IMN

Internationale
Mathematische
Nachrichten
Nr. 199

Leray in Edelbach
Konvexe und Diskrete Geometrie
Österreichische Mathematikolympiade

Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

August 2005

Internationale Mathematische Nachrichten
International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83) und P. Flor (1986–99).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. e-mail *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

Vorstand:

H. Engl (Univ. Linz): Vorsitzender
R. Tichy (TU Graz): Stellvertretender Vorsitzender
M. Drmota (TU Wien): Herausgeber der IMN
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Schriftführer
I. Fischer (Univ. Klagenfurt): Stellvertretende Schriftführerin
W. Schachermayer (TU Wien): Kassier
H. Pottmann (TU Wien): Stellvertretender Kassier
G. Teschl (Univ. Wien): Web-Beauftragter (kooptiert)

Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:

L. Reich (Graz)
A. Ostermann (Innsbruck)
H. Kautschitsch (Klagenfurt)
G. Larcher (Linz)
P. Hellekalek (Salzburg)
C. Schmeiser (Wien)
R. Geretschläger (Lehrersektion)
W. Schlöglmann (Didaktikkommission)

Beirat:

A. Binder (Linz)
H. Bürger (Univ. Wien)
C. Christian (Univ. Wien)
U. Dieter (TU Graz)
G. Gottlob (TU Wien)
P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
E. Hlawka (TU Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
R. Mlitz (TU Wien)
W. Müller (Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
N. Rozsenich (Wien)
F. Schweiger (Univ. Salzburg)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
H. Stachel (TU Wien)
H. Strasser (WU Wien)
G. Teschl (Univ. Wien)
H. Troger (TU Wien)
W. Wurm (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionsvorsitzende gehören statutengrmäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 199 (59. Jahrgang) **August 2005**

Inhalt

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 199 (2005), 1–16

Leray in Edelbach

Anna Maria Sigmund, Peter Michor und Karl Sigmund

Dieser Aufsatz ist ursprünglich in der Zeitschrift *The Mathematical Intelligencer* erschienen, und zwar in dessen 'Mathematical Tourist'-Kolumne. Dort steht: Bietet Ihre Heimatstadt Attraktionen für mathematischen Tourismus, etwa Statuen, Gedenktafeln, Grabmäler, das Café, in dem eine bekannte Vermutung das Licht der Welt erblickte, jenen Schreibtisch, auf dem die berühmten Initialen eingeritzt sind, Geburtsorte, Häuser, Erinnerungsstücke? Wenn ja, so wird der Leser aufgefordert, darüber einen Beitrag zu liefern.

Der Ort, über den wir schreiben, eignet sich allerdings wenig für mathematischen Tourismus. Im Grund ist er für alle Touristen gesperrt. Das Photographieren, Filmen, ja sogar Zeichnen ist strengstens untersagt, wie uns Verbotsschilder mitteilen, und wer sich darüber hinwegsetzt, wird bestraft. Sofern er überhaupt überlebt: denn die Verbotsschilder künden von LEBENSGEFAHR. Wir befinden uns in einem militärischen Sperrgebiet. Eine innere Stimme sagt uns dringend, dass wir es tunlichst vermeiden sollten, auf Minen zu steigen oder erschossen zu werden.

Aber das ist doch lächerlich. Wir befinden uns hier in Österreich und haben sechzig Jahre Frieden und Wohlstand hinter uns. Niemand will Ärger. Wir sollten uns bloß nicht erwischen lassen.

Willkommen in Edelbach oder was davon heute übrig geblieben ist. Der Ort lässt sich nicht leicht auf den Landkarten finden. Er hat vor vielen Jahren aufgehört zu existieren, während der dunkelsten Tage der österreichischen Geschichte. Hier lebt schon längst niemand mehr. Die Straße von Wien nach Prag führt ein paar Kilometer nördlich vorbei, aber man kann sie weder sehen noch hören. Gespenstische Stille lastet auf der Landschaft. Vom einstigen Dorf künden nur mehr ein paar Steinhaufen zwischen Büschen und Fichten und ein kleiner, verlassener Friedhof. Nördlich davon trennt uns ein hoher Metallzaun von einem riesigen Munitionslager. Das Lager ist sehr gut bewacht, und wir dürfen gewiss sein, dass bereits Feldstecher auf uns gerichtet sind.

Dieser Ort war einmal ein Kriegsgefangenenlager, hauptsächlich für französische Offiziere bestimmt. Ein Offizierslager also, kurz *Oflag* genannt – die Bürokraten des Dritten Reichs hatten ein Faible für Abkürzungen. Oflag XVII war der Geburtsort eines bedeutenden Teils der algebraischen Topologie. Spektralsequenzen und Garbentheorie wurden hier von einem Artillerieleutnant namens Jean Leray

ISSN 0020-7926.
Dieser Artikel ist erschienen als: A. M. Sigmund, P. Michor, K. Sigmund: Leray in Edelbach. *The Mathematical Intelligencer* **27**/2 (2005), 41–50.

Abbildung 1: Touristen sind in Edelbach nicht eben willkommen, aber was kann man von einem Munitionslager auch anderes erwarten?

ersonnen, der von Juli 1940 bis Mai 1945 in dem Lager interniert war ([Sch 1990], [Eke 1999], [Gaz 2000]).

In den Annalen der Wissenschaft finden sich mehrere Beispiele von hervorragenden mathematischen Entdeckungen, die Kriegsgefangene erzielt hatten. Der Österreicher Eduard Helly beispielsweise verfasste während des ersten Weltkriegs einen grundlegenden Beitrag zur Funktionalanalysis in einem sibirischen Lager bei Nikolsk-Ussurisk. Und hundert Jahre davor hatte der napoleonische Offizier Jean-Victor Poncelet während einer fünfjährigen Haft in Russland die projektive Geometrie entwickelt. Das klingt beinahe so, als ob das eng umgrenzte Leben eines Internierten durch seine mönchische Weltabkehr und eintönige Regelmäßigkeit ideale Bedingungen für konzentriertes geistiges Arbeiten böte. Und wirklich schrieb André Weil: „Nichts ist für die abstrakten Wissenschaften vorteilhafter als das Gefängnis." [Weil 1991]. Er schrieb das, während er selbst einige Monate im Gefängnis war und dort einige seiner bedeutendsten Theoreme entdeckte. Doch er hatte eine Zelle für sich allein, konnte von seiner Familie besucht werden, und kannte, wie er selbst schrieb, Gefängnishaft nur von ihrer harmlosesten Seite. Die physischen und psychischen Entbehrungen von jahrelanger Haft in einem überfüllten Kriegsgefangenenlager, bestimmt durch Krankheit, Hunger und bittere Kälte, endlose Langeweile und völlige Ungewissheit, können damit nicht verglichen werden: unter solchen Bedingungen muss intensive geistige Arbeit ein verzweifeltes Mittel gewesen sein, um nicht den Verstand zu verlieren.

