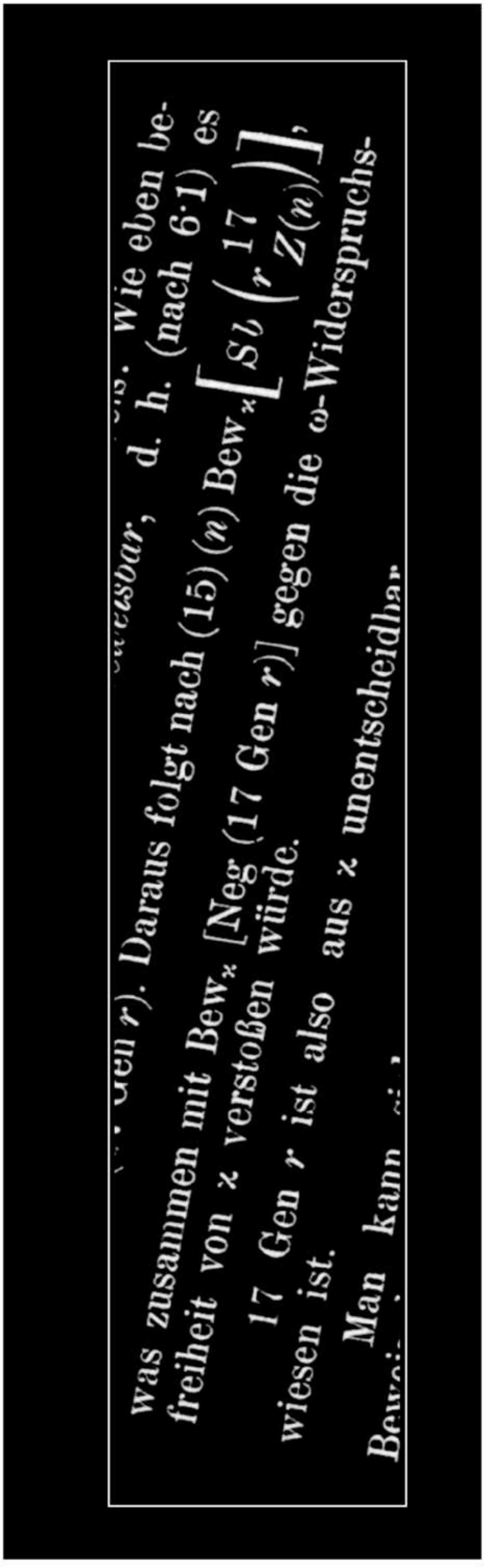
Wie eben be-
d. h. (nach 6·1) es
Gen r). Daraus folgt nach (15) (n) Bew$_\varkappa$ $\left[Sb\left(r \begin{smallmatrix}17 \\ Z(n)\end{smallmatrix}\right)\right]$,
was zusammen mit Bew$_\varkappa$ [Neg (17 Gen r)] gegen die ω-Widerspruchs-
freiheit von $\varkappa$ verstoßen würde.
17 Gen r ist also aus $\varkappa$ unentscheidbar
wiesen ist.
Man kann

IMN

Internationale Mathematische Nachrichten Nr. 202

Der Gödelsche Vollständigkeitssatz
Auswahl der Millenniumspreise

Österreichische Mathematische Gesellschaft

August 2006

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83) und P. Flor (1986–99).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. e-mail *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Redaktion:

Ständige Mitarbeiter der Redaktion:

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

Vorstand:

R. Tichy (TU Graz): Vorsitzender
W. Schachermayer (TU Wien): Stellvertretender Vorsitzender
M. Drmota (TU Wien): Herausgeber der IMN
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Schriftführer
I. Fischer (Univ. Klagenfurt): Stellvertretende Schriftführerin
H. Pottmann (TU Wien): Kassier
F. Rendl (Univ. Klagenfurt): Stellvertretender Kassier
G. Teschl (Univ. Wien): Web-Beauftragter (kooptiert)

Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:

L. Reich (Graz)
A. Ostermann (Innsbruck)
H. Kautschitsch (Klagenfurt)
G. Larcher (Linz)
P. Hellekalek (Salzburg)
C. Schmeiser (Wien)
R. Geretschläger (Lehrersektion)
W. Schlöglmann (Didaktikkommission)

Beirat:

A. Binder (Linz)
C. Christian (Univ. Wien)
U. Dieter (TU Graz)
G. Gottlob (TU Wien)
P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
E. Hlawka (TU Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
R. Mlitz (TU Wien)
W. Müller (Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
N. Rozsenich (Wien)
F. Schweiger (Univ. Salzburg)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
H. Stachel (TU Wien)
H. Strasser (WU Wien)
G. Teschl (Univ. Wien)
H. Troger (TU Wien)
W. Wurm (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionsvorsitzende gehören statutengemäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 202 (60. Jahrgang) August 2006

Inhalt

Die Titelseite zeigt eine Schlüsselpassage aus der Arbeit von Kurt Gödel über *formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, erschienen in den Monatsheften für Mathematik und Physik 38 (1931), 173–198. „17 Gen r“ steht für jene unentscheidbare und wahre Aussage, die ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 202 (2006), 1–14

Prädikatenlogik erster Stufe und der Gödelsche Vollständigkeitssatz

Martin Goldstern
Technische Universität Wien

Die mathematische Logik nimmt in der Mathematik eine Sonderstellung ein. Sie ist erstens ein mathematisches Gebiet wie alle anderen, in dem mit mathematischen Methoden mathematische Objekte untersucht werden; wegen des Charakters der von ihr untersuchten Objekte kann man die Logik aber auch als „Metamathematik" bezeichnen. Anders als z.B. in der Gruppentheorie, in der Definitionen, Sätze und Beweise behandelt werden, die sich mit Gruppenelementen, Gruppen, Normalteilern, Automorphismen etc. beschäftigen, werden in der mathematischen Logik Definitionen, Sätze und Beweise betrachtet, die sich selbst wieder mit Definitionen, Sätzen und Beweisen beschäftigen. Wenn auch jeder Mathematiker genau versteht, was ein Beweis ist, so ist es doch in der „naiven" (also nicht selbstreflektierenden) Mathematik unüblich, Beweise als eigenständige mathematische Objekte zu untersuchen.

Der *Gödelsche Vollständigkeitssatz* zeigt, dass der zunächst informelle Begriff des Beweises tatsächlich adäquat formalisiert werden kann; erst dadurch wird eine mathematische Untersuchung von Beweisen möglich. Insbesondere wird dadurch auch die Unbeweisbarkeit mathematisch fassbar: Neben den in der Mathematik üblichen Ergebnissen, dass ein vermuteter Satz A entweder bewiesen oder widerlegt wird (dass also $\neg A$ bewiesen wird), gibt es in der mathematischen Logik noch eine dritte Möglichkeit: es kommt vor, dass man die *Unbeweisbarkeit* beider Sätze A und $\neg A$ mathematisch exakt *beweisen* kann.

ISSN 0020-7926

1 Prädikatenlogik als universelle Sprache

Eine prädikatenlogische Sprache wird durch ein *Alphabet* festgelegt, das ist eine (meist endliche) Menge von Relations-, Funktions- und Konstantensymbolen, wobei jedem Funktions- und Relationssymbol eine endliche Zahl (in der Praxis oft 1 oder 2) als „Stelligkeit“ zugeordnet wird. Weiters lässt man eine (meist abzählbare) Menge von Variablen zu.

Als *Terme* bezeichnet man nun erstens alle Konstantensymbole und alle Variablen, sowie alles, was man durch (wiederholte) Anwendung von Funktionssymbolen auf Variable und Konstantensymbole bekommt („Anwendung“ ist hier ein rein syntaktischer Vorgang, der etwa von den formalen Ausdrücken x (Variable) und c (Konstantensymbol) zum formalen Ausdruck $f(x,c)$ führt, wenn f ein zweistelliges Funktionssymbol ist).

Als *Atomformeln* bezeichnet man alle relationalen Ausdrücke der Form $R(t_1,\ldots,t_n)$ (wobei R ein n-stelliges Relationssymbol und die t_i Terme sind), sowie Ausdrücke der Form $t_1 = t_2$. Formeln erhält man aus Atomformeln durch (wiederholte) Anwendung der Booleschen Junktoren $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \ldots$ sowie durch (wiederholte) Anwendung der Quantoren $\forall$ und $\exists$ (siehe die untenstehenden Beispiele. Manchmal erweist es sich aus technischen Gründen als praktisch, offiziell nur eine kleinere Anzahl von Junktoren zuzulassen und alle anderen Junktoren als Abkürzungen anzusehen, also z.B. die Formel $A \leftrightarrow B$ nicht als eigenständige Formel, sondern als Abkürzung für $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ anzusehen).

Eine *geschlossene Formel* (oder auch „Satz“) ist eine Formel, die keine freien Variablen enthält; das heißt, dass in so einer Formel alle Variablen durch Quantoren gebunden sind.

Eine *Struktur* $\mathcal{M}$ für eine vorgegebene Sprache bzw. für ein vorgegebenes Alphabet besteht aus einer nichtleeren Menge M sowie aus Interpretationen der Funktions-, Relations- und Konstantensymbole. Funktionssymbole müssen hier als Funktionen auf M geeigneter Stelligkeit interpretiert werden, etc. Die Interpretation eines Funktionssymbols f in der Struktur $\mathcal{M}$ wird oft mit $f^{\mathcal{M}}$ bezeichnet. Vom Gleichheitssymbol „=“ verlangt man üblicherweise, dass es durch die tatsächliche Gleichheit (also durch die Menge $\{(m,m) : m \in M\}$) interpretiert wird.

Die *Semantik* (oder „Bedeutung“) einer geschlossenen Formel erklärt, in welchen Strukturen die betrachtete Formel gilt; sie wird in natürlicher Weise definiert (siehe die folgenden Beispiele; die Formel $\forall y \exists x\, f(x) = y$ gilt zum Beispiel in allen Strukturen $\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}})$, in denen das Funktionssymbol f durch eine surjektive Funktion $f^{\mathcal{M}}$ von M nach M interpretiert wird).

Charakteristisch für die *erststufige* Prädikatenlogik ist, dass Quantoren sich immer nur auf *Elemente* von M beziehen, also nicht etwa auf Teilmengen, Funktionen, etc.

Beispiel: Sprache der Gruppentheorie Die Sprache der Gruppentheorie verwendet ein zweistelliges Operationssymbol $*$ und (je nach Geschmack) auch ein weiteres einstelliges Funktionssymbol $^{-1}$ und ein Konstantensymbol 1.

Beispiel für einen formulierbaren Satz der Gruppentheorie: „Wenn alle Elemente einer Gruppe Ordnung höchstens 3 haben, dann ist die Gruppe kommutativ“:

$$\forall x\,(x = 1 \vee x * x = 1 \vee (x * x) * x = 1) \rightarrow \forall x \forall y\,(x * y = y * x)$$

Dieser Satz gilt nicht in allen Gruppen; er beschreibt also eine Eigenschaft von gewissen Gruppen.

Man stößt aber bald auf Eigenschaften von Gruppen (oder deren Elementen), die nicht durch Sätze (bzw. Formeln) der Prädikatenlogik erster Stufe ausdrückbar sind, wie zum Beispiel Endlichkeit oder Einfachheit.

Beispiel: Sprache der angeordneten Körper Hier verwenden wir die Funktionssymbole $+$, $-$, $*$ sowie das Relationssymbol $\leq$, und je nach Geschmack auch / (siehe die unten stehende Bemerkung über partielle Funktionen und die Konstantensymbole 0 und 1).

In dieser Sprache ist zum Beispiel die folgende wahre Aussage („Packungsproblem“) ausdrückbar:

> „In eine Kiste mit den Maßen $3 \times 4 \times 5$ passen mindestens 2 Kugeln mit Radius 1“.

Sie besagt nämlich, dass es zwei Punkte im $\mathbb{R}^3$ gibt (gegeben durch Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2), die gewisse Beziehungen erfüllen, wie etwa $1 \leq z_1$ und $z_1 + 1 \leq 5$, oder

$$(x_1 - x_2) * (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) * (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2) * (z_1 - z_2) \geq 4.$$

Dies lässt sich durch eine erststufige Formel

$$\exists x_1 \exists y_1 \exists z_1 \exists x_2 \exists y_2 \exists z_2 \left(\cdots \wedge z_1 + 1 \leq 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \wedge \cdots \right)$$

ausdrücken.

Achtung: In dieser Sprache kann wieder nur über alle Körperelemente quantifiziert werden, nicht auch über die natürlichen Zahlen. Zum Beispiel ist die Eigenschaft eines angeordneten Körpers, archimedisch zu sein (das heißt, dass jedes Körperelement kleiner als eine der Zahlen $1, 1+1, \ldots$ ist), nicht in dieser Sprache ausdrückbar.

Varianten: mehrsortige Strukturen, partielle Funktionen Oft erweist es sich als praktisch, eine Variante der Prädikatenlogik zu verwenden, in der wir Variable mehrerer „Sorten" unterscheiden; den Relations- und Funktionssymbolen sind dann nicht nur Stelligkeiten, sondern für jede Stelle auch eine Sorte zugeordnet, und eine Struktur hat dann nicht nur eine Grundmenge M, sondern eine Menge M_s für jede Sorte s (sowie wie vorhin Interpretationen der Funktions-, Relations- und Konstantensymbole).

Statt einer formalen Definition ist ein Beispiel illustrativer: In der Sprache der Vektorräume unterscheiden wir die beiden Sorten „Skalar" (der die Variablen λ, $\mu, \dots$ zugeordnet sind) und „Vektor" (mit den Variablen x, $y, \dots$). Jeder Quantor bezieht sich immer nur auf eine Sorte, z.B. $\forall\lambda$ quantifiziert über alle Skalare der betrachteten Struktur.

Ebenso ist es möglich (etwa durch Auszeichnung eines speziellen Elements „*undef*" der betrachteten Struktur), mit erststufigen Formeln Strukturen mit partiellen Operationen zu beschreiben (die partielle Operation der Division in einem Körper K könnte man zum Beispiel durch eine totale Operation auf der Menge $K \cup \{undef\}$ ersetzen, indem man in allen Fällen, wo x/y undefiniert ist, den neuen Wert *undef* verwendet).

Diese Änderungen der Sprache sind aber rein kosmetischer Natur; die unten genannten Resultate über Axiomatisierbarkeit und Entscheidbarkeit gelten für die mehrsortige genauso wie für die einsortige Logiken.

Prädikatenlogik zweiter Stufe Es wurde in den Beispielen erwähnt, dass ganz einfache Eigenschaften von Strukturen (z.B. Endlichkeit oder Einfachheit einer Gruppe) *nicht* durch Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe ausgedrückt werden können. Eine natürliche Erweiterung dieser Sprache ist die Prädikatenlogik zweiter Stufe. In dieser Sprache stehen neben den „Objektvariablen" $x, y, \dots$ auch „Relationsvariable" $X, Y, \dots$ zur Verfügung; jeder Relationsvariable ist wiederum eine Stelligkeit zugeordnet, (die meist nicht explizit angeführt ird, sondern sich aus dem Kontext ergibt). Im Vergleich mit der Prädikatenlogik erster Stufe kommen folgende Konstrukte hinzu:

- Atomformeln sind nun auch Formeln der Form $X(t_1, \dots, t_n)$, wobei die t_i wiederum Terme sind, X eine n-stellige Relationsvariable.
  (Für einstellige Relationenvariablen X schreibt man statt $X(t)$ oft auch suggestiver $t \in X$.)
- Neben den Quantoren $\forall x$, $\exists x$ über Objektvariable sind auch Quantoren $\forall X$, $\exists X$ über Relationsvariable zugelassen.

Die Semantik ist wiederum „natürlich"; ein Quantor $\exists X$, wobei X eine k-stellige Relationsvariable ist, wird als „es gibt eine Teilmenge X von k-Tupeln" interpretiert.

Beispiel In der zweitstufigen Sprache der Gruppentheorie kann man etwa durch den Satz

$$\forall X : \big[(X \text{ ist Normalteiler}) \rightarrow \forall y\,(y \in X) \vee \forall y\,(y \in X \rightarrow y = 1)\big]$$

die einfachen Gruppen beschreiben, (wobei die Formulierung von „X ist Normalteiler“ hier dem Leser überlassen wird).

2 Folgerungsbegriff und der Vollständigkeitssatz

Ein Satz (das heißt, eine Formel ohne freie Variable) in einer vorgegebenen prädikatenlogischen Sprache heißt „wahr“ (oder besser „allgemeingültig“), wenn er in jeder Struktur gilt, die diese Sprache interpretiert. So ist zum Beispiel der Satz

$$\text{Gruppenaxiome} \wedge \forall x\,(x * x = 1) \Rightarrow \forall x \forall y\,(x * y = y * x)$$

allgemeingültig. Die Notation $\models \varphi$ bedeutet, dass φ allgemeingültig ist, oder äquivalent: dass es keine Struktur $\mathcal{M}$ gibt, in der $\neg\varphi$ gilt. Die Aussage $\not\models \varphi$ bedeutet dann, dass es mindestens eine Struktur gibt, in der $\neg\varphi$ gilt.

Wenn φ freie Variable enthält, etwa die Variablen $x, y, \ldots$, dann soll $\models \varphi$ dasselbe wie $\models \forall x \forall y \cdots \varphi$ bedeuten.

Interessanter ist der Folgerungsbegriff, eine Art „bedingte“ Allgemeingültigkeit: Sei Σ eine Menge von Sätzen in einer festgehaltenen Sprache, sogenannte „nichtlogische Axiome“, und sei φ ein weiterer Satz. Dann bedeutet

$$\Sigma \models \varphi,$$

dass jede Struktur, in der alle Sätze in Σ gelten, auch den Satz φ erfüllt, oder anders ausgedrückt, dass es keine Struktur $\mathcal{M}$ gibt, in der alle Sätze aus $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ gelten.

Für $\Sigma = \emptyset$ ist dies gerade der vorhin genannte Begriff der Allgemeingültigkeit. Für endliche Mengen Σ ist $\Sigma \models \varphi$ äquivalent zur Allgemeingültigkeit der Formel $(\bigwedge \Sigma) \rightarrow \varphi$, zum Beispiel gilt

$$\{\psi_1, \psi_2\} \models \varphi \;\text{ genau dann, wenn }\; \models (\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \varphi$$

(sofern ψ_1 und ψ_2 Formeln ohne freie Variable sind).

Betrachten wir nun eine Sprache, in der es nur endlich viele Relations-, Funktions- und Konstantensymbole gibt (mindestens aber ein Relations- oder Funktionssymbol, welches mindestens zweistellig ist[1]); dann kann die mathematische Logik folgenden fundamentale Aussagen machen:

[1] Der Fall einer Sprache mit nur einstelligen Relationssymbolen und ohne Funktionssymbole wird bereits in der aristotelischen Logik behandelt; er ist sehr einfach.

(1) Es gibt keinen Algorithmus, der von jeder vorgelegten Formel entscheiden kann, ob sie allgemeingültig ist oder nicht.
Das heißt: Die Funktion, die jedem Satz 1 zuordnet, wenn er allgemeingültig ist, und 0 sonst, ist nicht berechenbar.

(2) Es gibt eine berechenbare Funktion B, die auf den natürlichen Zahlen definiert ist, und deren Wertebereich genau die Menge aller allgemeingültigen Sätze ist.
Äquivalent dazu: Es gibt einen Algorithmus, der, angewendet auf einen beliebigen Satz φ

- *wenn φ allgemeingültig ist:* nach endlicher Zeit terminiert und „φ ist allgemeingültig" ausgibt.
- *wenn φ nicht allgemeingültig ist:* nicht terminiert.

