. M. Angulo, V. V. Anh) wendet die Methode der Reproducing Kernel Hilbert Spaces für die Darstellung von Zufallsfeldern als Stochastische Differentialgleichungen an, gibt Orthogonalreihenentwicklungen an und behandelt direkte und inverse Schätzungen für die Parameter; *Isotropic Random Measures* (R. J. Swift) untersucht Spektraldarstellungen für schwach harmonisierbare Zufallsmaße; *A Stochastic Richardson Arms Race*

[1]Dieses Werk ist gleichzeitig erschienen als: American Journal of Mathematical and Management Sciences, Volume 21 (2001), issues 3 and 4.

Model (J. Fricks, R. Swift) untersucht ein stochastisches Modell für den Rüstungswettlauf, das auf einem Geburts- und Todesprozess basiert. Es wird gezeigt, dass der Erwartungswert einem deterministischen Richardson-Modell entspricht.

3. Schätztheorie: *Generalized Point Estimation Procedures for the Generalized Life Distributions* (A. Chaturvedi, S. Chattopadhyay) behandelt Approximationen zweiter Ordnung für das Risiko von Sequentialschätzern unter quadratischer Verlustfunktion und einem Kostenmodell für das Sampling; *Estimation of the Population Standard Deviation Using Auxiliary Information* (L. N. Upadhyaya, H. P. Singh) betrachtet den Bias und die Varianz von Schätzungen unter Verwendung von Zusatzinformation. Es werden Approximationsformeln abgeleitet und das Verhalten der Schätzer durch eine empirische Studie untersucht; *Consistency of Dependent Bootstrap Estimators* (W. D. Smith und R. L. Taylor) behandelt die Theorie von Bootstrap-Schätzern, bei denen das Resampling ohne Zurücklegen durchgeführt wird. Aus Grenzwertsätzen für Arrays von Zufallsvariablen werden Konsistenz und asymptotische Verteilung der Schätzer abgeleitet.

4. Informationstheorie: *Topologies on a Set of Information Channels* (Y. Kakihara) beschäftigt sich mit Konvergenzaussagen für Folgen von Informationskanälen.

W. Grossmann (Wien)

S. Montiel, A. Ros: Curves and Surfaces. Translated by S. Montiel. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 69.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005, XIV+376 S. ISBN 0-8218-3815-6 H/b $ 59,–.

This book on classical differential geometry of curves and surfaces is an excellent treatment of this subject from a modern point of view. As in the well known textbook of M.P. do Carmo, “Differential Geometry of Curves and Surfaces” much emphasis is placed on aspects of global nature. So careful topological discussions play a more important role than in other books on the same topic. Each of the nine chapters starts with an introduction and interesting historical remarks. Many exercises are added during the text and at the end of each chapter, most of them with hints for the solution. The prerequisites for reading are basics in linear algebra and calculus, some knowledge in topology and ordinary differential equations and acquaintance with Lebesque integration. The chapter headings are: Plane and space curves, Surfaces in Euclidean space, The second fundamental form, Separation and orientability, Integration on surfaces, Global extrinsic geometry, Intrinsic geometry of surfaces, The Gauss-Bonnet theorem, Global geometry of curves.

The book is highly motivating and can be recommended to everyone interested in euclidean differential geometry, especially in global questions.

F. Manhart (Wien)

M. Moszyńska: Selected Topics in Convex Geometry. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2006, XVI+226 S. ISBN 0-8176-4396-6 P/b € 52,80.

Das vorliegende Buch ist eine Übersetzung des polnischen Originals aus dem Jahr 2001. Es beginnt mit der Beschreibung der grundlegenden Begriffe der Konvexgeometrie im n-dimensionalen Euklidischen Raum wie Hausdorff-Metrik, Minkowski-Addition und Trennungs- und Stützeigenschaften. Dabei werden nur Grundkenntnisse der Analysis und linearen Algebra vorausgesetzt. Danach werden Steinersymmetrisierung, Kugelungstheoreme, konvexe Polytope und der Hadwigersche Funktionalsatz (in der Originalversion im dreidimensionalen Raum) samt Anwendungen angegeben. Der zweite Teil handelt von Krümmungs- und Oberflächenmaßen, dem Konvexring, dem Steinerpunkt und der Polarität. Im letzten Teil werden einige neuere Resultate über Sternköper und das Busemann-Petty-Problem beschrieben. Das Buch enthält nützliche Skizzen und zahlreiche Übungsbeispiele. M. Ludwig (Wien)

J. von Neumann: Selected Letters. M. Rédei, ed. (History of Mathematics, Vol. 27.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, London Mathematical Society, 2005, XXV+301 S. ISBN 0-8218-3776-1 H/b \$ 59,–.

John von Neumann war ein eifriger Briefeschreiber, und eine kleine Auswahl findet sich hier, an 69 Personen gerichtet, über die auch bibliographische Informationen angegeben sind. Die Sammlung ist eine wertvolle Quelle von Hintergrundinformation über den vielleicht bedeutendsten Mathematiker der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, der aber auch in Physik, Ökonomie und Informatik herausragend war. Laut Peter Lax, der ein Vorwort beisteuerte, wäre John von Neumann $3\frac{1}{2}$ Nobelpreise wert gewesen, wenn es sie in diversen Disziplinen nur gäbe und er ein höheres Lebensalter erreicht hätte. Im Übrigen sind seine Leistungen ja legendär und brauchen nicht weiter ausgeführt zu werden.

Bei *MathSciNet* findet sich auch eine längere Besprechung dieser Briefsammlung, die sehr lesenswert ist; deshalb soll hier komplementäre Information angeführt werden. Relativ breiter Raum wird der Affäre mit George Birkhoff über den *Ergodensatz* gewidmet. Birkhoffs Rolle scheint einigermaßen unrühmlich gewesen zu sein. Der Rezensent hörte darüber bereits 1979 in Vorlesungen von K. Sigmund. Pikant ist, dass von Neumann mit dem Sohn Garrett Birkhoff durchaus freundschaftlich verbunden war – es gibt gemeinsame Publikationen.

Das Buch ist auch als Beleuchtung der amerikanischen Wissenschaftsszene der Zeit (John von Neumann lebte von 1903 bis 1957) zu verstehen: Er war in einer Vielzahl von Projekten involviert, insbesondere auch für die amerikanische Regierung. Die ersten Briefe waren noch in deutscher Sprache, und man kann mitverfolgen, wie seine Kontrolle der englischen Sprache immer besser wird.

Fast jeder Brief beginnt mit einer Entschuldigung über die verspätete Beantwortung, weil er gerade nicht in Princeton gewesen wäre: Der Mann muss ungeheuer viel auf Reisen gewesen sein! Der Ton der Briefe ist durchwegs höflich, auch, wenn er gezwungen ist, dubiose Manusskriptzusendungen abzulehnen. Seine Unterstützung von Kurt Gödel wird auch dokumentiert; es wird uns klar, dass John von Neumann von der Publikation eigener Ideen absah, als er erfuhr, dass Gödel selbst damit beschäftigt war. Wer hat noch solche Größe? Für Österreicher vielleicht besonders interessant ist ein Brief an Erwin Schrödinger. Dass einige Briefe an Stan Ulam in der Sammlung vorhanden sind, war wohl zu erwarten.

Um hier nicht *nur* Lob auszuteilen, sei die Vielzahl an Druckfehlern und das dünne Papier angemerkt. Die Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik sei hier besonders auch jüngeren Menschen empfohlen; dieser Band wird dabei eine wichtige Rolle spielen. Er wird in meiner Sammlung historischer Werke einen würdigen Platz im Regal einnehmen. H. Prodinger (Stellenbosch)

E. Neuwirth, D. Arganbright: The Active Modeler. Mathematical Modeling with Microsoft Excel. Thomson, Brooks/Cole, Belmont, 2004, XVII+471 S. ISBN 0-534-42085-0 P/b £ 21,99.

Mathematische Modellierung ist heute ein essentieller Bestandteil in vielen wissenschaftlichen Disziplinen und grundlegende Modellierungstechniken sollten eigentlich jedem bekannt sein. Leider ist das nicht der Fall, vor allem deshalb, weil die meisten Darstellungen dieser Thematik in der Sprache der Mathematik verfasst sind und substantielles Wissen verschiedener mathematischer Disziplinen voraussetzen. Populärwissenschaftliche Darstellungen beschränken sich meist auf die Präsentation von Beispielen, welche die Leistungsfähigkeit der Methodik zwar demonstrieren, den Leser aber kaum in die Lage versetzen, selbstständig mit solchen Modellen zu arbeiten.

Das vorliegende Buch stellt hier eine bemerkenswerte Ausnahme dar. In acht Kapiteln werden Fragen der Modellierung in den unterschiedlichsten Anwendungsbereichen behandelt, wobei nur Grundkenntnisse der Mathematik auf dem Niveau einer AHS-Mathematik vorausgesetzt werden. Ohne Verwendung eines komplexen Formelapparates werden die Modelle mittels *Excel* dem Leser in einer operationalen Art und Weise nahe gebracht, sodass er die Möglichkeit hat, diese Methoden auch selbstständig bei der Erstellung von ähnlichen Modellen zu verwenden. Im Detail werden folgenden Modellierungstechniken vorgestellt: Diskrete Modelle, Differenzengleichungen und ihre Anwendungen in der Biologie (Wachstumsmodelle, Räuber-Beute-Modelle, Populationsdynamik, Epidemiologie), mathematische Modellierung in der Physik (Bewegungsgleichungen, Bestimmung von Planetenbahnen, Wärmeleitungsgleichung), grundlegende mathematische Hilfsmittel der Modellierung wie Zahlendarstellungen, Euklidischer Algorithmus oder Newton-Verfahren, wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle und Simulation, Optimierungsaufgaben.