Die Gefangenen von Edelbach gründeten eine *Université en Captivité*. Von den 5000 Lagerinsassen (von denen ein paar Hundert Polen waren und der Rest Franzosen) erwarben fast 500 ein Diplom. Alle akademischen Grade wurden nach dem Krieg in Frankreich anerkannt. Die Tatsache, dass Jean Leray der Rektor dieser

Abbildung 2: Leutnant Leray, KG (Kriegsgefangener), war Rektor der Gefangenenuniversität Edelbach, ehe er an die Sorbonne und ans Collège de France berufen wurde.

improvisierten Universität war, förderte zweifellos die Nostrifizierungen durch die französischen Behörden. Seine akademischen Verdienste waren eindrucksvoll. Er hatte sein Doktorat an der höchst elitären *École Normale Supérieure* in Paris erworben, und war bereits Professor an der Universität Nancy, bevor er einrücken musste. Gemeinsam mit dem polnischen Mathematiker Juliusz Schauder (der später ein Opfer des Holocaust werden sollte) hatte er eine topologische Invariante entwickelt, um die Existenz von Lösungen partieller Differentialgleichungen zu beweisen. Deshalb erhielt er 1940 von der *Académie des Sciences de Paris* den *Grand Prix* für Mathematik.

Doch Leray war nicht der einzige hervorragende Wissenschaftler im Oflag. Der Embryologe Etienne Wolff gehörte auch dazu, nach allen Berichten eine treibende Kraft hinter der Universität, doch aus rassischen Gründen gezwungen, sich diskret im Hintergrund zu halten. Etienne Wolff wurde später Professor am *Collège de France*, und Mitglied sowohl der *Académie des Sciences de Paris* als auch der *Académie Francaise*. Ein anderer großer Gelehrter war Francois Ellenberger, der es später zum Präsidenten der *Société Géologique de France* brachte. Die Geologen vom Oflag XVII hatten sich mit den Steinen zu begnügen, die sie im La-

Baraque 19

UNIVERSITÉ OFLAG XVII A

PROGRAMME DES COURS & CONFERENCES

Cours d'Allemand

Querelle des investit. *lt. Dhombres*	9 O
Prép. brevet agric. *lt. Lamine*	E 1
Espagnol 1e degré	E 2
Crédit bancaire *lt. Petit Dutaillis*	O
Baptême et 1re Comm. *cne. Joly*	9 O
Allemand licence	E 1
Droit civil 2e année *lt. Hénard*	E 2
Le Cervin (rép.) *cne Ploix*	O
Espagnol 2e degré *lt. Neguès*	E 1
Cours de probabilités *lt. Ville*	E 2
Finances publiques *lt. Lavert*	O
Histori. de la messe *cne Dusmallier*	9 O
Cercle d'astronomie *lt. Ellenberger*	E 1
Latin élém. *lt. Duval*	E 2

Sindycal. chrétien *cne Laurent*	9 O
Horticulture d'ornem. *lt. Chevreau*	E 1
Calcul différ. (licence) *lt. Leray*	E 2
Littérature du XXe s. (rép.) *lt. Klaerr*	O
Maison Déco. et aména. int *lt. Josselin*	E 1
Droit civil 1e année *cap. Rambaud*	E 2
Vie hors de l'organisme *lt. Wolff*	O
Chine 1 vue d'ensemble *lt. Didier*	9 O
Exploit. et entret. du bois *lt. Joly*	E 1
Calcul différ. (licence) *lt. Leray*	E 2
Enfance coupable *s/lt. Froidefond*	O
Educ. civique école prim. *lt. Berger*	E 2

Abbildung 3: Das Vorlesungsverzeichnis der Université en Captivité [Poll 1989]. Leray schrieb später: „Die Studenten hatten keine andere Ablenkung als ihre Studien. Sie hatten wenig zu essen und wenig, was sie warm halten konnte. Doch sie waren tapfer“ [Sch 1990].

ger fanden. Ihr Laboratorium war eine alte Küche, über die sie ein paar Stunden täglich verfügen durften. Nach einiger Zeit erhielten Freunde und Verwandte in Frankreich die Erlaubnis, Bücher nach Edelbach zu schicken. Im Lauf der Jahre sammelte sich so bei Leray eine kleine Bibliothek an, die ihm sein ehemaliger Lehrer Henri Villat zugesandt hatte [Sch 1990], [Ell 1948].

Von acht Uhr morgens bis acht Uhr abends fanden in Baracke 19 Vorlesungen statt: über Recht und Biologie, über Psychologie und Arabisch, über Musik und Moraltheologie, über Pferdezucht (gehalten von einem polnischen Offizierskameraden, *bien sûr !*), über Finanzen und Astronomie. Den Kurs über Wahrscheinlichkeitsrechnung hielt Leutnant Jean Ville, der knapp vor Kriegsausbruch mit einem elementaren Beweis des Minimaxtheorems von John von Neumann hervorgetreten war [Poll 1989].

Rektor Leray trug zumeist über Topologie und über Differential- und Integralrechnung vor. Es war ihm gelungen, den Deutschen zu verheimlichen, dass er ein hervorragender Experte auf den Gebieten der Hydrodynamik und der Mechanik war (ein *mécanicien*, wie er gern sagte). Statt dessen wandte er sich der algebraischen Topologie zu, einem Fach, von dem keine kriegerischen Anwendungen erwartet

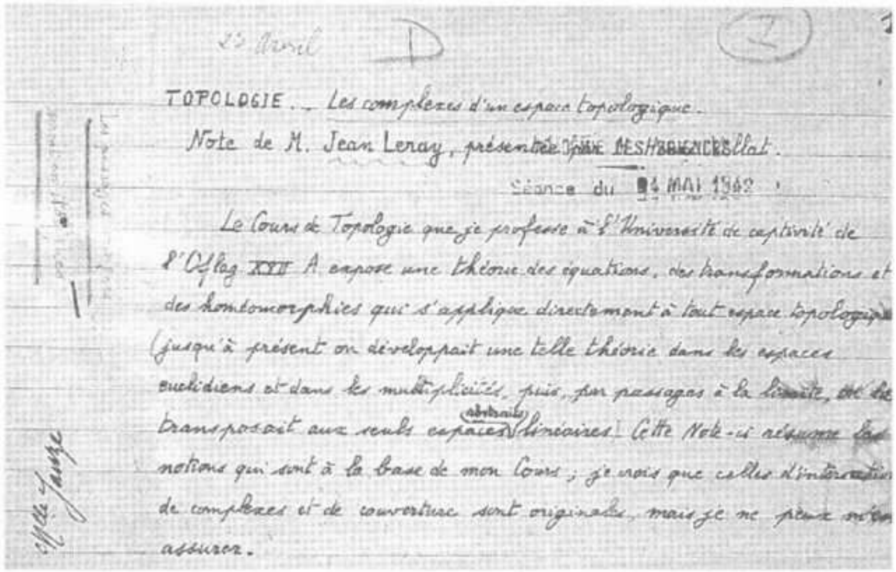
TOPOLOGIE. — Les complexes d'un espace topologique.
Note de M. Jean Leray, présentée
Séance du
Le Cours de Topologie que je professe à l'Université de captivité de l'Oflag XVII A expose une théorie des équations, des transformations et des homéomorphies qui s'applique directement à tout espace topologique (jusqu'à présent on développait une telle théorie dans les espaces euclidiens et dans les multiplicités, puis, par passages à la limite, on les transposait aux seuls espaces abstraits linéaires). Cette Note-ci résume les notions qui sont à la base de mon Cours ; je crois que celles d'intersection de complexes et de couverture sont originales, mais je ne peux m'en assurer.