Die Aussage (1) folgt aus Ergebnissen von Tarski, aber auch aus dem Gödelschen *Un*vollständigkeitssatz. Die Aussage (2) ist bereits eine Version des Gödelschen Vollständigkeitssatzes, der unten noch eingehender beschrieben wird.

In der Rekursionstheorie drückt man den durch (1) und (2) beschriebenen Sachverhalt so aus: Die Menge der allgemeingültigen Formeln ist zwar „rekursiv aufzählbar", aber nicht „rekursiv" (nicht „berechenbar", nicht „entscheidbar").

3 Der syntaktische Folgerungsbegriff

Man kann in der Menge aller Formeln (einer vorgegebenen Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe) in folgender Weise die Menge der „ableitbaren" (oder „formal beweisbaren") Formeln auszeichnen:

Zunächst bezeichnen wir alle Formeln der folgenden Form als *logische Axiome* (wobei A, B, C für beliebige Formeln stehen)

(1) $A \to (B \to A)$

(2) $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$

(3) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

(4) $\forall x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$

(5) $A \to \forall x A$, (wenn x in A entweder gar nicht vorkommt oder bereits in A durch einen Quantor gebunden wird)

(6) $(\forall x A(x)) \to A(t)$ (für beliebige[2] Terme t)

[2] eine kleine technische Bedingung muss allerdings erfüllt sein: t darf keine Variablen enthalten, die in $A(t)$ durch Quantoren gebunden wären.

sowie alle Formeln, die aus diesen Axiomen durch Voranstellen von universellen Quantoren entstehen.

In diesem System betrachten wir Formeln $A \vee B$ als Abkürzung von $(\neg A \to B)$; ähnlich kann man $\wedge$ und $\exists$ als Abkürzungen auffassen.

Weiters sei *Modus Ponens* die folgende „Regel“ (das heißt hier: partielle Funktion auf den Formeln):

– $\mathrm{MP}(A,(A \to B)) = B$ für alle Formeln A, B

– $\mathrm{MP}(A,C)$ ist undefiniert, wenn C nicht die Form $A \to B$ hat.

Schließlich nennen wir eine Formel „ableitbar“, wenn sie durch (wiederholte) Anwendung von Modus Ponens auf Axiome entsteht; die Menge der ableitbaren Formeln ist also die kleinste Menge, die alle Axiome enthält und unter der partiellen Funktion MP abgeschlossen ist.

Für eine beliebige Menge Σ von Formeln sei die Menge der „aus Σ ableitbaren Formeln“ die kleinste Menge, die alle Axiome enthält, Σ umfasst, und unter der partiellen Funktion MP abgeschlossen ist.

Wir schreiben $\vdash \varphi$, wenn φ ableitbar ist, und $\Sigma \vdash \varphi$, wenn φ aus Σ ableitbar ist.

Aus der induktiven Definition der Menge der ableitbaren Formeln kann man leicht sehen, dass diese Menge rekursiv aufzählbar ist (also die unter (2) genannten Eigenschaften hat).

Man kann sich auch leicht von folgenden Eigenschaften überzeugen:

- Alle logischen Axiome sind allgemeingültig.
- Wenn A und $A \to B$ allgemeingültig sind, dann ist auch B allgemeingültig.

Daraus folgt natürlich, dass alle ableitbaren Formeln allgemeingültig sind:

> Wenn $\vdash \varphi$, dann $\models \varphi$.
> Allgemeiner gilt: Wenn $\Sigma \vdash \varphi$, dann $\Sigma \models \varphi$.

Der *Gödelsche Vollständigkeitssatz* ist die Umkehrung dieser Aussage:

> Wenn $\Sigma \models \varphi$, dann $\Sigma \vdash \varphi$.

Links steht die Folgerung $\models$ (also ein semantischer Begriff, für dessen Verständnis infinitäre Überlegungen notwendig sind; er ist der grundlegende Begriff der Modelltheorie), rechts das Ableitungssymbol $\vdash$ (ein syntaktischer Begriff, bei dem es nur um endliche Manipulationen von endlichen Formeln geht; er wird in der Beweistheorie untersucht).

Anmerkung 1: Es gibt viele Möglichkeiten, ableitbare Formeln durch verschiedene Systeme von logischen Axiomen und Regeln zu definieren. Gödel hat in seinem Beweis nicht das oben beschriebene System betrachtet, sondern ein geringfügig anderes. Er bezieht sich bereits im ersten Satz seiner Dissertation explizit auf die Systeme, die in den „Principia Mathematica" von Russell und Whitehead und in den „Grundzügen der theoretischen Logik" von Hilbert und Ackermann vorgestellt werden. Alle diese Systeme sind jedoch äquivalent in dem Sinn, dass der durch sie definierte Ableitungsbegriff $\vdash \varphi$ derselbe ist, und der Vollständigkeitssatz somit für alle diese Systeme gilt.

Anmerkung 2: Mit dem vorgestellten Axiomensystem gilt der oben zitierte Vollständigkeitssatz nur für „Logik ohne Gleichheit", also nur für solche Formeln φ, die das Gleichheitssymbol nicht enthalten. Wenn man „Logik mit Gleichheit" betrachtet, muss man die hier angestellten Betrachtungen geringfügig modifizieren, um zu einem Vollständigkeitssatz (also einer Äquivalenz von Allgemeingültigkeit und Ableitbarkeit) zu gelangen; zum Beispiel könnte man die Axiomenmenge um einige natürliche Gleichheitsaxiome, (wie zum Beispiel $x = y \to y = x$) erweitern.

4 Beweisskizze

Der Hauptteil von Gödels Dissertation ist dem Beweis der Implikation

$$\text{Wenn} \models \varphi, \text{ dann} \vdash \varphi$$

(für gewisse Formeln φ in besonders einfacher Form) gewidmet; man darf annehmen, dass φ die Form $\neg\psi$ hat, und muss zeigen, dass

$$\vdash \neg\psi \text{ oder } \not\models \neg\psi$$

gilt: jede Formel ψ ist entweder *widerlegbar* (das heißt, die Negation von ψ ist beweisbar) oder *erfüllbar* (gilt also in einer geeigneten Struktur).

Der allgemeinere Vollständigkeitssatz besagt in dieser Umformulierung, dass jede Menge Σ von Formeln

- entweder *inkonsistent* ist – das soll heißen, dass bereits die Konjunktion über eine endliche Teilmenge von Σ widerlegbar ist:

  Es gibt $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ in Σ, sodass $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$.

- oder erfüllbar ist – das heißt, es gibt eine Struktur $\mathfrak{M}$, in der jede Formel der Menge Σ gilt (so eine Struktur heißt auch „*Modell* von Σ").

Die Aufgabe besteht also darin, zu einer beliebigen konsistenten Menge Σ ein Modell zu konstruieren.

Sowohl in Gödels ursprünglichem Beweis wie auch in dem später von Leon Henkin gefundenen Beweis sind die Elemente des gesuchten Modells neue Konstantensymbole, die durch eine Art „freier“ Konstruktion zur vorliegenden Sprache adjugiert werden. Außerdem erweitert man die vorgegebene konsistente Menge Σ zu einer Menge Σ' mit der Eigenschaft, dass es für jede Formel der Form $\exists x\,\varphi(x)$ in Σ' eine Konstante c gibt, sodass auch $\varphi(c)$ in Σ' ist. Entscheidend ist hier, dass dies möglich ist, ohne im Schritt von Σ zu Σ' die Konsistenz zu verlieren.

Diese Konstanten c werden später „bezeugen“, dass $\exists x\,\varphi(x)$ im konstruierten Modell auch gilt.

Schließlich kann man die Menge der Konstanten in der erweiterten Sprache durch geeignete Interpretation der Funktions- und Relationssymbole (Konstantensymbole werden durch sich selbst interpretiert) zu einem Modell der Menge Σ' machen, somit auch zu einem Modell der Menge Σ; wenn in den betrachteten Formeln auch das Gleichheitssymbol vorkommt, muss man allerdings zunächst gewisse dieser Konstanten identifizieren.

Wenn man von einer Sprache mit endlich oder abzählbar unendlich vielen Symbolen ausgeht, erhält man sogar für jede konsistente Menge von nichtlogischen Axiomen ein Modell, das höchstens abzählbar ist. Der Henkinsche Beweis des Vollständigkeitssatzes erlaubt es, diesen auch für überabzählbare Sprachen zu beweisen; daraus kann man schließen, dass aus der Existenz eines unendlichen Modells die Existenz von Modellen jeder größeren Kardinalität folgt.

5 Anwendungen

Kompaktheit Aus dem finitären Charakter der Definition von $\vdash$ ergibt sich sofort die folgende Eigenschaft:

> $\Sigma \vdash \varphi$ genau dann, wenn es eine endliche Menge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ mit $\Sigma_0 \vdash \varphi$ gibt,

also insbesondere: Eine Menge Σ ist genau dann konsistent, wenn jede endliche Teilmenge konsistent ist.

Die modelltheoretische Übersetzung liefert bereits einen nichttrivialen Satz: Eine Menge Σ hat genau dann ein Modell $\mathcal{M}$, wenn jede ihrer endlichen Teilmengen ein Modell hat.

Dieser sogenannte Kompaktheitssatz spielt in der Modelltheorie eine fundamentale Rolle und ist weiters die Grundlage für das Gebiet der Nonstandard Analysis, einer Formulierung der Analysis, in der „infinitesimale“ Elemente als tatsächliche

Objekte betrachtet werden und nicht nur als Umschreibung eines Grenzwertprozesses.

Man kann diesen „Kompaktheitssatz“ auch für negative Resultate verwenden; so kann man etwa zeigen, dass die Eigenschaft „Charakteristik ist 0“ von Körpern nicht durch einen Satz der erststufigen Prädikatenlogik ausgedrückt werden kann. Wäre nämlich φ_0 so ein Satz, dann hätte die Menge

$$\{\kappa, \neg\varphi_0, 1+1 \neq 0, 1+1+1 \neq 0, \ldots\}$$

(wobei κ für die Körperaxiome steht) kein Modell, obwohl jede ihrer endlichen Teilmengen ein Modell (etwa $GF(p)$, für genügend großes p) hat.

Algebraisch abgeschlossene und reell abgeschlossene Körper Betrachten wir die Theorie (Menge von Sätzen) T_0 in der oben erwähnten Sprache der Körper, die neben den Körperaxiomen und den Axiomen $1+1 \neq 0$, $1+1+1 \neq 0, \ldots$ für jedes $n \geq 1$ die Formel

$$G_n : \quad \forall z_1 \cdots \forall z_n \, \exists x : x^n + z_1 * x^{n-1} + \cdots z_n = 0$$

enthält; diese Theorie heißt „Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0“. Man zeigt in der Algebra, dass jedes Modell dieser Theorie durch seinen Transzendenzgrad über dem Primkörper $\mathbb{Q}$ bestimmt ist, jedes *überabzählbare* Modell daher bereits durch seine Kardinalität. Aus der erwähnten Verschärfung des Vollständigkeitssatzes folgt nun, dass T_0 eine „*vollständige Theorie*“ sein muss, also für jede geschlossene Formel φ entweder $T_0 \vdash \varphi$ oder $T_0 \vdash \neg\varphi$ gelten muss, (denn sonst wären sowohl $T_0 \cup \{\varphi\}$ also auch $T_0 \cup \{\neg\varphi\}$ konsistent und hätten beide ein Modell einer fixen überabzählbaren Kardinalität).

Diese Überlegung liefert einen Algorithmus, der für jede Formel φ (der betrachteten Sprache) entscheiden kann, ob sie im Körper der komplexen Zahlen gilt oder nicht: man kann nämlich (im Prinzip) systematisch alle Formeln aufzählen, die aus den logischen Axiomen sowie aus T_0 mit Hilfe von Modus Ponens herleitbar sind; nach der obigen Bemerkung über die „Vollständigkeit“ der Theorie T_0 muss man bei diesem Prozess irgendwann auf φ oder auf $\neg\varphi$ stoßen; an diesem Punkt sieht man, ob φ oder $\neg\varphi$ in $\mathbb{C}$ gilt.

Eine ähnliche Überlegung trifft auf die Theorien T_p der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p zu sowie auch auf die Theorie T_{rcf} der reell abgeschlossenen Körper. Die Theorie T_{rcf} ist eine Menge von abgeschlossenen Formeln in der Sprache der angeordneten Körper, die neben den Körperaxiomen und der Monotonie von Addition und Multiplikation verlangt, dass alle Polynome ungeraden Grades eine Nullstelle haben (T_{rcf} enthält also von den oben definierten Formeln G_n nur die Formeln G_1, G_3, G_5, etc.). Auch diese Theorie ist vollständig und stimmt daher mit der Menge aller in $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ gültigen Formeln überein.

Insbesondere kann somit die Wahrheit von Formeln wie dem oben erwähnten konkreten Packungsproblem rein mechanisch herausgefunden werden (allerdings nur im Prinzip; man kann beweisen, dass der skizzierte Algorithmus auch für relativ kurze Formeln sehr lange Laufzeit haben kann).

6 Andere Logiken

Die Formulierung $\models \varphi \; \Leftrightarrow \vdash \varphi$ suggeriert, dass der Vollständigkeitssatz ein einfacher und ganz natürlicher Satz ist. Dass die Wahrheit aber facettenreicher ist, sollen die folgenden Beispiele belegen:

Endliche Modelle Definieren wir $\models_{\text{fin}} \varphi$, wenn φ in allen endlichen Strukturen, (welche die gerade betrachtete Sprache interpretieren), gilt.

Dann kann man zeigen (wenn wiederum die Sprache mindestens ein 2-stelliges Relationssymbol enthält):

> Die Menge $\{\varphi : \models_{\text{fin}} \varphi\}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

Daher gibt es auch keine Möglichkeit, einen äquivalenten Ableitungsbegriff $\vdash_{\text{fin}}$ (mit einer entscheidbaren Menge von Axiomen und einer endlichen Menge von berechenbaren Funktionen) zu definieren. (Dies mag paradox anmuten, denn der Begriff $\models_{\text{fin}}$, der sich ja nur auf endliche Mengen bezieht, scheint von einfacherer Natur zu sein als der Begriff $\models$).

Für den analogen Begriff $\models_{\text{infin}}$, (der durch die Beziehung

> $\models_{\text{infin}} \varphi \Leftrightarrow \varphi$ gilt in allen unendlichen Strukturen der betrachteten Sprache

definiert ist), folgt hingegen aus dem Vollständigkeitssatz sofort:

> $\models_{\text{infin}} \varphi$ gilt genau dann, wenn φ mit Hilfe von Modus Ponens aus den logischen Axiomen zusammen mit der folgenden Menge Inf herleitbar ist:
>
> $$\text{Inf} := \{\forall x \exists y\,(y \neq x),\ \forall x \forall y \exists z\,(z \neq x \wedge z \neq y), \ldots\}$$

Logik zweiter Stufe Viele wichtige und grundlegende Konzepte sind erst in der Logik zweiter Stufe ausdrückbar; insbesondere können die Mengen der natürlichen und der reellen Zahlen in dieser Logik durch eine Formel $\psi_{\mathbb{N}}$ bzw $\psi_{\mathbb{R}}$ charakterisiert werden.

Nun kann man aber mit Hilfe des Gödelschen *Un*vollständigkeitssatzes zeigen, dass bereits die Menge $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ der in $\mathbb{N}$ gültigen erststufigen Formeln sicher nicht rekursiv aufzählbar ist (in Wirklichkeit liegt sogar eine ganze Hierarchie von Komplexitäten zwischen den rekursiv aufzählbaren Mengen und der Menge $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$). Da die Menge

$$\mathrm{Th}(\mathbb{N}) = \{\varphi : \varphi \text{ ist Formel erster Stufe}, \psi_{\mathbb{N}} \models \varphi\}$$

also sehr kompliziert ist, muss auch die Relation $\models$ in der zweitstufigen Logik sehr kompliziert sein. Einen Vollständigkeitssatz (im Sinne einer Äquivalenz zwischen der zweitstufigen Folgerungsrelation $\models$ und einem Kalkülbegriff $\vdash$) kann es hier also nicht geben.

7 Die Rolle der Mengenlehre

Beweise in der Logik erster Stufe können wegen des Vollständigkeitssatzes (im Prinzip) immer auf ein allgemein anerkanntes,[3] besonders einfaches System zurückgeführt werden, sodass also (im Prinzip) kein Zweifel darüber möglich ist, was nun ein gültiger Beweis ist. Weiters ist durch den Vollständigkeitssatz garantiert, dass alle allgemeingültigen Aussagen, auch wenn sie unendliche Gesamtheiten betreffen, in endlicher Zeit mit finitären Mitteln unzweifelhaft beweisbar sind.

Die Logik zweiter Stufe (und erst recht eine Logik höherer Stufe) hat den Vorteil, dass sie viel ausdrucksstärker als die Logik erster Stufe ist, hat aber den Nachteil, dass es keinen anerkannten (und jedenfalls keinen rekursiven, das heißt entscheidbaren) Begriff des „Beweises“ gibt.

In einem naiven Zugang könnte man versuchen, zweitstufige Logik durch eine zweisortige (oder mehrsortige) erststufige Logik zu simulieren: die eine Sorte sind die Objekte des Interesses (etwa die natürlichen oder reellen Zahlen), die anderen Sorten werden als Teilmengen oder Relationen interpretiert, und ein spezielles Relationssymbol ε gibt die Zugehörigkeit an. In dieser Logik kann man allerdings nicht formulieren, dass man nur an jenen zweisortigen Strukturen $(M_1, M_2, \ldots)$ interessiert ist, in denen die zweite Sorte aus *allen* Teilmengen der ersten Sorte besteht.

Die Mengenlehre kann nun (allerdings nur rückblickend und in völlig ahistorischer Auslegung) als ein Versuch gesehen werden, die gute Fassbarkeit der Logik erster Stufe mit der Ausdrucksstärke der Logiken höherer Stufe zu kombinieren. Formal betrachtet ist die Mengenlehre in einer Logik erster Stufe formuliert, in der

[3] Hier ignoriere ich allerdings die kleine Gruppe der Intuitionisten und Anhänger von verwandten nichtklassischen Logiken, die das Axiom $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$, oder noch einfacher die Formel $\neg\neg A \to A$ nicht als allgemeingültig akzeptieren.

es nur ein einziges Relationssymbol ε gibt; inhaltlich repräsentieren die Elemente der mengentheoretischen Universen (das heißt, der in der Mengenlehre betrachteten Strukturen) aber Mengen, also Objekte höherer Stufe: Wenn $\mathcal{M} = (M, \varepsilon^{\mathcal{M}})$ eine Struktur dieser Sprache ist (also: M ist eine nichtleere Menge, $\varepsilon^{\mathcal{M}}$ eine zweistellige Relation auf M), so repräsentiert jedes $x \in M$ die Menge $\{y \in M : y\, \varepsilon^{\mathcal{M}}\, x\}$.

Da es keine Bijektion zwischen der Potenzmenge von M und der Menge M gibt, können wir nicht erwarten, dass *alle* Teilmengen des Universums auch durch Elemente des Universums repräsentiert werden. Die Axiome der Mengenlehre verlangen nun, dass zumindest *gewisse* Teilmengen des Universums auch durch Elemente repräsentiert werden (zum Beispiel verlangt das Nullmengenaxiom

$$\exists y \forall x\, \neg(x\, \varepsilon\, y),$$

dass es ein Objekt $y \in M$ gibt, welches die leere Menge repräsentiert).

Die mehr als hundertjährige praktische Erfahrung mit den mengentheoretischen Axiomen zeigt, dass sie ausreichen, um fast alle mathematischen Konstruktionen, die scheinbar die Ausdrucksstärke der zweitstufigen Logik benötigen, auf Grundlage der erststufig formulierten mengentheoretischen Sprache durchzuführen.