Den Autoren gelingt es sehr gut, nicht nur die Modelle darzustellen, sondern auch auf mathematische Fragestellungen und Probleme hinzuweisen. Sie geben damit auch einen Einblick in das mathematische Denken und die Argumentationsweise der Mathematik. Beispielsweise werden beim Räuber-Beute-Modell die Grenzen der diskreten Approximation durch den Euler-Cauchyschen Streckenzug deutlich gemacht oder Probleme der Genauigkeit im numerischen Rechnen im Zusammenhang mit Ergebnissen von Skirennen erörtert. Erstaunlich ist auch, wie die Autoren *excel* zur grafischen Darstellung von Sachverhalten einsetzen. Die Visualisierungen haben dynamische Effekte wie bei den heute üblichen Applets, bieten aber den Vorteil, dass der Rechenvorgang transparenter dargestellt wird. Aus den Beispielen können auch Experten noch einige interessante Tricks lernen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass dieses Buch eine sehr gelungene Darstellung ist, die eine Fülle von Materialien enthält, die im Mathematikunterricht verwendet werden können. W. Grossmann (Wien)

B. Øksendal: Stochastic Differential Equations. Sixth Edition. With 14 Figures. (Universitext) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2003, XXIII+360 S. ISBN 3-540-04758-1 P/b € 34,95.

Dieser Klassiker unter den einführenden Büchern im Bereich der stochastischen Differentialgleichungen ist sowohl als Lehrbuch als auch zum Selbststudium hervorragend geeignet. Ausgehend von sechs Problemstellungen, deren Lösung jeweils über stochastische Differentialgleichungen führt, wird in gut verständlicher Weise der Itô-Kalkül und in der Folge die Theorie stochastischer Differentialgleichungen entwickelt. Immer wieder kehrt der Autor zu den eingangs diskutierten Problemstellungen zurück und motiviert auf anschauliche Art und Weise notwendige Erweiterungen und nächste Schritte in der Entwicklung der Theorie. Am Ende eines jeden Kapitels sind zahlreiche Übungsbeispiele zu finden. Die vorliegende 6. Auflage unterscheidet sich von der vorigen vor allem durch zusätzliche Übungsbeispiele sowie Lösungshinweise zu einer Auswahl davon. Mittlerweile ist das Buch auch in elektronischer Form als e-book beim Verlag erhältlich.

H. Albrecher (Graz)

V. Rabinovich, St. Roch, B. Silbermann: Limit Operators and their Applications in Operator Theory. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 150) Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2004, XV+392 S. ISBN 3-7643-7081-5 H/b € 184,80.

Based on long-term research by the authors they describe in this book a comprehensive theory of *limit operators*, which is then applied to study of Fredholm properties of *band* and *band-dominated* operators. In the simplest setting of $\ell^2(\mathbb{Z})$ a bounded operator A can be represented by an infinite matrix $a_{ik} = \langle Ae_i, e_k\rangle$ with respect to the standard basis $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Band operators are those with only a finite number of non-zero diagonals (i.e., $a_{jk} = 0$ for $|j-k| > N$ and some N); band dominated operators are the limits of band operators in the operator topology.

Fredholm properties of (band-dominated) operators are studied by the behavior of their *operator spectrum*, the set of strong limits $T_{-g(k)}AT_{g(k)}$, with T being the translation operator on $\ell^2(\mathbb{Z})$, and $g(n)$ certain subsequences of $\mathbb{Z}$): a band dominated operator is Fredholm if and only if all operators in the operator spectrum are invertible, and their inverses are uniformly bounded.

This concept is expanded to vector-valued ℓ^p-spaces on $\mathbb{Z}^n$, and applied to the study of convolution-type and pseudo-differential and -difference operators (among others, operators with slowly oscillating or almost periodic symbols, and Schrödinger operators). The book also discusses the approximation of band-dominated operators by finite sections, discussing stability and convergence, spectral approximation and fractality of approximation methods. A final chapter treats an axiomatization of the limit operator approach. The book is certainly a valuable source of information for readers interested in the interplay of operator theory and applied methods, including computational aspects of continuous problems approximated by finite-dimensional models. H. G. Feichtinger (Wien)

T. Roubiček: Nonlinear Partial Differential Equations with Applications. (International Series of Numerical Mathematics, Vol. 153.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2005, XVIII+405 S. ISBN 3-7643-7293-1 H/b € 118,80.

Der Gegenstand dieser Monographie sind semilineare und quasilineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Unter semilinearen Gleichungen versteht man solche, bei denen die höchsten Ableitungen linear auftreten und die induzierten Abbildungen auf Funktionenräumen schwach stetig sind. Unter quasilinearen Gleichungen versteht man solche, bei denen die höchsten Ableitungen linear auftreten, aber mit Funktionen multipliziert sind, die noch Ableitungen niedrigerer Ordnung enthalten. Die Methoden zur Behandlung dieser Probleme können wie folgt eingeteilt werden: a) *indirekt*, d.h. Konstruktion von Näherungsproblemen, die leichter zu lösen sind (z.B. Rothes Methode, Galerkins Methode, Penalty-Methoden und Regularisierung), sodann a priori-Abschätzungen und Grenzübergänge, b) *direkt*, d.h. Formulierung der Differentialgleichung oder -ungleichung, als ein Problem, das direkt mittels abstrakter theoretischer Ergebnisse lösbar ist (z.B. Potentialprobleme, Minimisierung durch Kompaktheitsargumente), c) durch *Iteration*, d.h. Anwendung klassischer Fixpunktsätze. J. Hertling (Wien)

J. R. Ruíz-Tolosa, E. Castillo: From Vectors to Tensors. (Universitext) Springer, 2005, XVI+670 S. ISBN 3-540-22887-X P/b € 49,95.

In this textbook, the authors present a new and, to some extent, unconventional approach to tensors that tries to bridge the gap between the classical theory of tensors and the treatment of tensor problems with a computer. Apart from classical material on tensors, new concepts are introduced such as the rotation of tensors, the transposer tensor, the eigentensor, and the permutation tensor structure. Among others, tensor contraction is given in terms of matrix operations for the first time. As a companion to the book, the authors developed a computer package written in Mathematica and availabe at *http://personales.unicas.es/castie/tensors*.

The volume is arranged in 5 parts containing the following 14 chapters: 1. Tensor spaces. 2. Introduction to tensors. 3. Homogeneous tensors. 4. Change-of-basis in tensor-spaces. 5. Homogeneous tensor algebra: tensor homomorphisms. 6. Symmetric homogeneous tensors: tensor algebras. 7. Anti-symmetric homogeneous tensors, tensor and inner product algebras. 8. Pseudotensors; modular, relative or weighted tensors. 9. Exterior algebras: totally anti-symmetric homogeneous tensor algebras. 10. Mixed exterior algebras. 11. Euclidean homogeneous tensors. 12. Modular tensors over $E^n(\mathbb{R})$ Euclidean spaces. 13. Euclidean exterior algebra. 14. Affine tensors. A bibliography containing 56 items and a comprehensive subject index are appended. Each chapter includes many worked-out examples and a separate final section devoted to exercises. The text deals with classical tensor techniques and new methods, as well. Often, problems are solved by different methods in order to emphasize the applied orientation of the book.

This volume gives a thorough treatment of the topic of tensors. Taking into account that tensor notation is an intricate thing, anyway, the exposition of the book is a very transparent one and a pleasure to read. Readers will require not more than a basic knowledge in linear algebra. Primary addressees of the book are (graduate) students in applied mathematics, mathematical physics, and engineering sciences, as well. Moreover, the book can be recommended without reservations to instructors that are looking for a suitable source for a tensor course.

A. R. Kräuter (Leoben)

C. J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen. Mit 220 Abbildungen, davon 44 in Farbe. 2. Auflage. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, XIII+629 S. ISBN 3-540-22471-8 H/b € 39,95.

Die Projektgruppe „Geschichte der Mathematik" an der Universität Hildesheim legt mit dem nun in zweiter Auflage vorliegendem Werk einen überaus lebendigen Überblick über eines der zentralen Teilgebiete der Mathematik vor. In beachtlicher Stofffülle werden einerseits Ursprünge und Entwicklungen in der Geometrie verschiedener Kulturen und Zeitspannen beschrieben, andererseits wird auch auf viele Anwendungen in Kunst, Architektur und Naturwissenschaften wie etwa Geodäsie und Kartographie hingewiesen. Als besonders instruktiv erweisen sich die jedem Abschnitt beigegebenen Aufgaben. Die Beispiele sind von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad und lassen in vielen Fällen eindrucksvoll die Entwicklung der geometrischen Denkweise erkennen.