Abbildung 4: Aufzeichnungen aus der Gefangenschaft. Leutnant Leray hält in den Comptes Rendus von 1942 fest, dass er sich in seiner gegenwärtigen Lage außerstande sieht, die Neuheit seiner Resultate zu garantieren [Gaz 2000].

werden konnten. Das führte zunächst zu einigen kurzen Notizen in den *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* und schließlich zu einem dreiteiligen Aufsatz *Algebraische Topologie, gelehrt in Gefangenschaft*, den er 1944 beim *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées einreichte*, vermittelt von Heinz Hopf aus der neutralen Schweiz, der das Werk mit Begeisterung zur Annahme empfahl. Es erschien nach Lerays Befreiung 1945 [Ler 1942], [Ler 1945].

Wie das Vorlesungsverzeichnis der Universität zeigt, konnten die Gefangenen Sonntag abends einen Kurs besuchen, der ihnen „praktische Anwendungen zum Bau eines billigen Hauses“ vermittelte, bevor sie in ihre freudlosen, kalten Quartiere zurückkehren mussten. Die Baracken bestanden aus zwei Räumen, die jeweils 100 Insassen beherbergten, einer kleinen Küche und einer Toilette mit acht Waschbecken. Es gab ein eigenes Gebäude für die Duschen: jeder Offizier durfte es zweimal im Monat benutzen. Eine halbe Baracke war als Kapelle gewidmet. Mehr als siebzig Gefangene waren Priester, und jeder konnte täglich die Messe lesen, falls er es wünschte. Die Gefangenen gründeten einen erstklassigen Chor und eine Theatergruppe und errichteten auch bald ihr eigenes Sportstadion, das sie *stade Pétain* nannten. Einigen Häftlingen gelang es sogar, hinter dem Rücken der Wärter einen etwa dreißigminütigen Dokumentarfilm zu drehen, betitelt *Sous le Manteau* („Unter dem Mantel“, da die Kamera stets versteckt bleiben musste). Drei Fassungen davon haben bis heute überlebt ([Poll 1989], [Kus 2004]).

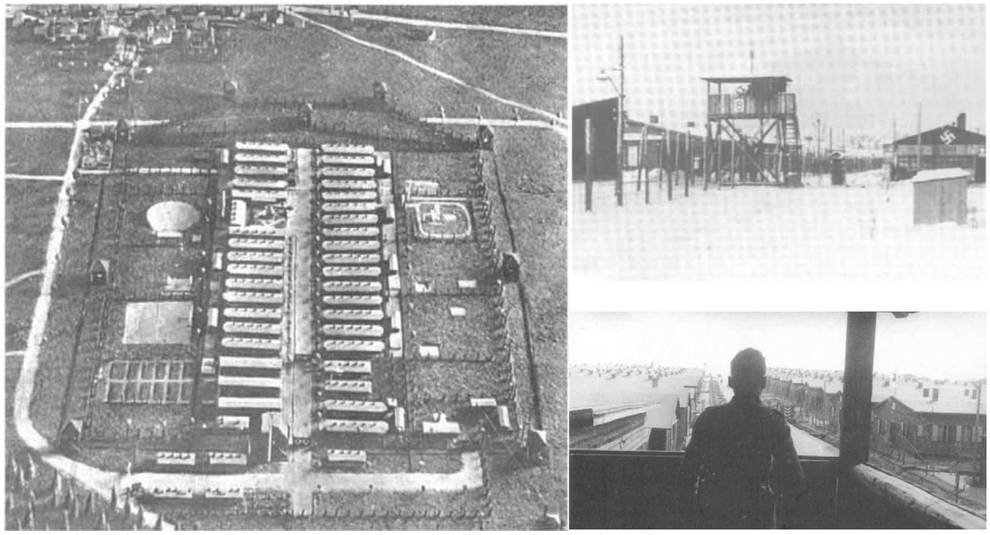

Abbildung 5: Ein Raum mit Blick. Oflag XVII beherbergte 5000 Gefangene auf einer Fläche von 440×530 Metern [Poll 1989].

So wie in vielen anderen Kriegsgefangenenlagern druckten die Insassen des Oflag XVII ihre eigene Zeitung, ein Wochenblatt, das sie *Le Canard … en KG* nannten. KG war das Wehrmachtskürzel für Kriegsgefangener, und die Franzosen sprachen es aus wie *Le canard encagé* (Die Ente im Käfig), ein Wortspiel, das sich auf das berühmte Journal *Le Canard Enchaîné* („Die Ente in Ketten“) bezog, ein in Frankreich auch heute noch ungemein populäres satirisches Blatt. Die Lagerversion durfte natürlich nichts Politisches bringen, und schon gar nicht satirisch sein. Sie enthielt nur harmlose Karikaturen, Theaterprogramme, Sportnachrichten, Kreuzworträtsel und Vorlesungsankündigungen. Kein Wort über den Krieg oder über die Konflikte, die damals die französische Gemeinschaft spalteten und im Nachhinein ganz einfach auf den Nenner *Collaboration* gegen *Résistance* zu bringen sind, aber in jenen Jahren doch weitaus verworrener schienen. Das Vichy-Régime versuchte ein Netzwerk von Vertrauensleuten, sogenannten *hommes de confiance*, aufzubauen, doch eine Untergrundgruppe der *résistance*, die sich selbst als Mafia bezeichnete, wurde schließlich im Lager zur dominierenden Kraft. Für viele der Gefangenen lautete das Dilemma: sollten sie sich als Zivilarbeiter in Deutschland melden, was eine gewisse Freiheit versprach, oder sollten sie hinter dem Stacheldraht bleiben, in der Hoffnung, dass der legale Status eines gefangenen Offiziers Schutz vor dem Schlimmsten bot. Für Leray, der 1933 in Berlin Zeuge von Hitlers Machtergreifung gewesen war, kam Kollaboration niemals in Frage.