Neben der gerade beschriebenen Funktion der Mengenlehre als universelle Sprache der Mathematik hat sie aber noch eine andere (nicht minder wichtige) Rolle: Die im System ZFC (Zermelo-Fraenkel) zusammengefassten Axiome können fast alle in der Mathematik betrachteten Sätze entscheiden (also beweisen oder widerlegen) – dies ist allerdings nur eine Erfahrungstatsache und kein mathematischer Satz. Fast alle „working mathematicians“ betrachten die ZFC-Axiome insofern als Grundlage ihrer Arbeit, als sie alle ihre Sätze aus den ZFC-Axiomen herleiten; umgekehrt gelten (außer in der Mengenlehre selbst, wo auch andere Axiomensysteme untersucht werden) nur solche mathematischen Sätze als bewiesen, die aus den ZFC-Axiomen herleitbar sind (dies gilt natürlich nur im Prinzip; vielen Mathematikern ist die Rolle der ZFC-Axiome gar nicht bewusst.[4])

Möglichkeit und Wirklichkeit

Der Gödelsche *Un*vollständigkeitssatz zeigt (ähnlich wie das Russellsche Paradoxon, das ebenfalls durch *Diagonalisierung* bewiesen wird), dass allzu naive Erwartungen an die Mathematik nicht erfüllt werden können. Er gibt also eine obere Schranke für die erfüllbaren Hoffnungen der Mathematiker an: *You can’t always get what you want …*

[4] *J:* Quoi? Quand je dis: «Nicole, apportez-moi mes pantoufles, et me donnez mon bonnet de nuit», c’est de la prose?
M: Oui, monsieur.
J: Par ma foi! Il y a plus de quarante ans que je dis de la prose sans que j’en susse rien.

Der Vollständigkeitssatz hingegen (ähnlich wie das mengentheoretische Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel) gibt eine untere Schranke für das garantiert Machbare an: *But if you try . . . you get what you need.*

Als philosophische Aussage kann der Vollständigkeitssatz „jede widerspruchsfreie Theorie hat ein Modell“ auch als eine Bestätigung des hilbertschen Ideals der Mathematik gesehen werden:

> *Alles, was denkmöglich ist, existiert auch.*

Quellengeplätscher

Einen Beweis des Vollständigkeitssatzes (und zwar so gut wie immer in der Henkinschen Version, nie den ursprünglichen Gödelschen Beweis) findet man in den meisten Lehrbüchern der mathematischen Logik, etwa in den Büchern von *Ebbinghaus, Flum und Thomas* (1978/1994), *Goldstern und Judah* (1998), *Enderton* (2001) oder *Hinman* (2005).

Historische und philosophische Betrachtungen zum Vollständigkeitssatz findet man in den Kommentaren von *Dreben* und *van Heijenoort*, die im ersten Band von Gödels „Collected Works“ (herausgegeben von *Feferman*, 1986) einen Neuabdruck von Gödels Dissertation begleiten.

Lesenswert sind auch die Arbeiten von *Baaz und Zach* bzw. *Buldt* über den Hintergrund und das historische Umfeld des Vollständigkeitssatzes bzw. des Kompaktheitssatzes, die beide im zweiten Band von „Wahrheit und Beweisbarkeit“ (herausgegeben von Buldt et al, 2002) publiziert sind.

Die beiden englischen Sätze stammen von den Rolling Stones, das französische Zitat ist Molières Komödie „Der Bürger als Edelmann“ entnommen.

Ich danke Jakob Kellner und Reinhard Winkler fuer ihre vielen Kommentare und Verbesserungsvorschläge.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 202 (2006), 17–32

The Millennium Grand Challenge in Mathematics

Arthur M. Jaffe
Harvard University

On May 24, 2000, Arthur Jaffe, then president of the Clay Mathematics Institute, announced the Millennium Grand Challenge in Mathematics towards the end of a meeting held at the Collège de France in Paris. The proof or a counterexample to seven important old mathematical conjectures would earn a US$7 million dollar reward – with US$1 million dollars for each answer. This challenge brought instant, world-wide recognition to the Institute, an organization conceived and founded by Jaffe and Landon Clay, a Boston philanthropist, just twenty months earlier. In 2006 a spotlight shines on the Poincaré conjecture, the first of these questions which may have been resolved. This essay presents a personal perspective on the background to the Challenge, as well as the founding of the Institute, a private non-profit foundation dedicated to furthering "the beauty, power, and universality of mathematical thought". *– A.M.J.*

Evolution

The idea for the millennium grand challenge in mathematics cannot be separated from dreams of creating a new organization to support mathematical research. That vision came to fruition with the meeting of the initial three members of the Board of Directors of the Clay Mathematics Institute (CMI), just minutes after their election by the three members of CMI, on the morning of 10 November 1998.[1] The setting lent a dignified and uplifting feeling to the occasion. We met in a small, private dining room on the second floor of the Harvard Faculty Club, aptly named the "Presidents' Room" for its decoration with pictures of past Harvard presidents on the walls.

Dieser Artikel ist erschienen als: *A. M. Jaffe: The Millennium Grand Challenge in Mathematics*, Notices AMS, June 2006, Volume **53**/6, 562–660. Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Autors.

ISSN 0020-7926.

Two significant outcomes at that meeting were the election of the officers of CMI as well as constituting the Scientific Advisory Board (SAB). Attending were the three original members of the Board of Directors: Landon T. Clay, his wife Lavinia D. Clay, and the author – along with recordkeeper, Barbara Drauschke. The directors elected the author as president and as chair of the SAB, and then elected Alain Connes, Andrew Wiles, and Edward Witten as further SAB members, all without limit of time. The agenda that morning included discussion of the first ten scientific projects to be pursued by CMI. To the best of my recollection, number eight in the list of projects read:

> **"Problems for the millennium, initial project:** Select 50 problems for publication in a book volume for the millennium, with the award of US$1,000 to the author of each manuscript. Select afterward a small number of special problems (maximum 12)."

This item received approval after minimal discussion, along with the other nine projects.

About one month afterward, I returned to the prize problem project while working in another inspirational setting – the loft in a vacation house located in New Hampshire, north of Cambridge. There the mood flowed from the view past the cathedral ceiling and through a picture window to the rolling Ossipee hills in the west. Was it possible to transmit this uplifting spirit to a text soliciting potential problems? I began to prepare a single page of text that CMI could circulate by mail and email. Perhaps it would be posted on mathematics department bulletin boards and on internet web sites. It might also be spread by word-of-mouth at scientific meetings. I had also just been invited to attend one of many conferences the following summer that were scheduled to review the progress of mathematics at the turn of the century and millennium. This and other similar meetings could be excellent forums for input.

Setting out the mechanism and procedures for the solicitation of fifty problems and the subsequent selections was a priority. I drafted a process to select the fifty manuscripts for publication, a second one to narrow the focus to a small number of special problems, and even went as far as drafting a letter that might be used by individual SAB members to solicit input. After several revisions, the plans appeared to be on track. I was in contact with Connes about other matters, so I asked him to critique the texts.

I then discussed the proposed details with Wiles, and this led to another point of view. He convinced me that the original approach might generate difficulties I had not anticipated; basically he questioned whether a completely open process would be best. Was it possible that powerful mathematicians who felt that their opinions

[1] See the "Epilogue" toward the end of this essay for a few further details on the formation of CMI, and how its history intertwines with that of the millennium challenge.

were not sufficiently heeded would object and attempt to undermine the project? Wiles urged me to revise the plan in order to avoid “mathematical politics”, by focusing immediately on the selection of the smaller number of special problems and omit the competition as an initial step. This also meant that the process would be more secretive than open. I went back to discuss this with Connes, who on reconsideration agreed that it was wise to modify the original plan.

But I realized that whatever plan we pursued ran the risk of controversy, and enough did arise later. So I decided that the SAB should scrap its plan to announce an open competition for fifty questions. The discussions would go outside the SAB only through individual members seeking advice from their trusted colleagues in the mathematics community.

Getting to Seven

The SAB now had to choose the problems, and this began in earnest only during the fall of 1999. No preconceived number of questions had been fixed. The upper limit of twelve seemed a reasonable bound – small enough to focus attention onto the project, yet large enough to be fairly broad. But the exact number of questions would depend upon the process, and we had no idea where the selection would lead us.

As a first step, I requested that each SAB member submit a personal list of top questions. Each of these questions should be difficult and important – a time-tested challenge on which mathematicians had worked without success. This exercise indicated some initial direction and set the background for further discussion. As I recall, everyone’s list included the Riemann hypothesis and the Poincaré conjecture. So it seemed assured that these questions had common approval and would appear on the SAB’s final list.

However, even in terms of these common questions we still needed to decide in what form they should be posed as challenges. Should the Riemann hypothesis be linked with some form of the Langlands’ program? Should the Poincaré conjecture be linked with Thurston’s more general geometrization program? This precipitated discussion of whether the millennium questions should be posed in their simplest form, or in general form. After some discussion by telephone, we arrived at a rule-of-thumb: we would prefer the simplest form of a question, at least whenever that choice seemed sensible on mathematical and general scientific grounds.[2]

From then on, the process of choice evolved through a series of telephone discus-

[2] I planned that the uniformity of the seven final manuscripts from this point of view, each written by different authors, would be reviewed and discussed by the SAB. For nonscientific reasons too lengthy to elaborate here, such a discussion by the SAB became impractical, and in fact it never took place.

One can give many answers to the question, "Why pose a grand challenge in mathematics?" Three themes dominated my own thought. Focusing attention on difficult, significant, and timetested mathematical questions emphasizes a lofty goal: strive for major, long-term satisfaction in mathematics rather than for immediate gratification. Communicating awareness to the public that important – yet unresolved – problems permeate mathematics illustrates the message that mathematics – like science – is a dynamic, complicated, and living organism. Possibly one can also inspire young students – opening new mathematical vistas for a few – while motivating them to attack major challenges in the future. *– A.M.J.*

sions separated by consultation and reflection. We added questions to the list one by one. With each new question we asked whether the list should be expanded or whether it might be improved by substituting a new question.

Here is one concrete example of the process: how we approached the P versus NP question. This problem arose on several lists, and the question also seemed to be "in the air" at the time. Nevertheless the SAB felt that it needed guidance from outside experts both about the relevance and difficulty of this question. And did this question represent the central thinking of the experts? After some external consultation, the SAB came to the conclusion that computer scientists regarded the P versus NP question as the most important open question in their field. At the same time, consulting some experts in mathematical logic led us to the conclusion that they regarded the same question as the outstanding open problem in logic. These opinions assured P versus NP a place on our list.

While each problem on the list was central and important, I want to stress that the SAB did not envisage making a definitive list, nor even a representative set of famous unsolved problems. Rather, personal taste entered our choices; a different scientific advisory board undoubtedly would have come up with a different list. The persons we consulted were experts, but they were chosen under pressure of time. However, the spirit of the selection transcends these decisions: the resulting list represents an honest attempt to convey some excitement about mathematics. We do not wish to address the question, "Why is Problem A not on your list?" Rather we say that the list highlights seven historic, important, and difficult open questions in mathematics.

The list grew after further conversations. As each problem was added the SAB began to have greater and greater difficulty – either to add a new problem, or to substitute a different one. By the end of 1999 seven questions had been chosen. At this point the SAB declared the list tentatively closed, but left open the possibility of later changes.

The report from the president to the directors' meeting on 6 January 2000 included a progress report on the project. It stated that CMI plans to offer a major financial award for the solution of particular mathematics problems, and to announce the plan publicly only after the selection of prize problems. The directors reaffirmed the project in principle, but had little new information at that point, except that the list included the Riemann hypothesis. Even two months later – with the May 2000 announcement of the prize problems close at hand – the SAB had a further discussion about whether it might expand the list of problems. But the SAB decided to keep the list intact with the seven chosen problems. The members voted on 10 April 2000 to recommend to the directors that these seven questions be approved, as well as the US$7 million prize.

A Monetary Prize

The intention to offer some monetary prize for the solution of one of the millennium problems was always part of the picture. The reasoning behind this contained several components, each of which stands on its own, and all of which taken together remain very persuasive. But the idea to attach a fixed, US$7 million sum to the challenge came as an afterthought. It occurred during April 2000.

The original plan involved creating a prize fund within the CMI endowment. I expected that a substantial sum would be allocated each year for use of this fund in the event of an award. At the time that CMI recognized a solution to one of its problems, one would divide the amount of money in the fund by the number of remaining problems to determine the size of the award. With this plan, a solution that came shortly after the announcement of the competition would yield a modest prize. But a problem that remained unsolved over a long period after the announcement would bring a very substantial award – potentially much larger than the present US$1 million offer. A large award for an entire life's work would be fitting, and the size of the award would certainly raise public interest in mathematics.

The change in thinking on this question resulted from a couple of factors; one important event was an article in *The Times* of London detailing an offer made by the publisher Faber & Faber in an attempt to raise interest in a new book. Faber offered a US$1 million prize for the solution to the Goldbach conjecture, a question in number theory formulated in 1742. Details of the Faber offer contrasted markedly with those of the planned millennium prize. The key difference was that the CMI plan had no time limit for solving the prize problems, while the Faber offer imposed an unrealistic, two-year time limit for solving the Goldbach conjecture. This time limit allowed Faber to back its prize by insurance from Lloyd's, rather than by cash. And of course, the insurance turned out to be completely unnecessary.

But the Faber offer had already captured attention both in the printed press and on the Internet. I worried that if CMI proceeded as had been planned, the Faber news would surface and it could undermine attention to the CMI millennium challenge. The general public does not make fine distinctions. Mathematicians themselves are also unpredictable.

After reflection, my reaction was to suggest that CMI offer a US$7 million challenge from the start. This was bound to attract attention. On the other hand, the millennium challenge problems were sufficiently difficult that there was little worry that many of them would be solved in the near (or even the foreseeable) future. The Clays accepted my formulation, so I began to discuss it with the other directors and of course with the SAB.

I also believed that the US$7 million should be segregated so the prize would grow over time along with the endowment (and with inflation). The Boston attorney for CMI argued that such a decision could be made in the future, so it would be best to wait and see the reaction. We did not segregate the prize.

A paraphrase of my letter of 12 April 2000 to the SAB and the Board of Directors illustrates the time-line. This letter requested a written vote on the problems, the rules, and the financial award; this would leave little to be reviewed by the directors at their 23 May 2000 meeting in Paris.

> The SAB has selected seven problems, following numerous conversations within and outside the SAB over the course of the past months. The SAB also considered possible experts to make a precise statement and to give background for each problem. We expect to have these descriptions available at the Paris meeting, and to publish a pamphlet with these problem write-ups and the enclosed rules...
>
> Below you find a popular name for each problem (alphabetically), and the experts who have agreed to prepare the descriptions. Presently we have three preliminary versions of these write-ups in hand, and for your interest I enclose copies:
>
> 1. The Birch-Swinnerton-Dyer conjecture (Andrew Wiles)
> 2. The Hodge conjecture (Pierre Deligne)
> 3. The Navier-Stokes equation has smooth solutions (Charles Fefferman)
> 4. P is not NP (Stephen Cook)
> 5. The Poincaré conjecture (John Milnor)
> 6. Quantum Yang-Mills theory exists with a mass gap (Arthur Jaffe and Edward Witten)
> 7. The Riemann hypothesis (Enrico Bombieri)

The SAB voted unanimously in a telephone meeting on 10 April 2000:

- To accept these seven problems as the list of Millennium Prize Problems and to recommend to the directors their approval of this selection.
- To recommend to the directors that the attached rules would be announced on 24 May 2000 (with minor refinement between now and 23 May).
- To recommend to the directors that the prize be announced as “a US$7 million prize for mathematics”, with details to be given in a list of problems and in rules that would be made public on 24 May 2000.
- To request that the directors authorize to encumber US$7 million of the CMI endowment . . . to back this prize.

The directors confirmed this request by written ballot; it later had reconfirmation with minor changes to the proposed rules during a telephone conference on 15 May 2000.

The rules for the prize resulted from a fair amount of thought. Some features evolved from the original 1998 proposal described in the “Epilogue” below. One major safeguard involved the importance of publication of a solution. Implied is an initial review of correctness of the work by expert colleagues. In addition the rules specify a two-year waiting period after publication to ensure acceptance of the work by the mathematics community, before the CMI will even solicit expert opinions about the validity or attribution of a presumed solution to a problem.

Of course there can always be unforeseen circumstances. For example, an author of a solution may not write it down completely or might opt for self-publication, rather than for publication in an established journal. Traditional publication could change in the future, with relaxed standards of review. These and other circumstances are left for recommendation from a future scientific advisory board.

Paris

Sometime during November 1999, during the course of selection of the problems, another fact dawned upon the members of the SAB. Of course we should have been well aware of this from the start. But sometimes one needs to reflect before understanding the obvious.

Most mathematicians know that the famous set of twenty-three Hilbert problems were announced in a lecture at the 1900 Congress of Mathematicians, in Paris. So it was only natural that our list of millennium problems should be made public during the year 2000, and in Paris!

This meant that we needed to speed up everything. We had not even finished selecting the problems. But we also had to organize a meeting, to make specific preparations for the announcement, and to plan for the reaction! Fortunately we realized these time pressures only toward the end of 1999, really too late for us to worry about their consequences. In fact, at that point I was thankful that we had abandoned the original plan to proceed through fifty questions. Following that path would have made an announcement during the year 2000 totally impractical.

Alain Connes represented our Paris connection, and he graciously offered to host the CMI meeting at the Collège de France. Unfortunately some other mathematicians in Paris did not realize how positively the public would react to this challenge, and in the beginning several minor obstacles had to be overcome. In the first half of 2000, Alain made a substantial investment of time and energy, and his dedication and enthusiasm became an essential factor in the formula for the success of the meeting in Paris. Ultimately most of the organizational burden fell on the two of us. We had the indispensable assistance of a large number of enthusiastic and dedicated staff and supporters on both sides of the Atlantic.

Because of various constraints, both on the use of the Amphithéâtre Marguerite de Navarre at the Collège de France, as well as the schedule of other meetings in the Paris region, we chose 24–25 May 2000 for the millennium meeting, one day later than originally anticipated. And certainly any date seemed to pose conflicts. For example, we hoped to have both R. Bott and J.-P. Serre attend the meeting; but in February we learned that these two mathematicians had been chosen to receive the Wolf Prize. That award ceremony overlapped our meeting and affected the plans of other mathematicians as well.

CMI was fortunate that Gilbert Dagron, the distinguished Byzantine historian and administrator of the Collège (the equivalent of the president in other organizations), played another key role. Dagron became captivated by the idea of the millennium meeting and not only lent his personal support to CMI, using many resources of the Collège, but also gave a great deal of personal assistance. His deputy, Jacques Glowinski, had overseen the construction of the new amphitheater where we met; he too helped and enjoyed seeing the splendid site put to good use.

Through the good graces of Dagron, CMI also had access to the indispensable assistance of Véronique Lemaître. This extraordinary woman had the responsibility at the time for external relations at the Collège. Not only was she expert in her work, but she was also both dedicated and enthusiastic, spending long evening hours outside normal working time to make plans or telephone calls. Véronique knew and was respected by a substantial fraction of the scientific journalists representing both national and international publications and media in the Paris area. So when Véronique organized a briefing for the press on the morning of the meeting, over thirty Paris journalists appeared in person for discussion and lunch.

The Meeting

Expectations for the meeting at the Collège had mounted over the days leading up to it. The auditorium was vast – on the scale of mathematics meetings – although we had no idea how many persons would want to attend. As Paris represents a substantial mathematics community, and we had little advance idea of interest from the general scientific community or from the public, Alain Connes decided not long before the meeting that he needed to assign a ticket with a specific seat number for each attendee.