Inhaltlich spannt das Buch den Bogen von altägyptischer und babylonischer Geometrie über die griechisch hellenistische Zeit und die Spätantike, die Geometrie im Orient, in Mittelalter und Renaissance bis zu modernen Entwicklungen im

20. Jahrhundert. Gegenüber der ersten Auflage (2001) neu ist ein Abschnitt über Geometrie in altamerikanischen Kulturen. Weiters ist in der Neuauflage ein Sachverzeichnis angefügt. Das vorliegende Buch ist eine Fundgrube an geometrischen „Geschichten“ im besten Wortsinn. Es kann jedem an Geometrie Interessierten, Lehrern und Studenten wärmstens empfohlen werden. Darüber hinaus ist es auch kulturwissenschaftlich und historisch hoch einzuschätzen.

F. Manhart (Wien)

J. Stillwell: The Four Pillars of Geometry. With 138 Illustrations. (Undergraduate Texts in Mathematics) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, XI+227 S. ISBN 0-387-25530-3 H/b € 39,95.

The author acts on the assumption of four approaches to geometry: The axiomatic way, using linear Algebra, projective geometry and transformation groups. Each of these approaches are devoted two chapters of the book, an introductory and a more abstract one. The axiomatic approach starts with basic euclidean constructions by straightedge and compass discussing segment arithmetic and proportionality. Some basics on the parallel axiom, the Pytagorean theorem and the theorem of Thales are given. Via coordinates Linear algebra is introduced. The discussion of isometries in the real affine plane ends with the proof of the three reflection theorem. The fourth chapter introduces basic vector calculus. Projective geometry is first introduced by discussing perspective drawing, followed by homogeneous coordinates, linear fractional functions and the cross ratio. The second chapter on projective geometry starts with the theorems of Pappus and Desargues and goes on with projective arithmetic leading to remarks on algebraization of a real projective plane. The first chapter on transformations first deals with the isometries and affine transformations of the real plane including the matrix representation and transformations of the real projective line. It follows a discussion of the isometries of the sphere (represented by means of quaternions, too). The last chapter is devoted to hyperbolic geometry.

Each of the chapters closes with a discussion giving hints on further aspects and historical remarks. The exercises contained are routine. The book can be recommended to be used in undergraduate courses on geometry but probably not as the only one.

F. Manhart (Wien)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Protokoll der Generalversammlung

Die Generalversammlung der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft fand am 24. 11. 2006 um 17 Uhr im Hörsaal FH 7 der TU Wien statt.

TOP 1. *Feststellung der Beschlussfähigkeit.* Die Beschlussfähigkeit ist gegeben.

TOP 2: *Berichte des Vorsitzenden und weiterer Vorstandsmitglieder, insbesondere des Kassiers.* Der Vorsitzende Tichy berichtet zunächst über Erfolge der österreichischen Mathematik. So wurden im Berichtsjahr zwei START-Preise an Mathematiker vergeben, und zwar an Josef Teichmann und Gerald Teschl, beide frühere ÖMG-Preisträger. Tichy gratuliert beiden zu ihrem Erfolg. Die österreichische Mathematik hat im Gesamtfeld der durch den FWF geförderten Wissenschaften einen nicht geringen Stellenwert.

Zwei weitere Förderungspreisträger haben mittlerweile Karriere gemacht: Frau Monika Ludwig wurde nach New York, Herr Manfred Einsiedler an die Ohio State University berufen. Weitere Erfolge der österreichischen Mathematik beim FWF sind die Verlängerung bzw. Neubewilligung von Doktoratskollegs in Wien (Leiter: Schmeiser) und Graz (Leiter: O. Steinbach) sowie eines Spezialforschungsbereiche (Leiter K. Kunisch) in Graz.

Bericht über geplante Veranstaltungen: Vom 16.–21. 9. 2007 findet die Nachbarschaftstagung der ÖMG gemeinsam mit der slowakischen mathematischen Gesellschaft im Hotel Permon in Podbanske (Slowakei) statt. Die Organisation obliegt C. Schmeiser gemeinsam mit K. Mikula (Bratislava). Schmeiser berichtet, dass die Homepage der Tagung und die Einladungen noch vor Weihnachten 2006 fertig sein werden. Die nächste Generalversammlung der ÖMG soll während der Tagung stattfinden.

Die gemeinsame Tagung der ÖMG mit der DMV wird in Graz 2009 stattfinden. Tichy ist bereits im Gespräch mit dem derzeitigen DMV-Präsidenten Günter Ziegler (Berlin) und dem zukünftigen DMV-Präsidenten Wolfgang Lück (Münster). Diese haben bereits zwei Mitglieder für das Programmkomitee benannt.

ECM 2012: Im Vorstand wurde beschlossen, dass sich die ÖMG für die Austragung des ECM 2012 in Wien bewerben soll. Drmota und Krattenthaler leisten die

Vorarbeit für die Bewerbung. Diese Bewerbung wird in jedem Fall zum Nutzen der ÖMG sein, auch wenn der Zuschlag nicht erfolgen sollte.

Bericht des Kassiers: Vor dem Bericht des Kassiers schlägt Tichy vor, dass in Zukunft – auch in Anbetracht der österreichischen Bewerbung um den ECM – der Mitgliedsbeitrag für die EMS über Erlagschein der ÖMG gemeinsam mit dem Mitgliedsbeitrag an die ÖMG einbezahlt werden kann.

Schachermayer berichtet, dass der aktuelle Saldo der ÖMG in einem Verlust von 31.757,– € besteht. Bereinigt um außergewöhnliche Positionen (wie etwa die Evaluierung der Mathematik in Österreich), beträgt der Verlust lediglich 2.688,– €. Das Vermögen der ÖMG stellt sich als konstant über die Jahre dar. Schachermayer legt eine tabellarische Aufstellung der ÖMG-Einnahmen-Ausgabenrechnung 2005 vor (siehe S. 42).

Schachermayer dankt den Rechnungsprüfern (Kuich, Feichtinger), insbesondere Kuich, der aus eigenem Wunsch diese Aufgabe abgibt. Ein Schreiben der Rechnungsprüfer zu Entlastung des Kassiers liegt vor.

In der Diskussion fragt Hellekalek nach, wie das Vermögen der ÖMG veranlagt ist. Schachermayer antwortet, dass die Veranlagung in seiner Amtszeit (bis Ende 2005) sehr konservativ erfolgte und dies von seinem Nachfolger Pottmann (Kassier ab 2006) fortgeführt werde. Zur Evaluierung ergibt die Diskussion, dass es sich um einen Auftrag des bm:wbk gehandelt habe und in den nächsten Jahren sicher keine weiteren Evaluierungen zu erwarten sind.

Der Antrag, den Vorstand zu entlasten, wird per Akklamation angenommen.

Weitere Berichte: Drmota berichtet als IMN-Beauftragter, dass ab 2006 die DMV-Mitteilungen gemeinsam mit den IMN zugesandt werden. Er dankt der DMV für diese großzügige Regelung, die eine Bereicherung für alle Mitglieder darstellt. Zur personellen Zusammensetzung der Redaktion ist zu berichten, dass U. Dieter nach 30-jähriger Tätigkeit ausscheidet. Drmota dankt ihm für seine wertvolle Tätigkeit. Kurzfristig hat seine Stelle M. Ludwig übernommen, die aber wegen ihrer Berufung nach New York ebenfalls ausscheidet. J. Wallner – bereits Redaktionsmitglied – wechselt nach Graz und wird die Aufgaben Dieters weiterführen.

Teschl weist als Webbeauftragter darauf hin, dass jedes Mitglied die E-Mail-Erreichbarkeit sicherstellen sollte. Dazu sollte jedes Mitglied die eigenen Daten auf der Webseite der ÖMG überprüfen und Korrekturen an Urbanek schicken.

Michor berichtet, dass die ÖMG-Adressen an die Suchmaschine der IMU angeschlossen wurden.

TOP 3

Berichte aus den Landessektionen. Aus den Landessektionen Graz und Wien liegen keine speziellen Berichte vor. Die Landessektion Wien ist mit der Organisation der Nachbarschaftstagung 2007 beschäftigt.

Aus der Landessektion Innsbruck berichtet Ostermann, dass es einige Aktivitäten

Einnahmen- und Ausgabenrechnung der ÖMG für das Jahr 2005. Linke Spalte: Saldo laut Buchhaltung. Rechte Spalte: Saldo nach Ausgliederung außergewöhnlicher Positionen.