Wenn Leray später von Edelbach sprach, lokalisierte er es „nächst Austerlitz, in Österreich“ [Sch 1990]. Tatsächlich liegt Austerlitz jenseits der Grenze, in

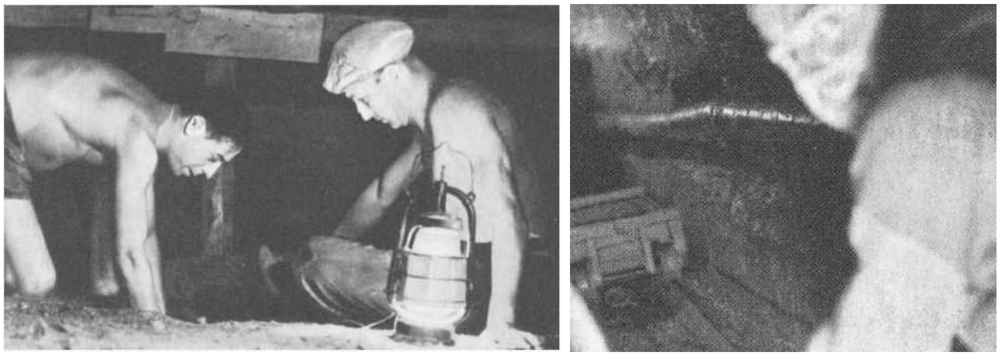

Abbildung 6: Ein Untergrundfilm im wahrsten Sinn des Wortes. Es handelt sich um Standphotos aus *Sous le drapeau*, der französischen Alternative zum Hollywoodfilm *The Great Escape*.

Tschechien, und nicht besonders nahe, sondern immerhin 83 Kilometer weit weg. Von Edelbach ist es näher nach Wien als nach Austerlitz, aber für die besiegten französischen Offiziere wirkte der Gedanke an den Ort des großen napoleonischen Sieges – *'à portée de canon d'Austerlitz'*, wie manche gern sagten – wie seelischer Balsam. Anfangs hatten alle gehofft, noch vor Jahresende 1940 wieder in Frankreich zu sein. Der Krieg schien vorbei. Als sich das als Illusion herausstellte, litten viele an Heimweh und Depressionen. Leray und seine akademischen Kollegen trafen sich allabendlich am höchsten, südöstlichen Eck des Lagers, um den Sonnenuntergang über *la petite France* zu beobachten, sofern das Wetter es zuließ.

Selbstverständlich begnügten sich die Franzosen nicht damit, ihr Schicksal zu beklagen. Manche versuchten auch etwas dagegen zu tun. Die Gefangenenwärter wurden zu wahren Experten im Auffinden versteckter Tunneleingänge unter den Baracken. So kam es, dass sie einen Tunneleingang übersahen, der im Freien direkt vor ihren Augen lag. Durch diesen 90 Meter langen Tunnel entkamen in den Nächten des 17. und 18. September 1943 nicht weniger als 132 Gefangene. Es war der größte Ausbruch aus einem Kriegsgefangenenlager im Zweiten Weltkrieg, doch seine Geschichte ist weitgehend unbekannt geblieben [Kus 2004].

Die Gefangenen hatten ein Freilufttheater errichtet, das sie *Théatre de la Verdure* nannten. Sie durften es mit Zweigen und allerhand Grünzeug verzieren, wodurch es von den Wachtürmen aus nicht mehr eingesehen werden konnte. Da Delegierte des Internationalen Roten Kreuzes bemängelt hatten, dass es im Lager keinen Schutz vor alliierten Luftangriffen gab, erhielten die Kriegsgefangenen den Befehl, ein paar Splittergräben anzulegen. Zu diesem Zweck wurden ihnen Schaufeln und Schubkarren zur Verfügung gestellt. Unter einem provisorischen Brettersteg machten sie dann mit dem Graben Ernst. Der Tunnel wuchs rasch, um fast einen Meter pro Tag, obwohl es immer wieder zu Wassereinbrüchen kam. Nach einiger

Zeit wurde die Belüftung zum Problem. Über ein aus Konservenbüchsen gebasteltes Rohr pumpte man Frischluft in den Schacht, der einen halben Meter breit und weniger als einen Meter hoch war. Zur selben Zeit erzeugte eine Schneiderwerkstatt die nötige Zivilkleidung, und die Zeitungsdruckerei bereitete Landkarten und gefälschte Ausweise vor. Konservennahrung wurde in Verstecken gehortet.

Die erste Gruppe entkam in einer Nacht von Samstag auf Sonntag. Ihr Ausbruch blieb unbemerkt, da einige der Wächter am Wochenende frei hatten. Die zweite Gruppe machte sich in der folgenden Nacht davon. Die meisten der Ausbrecher wollten sich draußen als französische Zivilarbeiter ausgeben, von denen es damals in Deutschland viele gab. Die ersten wurden festgenommen und ins Lager zurückgebracht, noch bevor die Militärposten den Ausbruch entdeckt hatten. Letztlich gelang es nur zwei Flüchtlingen, Frankreich zu erreichen.

Bald danach erhielt das Oflag Besuch von einer Gruppe etwas betretener deutscher Offiziere, zu denen auch ein paar Generäle gehörten. Sie wurden klammheimlich von den französischen Gefangenen gefilmt. Die hochrangige Untersuchungskommission beschloss, den Ausbruch herunterzuspielen – er zeigte die Wehrmacht in keinem günstigen Licht. Die Gefangenen wurden nachdrücklich ermahnt, es nicht noch einmal zu versuchen. Überall wurde angeschlagen, dass fortan „Ausbrechen kein Sport mehr“ ist, und dass außerhalb des Lagers Todeszonen auf die Flüchtlinge warteten. Ein halbes Jahr danach brachen 76 britische Flieger aus dem *Stalag Luft III* in Sagan aus. Diesmal konnte die Wehrmacht es nicht mehr vor Himmler und Hitler verheimlichen. Nur drei der Ausbrecher erreichten England; fünfzig wurden erschossen.

Währen der fünf Jahre, die Leray im Oflag XVII verbrachte, tobten Schlachten von einem Ende Europas zum anderen, ohne jemals Edelbach zu berühren. Trotzdem hörten die Gefangenen fortlaufend den Donner großer Geschütze und das wütende Aufheulen von Stukas im Tiefflug. Oflag XVII lag in einer evakuierten Zone, für Zivilisten gesperrt, dem Truppenübungsplatz Döllersheim. Es war das größte militärische Übungsgebiet Mitteleuropas, mit einem Durchmesser von zwanzig Kilometern größer als das Fürstentum Liechtenstein. Wenige Monate nach dem „Anschluss“ im Jahr 1938 hatte die deutsche Wehrmacht das Gebiet übernommen. Fünfundvierzig Dörfer mit über 7000 Einwohnern wurden in aller Eile evakuiert, und mechanisierte Einheiten rasselten über die Felder, ohne sich darum zu scheren, dass die Ernte noch nicht eingebracht war. Für die Wehrmacht galt es, ihre neue, noch ungetestete Doktrin des Blitzkriegs vorzuführen. Die Baracken, die Leray und seine Kameraden bald beziehen sollten, wurden ursprünglich für die deutschen Soldaten gezimmert, die den Übungsplatz einzurichten hatten. Sehr bald schon erwies sich der Truppenübungsplatz als ideales Sprungbrett für die Armeen, die sich zusammenballten, um im Frühling 1939 die Tschechoslowakei zu zergliedern und in den folgenden Sommermonaten den Angriff auf Polen vorzubereiten [Poll 1989].