This plan created the enormous new burden of communicating with as many individuals as possible, as well as attempting to ensure that some elder mathematical statesmen (including Henri Cartan and Laurent Schwartz) would not have difficulty attending. While this caused a logistical nightmare and incredible pressure on Connes and his helpers, the plan succeeded. The audience flowed in smoothly, and every seat in the vast auditorium was filled at the start of the meeting. And for the overflow we had arranged closed-circuit video in a nearby room.

The meeting itself went splendidly, with the one exception – the newly appointed Minister of Research arrived late, causing an unintended wait and rearrangement in the schedule. The research awards to L. Lafforgue and A. Connes proceeded smoothly. The general talk on the "Importance of Mathematics" by Timothy Gowers presented an inspirational story of interaction between different disciplines and ideas within mathematics. The presentations of the seven problems by Michael Atiyah and John Tate presented a vast interwoven tapestry of mathematics.

One can review and reconsider this day, as four videos bring the proceedings to life. The French documentary filmmaker François Tisseyre worked tirelessly to present an interesting and comprehensible account of the meeting. The first video frames the day with interviews with participants as well as excerpts from various lectures. The other three videos present the main talks of Gowers, Atiyah, and Tate in their entirety, enhanced by graphical effects that make them approachable and appealing. The publisher Springer Verlag distributes these videos.

Immediate Reaction

The immediate reaction came swiftly, as if it were the spirit of the times. Undoubtedly this was also linked to announcing the challenge in Paris, for in France the image of mathematics remains strong in the populace. In Paris it is easy to discover street names, public portraits, and busts of historic figures with mathematical significance.

Leading up to the meeting, Alain Connes had two interviews that captured the imagination of science reporter Jean-François Augereau, who eventually wrote four different articles in the 25 May issue of *Le Monde*. As is customary, the

Timeline: A Few Significant Dates

• April 15, 1998. Over lunch at the Harvard Faculty Club, LTC asks AMJ his opinion about previously expressed ideas for a software foundation.
• May 9, 1998. Alain Connes agrees while visiting Harvard that if a mathematics-oriented foundation is formed, he would be willing to become involved.
• June 4, 1998. AMJ and LTC meet at the Harvard Club in Boston, and LTC mentions that his prior ideas have evolved and that he would now like to create an independent foundation devoted to fundamental mathematics. At this point, the formation of such an entity appears likely.
• June 24, 1998. AMJ faxes to LTC an outline of several proposed mathematics projects, including "Prize 2000".
• June 28, 1998. AMJ returns from travel four days earlier than planned in order to continue the discussions of a possible foundation with LTC.
• August 19, 1998. During the International Congress of Mathematicians in Berlin, AMJ and Andrew Wiles dine together. They discuss the probable creation of a new foundation for mathematics, and in that event AMJ invited Wiles to serve on an advisory board.
• September 25, 1998. The CMI becomes a corporate entity, registered in the state of Delaware.
• October 27, 1998. LTC transfers shares of stock to a CMI account in Boston, creating the CMI endowment.
• October 28, 1998. Edward Witten, while visiting Harvard, agrees to serve on an advisory board for CMI.
• November 10, 1998. The members of CMI meet to elect the CMI directors. The directors meet to elect officers of CMI and the historic members of the Scientific Advisory Board.
• May 10, 1999. A set of public lectures at MIT marks the formal opening of CMI.
• January 6, 2000. The CMI directors approve the initial plans for a millennium challenge and for the meeting in Paris, tentatively set for 23–24 May 2000[3].
• April 10, 2000. The SAB formally approves the seven problems and the US$7 million millennium challenge; two days later the details are mailed to the directors with a request to confirm these decisions.
• May 15, 2000. The plan is reconfirmed during a telephone conference of the CMI Board of Directors.
• May 24, 2000. CMI announces the millennium challenge problems at the Collège de France. Simultaneously the website of CMI posts news of the challenge, and *Le Monde* publishes a front-page photograph and story. Worldwide reaction follows immediately. – *A.M.J.*

Alain Connes (left) and Arthur Jaffe at the ceremony announcing the Millennium Prizes at the Collège de France in Paris, May 2000.

paper appeared on the previous afternoon, just as the participants were leaving the millennium meeting for dinner on 24 May. We bought a number of copies to hand out at that occasion; the paper carried a front-page photo of the SAB and CMI directors that the newspaper had discovered on the Internet.

Véronique Lemaître also had arranged for Jocelyn Gecker, a new, young, Paris-based science reporter for the *Associated Press*, to interview me two days before the meeting. The extensive article that she ultimately wrote appeared on 25 May in several hundred U.S. newspapers. Many of the other reporters present at the Collège also wrote stories.

The British magazine *Nature* even published an editorial on 25 May entitled: *Values of the Abstract: A new set of prizes is an apt celebration of the significance and wonder to be found in pure mathematics*, and reflecting: "It's an excellent way for a private foundation to recognize the eternal fascination that mathematics holds for people such as Hardy, and for the rest of us." This widespread positive reaction eventually led to thousands of articles appearing in other papers and magazines around the world, as well as interest by radio and television programs and on the Internet.

Just months before the meeting, the CMI had launched a website. We carefully prepared material about the millennium challenge, and made it possible for someone in Cambridge (USA) to push one button that resulted in posting the material on the Web exactly at the time the actual announcement took place in Paris.

All this precipitated a deluge of reaction far beyond what had been expected. Once the announcement became public, reaching the CMI website became totally

[3] Scheduling difficulties resulted in shifting the Paris meeting to one day later than the original plan.

impossible. Demand swamped the capacity of the server of the web hosting company. We had not anticipated that problem!

At this point I telephoned from Paris to John Ewing, the executive director of the American Mathematical Society based in Providence. John had served as a trusted advisor in designing the administrative structure of CMI, and he immediately offered his assistance. He was extremely happy to see so much attention being paid to mathematics and disappointed that a technical glitch frustrated so much curiosity.

John's plan was to mirror the CMI website on the AMS web server, and to redirect requests for the CMI web address to the Society. The AMS server not only hosts mathematical news, but provides many electronic journals and other services to a worldwide community of mathematicians; its capacity and bandwidth was far greater than the server run by the web hosting company that CMI used. This solution would be temporary, until the CMI could make arrangements for a more robust host; but it would solve the problem. We implemented this plan immediately, with several phone calls between Cambridge and Providence to assist in transferring the files to mirror.

Not long afterward I returned from Paris to Cambridge, where I was greeted by a telephone call from John Ewing. There was a new problem: the volume of requests to view the CMI web pages threatened to crash the entire AMS website – including the AMS journals and the bookstore! This was unacceptable, and it looked like John would have to disconnect the CMI.

We discussed the numbers. Although the traffic redirected to the AMS address was still increasing, one saw a bit of leeway for it to stabilize before disaster hit. So we agreed to wait a day or two before John made his decision. We expected that the traffic would die down to a more manageable level after the initial reaction, and one week had already passed. Luckily the internet traffic did quickly come to equilibrium, and eventually CMI found a web host that offered more substantial bandwidth. It may be a while before internet activity related to mathematics again reaches the fever pitch of May 2000; hopefully that will arise from a mathematical discovery that fascinates the world.

Many amateurs who learned of the challenge did not realize the difficulty or subtlety of the challenge problems. Less than a year after the announcement, the CMI had received over six hundred letters, emails, and manuscripts from persons claiming that they could understand and solve one (and sometimes all) of the problems. A few of these individuals even sent their manuscripts to established journals in the hope of publication. While amateurs have always found an attraction in famous open problems, the publicity of the millennium challenge seemed to focus their attention.

The *Boston Globe* ran an interesting account by David Appell on 27 March 2001. For background the reporter interviewed some mathematicians who edit professional journals. David Goss of the *Journal of Number Theory* recounted, "They're really coming out of the woodwork. At times I am almost getting more crank stuff than legitimate stuff." Some of these amateur authors even complain their work received unfair treatment because editors summarily rejected their submissions, without explicitly pointing to flaws in their logic. In fact frequent submissions do pose undue burden on the editor and reviewers for a journal. However, to my knowledge the short-term anomaly of many amateur submissions has declined over time.

Reflection

Can one give an assessment of the millennium challenge five years after its launch? Cause and effect in life cannot easily be quantified into a mathematical law. But clearly the existence of the challenge has had a resounding impact on the number of papers, lectures, courses, conferences, manuscripts, and summer schools devoted to important, fundamental questions in mathematics. Within the community of research mathematicians the challenge has had profound impact.

It also catalyzed an enormous peak in public awareness of mathematics outside the research community. It affected the Internet, radio, television, as well as newspapers, magazines, and books. In fact the number of popular books about mathematics has increased substantially in the past five years; some recent books describe individual challenge problems, others discuss the challenge more broadly. Again this may not all be attributed to a single cause, but the overall effect is striking. Clearly the level of popular interest in recent mathematical work on the Riemann hypothesis and the Poincaré conjecture has been much greater than what one might expect without the climate generated by the challenge.

Some anecdotal evidence gathered from conversations with undergraduates suggests that the millennium problems have already had substantial impact within the student world – although limited experience can only suggest such effectiveness.

Presumably the most profound consequences of the millennium challenge project lie in the future. I hope that it will inspire mathematics and encourage potential mathematicians in a positive way for years to come.

Epilogue: Brief Background on CMI

Although I was dogged for some years by earlymorning thoughts about forming an entity like CMI, it was only during 1997 that these dreams began to crystallize into something concrete, and about a year later they became a reality. In order to understand how this happened, let's backtrack.

After George Mackey retired from the Harvard mathematics department in 1985, the dean designated me the successor to his named chair. As a result, I began to lunch on a regular basis with the donor, a Boston businessman named Landon T. Clay (LTC) whom I had met casually some fifteen years earlier. He had been a generous benefactor to Harvard in the past, including the endowment of two chairs in different departments, as well as the donation of a substantial fund to assist the dean in recruiting new faculty.

These lunches were generally quite interesting; we often discussed the activity in the mathematics department. A fundamental boost in activity resulted from the opening up of travel between Eastern Europe and the West. Those events began in 1988, during my term as department chair, and served as a precursor to the dramatic political changes soon to take place in that part of the world.

With the blessing, a small amount of money, and a great deal of encouragement from Harvard president Derek Bok, as well as a grant to the Harvard mathematics department from the Sloan Foundation, we invited a handful of young Russians to visit the following year as "Harvard Prize Fellows". In addition, I. Gelfand and A. Schwarz visited jointly between Harvard and MIT. Ultimately many of the friends of these fellows visited as well, producing a virtual invasion. During the academic year 1989–90, approximately twenty-five Russians spent time at Harvard!

LTC liked this activity; he also expressed his opinion based on his experience on various Harvard committees that the university administration did not appreciate the department's value. As a result of our interaction and discussion, he offered to establish a fund to invite visitors and to enable research projects in the department. In 1990 he directed over US$4 million income (over twenty years) from a trust in his name into the mathematics department. He also helped me establish a group of "Friends" of the mathematics department who ultimately assisted in many other ways. Seven years later during 1997 he related at one of our lunches that many factors led him to contemplate establishing an "operating foundation". Sometime afterward he advised me that he had formulated a plan to create such a foundation devoted to software. I made no comments on these plans; at the time, my opinion had not been solicited. Eventually LTC did seek my views; again it happened over lunch during the following year on 15 April 1998 at the Harvard Faculty Club. I recall answering this query as best I could, and shortly afterward writing a letter to him. I suggested that a foundation devoted to software would have difficulty competing with large existing corporate entities which had enormous financial resources at their disposal. In my mind it made scientific sense, and would be cost-effective, to consider creating a foundation devoted to mathematics. I also offered my counsel and assistance, in case he decided to follow that alternative path. Without making any commitments, that topic recurred on at least two other occasions over the next six weeks, including once during a scientific meeting held at Harvard.

After this lunch, and anticipating the possible founding of a mathematics organization, I began to turn over in my mind what persons might be suited to work together in a friendly and compatible atmosphere, were relatively accessible for consultation, and would have impeccable judgment and reputation. Among those I met with privately over the next six months were Alain Connes (at a conference in Cambridge on 9 May), Andrew Wiles (over dinner on 19 August preceding his lecture to the International Congress of Mathematicians in Berlin), and Edward Witten (during his visit on 28 October to lecture at Harvard). Each agreed in principle to participate.

Let's return to the chronology. On 4 June 1998, the morning of the graduation ceremony at Harvard, I met LTC for several hours in the Boston Harvard Club. He had invited me for breakfast that we ate in the dining room, after which we retired to a small upstairs meeting room for an extended discussion. That day LTC projected the attitude that he had made up his mind to start a mathematics organization, although the details were up in the air. He requested some written guidelines from me about what I might propose to do, both in the way of structure and the purpose of such an organization. He wanted it to be independent from Harvard, but possibly located on Harvard land. I responded by letter on 12 June 1998, summarizing our conversation. This letter included a brief outline of a possible plan for the structure of such an organization and reiterated that from 15 June to 2 July I planned to travel abroad. Later I would formulate and communicate further ideas.

Twelve days afterward on 24 June, I followed up this letter with a fax from a scientific meeting in Les Houches, France. During that meeting I also had the opportunity to consult with A. Connes, L. Faddeev, and J. Fröhlich. This fax of 24 June included a list of potential initial projects for the mathematics foundation. Among these, the millennium problem project appeared as the following proposal:

> "**Prize 2000:** In association with the millennium, I recommend a monetary prize for the solution of one of a small number of outstanding, long-range mathematics problems. These problems will be formulated by the Scientific Board and published in the year 2000. The problems will be published in a special article that also outlines procedures to determine a winner. In order to be eligible for consideration for this prize, the solution of the prize problem must be published in a refereed mathematics journal… The correctness of the solution must be accepted by the leaders of the mathematics community. For establishing questions of priority, members of the Scientific Board will investigate or have experts investigate. In case of lack of agreement by the mathematics community about the correctness or completeness of a published solution or about the proper attribution of a solution, the Scientific Board has discretion not to award a prize. An author may bring his or her own published work to the attention of the Foundation for consideration. Only an individual or individuals (as distinct from an organization, department or other group of persons) may receive this prize.

> "Since the prize will be awarded only on rare occasion, a substantial prize fund may accumulate; this would focus great importance on solving these problems, and give substantial publicity to the prize. Both the principal and income to this principal will accumulate with other annual increments until the solution of all prize problems.
>
> "However, in case the Foundation ceases to exist at some time in the Future, the prize fund will be transferred to another entity that agrees to administer the prize under the same conditions as if it had been under the auspices of the Foundation. . . "

I had planned to give a mathematics lecture at the University of Geneva at the beginning of July. However, communications with Boston led me to cut short the trip and return to Cambridge four days early on 28 June, in order to continue discussions about the foundation. While on the airplane, I began to prepare a document that summarized further thoughts about the scientific goals of the organization, and even proposed some twenty alternative names. It detailed the purpose as:

> "to provide conditions to stimulate outstanding original research; to educate mathematicians or scientists about new discoveries; to encourage gifted students to pursue mathematical or scientific careers; and to recognize and reward unusual achievements in mathematical research."

These words ultimately became the first draft of the statement of purpose that would appear in the Bylaws of the CMI.

The official organization of CMI waited until September, when LTC outlined his intention to create a foundation to W. Warren and J. Olivieri of the firm Dewey Ballantine in New York. At that meeting he also chose the name CMI, and four days later on 25 September 1998, the CMI became a nonprofit Delaware corporation. Many details evolved over the next few months, and while they are central to CMI, they are peripheral to the millennium challenge.

The public recognition of CMI as an organization took place at a series of lectures at MIT on 10 May 1999, followed by a dinner to honor the donor. Speakers included M. Atiyah, LTC, H. Ferguson, D. Gergen, D. Herschbach, AMJ, B. Mazur, W. dom, C. Vest, and E. Witten, with A. Wiles as keynote speaker. In addition, J.-P. Bourguignon, W. Browder, F. Caspersen, R. Colwell, L. Faddeev, D. Mumford, and K. Osterwalder made remarks after dinner.

Arthur M. Jaffe is professor of mathematics and theoretical science at Harvard University and past president of the AMS (1997–98). His email address is jaffe@math. harvard.edu.

Buchbesprechungen

Funktionalanalysis, Operatortheorie

Dynamische Systeme

Angewandte und numerische Mathematik

Stochastik

Einführungen

Elementar- und Schulmathematik

E. Neuenschwander (Hrsg.): Wissenschaft zwischen Qualitas und Quantitas. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2003, IX+444 S. ISBN 3-7643-5383-X H/b € 84,–.

Das vorliegende Werk ist der zweite Band einer vom Herausgeber angestrebten Trilogie gleich gestalteter Ausarbeitungen von Vortragsreihen des Wissenschaftshistorischen Kolloquiums der ETH und der Universität Zürich zum Themenkreis der gesellschaftlichen und erkenntnistheoretischen Einbettung und Hinterfragung von Wissenschaft. Im Zentrum steht die historisch-kritische Analyse des Aufstiegs der Naturwissenschaften, die einerseits neue Möglichkeiten eröffnet haben, aber andererseits auch unser heutiges Leben nachhaltig bestimmen.

Dieser zweite Band betrachtet die Wissenschaftsentwicklung unter einem methodologisch-paradigmatischen Aspekt, unter besonderen Beleuchtung des Wechselspiels zwischen qualitativen und quantitativen Forschungsansätzen. Die seit längerer Zeit stattfindende Mathematisierung, Mechanisierung und Quantifizierung von Wissenschaft und Alltagswelt führte zu einer beeindruckenden Renaissance des Qualitativen auf zahlreichen Gebieten. Der vorliegende Band beruht auf den Vorträgen, wie sie im Wintersemester 1990/91 gehalten wurden – einer Sammlung unabhängig voneinander gehaltener Vorträge. Die meisten in diesem Werk enthaltenen Beiträge wurden erst einige Jahre nach dem Vortragszyklus ausgearbeitet und spiegeln so im Allgemeinen den aktuellen Forschungsstand wider. Neben einem abrundenden zusätzlichen Beitrag von E.D. Sylla über Wissenschaft zwischen Qualitas und Quantitas, wie es sich in „summa logicae et philosophiae naturalis“ von John Dumbleton (14. Jhd.) findet, bemühte sich der Herausgeber, inhaltliche Lücken durch eine Einführung und eine speziell erarbeitete Bibliographie zu schließen, die eine beinahe vollständige Übersicht zum weitverzweigten Schrifttum zum Thema bis etwa in das Jahr 1995 enthält. In den Band auch aufgenommen wurde die fast 200 Seiten umfassende, monographische Vortragsausarbeitung von Egbert Brieskorn zum Thema „Gibt es eine Wiedergeburt der Qualität in der Mathematik?“. So enthält das Werk neben der Einleitung und der zugehörigen Literaturauswahl des Herausgebers zehn Beiträge.