Einnahmen 2005

Annoncen	*1.375,85*	*1.375,85*
IMN-Verkauf Inland	*136,36*	*136,36*
IMN-Verkauf EU-Ausland	*990,05*	*990,05*
IMN-Verkauf Ausland	*57,60*	*57,60*
Mitgliedsbeiträge Inland	*9.678,18*	*9.678,18*
Mitgliedsbeiträge EU-Ausland	*1.241,81*	*1.241,81*
Mitgliedsbeiträge Ausland	*352,00*	*352,00*
Spenden, USt-pflichtig (Buch)	*724,64*	*724,64*
Spenden, USt-frei	*410,00*	
Subvention bm:bwk (Didaktiktag)	*3.230,00*	
Div. Subventionen (kleine Veranst.)	*1.926,35*	
Zinsen, Kurswertänderung	*4.776,77*	*4.776,77*
Mathematik-Evaluierung	*19.933,33*	
Summe Einnahmen	*44.832,94*	*19.333,26*

Ausgaben 2005

Ausgaben: Didaktiktag	*2.993,24*	
Ausgaben: Festkolloquien	*3.000,00*	
Büromaterial	*62,70*	*62,70*
Mitarbeiterhonorare	*4.627,00*	*4.627,00*
Preise	*2.000,00*	*2.000,00*
Diverse Ausgaben	*327,28*	*327,28*
Druckkosten IMN, Lektorat	*5.157,46*	*5.157,46*
Porto IMN	*3.846,33*	*3.846,33*
Porto	*264,18*	*264,18*
Mitgliedsbeiträge (OCG, EMS)	*891,29*	*891,29*
Spesen (Vortrag, ...)	*4.218,19*	*4.218,19*
Buchungs- und Bankgebühren	*626,52*	*626,52*
Mathematik-Evaluierung	*48.575,68*	
Summe Ausgaben	*76.589,87*	*22.020,95*

Zusammenstellung

Einnahmen	*44.832,94*	*19.333,26*
Ausgaben	*-76.589,87*	*-22.020,95*
Verlust/Überschuss	*-31.756,93*	*-2.687,69*

zur Lehrerfortbildung gegeben hat, insbesondere einen sehr erfolgreichen Informationstag im Feber 2006 in Innsbruck mit 200 Besuchern (Schüler und Lehrer).

Kautschitsch berichtet aus der Landessektion Klagenfurt, dass ein eintägiger Workshop für Lehrer veranstaltet wurde sowie ein Herbstworkshop über vertauschbare Polynome (September 2006).

Aus der Landessektion Linz berichtet Larcher, dass sich die Sektion wie jedes Jahr am Johann-Kepler-Symposium beteiligt hat und wieder eine Modellierungswoche für begabte Schüler veranstaltet hat.

Hellekalek berichtet aus der Landessektion Salzburg, dass zurzeit Kapital angespart wird für einen Workshop mit Lehrern. Weiters wird jährlich ein Preis für die beste Dissertation vergeben.

Berichte vom internationalen Mathematikerkongress. Die beiden Delegierten der ÖMG waren Gruber und Michor. Michor berichtet, dass die Vollversammlung in Santiago de Compostela stattfand. Es ging vor allem um Statutenänderungen, Einführung einer neuen Kategorie von Mitgliedschaften (assoziierte Mitglieder) vor allem für Länder aus der Dritten Welt. Die Maßnahmen bei Nichtbezahlung der Beiträge wurden verschärft (Ausschluss bei zehnjähriger Säumigkeit). Ein neues Exekutivkomitee wurde gewählt: L. Lovász (Präsident), M. Grötschel (Sekretär), Z.-M. Ma, C. Procesi (Vizepräsidenten). Gruber ergänzt, dass eine der wichtigsten Tätigkeiten der IMU die Erfassung der gesamten mathematischen Literatur auf Datenträgern ist, wobei das Copyright Probleme bereitet. Er berichtet über den anschließenden IMU-Kongress in Madrid; hier ist besonders die hohe Würdigung des Kongresses durch die Politik hervorzuheben (Grußreden durch den Bürgermeister von Madrid und den König von Spanien).

TOP 4

Bericht des Vorsitzenden der Didaktikkommission, W. Schlöglmann:

Mitglieder: Mag. Dr. Otto Wurnig (Graz) scheidet aus der Didaktikkommission aus. Seine Stelle übernimmt Mag. Ingrid Guggenberger (Graz).

Im Berichtszeitraum fanden drei Sitzungen der Didaktikkommission (2.12. 2005/20. 4. 2006/ 22. 9. 2006) statt. Weiters veranstaltete die Didaktikkommission am 21. 4. 2006 an der Universität Wien einen Lehrertag für Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer an AHS und BHS.

Lehrertag: Der diesjährige Lehrertag an der Universität Wien war bezüglich der Teilnehmerzahl (mehr als 200) wieder sehr erfolgreich. Der Vorsitzende der Didaktikkommission konnte zur Eröffnung des Lehrertages auch dieses Jahr wieder zahlreiche Ehrengäste begrüßen. Frau Mag. Kasparovsky und Herr Dr. Dorninger vom bm:bwk, die Präsidentin des Stadtschulrates für Wien, Frau Dr. Brandsteidl, der Präsident des Landesschulrates für das Burgenland, Dr. Resch, Dekan Prof. Rindler sowie Landesschulinspektor Mag. Wurm (Stadtschulrat Wien) nahmen an der Eröffnung teil. Die angebotenen Vorträge fanden durchwegs positive Aufnahme und es ist auch dieses Jahr durch finanzielle Unterstützung des Stadtschulrates für Wien wieder möglich, die Vortragsausarbeitungen in einem Heft der Didaktikkommission zu publizieren und den Lehrerinnen und Lehrern zur Verfügung zu stellen. Weiters werden die Beiträge über das Internet für alle Interessenten verfügbar sein. Die Veranstaltung wurde wieder in vorbildlicher Weise von Frau Dr. Koth und Frau Obermaier organisiert.

Diskussionsthemen der Sitzungen:

Im Zuge der Diskussion über die Umwandlung der bisherigen Pädagogischen Akademien in Pädagogische Hochschulen wandte sich die Didaktikkommission vehement gegen den Vorschlag, Teile der Lehramtsausbildung für Lehrkräfte an Höheren Schulen an die künftigen Pädagogischen Hochschulen zu verlegen. Weiters wurde darauf hingewiesen, dass durch die Eingliederung der Pädagogischen Institute in die Pädagogischen Hochschulen auch die Fortbildung von Lehrkräften an AHS und BHS betroffen ist. Dies erfordert eine Einbindung der Universitäten in die Gestaltung der Fortbildung, aber auch verstärkte Aktivitäten der Universitäten in der Fortbildung ihrer Absolventen und Absolventinnen.

Die Didaktikkommission beschäftige sich intensiv mit den Ergebnissen von PISA 2003, wobei vor allem eine differenzierte Analyse der Daten aus fachdidaktischer Sicht notwendig wäre, da die vorliegenden Ergebnisse noch keine ausreichende Grundlage für eine seriöse Diskussion liefern.

Standards für den Mathematikunterricht: Im Rahmen der Didaktikkommission wurde über die Entwicklung bei der Einführung der Standards berichtet und Testaufgaben vorgestellt.

Fragen der Lehramtsausbildung an Universitäten: Die Didaktikkommission beschäftigte sich intensiv mit der Frage der fachlichen Kompetenz von Lehramtsstudierenden.

Die Didaktikkommission wurde vom neuen Leiter des Österreichischen Kompetenzzentrums für Mathematikdidaktik, Prof. Dr. Peschek, über Aufgaben und Zielsetzungen des Zentrums informiert (Wolfgang Schlöglmann) Anschließend berichtet Drmota über die Österreichische Mathematikolympiade (ÖMO). Es wurden 2006 drei Sitzungen abgehalten; die ÖMO entwickelt sich gut. Die befürchtete Zäsur durch den Pensionsantritt G. Barons ist nicht eingetreten, da sich Baron in dankenswerter Weise weiterhin bei der Vorbereitung der ÖMO engagiert und seine wertvollen Erfahrungen einbringt. In der Beispielkommission werden zurzeit die Anfängerwettbewerbe vorbereitet. Aufgrund des Einsatzes von Tichy hat das bm:bwk zugestimmt, den österreichisch-polnischen Wettbewerb weiterzuführen, eventuell in geänderter Form. Tichy dankt Baron für seine jahrzehntelangen hochgeschätzten Bemühungen um die Mathematik und die Mathematikolympiade.

Bericht des Vorsitzendes der Lehrersektion: Vom Vorsitzenden der Lehrersektion liegt kein Bericht vor; eine Diskussion über die Lehrersektion erfolgt unter TOP 8.

TOP 5: *Bericht aus der Statutenreformkommission.* Reich berichtet als Vorsitzender über die bisherigen Ergebnisse der Statutenreformkommission (Mitglieder: Fischer, Helmberg, Ostermann, Reich, Reitzner, Teichmann, Teschl). Es wurden bisher zwei Sitzungen abgehalten. In der ersten Sitzung wurden die Motive der Statutenänderung diskutiert. Diese wurde wegen Änderung des Vereinsrechts nötig. Weiters waren einige Punkte neu zu formulieren – Vorgangsweise bei Ehrenmitgliedschaft, Zusammensetzung des Vorstands, Ergänzungen bei den Vereinszwecken. In der zweiten Sitzung wurde nach Studium des Vereinsrechts festgestellt, dass die derzeitigen Statuten mit diesem in Einklang stehen, bis auf einen Punkt, nämlich die Festlegung, wie die ÖMG zu ihren finanziellen Mitteln kommt. Ansonsten lässt das Vereinsrecht einen breiten Gestaltungsspielraum offen. Folgende Änderungsvorschläge wurden von der Kommission ausgearbeitet:

Finanzierung: Die ÖMG finanziert sich aus Mitgliedsbeiträgen, Subventionen, Spenden, Legaten und Verkauf von Publikationen.