Die Tatsache, dass sowohl der Vater als auch die Mutter von Adolf Hitler in jener

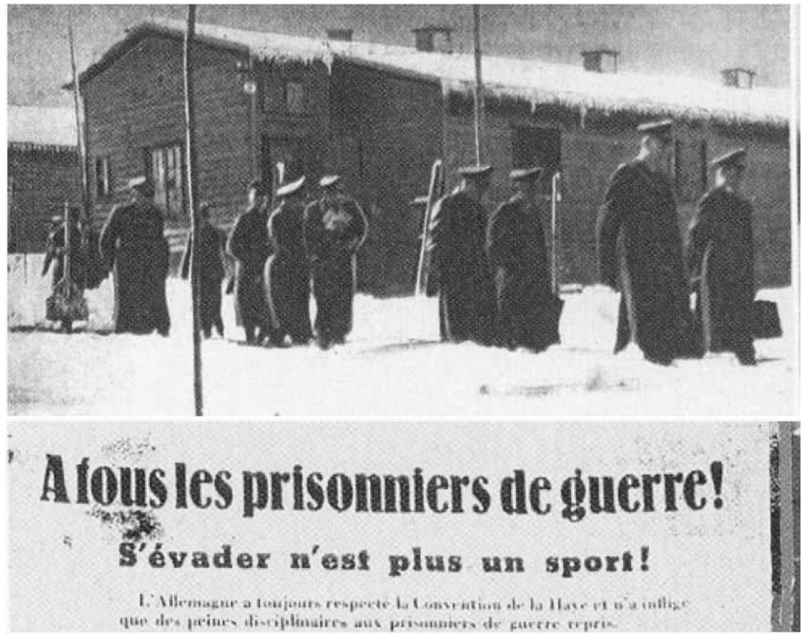

Abbildung 7: Eine Kommission von Wehrmachtgenerälen, die nicht ahnten, dass sie gefilmt wurden, beschloss, strengstes Stillschweigen über den Ausbruchsversuch zu bewahren. Aber Plakate warnten fortan: *s'évader n'est plus un sport !*

Gegend zur Welt kamen, die nunmehr binnen weniger Wochen hastig und rücksichtslos evakuiert wurde, gab Anlass zu mancherlei Spekulationen. Einer der engsten Mitarbeiter des „Führers", Hans Frank, schrieb später in seiner Todeszelle zu Nürnberg, dass Hitler beabsichtigt hatte, alle Spuren seiner Herkunft zu verlöschen [Frank 1953]. Frank behauptete, dass diese Spuren ein dunkles Geheimnis zu verraten drohten, die tiefste Schande des Tausendjährigen Reiches: nämlich dass Hitler einen jüdischen Großvater hatte. Dieses Gerücht, das in Nazideutschland weit verbreitet war und auch jetzt noch mancherorts Glauben findet, ist inzwischen von Dutzenden von Historikern widerlegt worden. Hitlers Vater war zwar unehelich geboren, als Alois Schicklgruber (er sollte später seinen Namen wechseln), doch der „Führer" war viel zu mächtig, um sich durch Gerüchte über seine Vorfahren bedroht zu fühlen. Tatsächlich wurden, als man die Dörfer um Döllersheim evakuierte, alle Kirchenarchive sorgsamst verwahrt. Sie sind bis heute erhalten geblieben. Die Wehrmacht hatte seit Jahren einen großen Übungsplatz gesucht, der mit ihrem Wachstum Schritt halten konnte und der Reichweite der neuen Waffen entsprach. Das Waldviertel mit seinem kargen Boden und seiner spärlichen, einfachen Bevölkerung bot sich dafür geradezu an: ein hügeliges Plateau, etwa 600 Meter über dem Meer, mit langen, bitterkalten Wintern und einem nicht eben gastlichen Ruf.

Hitler hatte keinerlei gefühlsmäßige Bindung an das Waldviertel. Das Goebbelssche Propagandaministerium hatte den Landstrich als den so genannten *Ahnengau* gefeiert, der Wiege der Vorfahren Hitlers, und die bescheidenen Einwohner des winzigen Dörfchens Grosspoppen hatten, einer Anregung ihres Dorfwirts folgend, Hitler schon 1932 die Ehrenbürgerschaft verliehen, zu einer Zeit, als er noch nicht Reichskanzler, sondern ein aufstrebender junger Parteiführer und Demagoge war. Zum Dank wurden sie von der niederösterreichischen Landesverwaltung scharf getadelt, die darauf hinwies, dass die Verleihung der Ehrenbürgerschaft ungesetzlich war, weil Hitler nicht mehr die österreichische Staatsbürgerschaft besaß. Später zog sich Grosspoppen den Unmut des ständestaatlichen Regimes zu, das sich in einem hoffnungslosen Kampf gegen die illegalen Nazis befand. Und zuletzt wurden die Grosspoppener, gleich nach den Jubelfeiern zum Anschluss, von ihrem Grund und Boden verjagt. Dabei hatten bei der Volksabstimmung alle 220 Einwohner für den Anschluss gestimmt. Grosspoppen lag einer geplanten Artillerieschießstätte im Weg. Als erstes Dorf wurde es *menschenrein* (um die Diktion der neuen Herrschaft zu verwenden) und dem Erdboden gleichgemacht.

Einige der Vertriebenen wurden mit hastig erstellten Ersatzgehöften entschädigt. Andere speiste man mit einem provisorischen Quartier ab, und dem Versprechen, dass alles Weitere nach dem Krieg erledigt würde. 1942 kamen die Abgesiedelten in den Genuss eines Preisnachlasses auf einen reich bebilderten Erinnerungsband, *Die alte Heimat*, und konnten darin die Photos ihrer leeren Dörfer und den Stammbaum von Hitlers Familie betrachten [Heim 1942]. In den Folgejahren hatten die Nazi-Machthaber dann andere Sorgen. 1945 wurde das Waldviertel von der Roten Armee besetzt, die bestens Gebrauch machen konnte von dem riesigen, mit Bunkern und Schießstätten üppig versehenen Übungsplatz. Auch als 1955 die alliierten Truppen Österreich verließen, wurde der Landstrich seinen früheren Bewohnern nicht rückerstattet. Sie waren im ganzen Land verstreut und viel zu unbedeutend, um ihre Forderungen nach einer Heimkehr durchsetzen zu können. Das kleine neue Bundesheer verstand es, den riesigen Übungsplatz für sich zu behalten. Jene verlassenen Häuser, die nach der Besetzung durch Nazis und Sowjets noch standen, darunter auch jene von Edelbach, wurden nun in kürzester Zeit zerstört. Das österreichische Bundesheer hatte gewaltige Munitionsmengen geerbt und setzte sie verschwenderisch ein, um durch den Beschuss der leeren Siedlungen unwiderrufliche Fakten zu schaffen. Heute steht nur noch die Kirche von Döllersheim. Ihr weithin sichtbarer Turm wird zum Justieren der Artilleriezielgeräte verwendet.