Der erste Beitrag von Walter Burkert diskutiert die begriffsgeschichtlichen Wurzeln des Gegensatzpaares „Qualitas-Quantitas“ im Altertum. Der zweite Beitrag besteht aus den oben angesprochenen Ausführungen von Edith Sylla zur Quantifizierung von Qualitäten durch die aristotelischen Scholastiker im Mittelalter. Heinrich Schipperges untersucht im dritten Beitrag die ganzheitlich-qualitativ orientierte Medizin des Paracelsus. Der vierte Beitrag von Ulrich Niederer behandelt Qualität und Quantität in Keplers Weltharmonik. Am Beispiel der Farbenlehre bei Newton und Goethe diskutiert Huldrych Koelbing im fünften Beitrag das Aufeinanderprallen von quantitativ messender und qualitativ betrachtender Naturforschung. Christoph Meinel untersucht im sechsten Beitrag die chemische Revolution am Ende des 18 Jhd. zwischen Lavoisier und Liebig. Entsprechend diskutiert Herwig Schopper im siebenten Beitrag den Dualismus zwischen Qualität und Quantität aus der Sicht des modernen Physikers. Im achten Beitrag behandelt Konrad Akert die strukturellen und funktionellen Asymmetrien der beiden Hirnhälften und deren Beziehungen zur klassischen Dichotomie in Wahrnehmung und Denken. Den thematischen Fragenkomplex aus der Sicht des Philosophen diskutiert Jürgen Mittelstrass im neunten Beitrag. Die bereits oben erwähnte, monografische Ausarbeitung von Egbert Brieskorn wurde als zehnter Beitrag wegen seines großen Umfangs in Form eines Anhangs an das Ende des Werkes gestellt. Der Autor beleuchtet den Fragenkomplex aus der Sicht des philosophisch interessierten Mathematikers. Die spannende Wechselbeziehung zwischen Qualitas und Quantitas wird somit in diesem Werk weitreichend beleuchtet und bietet dem Leser ohne Zweifel eine wertvolle Horizonterweiterung.

G. Haring (Wien)

L. Russo: The Forgotten Revolution. How Science Was Born in 300 BC and Why It Had to Be Reborn. With the Collaboration of the Translator, S. Levy. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, IX+487 S. ISBN 3-540-20068-1 H/b € 89,95.

Das vorliegende Werk ist aus der Übersetzung der zweiten Auflage des italienischen Originals „La rivoluzione dimenticata“ durch Silvio Levy hervorgegangen. Durch zahlreiche Anregungen und Diskussionen des Übersetzers mit dem Autor weicht dieses Werk doch von einer reinen Übersetzung, wie man sie erwarten würde, ab. Das Buch zeigt die Entstehung dessen, was man unter Wissenschaft i.e.S. versteht im hellenistischen Griechenland des späten vierten bis späten zweiten Jhd. v. Chr. Es versucht die Frage nach den Bedingungen für die Entstehung und die Ursachen für das Ende der ersten wissenschaftlichen Hochblüte sowie die wesentlichen Erkenntnisse in dieser Periode aufzuzeigen und ihre Beziehung zu den wissenschaftlichen Entwicklungen der Neuzeit ab dem 15./16. Jhd. zu belegen. Letztendlich ist es das Ziel des Autors, durch Reflexion und Beschäftigung mit der antiken Wissenschaft und ihrer Beziehungen zu den Gegenpolen der modernen Wissenschaft das Verständnis für zentrale Fragen moderner Zivilisation und Technologie zu fördern. Diese tiefgreifende historische Betrachtung soll auch helfen, zentrale Fragen, wie das Zusammenspiel von Wissenschaft und Gesellschaft, zwischen Wissenschaft und Technologie, inklusive ihrer wissenschaftlichen Implikationen, oder die Monotonie des Fortschritts unter unüblichen Gesichtspunkten zu betrachten. Eigentlich ist es ein spannendes Buch über Geschichte – von der hellenistischen Zeit bis zur Gegenwart, dargestellt anhand der Wissenschaft.

Während sich die ersten drei Kapitel des Werks einerseits mit der Frage, was eigentlich Wissenschaft ausmacht und andererseits mit wissenschaftlichen Theorien der hellenetischen Zeit, wie z.B. Mathematik, Astronomie, etc., beschäftigen, geht Kap. 4 der Frage nach den technologischen Implikationen nach. Das fünfte Kapitel behandelt Medizin und andere empirische Wissenschaften. Kapitel 6 widmet sich schließlich der wissenschaftlichen Methode der hellenistischen Zeit, der Deduktion, und ihren Grundlagen. Kapitel 7 rundet die Betrachtung durch weitere Aspekte der wissenschaftlichen Revolution dieser Zeit, die durchaus in den soziokulturellen Bereich gehen, ab, bevor Kapitel 8 auf die Gründe für das Ende der Hoch-zeit für die Wissenschaft eingeht. Kapitel 9 behandelt wirtschaftliche Wechselbeziehungen und Voraussetzungen für prosperierende Wissenschaften. Im zehnten Kapitel versucht der Autor Verbindungen aus der wissenschaftlichen Gegenwart in die Vergangenheit aufzuzeigen, um zu verhindern, dass wissenschaftliche Erkenntnisse der hellenistischen Zeit in ihrer Bedeutung verloren gehen. Damit führt dieses Kapitel auch über in die abschließenden Betrachtungen des Schlusskapitels über die Renaissance der Wissenschaft in der Neuzeit durch Rückbesinnung auf die hellenistische Periode. Zusammenfassend ein gelungenes und spannendes Werk für jeden, der an den Fragen der Anfänge der Wissenschaft und ihrer geschichtlichen Entwicklung interessiert ist – auch wenn das Werk in stilistischer Hinsicht verbesserungsfähig ist, zum Zwecke der Erhöhung der Lesbarkeit. Getrübt wird der sehr positive Eindruck sicher auch durch den doch relativ hohen Verkaufspreis.

G. Haring (Wien)

Algebra

D. Bump: Lie Groups. (Graduate Texts in Mathematics 225). Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2004, XI+451 S. ISBN 0-387-21154-3 H/b € 64,95.

Im Vorwort schreibt der Autor, dass dieses Buch eine Einführung in Liegruppen darstellt, die mit einer Gruppe von *guten* Doktoratsstudenten in einem Jahr durchgenommen werden kann, und dass er versucht, das Problem zu lösen, dass die Menge an unbedingt notwendigem Material für eine Vorlesung normalerweise viel zu groß ist.

Diese Sätze beschreiben nicht nur die Intentionen des Autors, sondern auch das gesamte vorliegende Werk recht gut. Eine große Fülle an Material (von dem kleine Teile auch schon Bücher gefüllt haben), wird auf 450 Seiten in einem leserfreundlichen Stil präsentiert.

Das Buch ist in drei Teile gegliedert. Der erste, bestehend aus den Kapiteln 1–4, handelt von kompakten Gruppen im Allgemeinen, dem Haarmaß und dem Satz von Peter-Weyl. Der zweite, größere, Teil (Kapitel 5–33) stellt eine umfassende Einführung in Liesche Gruppen, ihre Struktur und Klassifikation sowie ihre

Darstellungstheorie dar. Ebenfalls behandelt werden geometrische Themen wie Zerlegungen, symmetrische Räume und Einbettungen von Lieschen Gruppen.

Im umfangreichen dritten Teil geht der Autor in den Kapiteln 34–50 auf Themen ein, die nicht zum Standardrepertoire gehören und für die dieser Band eine sehr gute Lehrbuchquelle darstellt. Die Kapitelüberschriften kreisen um die Frobenius-Schur-Dualität: *Mackey Theory, Characters of* $GL(n,\mathbb{C})$*, Duality between* S_k *and* $GL(n,\mathbb{C})$*, The Jacobi-Trudi Identity, Schur Polynomials and* $GL(n,\mathbb{C})$*, Schur Polynomials and* S_k*, Random matrix Theory, Minors of Toeplitz Matrices, Branching Formulae and Tableaux, The Cauchy Identity, Unitary Branching Rules, The Involution Model for* S_k*, Some Symmetric Algebras, Gelfand Pairs, Hecke Algebras, The Philosophy of Cusp Forms, Cohomology of Grassmannians*.

J. Wallner (Wien)

A. Dickenstein, I. Z. Emiris (eds.): Solving Polynomial Equations. Foundations, Algorithms, and Applications. With 46 Figures. (Algorithms and Computation in Mathematics, Vol. 14.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, xiii+425 S. ISBN 3-540-24326-7 H/b € 64,95.

Das vorliegende Werk bietet eine allgemeine Einführung in die Mathematik von multivariaten Polynomen und von Systemen nichtlinearer algebraischer Gleichungen. Es ist kein Standardtext: die insgesamt 9 Kapitel des Buches wurden von einem Kollektiv von 16 Autoren verfasst. Ein gemeinsames Literaturverzeichnis samt Index zeigt aber dennoch die mathematische Einheit des Themas auf.

Nach einem einleitenden Kapitel, in dem die mathematischen Grundlagen zusammengefasst sind, folgt ein Kapitel (von D. A. Cox) über die Lösung von Polynomgleichungen mittels Algebren. Dies wird algorithmisch weiter ausgeführt mittels algebraischer und auch geometrischer Methoden (M. Elkadi, B. Mourrain: Symbolic-numeric methods for solving polynomial equations and applications). Die weiteren eher kurzen Kapitel umfassen einen Beitrag über Algorithmen und Komplexität für Probleme mit Polynomen, über Homotopiemethoden in der algebraischen Geometrie sowie über Faktorisierungen und Basen.

Das Buch entstand aus einem Graduiertenkurs über Polynome in Buenos Aires im Jahr 2003. Die einzelnen Kapitel sind unabhängig voneinander abgefasst, aber es gibt dennoch enge Querbezüge. Dies erfordert mit Bezug auf Notation einige Flexibilität von den Lesern. Insgesamt gibt das Werk einen guten Überblick über Grundlagen, Algorithmen und Anwendungen von Polynomgleichungen.

F. Rendl (Klagenfurt)

I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman: Indefinite Linear Algebra and Applications. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2005, xii+357 S. ISBN 3-7643-7349-0 P/b € 38,–.

Das vorliegende Buch stellt in gewisser Weise eine Neubearbeitung der von den drei Autoren im Jahre 1983 publizierten Monographie *Matrices and Indefinite Scalar Products* dar; es unterscheidet sich jedoch in Zielsetzung und Stoffauswahl recht deutlich von diesem. Als Zielgruppe werden einerseits Studierende mit einem Basiswissen in linearer Algebra, aber auch Ingenieure und andere Wissenschafter angegeben. Dies mag auch erklären, warum die Darstellung durchwegs auf Koordinaten und Matrizen aufbaut und nicht etwa auf koordinatenfreien Begriffsbildungen. Der Text ist sehr klar und wirklich gut verständlich geschrieben.

Zunächst soll einmal der umfangreiche Inhalt des Buches anhand der Kapitelüberschriften kurz angedeutet werden:

1. Introduction and Outline. 2. Indefinite Inner Products. 3. Orthogonalization and Orthogonal Polynomials. 4. Classes of Linear Transformations. 5. Canonical Forms. 6. Real H-Selfadjoint Matrices. 7. Functions of H-Selfadjoint Matrices. 8. H-Normal Matrices. 9. General Perturbations. Stability of Diagonalizable Matrices. 10. Definite Invariant Subspaces. 11. Differential Equations of First Order. 12. Matrix Polynomials. 13. Differential and Difference Equations of Higher Order. 14. Algebraic Riccati Equations. Jedes Kapitel schließt mit ansprechend gestalteten Übungsaufgaben sowie Hinweisen auf die verwendeten Quellen.

Der Ausgangspunkt für die gesamte Darstellung ist der Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem üblichen positiv definiten inneren Produkt $(\ ,\ )$. Jedes *indefinite innere Produkt* $[\ ,\ ]$ auf $\mathbb{C}^n$ kann in eindeutiger Weise mit Hilfe einer regulären hermiteschen Matrix H in der Form $[x,y] = (Hx,y)$ geschrieben werden (bei diesem Zugang sind definite innere Produkte zu den indefiniten inneren Produkten zu zählen.) Der Buchstabe H dient dann durchgehend zur Unterscheidung, ob eine Begriffsbildung bezüglich des gewöhnlichen inneren Produkts $(\ ,\ )$ oder einem indefiniten inneren Produkt $[\ ,\ ]$ aufzufassen ist. Beispiele für diese Notation finden sich schon in den oben angegebenen Kapitelüberschriften. Der reelle Fall kann natürlich analog mit Hilfe einer regulären symmetrischen Matrix H behandelt werden.

Der wesentliche Unterschied zum definiten Fall wird durch die Existenz neutraler Unterräume $\neq 0$ hervorgerufen. In einem solchen Unterraum induziert $[\ ,\ ]$ die Nullform. Dies hat etwa die Konsequenz, dass die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung nur unter gewissen Nebenbedingungen durchgeführt werden kann.

Ein zentraler Teil des Buches ist dem eingehenden Studium der linearen Abbildungen unter Berücksichtigung eines indefiniten inneren Produktes gewidmet. Während sich die grundlegenden Definitionen (H-unitär, H-normal, ...) mehr oder weniger von selbst ergeben, indem man sinngemäß wie im definiten Fall vorgeht, trifft dies auf die Eigenschaften derartiger Abbildungen keineswegs zu. Die Frage nach Eigenwerten und in weiterer Folge nach Normalformen ist oft sehr kompliziert und verlangt viele Fallunterscheidungen. Es gelingt zwar etwa eine vollständige Klassifikation der H-selbstadjungierten Abbildungen, die Klassifikation der H-normalen Abbildungen scheint im Allgemeinen aber hoffnungslos zu sein. Immerhin kann für eine Fundamentalmatrix H mit nur einem negativen Eigenwert eine vollständige Klassifikation der H-normalen Abbildungen angegeben werden.

Unter Verwendung der zuvor aufgestellten Normalformen wird nun die umfangreiche Störungstheorie für H-selbstadjungierte und H-unitäre Matrizen entwickelt. Die Bestimmung der invarianten Unterräume einer H-selbstadjungierten Abbildung geschieht sogar auf zwei Weisen. Die Theorie wird schließlich in eindrucksvoller Weise zur Behandlung von Differenzengleichungen und Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten herangezogen.

Das Buch endet mit einem nützlichen Anhang, in dem eine Reihe von Begriffsbildungen und Ergebnisse aus der linearen Algebra und Topologie zusammengefasst werden. Das umfangreiche Literaturverzeichnis enthält 108 Einträge zu anderen Büchern und Originalarbeiten.

H. Havlicek (Wien)

A. W. Knapp: Representation Theory of Semisimple Groups. An overview based on examples. Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2001, XIX+773 S. ISBN 0-691-09089-0 P/b £ 29,95.

This is the third unaltered printing of a by now standard reference on representation theory. The only changes are the absence of a hard cover and the addition of a short preface. The book is aimed at advanced readers, assuming a certain acquaintance with the theory of Lie groups; there is however a concise survey of the needed facts in an appendix. The spirit of the book is best captured in the words of the author in the preface of the first edition:

"Beginning at a certain point in one's mathematical career [...] the mastery comes through studying examples, through grasping patterns, through getting a feeling for how to approach aspects of the subject, and through other intangibles. [...] The subject of semisimple Lie gropus is especially troublesome in this respect. It has a reputation for being both beautiful and difficult, and many mathematicians seem to want to know something about it. But it seems impossible to penetrate. A thorough logical progression approach might require ten thousand pages."

Being an eminent teacher, the author succeeded to make the essential ideas accessible on less than 800 pages, which I recommend to anyone interested in representation theory.

F. Lehner (Graz)

A. W. Knapp: Lie Groups Beyond an Introduction. Second Edition. (Progress in Mathematics, Vol. 140). Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2002, XVIII+812 S. ISBN 0-8176-4259-5, 3-7643-4259-5 H/b € 98,13.

This is the second edition of a textbook written by a prominent expert on Lie groups.

Compared to the first edition it has been expanded at the beginning and at the end. There is now an introduction explaining elementary Lie theory by the way of matrix group examples and the sections on elementary Lie theory in chapter I have been expanded considerably, thus making the book more accessible to novices. At the end two new chapters have been added, one on infinite dimensional representations and branching theorems and another one on actions on polynomial algebras, aiming towards invariant theory. The remaining chapters (II–VIII) have undergone a few minor revisions.

The book is now an almost self-contained textbook, requiring only a few prerequisites from linear algebra (of which tensor algebra is explained in an appendix), group theory and differential geometry. It includes many exercises (together with hints in an appendix), historical notes and a useful subject index, which makes it an excellent choice for a graduate course on Lie theory.

F. Lehner (Graz)

Zahlentheorie

W. Narkiewicz: Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers. Third Edition (Springer Monographs in Mathematics). Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, xi+708 S. ISBN 3-540-21902-1 H/b € 119,95.

Das vorliegende Buch ist die dritte Auflage *des* Standardwerks über analytische Aspekte der algebraischen Zahlentheorie. Die wesentlichen Änderungen im Vergleich zur zweiten Auflage aus dem Jahr 1990 sind:

– das Buch ist durchgehend in LaTeX gesetzt, was die Lektüre angenehmer gestaltet.
– die Bemerkungen an den Enden der Kapitel wurden auf den neuesten Stand gebracht.
– der Abschnitt über offene Probleme wurde um elf Punkte erweitert. Fragen, die mittlerweile beantwortet werden konnten, wurden in der Liste behalten.
– die Literaturliste wurde aktualisiert und umfasst nunmehr 3.400 Einträge.
– um den Gesamtumfang nicht ausufern zu lassen, wurden einige Darstellungen etwas gekürzt.

– die Anhänge wurden umorganisiert und etwas gekürzt: der Anhänge über lokalkompakte abelsche Gruppen, Dirichlet-Reihen (jetzt Funktionentheorie) und die Bakersche Methode wurden beibehalten, jener über Geometrie der Zahlen gestrichen.

Durch die Aktualisierung wird dieses Buch sicher für die nächsten Jahre ein wichtiges Referenzwerk in diesem Gebiet bleiben.

P. Grabner (Graz)

M. Ram Murty, J. Esmonde: Problems in Algebraic Number Theory. Second Edition (Graduate Texts in Mathematics 190). Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2005, XVI+352 S. ISBN 0-387-22182-4 H/b € 59,95.

"Learning by doing" ist das Motto dieses Lehrbuchs, das eine Einführung in die algebraische Zahlentheorie bietet und nicht, wie der Buchtitel im ersten Moment vermuten lässt, ungelöste Probleme „auf den Markt wirft". Der gebotene Stoff, gegliedert in Definitionen, Theoreme und Lemmata samt Beweisen, wird durch etwa 500 Übungen ergänzt, die den (auch weiblichen) Leser zum selbstständigen Erarbeiten der algebraischen Zahlentheorie anregen sollen. Die zweite Buchhälfte besteht dann aus den Antworten bzw. Lösungen zu den gestellten Problemen. Insgesamt wird der Leser von einem Einstieg in die Elementare Zahlentheorie über ganze algebraische Zahlen, Dedekindringe, Idealklassengruppen, Einheitengruppen, quadratische und höhere Reziprozitätsgesetze bis hin zu den analytischen Methoden und dem Dichtesatz von Chebotarev für Primideale geführt.

Dieses Buch kann sowohl als Begleitbuch für eine entsprechende Lehrveranstaltung als auch zum Selbststudium für „Einsteiger" in die algebraische Zahlentheorie empfohlen werden.

Günter Lettl (Graz)

Geometrie, Topologie

J. Bertin, J.-P. Demailly, L. Illusie, C. Peters: Introduction to Hodge Theory. (SMF/AMS Texts and Monographs, Vol. 8 – Panoramas et Synthèses, Numéro 3, 1996.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island – Société Mathématique de France, 2002, IX+232 S. ISBN 0-8218-2040-0 P/b \$ 65,00.