Vorstand: Im Vorstand soll die Stelle des Homepage-Verantwortlichen (derzeit kooptiert) in ein Vorstandsmitglied mit dem Aufgabenbereich „Beauftragter für Öffentlichkeitsarbeit" umgewandelt werden. Weiters soll eine Frauenbeauftragte in den Vorstand aufgenommen werden.

Ehrenmitgliedschaften: Es liegen zwei Vorschläge vor. Erstens, Verleihung der Ehrenmitgliedschaft durch einstimmigen, wohlbegründeten Vorstandsbeschluss nach Anhörung des Beirats. Zweitens, geheime Abstimmung in der Generalversammlung auf Vorschlag des Vorstands. Wie bereits auch in der Beiratssitzung ergibt die Diskussion eine Präferenz für den ersten Vorschlag.

Beirat: In der Beiratssitzung wurde angeregt, der Beirat sollte statutenmäßig aufgewertet werden, und zwar sollte der Beirat den Vorstand jeweils vor den Vorstandssitzungen beraten und das Mitspracherecht bei Ehrenmitgliedschaften und bei Wahlvorschlägen für Vorstandsmitglieder in den Statuten verankert werden. Die Statutenreformkommission wird diese Anregung aufgreifen.

Vereinszwecke: Die Vereinszwecke sollen klar formuliert und taxativ aufgezählt werden.

Es entwickelt sich eine Diskussion um Umbenennung des Förderungspreises zu einem klangvolleren Titel. Einige Vorschläge werden diskutiert (darunter Gödel-Preis und Vietoris-Preis); die Bezeichnung muss jedoch nicht in die Statuten aufgenommen werden.

Zum Zeitplan stellt Reich in Aussicht, dass die Statuten Anfang Dezember 2006 niedergeschrieben werden sollen, Ende Jänner von der Reformkommission beschlossen werden und dann dem Vorstand vorgelegt werden (Abstimmung darüber in der kommenden Generalversammlung).

Tichy dankt Reich für die ausgezeichnete und rasche Arbeit.

TOP 6: *Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands.* Dieser Punkt wurde bereits unter TOP 2 abgehandelt. Tichy dankt Kuich für sein langjähriges Engagement als Rechnungsprüfer.

TOP 7: *Neuwahl in den Beirat und der Rechnungsprüfer.* H.-G. Feichtinger bleibt als Rechnungsprüfer im Amt. Als zweiter Rechnungsprüfer wird P. Szmolyan (TU Wien) vorgeschlagen. Als neue Mitglieder in den Beirat werden vorgeschlagen: H. Engl (als ehemaliger Vositzender) und C. Krattenthaler (wegen seiner Vorbereitungstätigkeit für den ECM 2012).

Die Wahlvorschläge werden per Akklamation angenommen.

TOP 8: *Neuwahl der Landesvorsitzenden.* Tichy berichtet, dass die Mitgliederbefragung per E-Mail keine Änderungswünsche in den Landessektionen gebracht hat, sondern ausschließlich Bestätigungen. Er schlägt daher vor, die amtierenden Landessektionsvorsitzenden wieder zu bestellen. Es handelt sich um: Reich (Graz), Ostermann (Innsbruck), Kautschitsch (Klagenfurt), Larcher (Linz), Hellekalek (Salzburg), Schmeiser (Wien). Die Wahlvorschläge werden per Akklamation angenommen.

In der anschließenden Diskussion über die Lehrersektion meint Tichy, dass diese nach einem anfänglich guten Start nunmehr seit mehreren Jahren inaktiv war. Michor meint, dass unter den europäischen mathematischen Gesellschaften nur die italienische und die ungarische in größerer Zahl Lehrer und Lehrerinnen als Mitglieder haben. Schweiger argumentiert dagegen, asymmetrische Sektionsbildungen vorzunehmen. Helmberg fragt, was die ÖMG für Lehrer machen kann. In Gesprächen mit dem Vorsitzenden der Arbeitsgemeinschaft der AHS-Lehrer Tirol, H. Juen, wurde der Wunsch an ihn herangetragen, eine Liste von Vortragenden zu erstellen, die Informationsveranstaltungen für Lehrer machen können, und ein Online-Diskussionsforum einzurichten. Die Didaktikkommission wird gebeten, sich darum zu kümmern. Winkler meint, dass Lehrer auch Beiträge zur Didaktikkommission liefern können. Laut Tichy ist an eine Aktivierung der Lehrersektion im Augenblick nicht gedacht.

Tichy berichtet, dass die ÖMG derzeit genau 589 Mitglieder hat. Im Jahr 2006 sind fünf neue Mitglieder hinzugekommen und fünf Mitglieder verstorben. Die Verstorbenen sind Kurt Desoyer, Helmut Florian, Alois Koller, Wolfgang Rath und kürzlich Franz Josef Schnitzer. Die Generalversammlung erhebt sich zu einer Schweigeminute zum Gedenken.

TOP 9: *Verleihung der Förderungs- und Studienpreise.* Drmota berichtet als Vorsitzender der Studienpreiskommission, dass unter den Einreichungen eine Diplomarbeit und fünf Dissertationen waren. Als Preisträger wurden Christoph Erath (Diplomarbeit) und Johanna Michor (Dissertation) erwählt. Drmota hält die Laudatio für die beiden Preisträger (siehe S. 47). Anschließend erfolgt die Überreichung der Preise durch Tichy.

Förderungspreis: Die Kommission hat unter dem Vorsitz von Steinbach einstimmig Friedrich Pillichshammer als diesjährigen Förderungspreisträger gewählt. Die

Laudatio wird von Larcher gehalten (siehe S. 48). Anschließend erfolgt die Überreichung des Preises durch Tichy.

TOP 10: *Allfälliges.* Feichtinger trägt nach, dass die österreichische Mathematik im 6. EU-Rahmenprogramm erfolgreich war. Er ermuntert, auch in Zukunft mitzumachen und die Tätigkeiten auszuweiten. Eine Hilfe bietet das System Proviso des bm:bwk, das allerdings nicht vollständig ist. Feichtinger berichtet kurz über seine bisher vergeblichen Versuche, Unterstützung vom WWTF für einen Vortragsserver zu lukrieren. Das Thema wurde bereits im Vorstand erörtet, an den Tichy ihn verweist.

Die Versammlung endet um 18.30 Uhr.

M. Oberguggenberger (Schriftführer)

Laudatio für die Studienpreisträger 2006

Für den Studienpreis 2006 der ÖMG wurden eine Diplomarbeit und fünf Dissertationen eingereicht, wobei vorab festgestellt werden kann, dass alle eingereichten Arbeiten hervorragend waren, was eine sehr erfreuliche Tatsache ist.

Die vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Kommission hat nach reiflicher Prüfung der eingereichten Arbeiten dem Vorstand der ÖMG vorgeschlagen, die zwei Studienpreise an Christoph Erath für seine an der TU Wien unter der Anleitung von Prof. Dirk Praetorius verfasste Diplomarbeit „Adaptive Finite Volumen-Methode" und an Johanna Michor für ihre unter der Anleitung von Prof. Gerald Teschl an der Universität Wien verfasste Dissertation "Scattering Theory for Jacobi Operators and Applications to Completely Integrable Systems" zu vergeben.

Christoph Erath wurde 1979 in Feldkirch geboren. Nach Besuch der Hauptschule maturierte er an der HTL Rankweil und begann 1999 an der TU Wien das Studium Technische Mathematik, das er im Jahr 2005 mit der jetzt ausgezeichneten Diplomarbeit abschloss. Während seines Studiums verbrachte er auch ein Jahr an der Technischen Universität Trondheim in Norwegen und derzeit arbeitet er an der Universität Ulm, wo er auch sein Doktoratsstudium absolviert.

In seiner ausgezeichneten Diplomarbeit beschäftigt sich Herr Erath mit einem aktuellen Forschungsgebiet über Erhaltungsgleichungen in der numerischen Analysis. Die Kommission konnte sich versichern, dass sie weit über das übliche Anspruchsniveau einer Diplomarbeit hinausgeht. Herr Erath entwickelte neben der Aufarbeitung bekannter Methoden und Ergebnisse selbstständig neue Ideen und führte diese in eleganter Weise aus. Nach Einschätzung der Kommission sind die in der Diplomarbeit erzielten Resultate publikationswürdig. Sie erachtet diese Arbeit daher als preiswürdig, obwohl diese die einzige Diplomarbeit war, die für den Studienpreis eingereicht wurde.

Die zweite Preisträgerin, Johanna Michor, wurde 1979 in Wien geboren. Sie begann 1989 an der Universität Wien Mathematik und Physik zu studieren. Im Jahr 2002 schloss sie ihr Studium mit dem Diplom ab. Ihre Diplomarbeit über das Thema "Trace Formulas and Inverse Sprectral Theory for Finite Jacobe Operators" wurde übrigens im Jahr 2003 auch mit dem Studienpreis der ÖMG ausgezeichnet. Ihr anschließendes Doktoratsstudium wurde im Rahmen des DOC-Programms der Österreichischen Akademie der Wissenschaften unterstützt, insbesondere auch ein Aufenthalt an der Stanford University. Seit dem Abschluss ihres Doktoratsstudiums im vorigen Jahr arbeitet Frau Michor im Rahmen eines FWF-Projekts als Projektassistentin an der Universität Wien und erhielt kürzlich ein Schrödiger-Stipendium für einen Forschungsaufenthalt am Imperial College in London.