Doch während Lerays Gefangenenjahren standen ihm täglich die leeren Häuser eines scheinbar unversehrten, „menschenfreien“ Edelbach gegenüber. Ein Geisterdorf: kein Rauch stieg aus den Schornsteinen, und die Türen öffneten sich nie. Die Fensterscheiben waren durch Brettverschläge ersetzt worden. Ein Gedicht auf Seite eins des *Canard en KG* mit dem Titel: *Le Village Ignoré*, beschreibt den stummen Glockenturm des verlassenen Dörfchens und die nur vom Wind unter-

le Canard en ... KG

L'hebdomadaire de l'Oflag XVII A

Le village ignoré

DE GUILLARD ET RAMBAUD

LA FORMATION DU PATRIOTISME A L'ECOLE

A L'OMBRE DU MIRADOR

ŒUVRE ET MATIÈRE

POINTES DE BARBELES

Abbildung 8: Die Kirche im bereits verlassenem Edelbach. Keine Glocke, so steht's im Gedicht, läutet jemals in dem bescheidenen Kirchlein mit dem einfachen Fenster. Heute ist von dem Gebäude nur mehr ein Steinhaufen übrig.

brochene Stille [Poll 1989]. Und während das Bilderbuch der Nazis zugibt, dass manche der Aussiedler ihre Heimat nur blutenden Herzens verlassen hatten, stellt sich der gefangene französische Dichter vor, wie sein Herz „vor Freude springen wird an jenem Tag, den nur das Schicksal kennt", da er befreit von dannen ziehen kann und das verwunschene Dorf hinter den Fichten verschwindet.

Jener Tag, den nur das Schicksal kennt, war der 17. April 1945. Das Lager musste aufgegeben werden, weil die Rote Armee schon bedrohlich nahe war. Die Wehrmacht hatte kein Benzin und keine LKWs mehr. Die Zeiten des Blitzkriegs waren vorbei. Die Gefangenen mussten zu Fuß gehen und ihre Habseligkeiten auf dem Rücken mitschleppen. Einige der Wächter hatten Fahrräder, und ihre Offiziere saßen auf mageren Pferden. Der Treck bewegte sich auf Linz zu, 128 Kilometer weiter westlich. Die Gruppe kam im Schnitt keine zehn Kilometer pro Tag voran und schmolz zusehends dahin. Der Wald war dicht, die Marschkolonne lang. Der unternährte Francois Ellenberger trug einen Rucksack, der halb so schwer war wie er selbst: er hatte darauf bestanden, seine umfangreichen Aufzeichnungen mitzunehmen, weiters ein handgemachtes Teleskop sowie die Gesteinsproben, von denen einige aus dem Tunnel stammten. Er fand immer noch die Kraft, die Umrisse der Hügel in seinem Skizzenbuch festzuhalten, und die Innenräume ländlicher Kapellen. Die Gefangenen mussten sich ihr eigenes Essen beschaffen: manchen gelang es, etwas von den alten Frauen und den barfüßigen Kindern zu bekommen, im Austausch für Seife, die sie im Lager erzeugt hatten. Am 10. Mai war die Kolonne auf die Hälfte der ursprünglichen Größe geschrumpft. Das war der Tag, an dem die Wehrmacht kapitulierte.

Nach seiner Befreiung wurde Leray wieder zum Professor, zuerst an der Universität Paris (die ihn schon 1942 berufen hatte), dann 1947 am berühmten *Collège de France*. 1953 wurde er zum Mitglied der Académie des Sciences de Paris gewählt (die ihn schon 1944 zum korrespondierenden Mitglied gemacht hatte). Er wurde mit Preisen überschüttet: so mit dem Prix Ormoy 1950, dem Feltrinelli-Preis 1971, der Lomonossov-Goldmedaille 1988 (gemeinsam mit Sobolev) und 1979 dem Wolf-Preis, gemeinsam mit André Weil, der übrigens auch ein Kandidat für den Lehrstuhl Lerays am Collège de France gewesen war. In seinem Nachruf in *Nature* wurde Leray von Ivar Ekeland als „der erste moderne Analytiker" bezeichnet und mit André Weil verglichen, dem „ersten modernen Algebraiker" [Eke 1999].

Die Parallelen, die auch von Jean-Michel Kantor [Gaz 2000] betont wurden, reichen tatsächlich weit. Beide haben das gleiche Geburtsjahr (1906) und das gleiche Todesjahr (1998). Beide gehörten zur Minderheit der von der *École Normale Supérieure* auserwählten Studenten, und beide vollbrachten einige ihrer größten Leistungen im Gefängnis. Aber die Unterschiede sind noch erstaunlicher. Weil folgte seinem *Dharma*, wie er sagte (was er für einfachere Gemüter als Wehrdienstverweigerung beschrieb) und nahm haarsträubende Risiken auf sich, um zu vermeiden, in den Krieg gegen Hitler eingezogen zu werden. Leray war ein patriotischer Offizier und blieb stoisch bis zuletzt auf seinem Posten, unter dem Ansturm des raschen deutschen Vormarsches ebenso wie während der langen Jahre der Kriegsgefangenschaft. Weil studierte abstrakte algebraische Strukturen und vermied alles, was auch nur im Geringsten nach Anwendungen oder physikalischer Intuition schmeckte, Leray hingegen war in Physik und geometrischer Anschauung zu Hause. Umso bemerkenswerter ist es, dass Leray im Kriegsgefangenenlager zur algebraischen Topologie überwechselte und die Grundlagen schuf für manches, das später seinen Weg auf die Speisekarte von Bourbaki fand. (Er selbst hatte die Gruppe schon 1935 verlassen.)

Wechsel der Fachrichtungen schienen Leray keine Probleme zu bereiten. „Die wesentliche Eigenschaft meiner Publikationstätigkeit ist ihre Diversität", sagte er später ganz einfach, und fügte hinzu: „Es war mein Interesse für die analytische Mechanik, das mich nötigte, Neues in der Analysis und der algebraischen Topologie zu entwickeln." [Sch 1990]. Und in der Tat ging Lerays Interesse an der Topologie bereits auf die Vorkriegszeit zurück, wobei er sie freilich eher als Werkzeug denn als Selbstzweck betrachtete. Die Homotopie-Invariante, die wir heute als den Leray-Schauderschen Abbildungsgrad kennen, wurde erfunden, um die Existenz von Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen nachzuweisen. Solche Gleichungen nehmen, besonders wenn sie aus der mathematischen Physik stammen, eine zentrale Stellung in Lerays Schaffen ein. 1936 veröffentlichte er ein bahnbrechendes Werk über die Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von

Lösungen des Anfangswertproblems der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten. Insbesondere zeigte er darin, dass nichtstationäre Lösungen mit glatten Anfangsdaten nur für endliche Zeit glatt bleiben; über diese Zeit hinaus kann man sie nur in schwacher Weise fortsetzen (was heute als schwache Lösung bezeichnet wird). Leray nannte diese Lösungen *turbulent*: Turbulenz setzt demnach dort ein, wo die Glattheit endet, und sie erlaubt nichteindeutige Lösungen. Leray hatte gute Gründe, seine Arbeit vor den Deutschen geheim zu halten. Was hätte er wohl getan, wenn er die Möglichkeit gehabt hätte, für die Alliierten wissenschaftlich zu arbeiten?