Dieser Sammelband ist die englischen Übersetzung einer Zusammenstellung von erweiterten Vorlesungen, die im Jahre 1994 in Grenoble gehalten wurden und auf Französisch bereits im Jahre 1996 erschienen sind. J.-P. Demailly gibt darin unter der Überschrift "L^2-Hodge Theory and Vanishing Theorems" von höherer Warte aus eine konzise Einführung in die L^2-Hodge-Theorie auf Riemannschen sowie komplexen Hermiteschen und Kähler-Mannigfaltigkeiten, wobei er im zweiten Teil seines Beitrags auf deren geodätisch vollständige Varianten und die für sie geltenden Verschwindungssätze von Kohomologien eingeht. L. Illusie widmet sich "Frobenius and Hodge Degeneration", während J. Bertin und C. Peters im Kapitel "Variations of Hodge Structures, Calabi-Yau Manifolds and Mirror Symmetry" einen Fragenkomplex aus der algebraischen Geometrie behandeln, der seinen Ursprung gewissen Modellen der konformen Feldtheorie der theoretischen Physik verdankt. Die Vielzahl der zur Behandlung der angegebenen Themen notwendigen Verfahren und Begriffsbildungen (von Pseudodifferentialoperatoren auf Vektorbündeln über Garben zu Spektralfolgen) verlangt vom Leser entsprechende Vorkenntnisse oder das Bereitlegen der angegebenen vorbereitenden Literatur. Solchermaßen ausgestattet, erhält man eine konzise Einführung in die Themen bis heran zu noch offenen Fragestellungen.

W. Bulla (Graz)

P. Brass, W. Moser, J. Pach: Research Problems in Discrete Geometry. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, xii+499 S. ISBN 0-387-23815-8 H/b € 52,95.

Die vorliegende Sammlung von Problemen der Diskreten Geometrie hat ihren Ursprung in einer Sammlung von 50 Problemen von Leo Moser aus dem Jahre 1963, die im Laufe der Jahre gewachsen ist und nun einen stattlichen Band füllt, der betreut wird von Brass, Moser und Pach. Es handelt sich hauptsächlich um Probleme aus dem Umkreis der ungarischen Schule der Diskreten Geometrie im Sinne von Fejes Tóth und Erdős. Speziell werden folgende Themen angeschnitten: Dichte von Packungen und Überdeckungen, Struktur von Packungen und Überdeckungen, Packungen und Überdeckungen mit homothetischen Kopien, Pflasterungen, Distanzprobleme, Subkonfigurationen, Inzidenz- und Anordnungsprobleme, Punkte in allgemeiner Lage, Zeichnen von Graphen, Gitterpunktprobleme, geometrische Ungleichungen. Jede einzelne Frage wird sorgfältig dargestellt und mit einer Übersicht der relevanten Literatur versehen. Das Buch ist anregend und wird mit Sicherheit zu vielen neuen Arbeiten führen.

Peter M. Gruber (Wien)

S. Tabachnikov: Geometry and Billiards. (Student Mathematical Library, Vol. 30). American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005, xi+176 S. ISBN 0-8218-3919-5 P/b \$ 35,–.

Es ist eine schöne russische Tradition, kleine, elementare Darstellungen wissenschaftlicher Themen und Gebiete durch bedeutende Fachleute vorzulegen. Solche Werke sprechen in erster Linie Schüler und Studierende der unteren Semester an, sind aber häufig auch von einschlägigen Wissenschaftlern mit Gewinn zu lesen. Das vorliegende ausgezeichnete, kleine Werk von Tabachnikov steht in dieser Tradition, ist aber wohl mehr an Studierende gerichtet. Es beinhaltet folgende Themen: Motivation: Mechanik und Optik, Billards in Kreis und Quadrat, Billardabbildung und Integralgeometrie, Billards in Kegelschnitten und Quadriken, Existenz und Nichtexistenz von Kaustiken, Periodische Trajektorien, Chaotische Billards, Duale Billards. Dies Büchlein ist eine der erfreulichsten Neuerscheinungen, die dem Referenten in den letzten Jahren begegnet ist und verdient sich einen großen Leserkreis.

Peter M. Gruber (Wien)

Analysis

A. A. Agrachev, Y. L. Sachkov: Control Theory from the Geometric Viewpoint. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 87). Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, xiv+412 S. ISBN 3-540-21019-9 H/b € 94,95.

Der Band ist aus Graduiertenkursen an der International School for Advanced Studies in Triest entstanden, die der erstgenannte Autor in den Jahren 2000 und 2001 hielt. Mathematisch werden gute Kenntnisse der Analysis, der linearen Algebra und der Funktionalanalysis vorausgesetzt. Der geometrische Zugang ist für die Autoren insofern natürlich, als Transformationsgruppen wesentlich für zulässige Trajektorien und erreichbare Mengen gesteuerter Systeme sind. Auch ist die rechte Seite einer Differentialrechnung ein Vektorfeld, dessen Fluss das zugehörige dynamische System erzeugt.

Die ersten Kapitel des Bandes geben eine Einführung in glatte Mannigfaltigkeiten und gewöhnliche Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten sowie eine erste Betrachtung gesteuerter Systeme. Es folgt eine kurze Darstellung eines Operatorkalküls (chronological calculus), der vor allem für nichtlineare Systeme benötigt wird. Die Autoren wenden sich primär an Mathematiker(innen), möchten jedoch auch Anwender erreichen. Für Letztere ist jedoch dieses Kapitel etwas kurz geraten, insbesondere wäre für ein gutes Verständnis der verwendeten Notation eine größere Anzahl von einfachen Beispielen – wie sie die Autoren in anderen Kapiteln in sehr geschickter Auswahl verwenden – wünschenswert gewesen. In Kapitel 3 und 4 werden als wesentliche Grundlage der weiteren Überlegungen Steuerbarkeit linearer, autonomer Systeme sowie lokale und globale Linearisierbarkeit nichtlinearer Systeme in mathematischer Exaktheit sehr anschaulich dargestellt. Die folgenden Kapitel sind dem *orbit theorem* von Nagano und Sussmann und seinen Anwendungen gewidmet. Es folgen Aussagen über die Struktur erreichbarer Mengen und eine Diskussion von Feedback-Transformationen und hier insbesondere von Linearisierbarkeit mittels Feedback- und Zustands-Transformationen.

Die restlichen rund zwei Drittel des Bandes sind Optimalsteuerungen gewidmet und beinhalten auch einen Beweis des zentralen Maximumprinzips von Pontyagin sowie eine sehr gute Darstellung einer Vielzahl von speziellen Optimal-Steuerungsaufgaben (z.B. zeitoptimale und linear-quadratische Systeme, Hamilton-Systeme), aber auch hinreichende Bedingungen und Bedingungen zweiter Ordnung. Bekannte und neue Beispiele (vor allem mit mechanischen Systemen als Hintergrund) illustrieren hier die Fülle an Aussagen in sehr anschaulicher Weise. Insgesamt ist so ein Band entstanden, der Mathematikern und mathematisch interessierten Anwendern wertvolle Anregungen bei der Auseinandersetzung mit gesteuerten bzw. geregelten nichtlinearen Systemen und deren Optimierung bietet.

I. Troch (Wien)

N. Berline, E. Getzler, M. Vergne: Heat Kernels and Dirac Operators. (Grundlehren Text Editions). Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, IX+363 S. ISBN 3-540-20062-2 P/b € 49,95.

Die Indexformel von Atiyah und Singer für kompakte geschlossene Mannigfaltigkeiten stellt einen Zusammenhang zwischen dem Index eines elliptischen Differentialoperators D und diversen topologischen Kenngrößen der Mannigfaltigkeit her. Sie stellt wohl einen der Meilensteine der Mathematik des 20. Jahrhunderts dar.

Das vorliegende Buch ist die zweite korrigierte und erweiterte Ausgabe eines Werkes aus dem Jahre 1992. Es gibt einen auf den Eigenschaften eines verallgemeinerten Wärmeleitungskernes basierenden Beweis der Indexformel für Dirac-Operatoren. Ausgehend von einer Grundausbildung in klassischer Differentialgeometrie stellt das Buch alle zum Verständnis des Beweises notwendigen Voraussetzungen zur Verfügung. Dadurch eignet es sich einerseits zum Selbststudium für Studierende mit entsprechender Vorbildung (als Softcover ist es auch gut leistbar), andererseits als Grundlage einer Vorlesung über dieses ergiebige Thema.

P. Grabner (Graz)

A. Deitmar: A First Course in Harmonic Analysis. Second Edition (Universitext). Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, xii+192 S. ISBN 0-387-22837-3 P/b € 44,95.

This is the second edition of a beautiful introduction to harmonic analysis accessible to undergraduate students. The price for remaining elementary (and avoiding Lebesgue integration) is the omission of more advanced topics including connections with differential operators.

The first part deals with classical Fourier analysis, the second provides the extension to locally compact abelian groups, and the third part is concerned with noncommutative groups. In comparison to the first edition there are two new chapters on distributions and the Heisenberg group.

G. Teschl (Wien)

S. Elaydi: An Introduction to Difference Equations. Third Edition. (Undergraduate Texts in Mathematics.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, xxii+539 S. ISBN 0-387-23059-9 H/b € 59,95.

This is the third edition of a well-established textbook which gives a solid introduction to difference equations suitable for undergraduate students. It covers most aspects from classical results to modern topics. In comparison to the previous edition, more proofs, more detailed explanations, and more applications were added. In particular, there is now a proof of the Levin-May theorem and a new chapter on higher order scalar equations. Thanks to the many additions, the book stays recent and valuable resource for students and teachers.

G. Teschl (Wien)

T. H. Wolff: Lectures on Harmonic Analysis. Edited by I. Łaba and C. Shubin. (University Lecture Series, Vol. 29). American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003, X+137 S. ISBN 0-8218-3449-5 P/b $ 31,–.

Thomas H. Wolff (1956–2000) war ein bedeutender Mathematiker von überragender Gestalt. Sein posthum erschienenes Buch, die *Lectures in Harmonic Analysis,* wurde ein außergewöhnliches und großes Werk. Es beschreibt, wie die Analyse der Kakeya-Mengen unseren heutigen Zugang zur Harmonischen Analysis bestimmt.

Genauer, die Abschätzungen für die Hausdorffdimension von Kakeya-Mengen durchdringen die Arbeiten an zentralen Problemen der Harmonischen Analysis. Darunter sind: Die Fouriertransformation auf den Teilmannigfaltigkeiten des R^n; Bochner-Riesz-Summierbarkeit, Lokale Glättungseigenschaften der Wellengleichung; Dirichletreihen in L^2 ; L^p Abschätzungen von Fourierintegraloperatoren; die Bourgain-Kakeya-Maximalungleichung.

Die treibenden Kräfte dieser Entwicklung, die mit einem berühmten Beispiel von C. Fefferman (The Multiplier Problem of the Ball, Ann. Math 96 (1971)) begonnen hat, kamen von J. Bourgain, Tom Wolff, und T. Tao. Deren fundamentale Beiträge, samt Querverbindungen zu anderen Arbeiten, sind in den *Lectures in Harmonic Analysis* kohärent und in den Zusammenhang gestellt präsentiert.

Das Werk ist didaktisch hervorragend knapp und klar ausgeführt; die notwendigen Hilfsmittel für die eigentliche Arbeit an den Kakeya-Problemen (Schwartz-Raum, Plancherel, Fourierinversion, die Unschärferelation, Stationäre Phase, Hausdorffmaße) werden in den einleitenden Kapitel leicht verständlich aufgebaut. Auf einen Nenner gebracht: Das Studium der *Lectures in Harmonic Analysis* von Thomas H. Wolff ist Pflicht!

P. Müller (Linz)

Funktionalanalysis, Operatortheorie

M. Demuth, M. Krishna: Determining Spectra in Quantum Theory. (Progress in Mathematical Physics, Vol. 44.) Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2005, x+219 S. ISBN 0-8176-4366-4 H/b € 107,80.

The present text book gives a short and readable introduction to spectral theory together with applications to some selected topics from Schrödinger operators (mainly random discrete Hamiltonians and scattering theory). It is intended to help graduate students or researchers, with a solid background in functional analysis, to build up a working toolkit from classical material up to very recent results. It definitely serves this purpose well, even though it does not always provide full proofs. To compensate for this lack, there is an extensive bibliography together with notes, which will point the reader to the relevant articles and books.

In summary, I feel that the book is a valuable addition to the literature and can recommend it to both graduate students and experts in the field.

G. Teschl (Wien)

A. A. Borichev, N. K. Nikolski (eds.): Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics. International Workshop on Operator Theory and Applications, IWOTA 2000. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 129). Birkh"auser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2001, XVIII+527 S. ISBN 3-7643-6645-1 H/b EUR 152,–.

This book consists of 20 survey and research-expository papers and is devoted to some topical problems and various applications of Operator Theory. All papers originate from lectures delivered at the 11th International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA) taking place in Bordeaux, France. Most of the papers are only accessible to specialist in their field.

E. Hausenblas (Salzburg)

V. V. Peller: Hankel Operators and their Applications. (Springer Monographs in Mathematics). Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2003, XV+784 S. ISBN 0-387-95548-8 H/b € 89,95.

Hankel-Operatoren sind durch unendliche Matrizen gegeben, deren Einträge nur von der Summe der Zeilen- und Spaltennummer abhängen. Das Studium solcher Operatoren geht auf die Dissertation von Hermann Hankel zurück. Sei also $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, dann ist der zugehörige Operator durch

$$(a_n)_{n\geq 0} \mapsto (\textstyle\sum_{j\geq 0} \alpha_{n+j}\, a_j)_{n\geq 0}$$

auf den Folgen mit endlichem Träger gegeben. Ein spezielles Beispiel eines solchen Operators ist etwa durch die Hilbert-Matrix $(\frac{1}{m+n+1})_{m,n\geq 0}$ gegeben. Aufgrund der Definition ist eine enge Beziehung zu Fourier-Reihen und zur Funktionentheorie auf dem Einheitskreis offensichtlich. Dies ist auch die ursprüngliche Motivation für das Studium dieser Operatoren.

Das vorliegende Buch spannt einen weiten thematischen Bogen zwischen den klassischen Anfängen und neueren Anwendungen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik. Ein Teil der präsentierten Resultate erscheint zum ersten Mal in Buchform. Die folgende Liste gibt einen Eindruck von der Fülle der behandelten Themen: Die Charakterisierung der beschränkten Hankel-Operatoren auf ℓ^2 – Momentenproblem – Zusammenhang mit Toeplitz-Operatoren – Spektren und Singulärwerte von Hankel-Operatoren – Anwendung auf auf die rationale Approximation analytischer Funktionen – Hankel-Operatoren auf Besov-Räumen – Anwendungen auf Gaußsche Prozesse – Regularitätsbedingungen für stationäre Prozesse – Anwendungen in der Kontrolltheorie – Approximation von Matrizenfunktionen.

Insgesamt handelt es sich um ein gut lesbares Buch über ein klassisches Thema.

P. Grabner (Graz)

S. Bezuglyi, S. Kolyada: Topics in Dynamics and Ergodic Theory. (London Mathematical Society Lecture Note Series 310). Cambridge University Press, 2003, viii+262 S. ISBN 0-521-53365-1 P/b £ 30,–.

Dieses Buch sammelt neun Überblicksartikel, die aus Anlass einer im August 2000 in Katsiveli (Ukraine) stattgefundenen Tagung geschrieben wurden. Die Arbeiten behandeln neueste Ergebnisse aus den Forschungsgebieten der Autoren. Das Buch bietet einen Überblick über spezielle Themen im Bereich Dynamik und Ergodentheorie.

In der ersten Arbeit des Buches, *Minimal idempotents and ergodic Ramsey theory,* gibt V. Bergelson einige Veranschaulichungen der fruchtbaren Anwendung der Stone-Čech-Kompaktifizierung im Rahmen der Ramseytheorie. Er behandelt Verbindungen zwischen Invertibilität von distalen Abbildungen, Konvergenz entlang von Idempotenten und schwach mischenden Wirkungen. Einige Zwischenresultate werden dem Leser als Aufgaben überlassen.

Der zweite Artikel, *Symbolic dynamics and topological models in dimensions 1 and 2*, von A. de Carvalho und T. Hall ist eher geometrisch und stellt einen Zusammenhang zwischen der ‘kneading theory’ in der Theorie der unimodalen Abbildungen und dem ‘pruning’ her. Beispielsweise wird eine Analogie zwischen eindimensionalen Objekten (unimodale Abbildungen) und zweidimensionalen Objekten (Hufeisenabbildung) gebaut.

A. Dooleys Arbeit *Markov odometers* und N. Sidorovs Beitrag *Arithmetic dynamics* studieren dynamische Systeme, die von Zahlendarstellungen kommen. Diese können auch als Vershik-Bratelli-Diagramme dargestellt werden und sind stark von den Ideen von Vershik geprägt. Invariante Maße, Ergodizität und dynamische Eigenschaften werden diskutiert.

Hyperbolische Dynamik und Mechanik kommen in dem Buch ebenfalls vor, und zwar durch den Artikel von V. Kaloshin: *Mather’s connecting and accelerating theorems*. Komplexe Dynamik ist das Thema von O. Kozlovskis, *Structural stability in 1D Dynamics*. Mehrdimensionale Abbildungen und deren Perioden werden von B. Lemmens in *Periodic points of nonexpansive maps: a survey* studiert. K. Thomsen entwickelt in *The defect of factor maps and finite equivalence of dynamical systems* eine von ihm eingeführte Größe, den Defekt, ein Maß für die Abweichung von der Injektivität einer Abbildung.

Der letzte Artikel von B. Weiss besteht aus einer interessanten und lesbaren tour d’horizon durch *Actions of amenable groups* und deren Entropie. Dabei wird u.a. der Satz von Shannon-McMillan-Breiman besprochen.

Insgesamt ein Buch, das eine Reise durch verschiedenste Gebiete der dynamischen Systeme anbietet und dem Leser, der mit der Theorie vertraut ist, einen Einblick in aktuelle Resultate gewährt.

G. Barat (Graz)

M. Denker: Einführung in die Analysis dynamischer Systeme. Mit 48 Abbildungen (Springer-Lehrbuch). Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, X+285 S. ISBN 3-540-20713-9 P/b € 39,95.

Dieser Band ist für Mathematiker geschrieben, die an die aktuellen Forschungen auf diesem Gebiet herangeführt werden sollen, und kann als Grundlage einer Vorlesung oder auch zum Selbststudium verwendet werden. Analytische Methoden stehen im Vordergrund. Wesentliche Grundzüge der Theorie werden im ersten Kapitel an Themen wie Selbstähnlichkeit, Differentialgleichungen und Flüsse, Normalformen, Bifurkation und Diophantische Approximation beispielhaft erläutert. Transformationen auf niedrig-dimensionale Räume sind für das Verständnis dynamischer Verhaltensweisen wesentlich. Daher folgt ein Kapitel über null- und eindimensionale dynamische Systeme mit den Themen Intervallabbildungen, topologische Markoff-Ketten, Homöomorphismen der Kreislinie und rationale Abbildungen. Kapitel drei bis fünf enthalten topologische und differenzierbare Dynamik sowie Ergodentheorie. Es folgt ein Kapitel über den thermodynamischen Formalismus. Den Abschluss bildet ein Epilog mit Aussagen über dynamische Betrachtungsweisen, einem kleinen historischen Überblick und einer Sammlung von Aufgaben, die durch Literaturstudium gelöst werden sollen. Ein gut gegliedertes Literaturverzeichnis, das ergänzende und vertiefende Bücher nennt, und ein Index runden den Band ab. Jedes Kapitel beginnt mit einer Orientierung über seinen Inhalt, die auch die Ursprünge der Theorie skizziert. Im Gegensatz zur weitgehend üblichen Vorgehensweise sind die zahlreichen Beispiele nur selten der Physik entnommen oder historisch begründet. Etwa neunzig Beispiele sollen – ebenso wie die zahlreichen Graphiken – helfen, Begriffe und Ergebnisse zu verdeutlichen. Der Autor verwendet dabei vor allem Beispiele mathematischer Natur aus unterschiedlichen Gebieten wie z.B. rationale Abbildungen der Sphäre, Torusautomorphismen, Additionsmaschine, Cantor-Menge, von-Koch-Kurve, logistisches Wachstum und logistische Familie, Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen von Polynomen. Die Graphiken sind so erstellt, dass sie interessierte Leser, bei entsprechendem Verständnis für die Materie, in gleicher Qualität selbst programmieren können.