In ihrer ausgezeichneten Dissertation behandelt Frau Michor die Spektralanalyse von Jacobioperatoren, die beim ersten Betrachten sehr bescheiden als „tridiagonale Matrizen" erscheinen. Allerdings, um schon die Fragestellungen zu verstehen, müssen meromorphe Funktionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten analysiert werden. Daraus entwickelt Frau Michor die Spektraltheorie, Streutheorie, Lax-Paare und löst direkte und inverse Streuprobleme für „ihre Klasse" von Jacobioperatoren. Die eingesetzten Methoden sind sehr breit gestreut und umfassen (wie schon erwähnt) meromorphe Funktionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Fourier-Analysis, Spektraltheorie und Lax-Paare. Die Kommission erachtet es als außergewöhnlich, dass in einer Dissertation diese Vielfalt von bekannt schwierigen Techniken gemeinsam und gezielt eingesetzt worden sind. Die Resultate wurden auch in erstklassigen Zeitschriften wie den *Communications in Mathematical Physics* und den *Proceedings of the AMS* publiziert.

Die Kommission gratuliert den beiden Preisträgern ganz herzlich zu ihrer hervorragenden Leistung und wünscht ihnen weiterhin viel Erfolg.

M. Drmota

Laudatio für F. Pillichshammer anlässlich der Verleihung des Förderpreises der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Friedrich Pillichshammer wurde 1973 in Vöcklamarkt geboren, wo er auch heute mit seiner Frau und seinen bald zwei Kindern lebt. Er hat 1993 mit dem Studium der Mathematik in Salzburg begonnen, das er 1998 mit einer Diplomarbeit und 1999 mit einer Dissertation jeweils zu einem Thema aus dem Bereich der Banachraum-Algebra bei Reinhard Wolf abschloss. Diesen Thematiken widmet er sich in einem Seitenstrang seiner Forschungstätigkeit immer noch.

Zentrum und Ausgangspunkt seiner Untersuchungen in diesem Themengebiet ist ein Satz von Gross zur sogenannten Rendezvous-Zahl eines Banachraumes. Die überraschende Aussage dieses Satzes lautet: *„In jedem kompakten, zusammenhängenden, metrischen Raum gibt es eine eindeutig bestimmte positive reelle Zahl r, die sogenannte Rendezvous-Zahl des Raums, sodass es zu jeder Wahl von*

n Punkten $x_1, \ldots, x_n$ aus diesem Raum stets einen Punkt x im Raum gibt, so dass der durchschnittliche Abstand dieser n Punkte von x gleich r ist."

Weiterführende Untersuchungen zu diesem Resultat führen einerseits zu Fragestellungen über Größe und Form der Rendezvous-Zahlen in verschiedensten Banachräumen, bezüglich verschiedenster Normen, werfen den Fragesteller aber immer wieder auch zurück auf elementare, aber schlussendlich äußerst schwierig zu lösende Probleme der ebenen Geometrie. Eines dieser Probleme, denen sich Fritz Pillichshammer in diesem Zusammenhang immer wieder mittelbar oder unmittelbar nähert, ist das folgende immer noch ungelöste Problem der ebenen Geometrie: „Zu gegebenem n finde n Punkte in der Ebene mit Abstand zueinander jeweils kleiner oder gleich eins, sodass die Summe aller Abstände der Punkte zueinander maximal ist" Das Problem ist schon seit längerem gelöst, wenn man an Stelle der „Summe der Abstände der Punkte zueinander" die „Summe der Quadrate der Abstände der Punkte zueinander" nimmt. Und es ist auch – durch Pillichshammer – gelöst für den Fall, dass man an Stelle der „Summe der Abstände der Punkte zueinander" die „Summe der a-ten Potenzen der Abstände der Punkte zueinander" nimmt, wenn der Exponent a größer als $1,075\ldots$ ist.

Ich hatte dann im Jahr 1999 das Glück, Pillichshammer eine Projektstelle anbieten zu können und ihn dadurch für die Theorie der Gleichverteilung von Folgen, für die Theorie der niedrig-diskrepanten Punktmengen und damit in natürlicher Weise für die Theorie der Quasi-Monte Carlo-Methoden und für die Komplexitätstheorie zu gewinnen.

Die Quasi-Monte Carlo-Methoden hatten im Lauf der 90er-Jahre eine Revolution erfahren durch die systematische Einführung des Konzepts der digitalen (t,m,s)-Netze von Niederreiter. Das sind beliebig große, endliche Punktmengen in beliebig hochdimensionalen Einheitswürfeln mit Verteilungseigenschaften von bisher nicht gekannter Qualität. Die Güte dieser Verteilungseigenschaften konnte bis zu einem gewissen Punkt durch kombinatorisches Abzählen, kombiniert mit geometrischen Überlegungen, gemessen und bestätigt werden. Es war aber bald klar, dass für einen tieferen Einblick in die Struktur der Punktmengen und für eine feinere Messung der Verteilungseigenschaften neue, kraftvollere Techniken zu entwickeln sein würden. Unsere Idee war es dann, Walsh-Reihen in allgemeiner Basis massiv zu diesem Zweck einzusetzen. Diese Idee hat sich dann bald als äußerst fruchtbar erwiesen und Fritz Pillichshammer ist es gelungen, eine sehr effiziente Maschinerie, basierend auf Walshreihen, zu entwickeln, mit deren Hilfe viele der bisher bekannten Abschätzungen für Verteilungsmaße von digitalen (t,m,s)-Netzen zum Teil wesentlich verbessert werden konnten und mit deren Hilfe einzelne digitale (t,m,s)-Netze individuell erstmals detailliert in Hinblick auf ihre Verteilungseigenschaften studiert werden konnten.

Aus der Vielzahl der hier erzielten Resultate möchte ich nur eines herausgreifen: Die L_2-Diskrepanz einer Punktmenge im s-dimensionalen Einheitswürfel ist ein für Anwendungen wichtiges Maß für die Güte der Gleichverteilung der

Punktmenge. Vor allem ist es für Anwendungen wichtig, in beliebigen Dimensionen Punktmengen von beliebiger Größe mit kleiner solcher L_2-Diskrepanz zur Verfügung zu haben. Man weiß durch ein klassisches fundamentales Resultat aus dem Jahr 1954 von K. F. Roth, dass für jede Menge von N Punkten im s-dimensionalen Einheitswürfel gilt, dass die L_2-Diskrepanz mindestens die Größe $C_s(\log N)^{(s-1)/2}/N$ hat, wobei C_s eine nur von der Dimension s abhängige Konstante ist. Roth hat eine solche sehr kleine Konstante C_s explizit angegeben.

1980 wurde von Roth selbst gezeigt, dass dieses Resultat in der Größenordnung in N bestmöglich ist. Es war das allerdings ein reines Existenzresultat, das keine konkreten Punktmengen von kleiner L_2-Diskrepanz lieferte. Erst 2002 wurde von Chen und Skriganov ein konstruktiver Beweis dafür gegeben, dass die untere Schranke von Roth in der Größenordnung von N bestmöglich ist. Allerdings waren die in den Abschätzungen der L_2-Diskrepanz dieser Punktmengen auftretenden Konstanten so groß, dass das Resultat für Anwendungen absolut unbrauchbar war. Pillichshammer konnte nun 2005 das in jeder Hinsicht absolut befriedigende und überraschende Resultat zeigen: Die untere Schranke von Roth ist nicht nur in der Größenordnung in N bestmöglich, sondern im Wesentlichen auch in der von Roth angegebenen Konstanten C_s. Das wurde dadurch gezeigt, dass für jedes N und jedes s die Existenz eines digitales (t,m,s)-Netzes nachgewiesen wurde mit L_2-Diskrepanz kleiner als im Wesentlichen $C_s(\log N)^{(s-1)/2}/N$.

Wie gesagt war das nur eines, wenn auch wahrscheinlich das wichtigste Resultat aus einer Reihe von weiteren Resultaten in diese Richtung. Ich will aber noch einen dritten ganz wesentlichen Themenkomplex in der Arbeit von Fritz Pillichshammer vorstellen. Fritz hat bald schon engen Kontakt zu der Complexity Theory-Gruppe um Henrik Wozniakowski von der Columbia University, um Ian Sloan in Sydney und Stefan Heinrich in Kaiserslautern gefunden. Vor allem mit der Gruppe um Sloan kam es bald zu fruchtbaren Kooperationen und zu äußerst interessanten Arbeiten im Bereich der Complexity Theory.

Die grundlegende Fragestellung, der sich Pillichshammer in diesem Bereich gewidmet hat und zu der er wichtige und teils sehr technische, in dieser Kürze hier nicht genügend zu würdigende Arbeiten verfasst hat, die grundlegende Fragestellung also ist folgende: Die numerische Integration sehr hochdimensionaler Funktionen mittels Monte Carlo- und quasi-Monte Carlo-Methoden ist bezüglich Komplexität eine sehr große Herausforderung. So liefert etwa die Ungleichung von Koksma und Hlawka eine Fehlerabschätzung für die numerische Integration von Funktionen mittels quasi-Monte Carlo-Methoden. Diese Ungleichung ist aber leider in sehr hohen Dimensionen im Allgemeinen nicht mehr nutzbringend anwendbar.