Im Lager hingegen machte er sein Nebeninteresse zum Hauptinteresse und begann, algebraische Topologie um ihrer selbst willen zu erforschen – gewissermaßen im Stil von Weil. Er arbeitete in großer, wenngleich nicht totaler wissenschaftlicher Isolierung und vermied alle Kontakte mit deutschen Mathematikern. Abgesehen von einigen wenigen Sonderdrucken, die ihm Heinz Hopf von der neutralen Schweiz aus zusandte, kannte Leray nichts von den zeitgenössischen Arbeiten, insbesondere von Eilenberg und Steenrod, und musste gänzlich von vorne beginnen.

Wie Armand Borel später schrieb [BHL 2000], wurden Lerays ursprüngliche Konzepte, die auf einer selbst entwickelten Denkweise und Sprache beruhten, später stark verändert, und haben sich teilweise überlebt. Lerays Ziel war es, ein Analogon zu Differentialformen im rein topologischen Kontext zu schaffen und dabei nach Möglichkeit die multiplikative Struktur zu bewahren. Seine Kohomologie ähnelte jener von Eduard Čech und seine Resultate, so schreibt Borel, gingen nicht sehr weit über die der üblichen algebraischen Topologie hinaus. Aber Lerays Absicht war eine andere: er wollte nicht nur die Topologie eines Raumes studieren, sondern die „Topologie einer Darstellung“, also topologische Invarianten von stetigen Abbildungen. Als Ausgangspunkt verwendete er seine Mitschrift einer Vorlesung von Élie Cartan über Differentialformen, die 1935 veröffentlicht wurde [Cart 1935]. Er wollte Kohomologie (die er hartnäckig Homologie nannte) so ähnlich beschreiben wie die de Rhamsche Kohomologie, einschließlich ihrer multiplikativen Struktur.

Seit seiner Arbeit mit Schauder über Fixpunktsätze war er an den relativen Gesichtspunkt gewöhnt. Er betrachtete Abbildungen, und nicht nur Räume. Das war von bleibendem Wert: Die Leray-Serre-Spektralsequenz einer Faserung wird auch heute noch verwendet. Auch Grothendieck betonte später die Bedeutung des relativen Gesichtspunktes in der algebraischen Geometrie. [Jack 2004].

Schon bald nach seiner Befreiung entdeckte Leray, wie man die Kohomologie von Garben definieren konnte und führte die Spektralsequenz einer stetigen Abbildung ein, welche die Kohomologie des Definitionsbereiches mit jener des Bildraumes und der Faser verbindet. Seine Ideen, die er so allgemein wie möglich formulierte, waren aber noch nicht allgemein genug für drei junge Franzosen namens Henri Cartan, Jean-Luis Koszul und Jean-Pierre Serre. Sie erweiterten seine Konzepte und fanden spektakuläre Anwendungen in analytischer und algebraischer Geometrie. Ende der vierziger Jahre wurde die Entwicklung geradezu atemberaubend [Gaz 2000]. Die Arbeiten beider Fields-Medaillenträger des Jahres 1954, Serre und Kodaira, beruhten auf Lerays Garbentheorie und seinen Spektralsequenzen.

In den Händen von Henri Cartan und Oka wurde die Garbentheorie zu einem wichtigen Werkzeug in der Theorie mehrerer komplexer Veränderlicher. Weil benutzte Garben-Kohomologie und Spektralsequenzen auf reellen Mannigfaltigkeiten, um einen durchsichtigen Beweis des Satzes von de Rham zu geben, wobei er die Mayer-Vietoris-Sequenz einer offenen Überdeckung aus zwei Mengen zu einer aus abzählbar vielen verallgemeinerte. Godement schrieb das Standardwerk über Garben und deren Kohomologie in der algebraischen Topologie. Serre und Grothendieck adaptierten den Begriff der Garben für die algebraische Geometrie. Sogar die noch unvollendete Theorie der Motive ist eine Theorie von Garben. Das zentrale Problem, von Voevodsky jüngst angeknackst, besteht darin, genügend viele injektive Auflösungen zu finden, um Kohomologie definieren zu können.

Mit den Arbeiten von Kodaira und Spencer und mit der Habilitationsschrift von Hirzebruch [Hirz 1956] überschritt die Garben-Kohomologie die Grenze Frankreichs. Sato gebrauchte komplex analytische Garben-Kohomologie, um Hyperfunktionen als verallgemeinerte Randwerte holomorpher Funktionen zu definieren und um mikrolokale Analysis am Kotangentialbündel zu betreiben. Satos Mikrofunktionen sind allgemeiner als Hörmanders Wellenfrontmengen, die ihrerseits von Maslov inspiriert sind. Später schrieb Leray ein ganzes Buch [Ler 1981] über die Rolle der Planckschen Konstanten in der Mathematik, wiederum als Versuch, Arbeiten von Maslov zu verstehen.

Lerays Konzept der Spektralsequenzen stellte sich zunächst als komplizierte Menge von Relationen zwischen verschiedenen Kohomologien von Doppelkomplexen dar. Damit konnte Leray die Kohomologie von kompakten Liegruppen und Flaggenmannigfaltigkeiten berechnen. Serre verwendete in seiner Dissertation Spektralsequenzen, nunmehr bereits in ihrer modernen Form, um die Dimensionen zu bestimmen, in denen die höheren Homotopiegruppen der n-Sphäre unendlich sind, nämlich n und $2n-1$. Massey erleichterte den Gebrauch von Spektralsequenzen beträchtlich durch seinen Zugang über exakte Paare.

Leray selbst kehrte nach 1950 zu den partiellen Differentialgleichungen zurück. Er studierte Cauchy-Probleme, ihren Zusammenhang mit hochdimensionaler komplexer Analysis, Residuentheorie auf komplexen Mannigfaltigkeiten und Integraldarstellungen. Algebraische Topologie wurde wieder zu einem Werkzeug für Leray. Das Zwischenspiel, das als ein Art Tarnung im Kriegsgefangenenlager von Edelbach begonnen hatte, war für ihn vorüber. Aber Generationen von reinen Mathematikern sollten die Ideen weiterentwickeln, die im Oflag XVIIA entstanden waren.

Abbildung 9: Vierzig Jahre später. Die französischen Kriegsgefangenen hatten einen eigenen Friedhof mit einem Grabdenkmal in Edelbach. Dieser Stein dokumentiert den Besuch einiger ehemaliger Insassen des Oflag im Jahr 1985.