I. Troch (Wien)

P. G. Drazin: Introduction to Hydrodynamic Stability. (Cambridge Texts in Applied Mathematics.) Cambridge University Press, 2002, XVII+258 S. ISBN 0-521-80427-2 H/b £ 65,–, ISBN 0-521-00965-0 P/b £ 21,95*.

Dieses Buch ist eine Einführung in das Gebiet der Strömungslehre. Das zentrale Thema sind die verschiedenen Instabilitäten bzw. das Entstehen solcher Instabilitäten. Der Stil ist angenehm zu lesen, und auch zugänglich für Mathematiker, die keine Spezialisten in diesem Gebiet sind.

E. Hausenblas (Salzburg)

H. Freistühler, G. Warnecke (eds.): Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Vol. I+II. Eight International Conference in Magdeburg, February/March 2000. (International Series of Numerical Mathematics, Vol. 140+141.) Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2002. Vol I: 488 S. ISBN 3-7643-6709-1 H/b € 82,24. Vol II: 484 S. ISBN 3-7643-6710-5 H/b € 82,24.

In diesen zwei Tagungsbänden wurden die Ergebnisse der Achten Internationalen Konferenz über Hyperbolische Probleme veröffentlich. Jeder Band beinhaltet circa 50 Artikel verschiedenster Experten über Hyperbolische Probleme. Die Artikel sind zumeist nur Spezialisten in diesem Gebiet zugänglich.

E. Hausenblas (Salzburg)

W. Niemeier: Ausgleichsrechnung. Eine Einführung für Studierende und Praktiker des Vermessungs- und Geoinformationswesens (de Gruyter Lehrbuch). Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002, XIII+407 S. ISBN 3-11-014080-2 P/b DM 69,–.

Diese moderne Einführung vermittelt Studierenden die grundlegenden Denk- und Betrachtungsebenen und erlaubt gleichzeitig Praktikern einen erweiterten Zugang zu diesem Fachgebiet. In den Text aufgenommene, für das Vermessungswesen typische Beispiele ermöglichen ein gutes Nachvollziehen der numerischen Methoden und Überlegungen. Zu den neueren, in diesem Buch behandelten Ansätzen gehören die Nutzung bzw. Weiterverarbeitung von GPS-Informationen, die verschiedenen Konzepte der Datumsfestlegung, die Denkweise der robusten Statistik, die Behandlung von Transformationen sowie die Lösungskonzepte für Deformationsuntersuchungen. Die ersten drei Kapitel – Beurteilung von Messungsgrößen (einschließlich einer Zusammenstellung von Grundlagen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik), Varianz-Fortpflanzung, Konfidenzbereiche und statistische Tests – stellen sehr anschaulich und mit praxisnahen Beispielen gut verständlich die Grundlagen für die folgenden Kapitel zusammen. Diese tragen die Überschriften: Grundlagen der Ausgleichungsrechnung, Bedingungen und

Restriktionen im Ausgleichungsmodell, Robuste Parameterschätzung, Datumsproblematik, Qualitätsbeurteilung, Spezielle Aspekte, Transformationen, Regression und Kollokation, Kongruenztests und Kalman-Filterung. Ein Anhang mit Tafeln von Verteilungen, Literaturverzeichnis und ein Index runden diesen (auch für Nicht-Vermessungsingenieure) sehr gut lesbaren Band ab.

I. Troch (Wien)

M. Reimer: Multivariate Polynomial Approximation. (International Series of Numerical Mathematics, Vol. 144.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2003, X+358 S. ISBN 3-7643-1638-1 H/b € 98,–.

Das vorliegende Buch gibt eine in sich geschlossene Einführung in den Themenkreis der multivariaten Approximation mit Polynomfunktionen. Nach einer konzisen Einleitung, in der besonderes Augenmerk auf rotationsinvariante Räume gelegt wird, sowie die später verwendeten Eigenschaften der klassischen Gegenbauer-Polynome hergeleitet werden, gibt der zweite Abschnitt eine Sammlung der wichtigesten Eigenschaften von Polynomen auf der Sphäre und auf der Kugel. Der dritte Abschnitt behandelt multivariate Approximation vom Standpunkt positiver linearer Operatoren. Dabei wird, soweit dies möglich ist, versucht, die Resultate konstruktiv zu machen und auch auf die Komplexität einzugehen. Dabei wird besonders auf die von I. Sloan und dem Buchautor entwickelte Methode der Hyperinterpolation eingegangen, die eine Approximation von bestmöglicher Größenordnung durch einen diskreten Projektionsoperator liefert. Wieder werden hier besonders die Sphäre und die Kugel besonders ausführlich behandelt. Ein vierter Abschnitt ist den Anwendungen der Radon-Transformation in der Tomographie gewidmet.

Das Buch ist gut lesbar und kann sowohl als Lektüre zum Selbststudium als auch als Grundlage für einschlägige Vorlesungen über ein klassisches und noch immer modernes und aktives Gebiet empfohlen werden.

P. Grabner (Graz)

Stochastik

D. W. Stroock: An Introduction to Markov Processes. (Graduate Texts in Mathematics 230). Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, XIV+171 S. ISBN 3-540-23499-3 H/b € 69,95.

Dieses Buch reiht sich in eine beträchtliche Anzahl von Monographien über Markovprozesse, die im letzten Jahrzehnt erschienen sind, wie zum Beispiel: J. R. Norris, *Markov Chains* (Cambridge University Press, 1997), L. Saloff-Coste, *Lectures on finite Markov chains* (in Lecture Notes in Math. 1665, Springer, 1997),

P. Brémaud, *Markov Chains* (Springer, 1999 – nach Ansicht des Rezensenten der beste detaillierte Einführungstext der letzten Jahrzehnte); E. Behrends, *Introduction to Markov Chains* (Vieweg, 2000); O. Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications* (Cambridge Univ. Press, 2002); O. Hernández-Lerma, J. B. Lasserre *Markov Chains and Invariant Probabilities* (Birkhäuser, 2003).

D. Stroock, einer der „Erben“ von N. Wiener am MIT, ist ein sehr prominenter, stark analytisch geprägter Stochastiker.

Das vorliegende Buch ist Resultat mehrerer Vorlesungen des Autors über stochastische Prozesse. Wie er im Vorwort in seinem bekannt prägnantem Stil schreibt, hatte keines der exisitierenden Bücher das geeignete Niveau für die Hörerer seiner Lehrveranstaltungen; zu schwer verdaulich sei für diese der aus seiner Sicht ideale Klassiker *A First Course on Stochastic Processes* von S. Karlin und H. Taylor (Academic Press, 1975) gewesen. Interessant ist auch die Bemerkung, dass (sinngemäß, im Umkehrschluss) jene Werke über Markovprozesse, die dem Autor nicht gefallen, auch nicht zitiert werden: in diesem Sinne findet unter den oben genannten offenbar nur der Text von Norris die Gnade des Autors.

Das Buch beginnt mit einem Kapitel über Irrfahrten auf $\mathbb{Z}$ und in geringerem Umfang den höherdimensionalen Zahlengittern $\mathbb{Z}^d$. Es wird eine Vielzahl von nützlichen Techniken und interessanten Resultaten präsentiert, wobei aber der rote Faden, also die Motivation für den gewählten Aufbau, für einen Neuling wohl nicht ganz leicht zu finden ist.

Kapitel 2 dreht sich um Konvergenz von Markovketten. Letztere werden hier zunächst allgemein definiert. Doeblins Zugang – eine Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes – wird vorgestellt und seine Anwendbarkeit auf Konvergenz und Ergodensatz ausgeleuchtet. Die allgemeine Konvergenztheorie für positiv rekurrente Markovketten folgt in Kapitel 3. Die Methoden greifen letzten Endes auf den Satz von Erdős-Feller-Pollard (in modernerer und stärker analytischer Darstellung) zurück. Auf einen anderen, moderneren, probabilistischen Zugang, der auf einem Koppelungsargument basiert, wird hier verzichtet, wohl deshalb, weil der Autor bestrebt ist, nur die elementarste Maßtheorie einzusetzen.

Kapitel 4 gibt eine lesbare und gut zugängliche Einführung in Markovprozesse auf abzählbaren Zustandsräumen mit kontinuierlicher Zeit. Ausgehend vom Poisson-Prozess werden die wesentlichen Definitionen, Eigenschaften und Sätze klar dargestellt.

In Kapitel 5 wird die Theorie der reversiblen Markovprozesse dargestellt, sowohl in diskreter als auch kontinuierlicher Zeit, jedoch stets auf diskreten Zustandsräumen. Hier betont der Autor die Wichtigkeit der zugeordneten Dirichlet-Form als das analytische Hauptwerkzeug. Unter anderem werden Methoden zur scharfen Abschätzung der Konvergenzrate gegen die invariante Verteilung vorgestellt (nach der populären Arbeit von Diaconis und Stroock, in *Annals of Applied Probability* 1:36–61, 1991). Das Kapitel schließt mit einem Abschnitt über *sim-*

ulated annealing, einer auf Markovprozessen basierenden Methode der kombinatorischen Optimierung, die in Vorlesungen über Markovprozesse recht große Popularität genießt.

Das abschließende Kapitel 6 ist eigentlich ein Appendix, in dem eine kurze Darstellung der maßtheoretischen Grundlagen der Stochastik gegeben wird.

Zusammenfassend ist dieses Werk weder eine umfassende Monographie, noch beinhaltet es eine Darstellung grundlegend neuer oder ungewöhnlicher Methoden. Es handelt sich um eine sehr solide analytisch geprägte Präsentation von ausgewählten, wesentlichen Kapiteln der Theorie, die von jedem Vortragenden zur Gestaltung der eigenen Vorlesungen herangezogen werden kann.

W. Woess (Graz)

Einführungen

J. Bewersdorff: Luck, Logic, and White Lies. The Mathematics of Games. Translated by D. Kramer. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2005, XVII+486 S. ISBN 1-56881-210-8 P/b \$ 49,–.

Dieses Buch stellt eine sehr gute populärwissenschaftliche Einführung in die Spieltheorie und andere Gebiete der Mathematik dar, die zur Analyse von diversen Gesellschafts- und Glücksspielen nötig sind. Drei große Kapitel prägen das Werk: Zufallsspiele, kombinatorische Spiele und strategische Spiele. Im Verlauf des Buches werden viele tatsächlich existierende Spiele betrachtet und auf allgemein verständliche, dafür nicht sonderlich mathematische Art analysiert.

Der Autor, Jörg Bewersdorff, ist Manager einer deutschen Firma, die sich auf Spieleentwicklung spezialisiert hat, ist also durchaus ein Mann der Praxis, was man auch am sehr leicht verständlichen und an Otto Normalverbraucher gerichteten Stil des Buches merkt.

Im ersten Teil über Zufallsspiele erfolgt eine sehr schematische Andeutung der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (was ist Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Normal- und Poissonverteilung, Monte Carlo-Methoden und Markovketten), jeweils bereits anhand von ausgewählten Würfel-, Karten- oder sonstigen Glücksspielen (Lotto, Würfelspiele, Roulette, Monopoly, Black Jack, etc.).

Der zweite Teil über kombinatorische Spiele betrachtet Spiele wie Schach, Mühle, Memory, Backgammon oder Go, bei denen keinerlei Zufall mitspielt, also auch keine Wahrscheinlichkeitstheorie nötig ist, dafür aufgrund der hohen Anzahl der möglichen Kombinationen eine hohe Komplexität das Spiel interessant macht. Es werden Gewinnstrategien diskutiert und eine Analyse der aktuellen Situation versucht. Außerdem wird auf die Frage eingegangen, inwieweit der Computer als

Spielpartner an einen Menschen heranreichen kann, sowie ob die Gewinnaussichten überhaupt immer bestimmt werden können.

Der dritte Teil über strategische Spiele behandelt schließlich Fragen wie die nach einer optimalen Strategie, ob es auch eine mathematische Grundlage für einen Bluff beim Poker gibt, etc. Die Spieltheorie wird hierbei von der Sattelpunktmethode (bei „Stein, Schere und Papier“) bis hin zur Minimax-Strategie vorgestellt.

Alles in allem ist dies ein Buch, welches man jedem an der Analyse von Spielen Interessierten empfehlen kann. Zum Verständnis sind nicht einmal Maturakenntnisse in Mathematik nötig, weshalb sich das Buch auch sehr gut als Bettlektüre eignet.

R. Kainhofer (Wien)

Elementar- und Schulmathematik

J. Hoffman, C. Johnson, A. Logg: Dreams of Calculus. Perspectives on Mathematics Education. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, xiii+158 S. ISBN 3-540-21976-5 P/b € 29,95.

Im Jahr 2003 initiierte der schwedische Bildungsminister ein Mathematikunterricht-Reformprojekt, dem die Delegierten den Namen “Body& Soul” gegeben haben. “Body” meint dabei die Computermathematik und “Soul” die (klassische) analytische Mathematik. Ausgangspunkt der Autoren waren: 1. Es gibt eine Krise des Mathematikunterrichts. 2. Derzeit findet ein Paradigmenwechsel im Mathematikunterricht statt, verursacht durch die Verfügbarkeit des Computers. 3. Reine Mathematik, Computermathematik und Didaktik sind weitgehend separiert; es gibt keine Interaktion zwischen diesen Gebieten.

Ziel des Projekts ist, einer breiteren Öffentlichkeit mit Computermathematik die Nützlichkeit der Mathematik zu demonstrieren.

Im Zuge dieses Projekts sind bereits mehrere Bücher und Unterrichtsunterlagen produziert worden (vgl. *http://www.bodysoulmath.org*). Das vorliegende Buch kann als eine Einführung in die Philosophie dieses Projekts bezeichnet werden.

Neben historischen Betrachtungen (Kap. 3) und wissenschaftstheoretischen Reflexionen (Kap. 7) werden vor allem Themenbereiche skizziert, die die Nützlichkeit der Mathematik unter Beweis stellen sollen (Autoproduktion und CAD, GPS, Computertomographie, Medical Drug Design, Wettervorhersage-Klimaänderung, Aktien und Derivate, Übertragung-Sicherung-Speicherung von Daten u.a.m.) Dies geschieht zu Beginn sehr kurz und ausschließlich verbal (Kap. 4). In späteren Kapiteln (insbesondere 9, 16, 17) werden einige dieser Themen wieder aufgegriffen, vertieft und von anderen Gesichtspunkten beleuchtet.

Das Buch ist eher unkonventionell verfasst: nicht linear, sondern vernetzt und redundant, abwechslungsreich. Es ist kurzweilig zu lesen und liefert allen an einer Reform des Mathematikunterrichts Interessierten Stoff für Diskussionen.

M. Kronfellner (Wien)

Internationale Mathematische Nachrichten

Fields Medals, Nevanlinna Prize, and Gauss Prize 2006

The Fields Medals, the Nevanlinna Prize and the Gauss Prize 2006 have been awarded on August 22 at the International Congress of Mathematicians ICM2006 in Madrid. The winners of the Fields Medal are *Andrei Okounkov, Grigori Perelman, Terence Tao* and *Wendelin Werner*. However, during the ceremony, it was announced that Perelman declined to accept the Fields Medal. The Nevanlinna Prize is awarded to *Jon Kleinberg*. The Gauss Prize goes to *Kiyoshi Itô*.

Andrei Okounkov "For his contributions bridging probability, representation theory and algebraic geometry."

The work of Andrei Okounkov has revealed profound new connections between different areas of mathematics and has brought new insights into problems arising in physics. Although his work is difficult to classify because it touches on such a variety of areas, two clear themes are the use of notions of randomness and of classical ideas from representation theory. This combination has proven powerful in attacking problems from algebraic geometry and statistical mechanics. Andrei Okounkov was born in 1969 in Moscow. He received his doctorate in mathematics from Moscow State University in 1995. He is a professor of mathematics at Princeton University. He has also held positions at the Russian Academy of Sciences, the Institute for Advanced Study in Princeton, the University of Chicago, and the University of California, Berkeley. His distinctions include a Sloan Research Fellowship (2000), a Packard Fellowship (2001), and the European Mathematical Society Prize (2004).

Grigori Perelman "For his contributions to geometry and his revolutionary insights into the analytical and geometric structure of the Ricci flow."

The name of Grigori Perelman is practically a household word among the scientifically interested public. His work from 2002–2003 brought groundbreaking insights into the study of evolution equations and their singularities. Most significantly, his results provide a way of resolving two outstanding problems in topology: the Poincare Conjecture and the Thurston Geometrization Conjecture.

As of the summer of 2006, the mathematical community is still in the process of checking his work to ensure that it is entirely correct and that the conjectures have been proved. After more than three years of intense scrutiny, top experts have encountered no serious problems in the work. Grigori Perelman was born in 1966 in what was then the Soviet Union. He received his doctorate from St. Petersburg State University. During the 1990s he spent time in the United States, including as a Miller Fellow at the University of California, Berkeley. He was for some years a researcher in the St. Petersburg Department of the Steklov Institute of Mathematics. In 1994, he was an invited speaker at the International Congress of Mathematicians in Zurich.

Terence Tao "For his contributions to partial differential equations, combinatorics, harmonic analysis and additive number theory."

Terence Tao is a supreme problem-solver whose spectacular work has had an impact across several mathematical areas. He combines sheer technical power, an other-worldly ingenuity for hitting upon new ideas, and a startlingly natural point of view that leaves other mathematicians wondering, "Why didn't anyone see that before?" His interests range over a wide swath of mathematics, including harmonic analysis, nonlinear partial differential equations, and combinatorics. Terence Tao was born in Adelaide, Australia, in 1975. He received his PhD in mathematics in 1996 from Princeton University. He is a professor of mathematics at the University of California, Los Angeles. Among his distinctions are a Sloan Foundation Fellowship, a Packard Foundation Fellowship, and a Clay Mathematics Institute Prize Fellowship. He was awarded the Salem Prize (2000), the American Mathematical Society (AMS) Bocher Prize (2002), and the AMS Conant Prize (2005, jointly with Allen Knutson). At 31 years of age, Tao has written over 80 research papers, with over 30 collaborators.

Wendelin Werner "For his contributions to the development of stochastic Loewner evolution, the geometry of two-dimensional Brownian motion, and conformal field theory."

The work of Wendelin Werner and his collaborators represents one of the most exciting and fruitful interactions between mathematics and physics in recent times. Werner's research has developed a new conceptual framework for understanding critical phenomena arising in physical systems and has brought new geometric insights that were missing before. The theoretical ideas arising in this work, which combines probability theory and ideas from classical complex analysis, have had an important impact in both mathematics and physics and have potential connections to a wide variety of applications. Born in 1968 in Germany, Wendelin Werner is of French nationality. He received his PhD at the University of Paris VI in 1993. He has been professor of mathematics at the University of Paris-Sud in Orsay since 1997. From 2001 to 2006, he was also a member of the Institut Universitaire de France, and since 2005 he has been seconded part-time to the Ecole Normale Supèrieure in Paris. Among his distinctions are the Rollo Davidson Prize (1998), the European Mathematical Society Prize (2000), the Fermat Prize (2001), the Jacques Herbrand Prize (2003), the Loève Prize (2005) and the Pólya Prize (2006).