In vielen Anwendungen (wie zum Beispiel in der Finanzmathematik) sind die zu integrierenden hochdimensionalen Funktionen jedoch so beschaffen, dass ihre Abhängigkeit von den einzelnen Koordinaten sehr verschieden stark ist. Zieht man diese Tatsache in Betracht und wählt man die Punktmengen, die in der quasi-Monte Carlo-Methode zur numerischen Berechnung der Integrale verwendet werden in Hinblick auf diese Eigenschaft geeignet aus, vielleicht, so lautet die Fragestellung, vielleicht könnte man dann auch in sehr hohen Dimensionen effiziente Integrationsmethoden und brauchbare Fehlerabschätzungen finden? Die Antwort auf diese Frage ist „Ja“ und führt zum Konzept der gewichteten Diskrepanz von Punktmengen und zum Konzept der numerischen Integration in gewichteten Sobolev-Räumen. Zu dieser Thematik hat Pillichshammer (zum Teil in Kooperation mit Josef Dick in Sydney) wesentliche Beiträge geleistet. Unter anderem hat er die Arbeit “Multivariate integration in weighted Hilbert spaces based on Walsh functions and weighted Sobolev spaces” verfasst, für die er 2005 den Best paper Award des *Journal of Complexity* verliehen bekommen hat, und im Weiteren hat er für seine Arbeiten auf diesem Gebiet heuer den *Information Based Complexity Young Researcher Award* erhalten.

Ich möchte hier den kurzen Einblick in die Forschungsarbeit von Fritz Pillichshammer beenden, muss aber noch ganz kurz die biographischen Eckdaten zu Ende führen: Im Jahr 2000 ist Fritz Pillichshammer mit mir als Assistent nach Linz gegangen, er hat sich dort im Jahr 2003 habilitiert und ist seither außerordentlicher Universitätsprofessor am Institut für Finanzmathematik der Universität Linz. Ich gratuliere noch einmal ganz herzlich zum Förderpreis der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 2006!

G. Larcher

Vorträge im Bereich Analysis und Zahlentheorie an der TU Graz

19. 1. 2006: *L. Misík und J. Tóth* (Univ. Ostrava): Some applications of filter convergence.

19. 1. 2006: *J. Kostra* (Univ. Ostrava): Characterization of orders with a normal basis in algebraic number fields of prime degree.

14. 2. 2006: *Yves Lacroix* (Univ. Toulon): Asymptotics for return times in ergodic dynamical systems.

31. 3. 2006: *T.N. Shorey* (Tata Institute, Bombay): Squares in products of integers in arithmetic progression.

31. 3. 2006: *L. Summerer* (Univ. Wien): Triangle admissible lattice point configurations.

5. 5. 2006: *R. Tijdeman* (Univ. Leiden): Irrationality of infinite sums of rational numbers.

19. 5. 2006: *D. Masser* (Univ. Basel): Multiplicative dependence on algebraic varieties.

19. 6. 2006: *I. Reilly* (Univ. of Auckland): Collaboration across the hemispheres.

19. 6. 2006: *G. Tironi* (Univ. Triest): On Whyburn spaces.

19. 6. 2006: *V. Valov* (Nipissing Univ.): Parametric general position properties a joint work with Taras Banakh.

23. 6. 2006: *R. Avanzi* (RuhrUniv. Bochum): Delaying and Merging Operations in Scalar Multiplication: Applications to Curve-Based Cryptosystems.

29. 6. 2006: *M. Denker* (Univ. Göttingen): Local limit theorems: some applications in statistics, finance and hyperbolic geometry.

29. 6. 2006: *H. Dehling* (Ruhr-Univ. Bochum): Stochastic models for particle transport in fluidized bed reactors.

30. 6. 2006: *A. Dabrowski* (Univ. Ottawa): Poisson limits for empirical point processes.

30. 6. 2006: *I. Berkes* (TU Graz): Additive number theoretic functions and the pathwise cental limit theorem.

30. 6. 2006: *P. Gruber* (TU Wien): Prinzipien der diskreten Geometrie.

28. 7. 2006: *J. Teugels* (KU Leuven): Real inversion formulas.

28. 9. 2006: *A. Filipin* (Univ. Zagreb): There are only finitely many D-1-quadruples.

6. 10. 2006: *M. Drmota* (TU Wien): Die Mathematik von Quicksort und verwandte Fragestellungen.

6. 10. 2006: *J. Thuswaldner* (Montanuniv. Leoben): Über das Rauzyfraktal.

1. 12. 2006: *J. Teichmann* (TU Wien): Weak and strong Taylor Approximations

for the solution of Kolmogorov's equation with Applications to Libor Market Models (joint work with Maria Siopacha).

15. 12. 2006: *Th. Stoll* (TU Wien): Complete decomposition of Dickson-type polynomials and generalizations.

Vorträge 2005–2006 im Strukturtheorie-Seminar an der TU Graz

21. 1. 2005: *K. Dykema* (A&M University, Texas): Multiplication of free random variables.

11./12. 5. 2005: *C. Pittet* (Univ. Aix-Marseille 1): Minivorlesung: Random walks and isoperimetry on finitely generated groups.

31. 5. 2005: *B. Servatius* (Worcester Polytechnic, MA): Starrheit und globale Starrheit von Graphen (organisiert gemeinsam mit F. Aurenhammer, IGI, TU Graz).

1. 6. 2005: *F. Sobieczky* (TU Graz): Irrfahrten auf endlichen perkolativen Teilgraphen von transitiven Graphen.

10. 6. 2005: *W. Woess* (TU Graz): Horozyklische Produkte von Bäumen, Ringe von Laurentreihen, und Bewertungen.

1. 7. 2005: *F. Lehner* (TU Graz): Spektralberechnung auf freien Gruppen.

7. 10. 2005: *L. Gilch* (TU Graz): Lamplighter Irrfahrten auf Bäumen.

16. 12. 2005: *H. Heyer* (Univ. Tübingen): Polynomielle Faltungsstrukturen über kompakten Mengen und Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

20. 1. 2006: *V. A. Kaimanovich* (International Univ. Bremen): Random walks with maximal entropy.

20. 1. 2006: *A. Timar* (Indiana Univ., Bloomington, and TU Graz): Neighbouring clusters in Bernoulli Percolation.

10. 3. 2006: *J. Parkinson* (University of Sydney): Isotropic radom walks on affine buildings.

9. 3. 2006: *A. Timar* (TU Graz): Cut sets in infinite transitive graphs.

23. 3. 2006: *P. Diaconis* (Stanford Univ.): Mathematics and Magic Tricks (organisiert gemeinsam mit und im math.space, Wien).

4. 4. 2006: *F. Sobieczky* (TU Graz): Amenability of equivalence relations and graphs.

20. 4. 2006: *I. Veselic* (TU Chemnitz): Anderson-percolation Hamiltonians and compactly supported eigenstates.

21. 4. 2006: *D. Lenz* (TU Chemnitz): Gleichmäßige Existenz der integrierten Zustandsdichte.

10. 5. 2006: *A. Timar* (TU Graz): Conformal invariance and critical percolation in the plane.

12. 5. 2006: *V. Capasso* (Univ. Milano): On the stochastic geometry of birth-and-growth processes.

18. 5. 2006: *A. Timar* (TU Graz): A short proof of Kesten's theorem on critical percolation in dimension two.

22. 5. 2006: *E. Teufl* (Univ. Bielefeld): Spannende Bäume und Widerstand auf selbst-ähnlichen Graphen.

7. 6. 2006: *N. Gantert* (Univ. Münster): Recurrence and transience of branching Markov chains.

7. 6. 2006: *F. Sobieczky* (TU Graz): Amenabilität von horozyklischen Produkten zufälliger Bäume.

22. 6. 2006: *U. Haböck* (Univ. Wien): Recurrence of the twisted planar random walk.

6. 10. 2006: *S. Müller* (Univ. Münster): The faces of Branching Markov Chains.

22. 11. 2006: *T. Antunovic* (TU Chemnitz): Asymptotic behavior of the integrated density of states on Cayley graphs.

17. 11. 2006: *S. Rolles* (TU München): Edge-reinforced random walk – recent progress and open problems.

30. 11. 2006: *N. Seifter* (Montanuniv. Leoben): Erreichbarkeitsrelationen in gerichteten Graphen.

6. 12. 2006: *M. Neuhauser* (Univ. Wien): Neue Gegenbeispiele zur starken Atiyah-Vermutung.

18. 12. 2006: *F. Halter-Koch* (Univ. Graz): Nicht-eindeutige Faktorisierungen.