Jon Kleinberg Jon Kleinberg's work has brought theoretical insights to bear on important practical questions that have become central to understanding and managing our increasingly networked world. He has worked in a wide range of areas, from network analysis and routing, to data mining, to comparative genomics and protein structure analysis. In addition to making fundamental contributions to research, Kleinberg has thought deeply about the impact of technology, in social, economic, and political spheres. Jon Kleinberg was born in 1971 in Boston, Massachusetts, USA. He received his Ph.D. in 1996 from the Massachusetts Institute of Technology. He is a professor of computer science at Cornell University. Among his distinctions are a Sloan Foundation Fellowship (1997), a Packard Foundation Fellowship (1999), and the Initiatives in Research Award of the U.S. National Academy of Sciences (2001). In 2005, Kleinberg received a MacArthur "genius" Fellowship from the John Dånd Catherine T. MacArthur Foundation.

The Nevanlinna Prize has been awarded every four years since 1982 in recognition of the most notable advances made in mathematics in the Information Society (e.g. computational science, programming languages, algorithm analysis, etc.).

Kiyoshi Itô The first laureate of the newly created Gauss prize for applications of mathematics is the Japanese mathematician Kiyoshi Itô. The Gauss Prize was created to improve the public awareness to the fact that mathematics has a profound impact to virtually all sciences and, more or less indirectly, to technology, business and everyday life. The prize is awarded jointly by the Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) and the International Mathematical Union (IMU), and administered by the DMV. It consists of a medal and a monetary award (currently valued at EUR 10,000). The source of the prize is the surplus from the International Congress of Mathematicians (ICM'98) held in Berlin. The prizewinner is the Japanese mathematician Kiyoshi Itô, aged 90, and the subject of his prize-honored work is doubtlessly connected to everyday life: it is chance, those tiny, unpredictable effects that decide which way a die falls or a roulette ball rolls. Of course, it is impossible to predict the unpredictable; nevertheless, you can do statistics to determine, e.g., the probability of getting three sixes in a row by tossing a die three times, the expected time until your complete ruin if you keep gambling in a casino, or, more seriously, the likelihood that a success in a new form of medical treatment is due to a new drug and not just to chance. The kind of chance Itô worked on, however, is a particularly wild and pure one. Unlike in tossing a die where the unpredictability is confined to well-separated, “discrete” events, this kind of chance can strike at any time. The prototypic example is the so-called Brownian motion. Small pollen grains or dust particles exhibit an erratic motion that can be viewed under the microscope due to collisions with water molecules that are themselves invisible. The mathematical model of this kind of motion is called a stochastic process. The random forces that keep the particle moving are blind and without memory; this means, they don’t care for the actual position of the particle they are pushing around, and they don’t even remember when they hit the last time. This is completely reasonable if you think of water molecules - how could they remember? -, but at the same time it renders a Brownian path a very difficult mathematical object.

In technical terms, it is nowhere differentiable and its length is infinite. Even those properties don’t prevent you from doing basic statistics. So you can deduce that the expected distance of a Brownian particle from its initial position grows proportional to the square root of the time. But if random and classical (deterministic) forces act together or if you want to control the particle’s path, e.g. to counteract its random movement, classical mathematical tools are bound to fail. This was remedied by Kiyoshi Itô who, beginning in the 1940s, developed a completely new mathematical formalism named stochastic analysis. It allowed mathematicians to formulate that mixture of random and deterministic forces in a so-called stochastic differential equation and even to solve those equations, in a sense. Itô’s theory is sufficiently abstract to apply to fields that are completely different from the motion of dust in water. Stock prices on the financial market are subject to random forces not unlike those that act in a Brownian motion. Bankers who try to counteract the effects of those fluctuations find themselves forced to trade “in continuous time”, at least in theory. Out of Itô’s ideas grew a strategy for continuous trading and, eventually, a formula to calculate the price of an option. Today the Black-Scholes formula underlies almost all financial transactions that involve options or futures; moreover, it won two of its inventors the 1997 Nobel prize in economics. Beyond particle positions and share prices, Itô’s theory applies also to the size of a population of living organisms, to the frequency of a certain allele within the gene pool of a population, or even more complex biological quantities. Due to Itô’s work, biologists can assess the probability with which a gene will dominate the whole population or a species will survive. It took mathematicians themselves quite a while to appreciate the importance of Itô’s results. This is partially due to Japan’s isolation during World War II. Only from 1954 on, Itô lectured on his achievements at the Institute of Advanced Studies in Princeton. Today, there is no doubt that stochastic analysis is a rich, important and fruitful branch of mathematics with a formidable impact to “technology, business, or simply people’s everyday lives”.

(IMU Press Release)

Call for Nominations of Candidates for Ten EMS Prizes

Principal Guidelines: Any European mathematician who has not reached his/her 35th birthday on 30 June 2008, and who has not previously received the prize, is eligible for an EMS Prize at 5ecm. A total of 10 prizes will be awarded. The maximum age may be increased by up to three years in the case of an individual with a 'broken carreer pattern.' Mathematicians are defined to be European if they are of European nationality or their normal place of work is within Europe. Europe is defined to be the union of any country or part of a country which is geographically within Europe or that has a corporate member of the EMS based in that country. Prizes are to be awarded for work published before 31 December 2007.

Nominations of the Award: The Prize Committee is responsible for solicitation and evaluation of nominations. Nominations can be made by anyone, including members of the Prize Committee and candidates themselves. It is the responsibility of the nominator to provide all relevant information to the Prize Committee, including a resume and documentation. The nomination for each award must be accompanied by a written justification and a citation of about 100 words that can be read at the award ceremony. The prizes cannot be shared.

Description of the Award: The award comprises a certificate including the citation and a cash prize of 5000 euro.

Award Presentation: The prizes will be presented at the Fifth European Congress of Mathematics by the President of the European Mathematical Society. The recipients will be invited to present their work at the congress. (see *http://www.5ecm.nl*) Prize Fund The money for the Prize Fund is offered by the Foundation Compositio Mathematica.

Deadline for Submission: Nominations for the prize must reach the chairman of the Prize Committee at the following address, not later than 1 November 2007: 5ECM Prize Committee, Prof. R. Tijdeman, Mathematical Institute, Leiden University, Postbus 9512, 2300 RA Leiden, The Netherlands.

e-mail *tijdeman@math.leidenuniv.nl*
fax: +31715277101, phone: +31715277138

(Herman te Riele, Organizing Committee 5ECM)

VIII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

Das VIII. Österreichische Symposion zur Geschichte der Mathematik fand vom 21. bis 28. Mai 2006 in Miesenbach statt. Das Thema lautete diesmal: Von der Tontafel zum Internet – der Einfluss des Mediums auf die Entwicklung der Mathematik.

Von links nach rechts: Waltraud Voss, Menso Folkerts, Stefan Deschauer, Ivor GrattanḠuinness, Ulrich Reich, Peter Ullrich, Martina Bečvářová, Magdalena Hykšová, Maria Gruber-Haunlieb, Gerlinde Faustmann, Karl-Heinz Schlote, Christa Binder, Gert Schubring, Nada Razpet, Renate Tobies, Herwig Söckl, Rita Meyer-Spasche, Wolfgang Breidert, Detlef Gronau, Harald Gropp, Fritz Katscher, Franz Pichler, Peter Schmitt, Joszef Kolumban, Michael von Renteln, Marko Razpet. (Foto: Peter Schmitt)

Das Symposion wurde von der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte veranstaltet und vom Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur, vom Amt der Niederösterreichischen Landesregierung (Gruppe Kultur, Wissenschaft und Unterricht), vom Institut für Analysis und Scientific Computing der Technischen Universität, vom Springer-Verlag Heidelberg und von anonymen Spendern großzügig unterstützt. Dafür sei nochmals herzlich gedankt.

Es wurden die folgenden Vorträge gehalten:

Ulrich Reich (Karlsruhe): Handschrift und gedrucktes Buch – was ist Henne, was ist Ei?

Harald Gropp (Heidelberg): Morning star and evening star in East and West.

Sergio Nobre (Rio Claro, Brasilien): Die Institionalisierung der Forschung auf dem Gebiet der Geschichte der Mathematik in Brasilien.

Marko Razpet (Laibach): Zu den Lah-Zahlen mit Hilfe der umbralen Rechnung.

Friedrich Katscher (Wien): Das Rechnen mit Jetons in Frankreich.

Gerhard Lindbichler (Wien): Staffel- und Sprossenradmaschinen.

Stefan Deschauer (Dresden): Anspruchsvolle mathematische Probleme in einem byzantinischen Manuskript von 1436.

Jasna Fempl-Madjarevic (Belgrad): Equations through history – Her Majesty the *Equation*.

Ivor Grattan-Guinness (London): Einige Bemerkungen zur Geschichte der Druckerein, Verlage und Buchhandlungen.

Nada Razpet (Laibach): Influence of computers on teaching geometry.

Gert Schubring (Bielefeld): Stabilität und Wandel: Vergleich von Entwicklungsmustern für eine Geschichte mathematischer Lehrbücher seit der Antike.

Miloš Čanak (Belgrad): Johann Sebastian Bach und die Mathematik.

Franz Pichler (Linz): Walshfunktionen und Anwendungen – ein historischer Überblick.

Karl-Heinz Schlote (Altenburg): Hopfs elementare Bemerkung zur Lösung elliptischer Differentialgleichungen.

Miloš Čanak (Belgrad): Über die historische Entwicklung und die harmonikale Bedeutung der Vekuaschen Differentialgleichung.

Phil J. Davis (Providence): The Media and Mathematics look at each other.

Ivor Grattan-Guinness (London): The reception of G"odel's 1931 incompletability theorems by mathematicians.

Peter Ullrich (Koblenz): Die Herausgabe der Weierstraßschen *Formeln und Lehrsäze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen* durch Hermann Amandus Schwarz.

Martina Bečvářová (Prag): Emil Weyr and some of his activities.

József Kolumbán (Cluj): The development of the Cluj (Kolozsvár–Klausenburg) School of Mathematics between 1872 and 1919.

Klaus Barner (Kassel): Bemerkungen zu Fermats Geburtsdatum.

Rita Meyer-Spasche (Garching): Einige Anmerkungen zum Einfluss von Computern auf Mathematik und Physik.

Renate Tobies (Berlin-Linz): Grafische mathematische Methoden für das Lösen praktischer Probleme (Iris Runge als Mittlerin in der angewandten Forschung und Industrie).

Magdalena Hykšová (Prag): From Parlor Games to Computer Networks.

Waltraud Voss (Dresden): Aus Gustav Zeuners *Geheimakten*: Briefe im Vorfeld von Berufungen.

Peter Schmitt (Wien): PC, TEX, www, arXiv, Google, ... – ein informeller, fragmentarischer und subjektiver Rückblick auf das letzte Dritteljahrhundert.

(Christa Binder)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Aus der Redaktion

Ulrich Dieter, em. o. Univ.Prof. der TU Graz, scheidet dieses Jahr nach langjähriger verdienstvoller Tätigkeit für die IMN und die ÖMG aus der Redaktion der IMN aus. Ulrich Dieter war fast dreißig Jahre Mitglied der Redaktion der IMN, von 1980–1981 und von 1984–1985 nahm er auch die Aufgabe der Herausgebers wahr. Zu seinen Hauptaufgaben in der Redaktion der IMN gehörte die sehr arbeitsaufwändige Erstellung der Liste neuer Bücher. Im Jahr 1989 gab er auch das *Österreichische Mathematiker-Verzeichnis* heraus.

Die Redaktion der IMN bedankt sich ganz herzlich für seine unermüdliche und wertvolle Tätigkeit und wünscht Ulrich Dieter alles Gute für die Zukunft.

Michael Drmota (Herausgeber der IMN)

47. Internationale Mathematik-Olympiade in Ljubljana – Juli 2006

Das österreichische Team schnitt dieses Jahr bei der Internationalen Mathematikolympiade (IMO) in Ljubljana (Slowenien) hervorragend ab. Alle sechs österreichischen Teilnehmer erhielten eine Auszeichnung. Yimin Ge (Wien), Peter Gila (Wien) und Michael Mosshammer (Salzburg) erhielten eine Bronze-Medaille, Jakob Preininger (Wels), Sara Kropf (Graz) und Fabian Mayrhuber (Wien) eine Honorable Mention. Die Aufgaben können im Internet (*http://imo2006.dmfa.si*) abgerufen werden.

Beim 29. Österreichisch-Polnischen Mathematik-Wettbewerb wurde der Mannschaftsbewerb knapp von der polnischen Mannschaft gewonnen (25:22) Beim Einzelbewerb wurde Stephan Eisenhaber (Wien) hervorragender Vierter; auch Waltraud Lederle (Feldkirch), Armin Schöch (Salzburg) und Robert Triebl (Graz) erbrachten gute Leistungen!

Heinrich J. Gstöttner (Bundeskoordinator der Österreichischen Mathematikolympiade)

Das österreichische IMO-Team mit Walter Janous (Mitte).

Vorträge im Rahmen der ÖMG in Wien

Minikolloquium über Konvexe und Stochastische Geometrie, 7. 4. 2006, TU Wien

Wolfgang Weil (Karlsruhe): Kontaktverteilungen und Boolesche Modelle.

Evgueni Spodarev (Ulm): Berechungn er Minkowski-Funktionale von deterministischen und zufälligen Mengen.

Werner Nagel (Jena): Zufällige Riss-Mosaike.

Károly Böröczky Jr. (Budabest): Stability results for Rankins' s inequality.

Brief an die Redaktion:
Bemerkungen zum Artikel von R. Iemhoff und M. Baaz

Der Artikel von Matthias Baaz und Rosalie Iemhoff über Konstruktivismus und Intuitionismus hat sehr konzise und verständlich die Positionen der konstruktiven und intuitionistischen Mathematik dargelegt. Die folgenden drei Bemerkungen mögen daher nicht als Kritik, sondern als Ergänzungen gelesen werden und sollen insbesondere auf weitere Literatur verweisen:

1. Im Zusammenhang mit dem Satz von Cantor und dem Überabzählbaren ist die Idee genannt worden, dass in der intuitionistischen Mathematik die Zeit als zusätzlicher Parameter zu mathematischen Objekten hinzugenommen wird. Dieser Vorschlag stammt ursprünglich von Brouwer und hat die nicht unberechtigte Kritik hervorgerufen, dass damit Mathematik ihren zeitlosen Charakter verlöre. Einige der berühmten Beispiele Brouwers, die auf der zu seiner Zeit noch nicht genau bekannten Dezimalentwicklung von π fußen, sind nun, da eine Reihe weiterer Nachkommastellen von π von Jonathan Borwein et al. ans Tageslicht gefördert wurden, obsolet geworden. Trotzdem betont Borwein in [1], dass damit keineswegs an der grundsätzlich kritischen Haltung des Intuitionismus gerüttelt worden ist.

Von Paul Lorenzen (vgl. [3]) stammt der brillante Vorschlag, die mathematischen Beweise in Gestalt eines Dialogs zwischen einem Proponenten, der die überzeugenden Argumente zu liefern hat, und einem Opponenten, der grundsätzliche Zweifel anmeldet, zu führen sei. Wenn man diese Idee weiterverfolgt, gelangt man wie von selbst in die Gedankenwelt der intuitionistischen Mathematik (vgl. [8]) und es erübrigt sich, die Zeit als konstitutiven Parameter einzuführen.

2. Das Bar Theorem ist in der Tat einer der wesentlichen Ecksteine der intuitionistischen Analysis, denn mit seiner Hilfe gelingt der Beweis, dass eine auf einem kompakten Intervall definierte reelle Funktion notwendig gleichmäßig stetig ist. Wenn zum Beispiel Douglas Bridges und Fred Richman vorschlagen, man möge das Bar Theorem eher als ein Axiom als einen Satz betrachten, so ist dies im intuitionistischen Gedankengebäude nur dann tragfähig, wenn „Axiome“ nicht als willkürliche Setzungen aufgefasst werden, sondern als Feststellungen von Sachverhalten, die – wie Hermann Weyl in [9] glänzend formulierte – „auf einer aus völlig durchleuchteter Evidenz geborenen, klar auf sich selbst ruhenden Überzeugung“ gründen. Insofern bleibt die Aufgabe bestehen, das Bar Theorem zu beweisen. Arend Heyting hat zum Beispiel in [2] einen für Nichtspezialisten nachvollziehbaren Beweis präsentiert und eine Version davon findet sich auch in [7].

3. Die intuitionistische Mathematik hat sich, wie Baaz und Iemhoff andeuten, nicht durchgesetzt, weil man die intuitionistischen Erschwernisse im Umgang mit mathematischen Strukturen nicht in Kauf zu nehmen gewillt ist, und weil die Fehlerhaftigkeit der klassischen Mathematik vom intuitionistischen Standpunkt aus praktisch bisher ohne irgendwelche Folgen geblieben ist. Für Weyl war ein dritter

und für ihn maßgeblicher Grund, dass ihm der Intuitionismus zu wenig tragfähig schien, um dem Kalkül der Differential- und Integralrechnung, auf dem insbesondere die mathematische Physik gründet, ein Fundament bieten zu können (vgl. [10]). Dieser dritte Grund wurde 12 Jahre nach Weyls Tod durch die bahnbrechende Arbeit von Errett Bishop – wie zu Recht hervorgehoben wurde – hinfällig: Die für die Anwendungen relevanten Aspekte der klassischen Analysis sind intuitionistisch gut nachvollziehbar oder besitzen ausreichende Äquivalente. Somit bleiben eigentlich nur die beiden anderen genannten Gründe bestehen. Die erhöhten Erschwernisse sollten in Wahrheit natürlich nicht maßgeblich sein, wenn man wirklich von einer „Fehlerhaftigkeit der klassischen Mathematik“ überzeugt ist. Ob man diese Überzeugung teilt oder nicht, ist aber keine mathematische, sondern eine philosophische Frage. Wehrt man sie prinzipiell ab, liefert man sich einem Ideologieverdacht aus (vgl. [6] und die Diskussion in [5]). Dies wurde sehr eindringlich in einem von Gabriel Stolzenberg verfassten Aufsatz [4] argumentiert.

R. Taschner

Literatur

1. Borwein, J. M.: *Brouwer-Heyting-Sequences Converge*. The Mathematical Intelligencer **20/1**, 14–15 (1998).
2. Heyting, A.: *Intuitionism. An Introduction.* North-Holland, Amsterdam, 1956.
3. Lorenzen, P.: *Metamathematik.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 1962.
4. Stolzenberg, G.: Kann die Untersuchung der Grundlagen der Mathematik uns etwas über das Denken verraten? In: Watzlawick, P. (Hrsg.): *Die erfundene Wirklichkeit.* München, 1984.
5. Taschner, R. et al.: Mathematik, Logik, Wirklichkeit. *Ethik u. Sozialwiss.* **9**, 425–499 (1998).
6. Taschner, R.: Hermeneutik der Mathematik. Über das Verstehen von Zahlen und Funktionen. *Facta Philosophica* **3**, 31–58 (2001).
7. Taschner, R.: *The Continuum.* Vieweg, Wiesbaden, 2005.
8. Taschner, R.: Real numbers and functions exhibited in dialogues. In: Schuster, P., Berger, U., Osswald H.: *Reuniting the Antipodes – Constructive and Nonstandard Views of the Continuum.* Kluwer, Dordrecht, 2001.
9. Weyl, H.: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. *Mathematische Zeitschrift* **10**, 39–79 (1921).
10. Weyl, H.: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.* 7. Aufl., Oldenbourg, München, 2000.

Neue Mitglieder

Peter Mayr, Dr. — Institut für Algebra, Univ. Linz, Altenbergerstr. 69, A 4040 Linz. geb. 1974. seit August 2004 wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Univ. Linz, 2002–2003 Honorary Fellow an der University of Wisconsin (Madison), 1998–1999 und 2003–2004 Mitarbeit in FWF-Projekten geleitet von Prof. Pilz, 2004 Promotion zum Dr.techn. an der Univ. Linz. e-mail *peter.mayr@jku.at*.