Vorträge an der TU Wien

Mathematisches Kolloquium zum 65. Geburtstag von Prof. Dr. DDr.h.c. Peter M. Gruber und zum 90. Geburtstag von Emer. Prof. Dr. Dr.h.c.mult. Edmund Hlawka am 13. 10. 2006

P. M. Gruber (Wien): Geometrie der Zahlen und Edmund Hlawka.

R. Schneider (Freiburg): Stabilitätsprobleme in der Konvexgeometrie.

M. Henk (Magdeburg): Packungen konvexer Körper.

Kolloquium anlässlich der Pensionierung von Frau Prof. Dr. Inge Troch und Herrn Prof. Dr. Hans-Jörg Dirschmid am 20. 10. 2006

A. Kugi (Univ. des Saarlandes): Modellbasierte Regelung mechatronischer Systeme.

H. G. Feichtinger (Univ. Wien): Von der Linearen Algebra zur Zeit-Frequenzanalyse.

D. Magometschnigg (Med. Univ. Wien), *S. Wassertheurer* (ARCS Seibersdorf), *F. Breitenecker* (TU Wien): Von der PDE zur medizinischen Diagnose.

Martin Holzinger (Wien): Konforme Abbildung und Simulation – eine Anwendung.

F. Rattay (TU Wien): Wie Mathematik auf die Nerven geht: Computersimulationen und Analysen für die Neuroprothetik.

F. Breitenecker (TU Wien): Eine ODE fuer die Renaissance.

F. Scharl (Erzdiözese Wien): Naturwissenschaft und Glaube – eine rein menschliche Angelegenheit?

Mitgliederdatenbank der ÖMG

Bitte kontrollieren Sie Ihren Eintrag in der Mitgliederdatenbank der ÖMG (siehe *http://www.oemg.ac.at/Suche.html*). Nur bei korrekter E-Mail-Adresse können Sie alle elektronisch versandten Mitteilungen der ÖMG erhalten.

Bei fehlerhaften Einträgen wenden Sie sich bitte an das Sekretariat der ÖMG (Technische Universität Wien, z.H. F. Urbanek, Wiedner Hauptstr. 8-10/1042, A-1040 Wien, Tel: (+43)1-58801-11823, e-mail *sekr@oemg.ac.at*).

Europäische Mathematische Gesellschaft

Mitglieder der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft haben die Möglichkeit, bei einer zusätzlichen Einzahlung von 22.– € bei der Bezahlung des ÖMG-Mitgliedsbeitrags persönliche Mitglieder der Europäischen Mathematischen Gesellschaft (EMS) zu werden. Bei den dieses Jahr mitversandten Erlagscheinen wird auf diese Möglichkeit nochmals hingewiesen.

Der Vorstand der ÖMG ermuntert alle Mitglieder der ÖMG, von dieser Gelegenheit Gebrauch zu machen.

Persönliche Mitglieder der EMS erhalten u.a. viermal jählich den EMS Newsletter; sie müssen beim Kongress der EMS (ECM) und bei EMS-geförderten Tagungen nur einen reduzierten Tagungsbeitrag zahlen und sie erhalten bei Publikationen der EMS einen Mitgliederrabatt.

Weitere Information findet man unter *http://www.emis.de*.

Persönliches

Prof. *Heinz Engl* (Univ. Linz) wird am kommenden ICAM-Kongress 2007 in Zürich gemeinsam mit Prof. *Ingrid Daubechies* (Princeton University, USA) der *ICAM Pioneer Prize* verliehen.

Prof. *Karl Sigmund* (Univ. Wien) wurde im Rahmen der von der Tageszeitung *Die Presse* veranstalteten Wahl *Austria 06* zum Österreicher des Jahres 2006 in der Kategorie Wissenschaft gewählt.

Prof. *Josef Teichmann* (TU Wien) und Prof. *Gerald Teschl* (Univ. Wien) erhielten 2006 den Start-Preis des FWF.

Der FWF hat an der Universität Graz einen Spezialforschungsbereich *Mathematical Optimization and Applications in Biomedical Sciences* unter der Leitung von Prof. *Karl Kunisch* (Univ. Graz) eingerichtet. Weiters wurde ein Doktoratskolleg *Numerical Simulations in Technical Siences* unter der Leitung von Prof. *Olaf Steinbach* (TU Graz) genehmigt und das Doktoratskolleg *Differentialgleichungsmodelle in Wissenschaft und Technik* unter der Leitung von Prof. *Christian Schmeiser* (Univ. Wien) verlängert.

Neue Mitglieder

Karlheinz Gröchenig, Prof. Dr. — Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Nordbergstr. 15, A 1090 Wien. geb. 1959. 1985 Doktorat an der Univ. Wien, 1988 bis 1993 Assoc. Prof. und 1993 bis 2004 Full Prof. an der Univ. of Connecticut. 2004 bis 2005 Institut für Biomathematik GSF München, seit 1.3.2006 Professor an der Univ. Wien. e-mail *karlheinz.groechenig@univie.ac.at*, Homepage: *http://homepage.univie.ac.at/karlheinz.groechenig/*.

Ute Weitensfelder — Südbahnstr. 12, 9800 Spittal an der Drau. geb. 1980. HTL Klagenfurt, Ausbildungszweig Nachrichtentechnik, Studium Physik und seit Okt. 1999 Mathematik. e-mail *ute@merkima.net*, Homepage: *http://www.weitensfelder.at/ute*.

Slovak-Austrian Mathematical Congress 2007

9. Österreichisches Mathematiktreffen in Podbanske, Slowakei
16.–21. September 2007 – Erste Aussendung

Der Vorstand der ÖMG und die örtliche Tagungsleitung laden alle interessierten Kolleginnen und Kollegen herzlich zur Teilnahme am 9. Treffen der ÖMG ein. Die Tagung wird als Nachbarschaftstagung unter dem Titel “Slovak-Austrian Mathematical Congress” in Kooperation mit der Slovak Union of Mathematicians and Physicists im Hotel Permon in der Hohen Tatra stattfinden.

Folgende Hauptvortragende haben zugesagt: *Jean Dolbeault* (Paris), *Charie Elliott* (Sussex), *Petr Hajek* (Prag), *Willi Jäger* (Heidelberg), *Bernd Kirchheim* (Leipzig), *Eugenijus Manstavičius* (Vilnius), *Maurice Mignotte* (Strasbourg), *Nizar Touzi* (London).

Minisymposien zu folgenden Themen wurden bisher fixiert: *Analytic Combinatorics and Probabilistic Number Theory – Navier-Stokes equations and related conservation laws – Mathematical methods in image processing – Solution of advection-diffusion-reaction equations – Graph theory*

Weiters werden 20-minütige Kurzvorträge stattfinden. Während der Tagung wird die ordentliche Generalversammlung und eine Sitzung des Beirates der ÖMG durchgeführt. Das Rahmenprogramm wird Gelegenheit bieten, die Naturschönheiten der Hohen Tatra und die slowakische Gastlichkeit zu genießen.

Die Tagungsgebühr inkludiert

– Vollpension, beginnend mit dem Abendessen am 16. September und endend mit dem Mittagessen am 21. September,
– Kaffeepausen während des wissenschaftlichen Programmes,
– Welcome party, Konferenzdinner, Bus beim Ausflug am 19. September.

Die Tagungsgebühr beträgt 475,– € (575,– € bei Unterbringung im Einzelzimmer, 300,– € für Studenten und Begleitpersonen). Die Bezahlung muss bis 15. Juli 2007 erfolgen. Weitere Informationen sowie Details zur Registrierung, zur Anmeldung von Kurzvorträgen (über das Internet) und über die Zahlungsmodalitäten entnehmen Sie bitte der Konferenz-Homepage: *http://www.mat.univie.ac.at/∼oemg07/* Anfragen bitte per E-Mail an *oemg07@mat.univie.ac.at*.

Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2007

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2007 wieder zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2005 oder 2006 eine Diplomarbeit bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Diplomarbeiten ist ein Abschluss eines Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Doktoratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlossenen Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten Mathematiker bzw. Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2007 bei mir einlangen und folgende Unterlagen enthalten:

1. Ein Exemplar der als besonders hoch qualifiziert bewerteten mathematischen Diplomarbeit bzw. Dissertation;
2. zwei begründete Bewertungen dieser Diplomarbeit bzw. Dissertation;
3. einen Lebenslauf des Kandidaten bzw. der Kandidatin einschließlich kurzer Beschreibung des Studienablaufes.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachtungskommission die Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500,– € dotiert. Jeder Preisträger erhält eine Urkunde.

Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird sie (er) auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Robert F. Tichy

Adresse:
o.Univ.-Prof. Dr. Robert F. Tichy
Institut für Mathematik der TU Graz,
Steyrergasse 30
8010 Graz

Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2007

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2007 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematiker oder Mathematikerinnen, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind. Ein wesentlicher Teil der Arbeiten muss in Österreich erbracht worden sein.

Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten habilitierten Mathematiker bzw. Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2007 bei mir einlangen und folgende Unterlagen enthalten:

1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung;
2. Publikationsliste;
3. wissenschaftlicher Lebenslauf.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine Begutachtungskommission den Preisträger oder die Preisträgerin aus. Der Preis ist mit 1.000,– € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird der Preisträger oder die Preisträgerin eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten.

Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er oder sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Robert F. Tichy

Adresse:
o.Univ.-Prof. Dr. Robert F. Tichy
Institut für Mathematik der TU Graz,
Steyrergasse 30
8010 Graz