Danksagung

Wir bedanken uns bei Hofrat Dr. Andreas Kusternig für eine Fülle von Informationen über Oflag XVIIA. Jean-Michel Kantor, Reinhard Siegmund-Schultze und Hannelore Brandt unterstützten uns bei der Vorbereitung dieses Artikels.

Literaturhinweise

[Eke 1999] Ekeland I. (1999), Jean Leray (1906–1998), *Nature* **397**, 482.

[Gaz 2000] *Gazette mathématique*, Supplément au no. **84** (2000), 1–88 ist gänzlich Jean Leray gewidmet und beinhaltet Artikel von J. M. Kantor, Y. Choquet-Bruhat, J. Y. Chemin, H. Miller, J. Serrin, R. Siegmund-Schultze, A. Yger, C. Houzel und P. Malliavin.

[Sch 1990] Schmidt M. (1990), *Hommes de science*, Hermann, Paris.

[Weil 1991] Weil A. (1991), *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhäuser, Basel.

[Ell 1948] Ellenberger F. (1948), La géologie à l'OFLAG XVIIA, *Annales Scientifiques de Franche-Compté* **3** (1948), 21–24.

[Poll 1989] Polleross F. (1989), *1938 Davor–Danach: Beiträge zur Zeitgeschichte des Waldviertels*, Faber, Horn und Krems.

[Ler 1942] Leray J. (1942), *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **214**, 781–783, 839–841, 897–899, 938–940.

[Ler 1945] Leray J. (1945), Cours d' algèbre topologique enseigné en captivité. (a) Sur la forme des espaces topologiques sur les points fixes de representations, (b) sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique, (c) sur les equations et les transformations, *J. Math. Pures Appl.* **24**, 95–167, 169–199, 201–248.

[Kus 2003] Kusternig A. (2003), Große Flucht aus dem Oflag XVIIA, *Niederösterreich Perspektiven* **3**, 22–25.

[Frank 1953] Frank H. (1953), *Im Angesicht des Galgens*, Beck, München-Gräfelfing.

[Heim 1942] (1942), *Die alte Heimat*. Sudetendeutsche Verlagsdruckerei, Berlin.

[BHL 2000] Borel A., G. M. Henkin und P. D. Lax (2000), Jean Leray (1906–1998), *Notices Amer. Math. Soc.* **47**, 350–359.

[Cart 1935] Cartan E. (1935), *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés*, Mitschrift von J. Leray, Hermann, Paris.

[Jack 2004] Jackson A. (2004), As if summoned from the void: The life of Alexandre Grothendieck, *Notices of the AMS* **51**, 1038–1056, 1196–1212.

[Hirz 1956] Hirzebruch F. (1956), *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N.F.) 9, Springer, Berlin.

[Ler 1981] Leray J. (1981), *Lagrangian analysis and quantum mechanics*, MIT Press, Cambridge.

Adresse der Autoren: Peter Michor und Karl Sigmund, Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Nordbergstraße 15, 1090 Wien. e-mail *peter.michor@esi.ac.at, karl.sigmund@univie.ac.at.*

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 199 (2005), 17–29

Convex and Discrete Geometry: Ideas, Problems and Results

Peter M. Gruber
TU Wien

1. Introduction

Convex geometry is an area of mathematics between geometry, analysis and discrete mathematics. Classical discrete geometry is a close relative of convex geometry with strong ties to the geometry of numbers, a branch of number theory. Both areas have numerous relations to other fields of mathematics and its applications. While it is out of reach to describe on one or two dozen pages the main features of convex and discrete geometry, it is well possible to show the flavor of these areas by describing typical ideas, problems and results. This will be done in the following. In particular, we consider

– Mixed volumes and the Brunn-Minkowski theorem,
– Polar bodies in high dimensions,
– Valuations,
– Euler's polytope formula,
– Lattice polytopes and lattice point enumerators,
– Theorems of Minkowski and Minkowski-Hlawka,
– Sums of moments,
– Koebe's representation theorem.

There is a huge literature on convex and discrete geometry. We mention the books of Fejes Tóth [6], Gruber and Lekkerkerker [15], Erdös, Gruber and Hammer [5], Webster [24], Ziegler [25], Matoušek [20], Barvinok [1], Grünbaum [18], Böröczky [3], the books in the red Cambridge series by Schneider [22], Gardner [7], Groemer [9], Thompson [23], McMullen and Schulte [21], the green collection of surveys [16], the Handbooks of Convex Geometry [17] and of Computational and Discrete Geometry [8] and the overviews of Klee [19], Gruber [12] and

ISSN 0020-7926

Berger [2]. Two articles of Gruber [11, 13] on convexity are in a similar spirit as the present report.

For precise references for the results considered below, additional material, comments and historical remarks see the author's [14] forthcoming book. To give the reader an idea of the development of convex and discrete geometry, we add for each author the year of publication of the result in question.

2. Mixed Volumes and the Brunn-Minkowski Theorem

A *convex body* is a compact convex set in d-dimensional Euclidean space $\mathbb{E}^d$. The space $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{E}^d)$ of all convex bodies is endowed with (*Minkowski*) *addition* $+$ which is defined as follows:

$$C+D = \{x+y : x \in C, y \in D\} = \bigcup_{x \in C}(x+D) \text{ for } C, D \in \mathcal{C}.$$

It is easy to show that $C+D$ is again a convex body. With this definition of addition, the space of convex bodies is an Abelian semigroup with cancellation law.

A *major problem* of the Brunn-Minkowski theory is to obtain information on the volume $V(C+D)$ of $C+D$ in terms of information on C and D. The first pertinent result is *Steiner's formula for the volume of parallel bodies* (1840). Let B^d be the solid Euclidean unit ball of $\mathbb{E}^d$. For a convex body C and $\lambda \geq 0$ the convex body $C+\lambda B^d$ is the *parallel body* of C at distance λ. Steiner's formula then says, that there are coefficients $W_0(C), \dots, W_d(C)$, the *quermassintegrals* of C, such that

$$V(C+\lambda B^d) = W_0(C) + \binom{d}{1} W_1(C)\lambda + \dots + \binom{d}{d} W_d(C)\lambda^d \text{ for } \lambda \geq 0.$$

$W_0(C) = V(C)$, $W_1(C) = S(C)/d$, the surface area of C, and $W_d(C) = V(B^d)$. It is an unsolved *problem of Blaschke* (1916) to characterize the $d+1$ tuples of real numbers which are quermassintegrals of convex bodies, or, in other words, to describe the set

$$\{(W_0(C), \dots, W_d(C)) : C \in \mathcal{C}(\mathbb{E}^d)\} \subset \mathbb{E}^{d+1}.$$

A substantial refinement of Steiner's formula is *Minkowski's theorem on mixed volumes* (1911): Given convex bodies $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$, there are coefficients $V(C_{i_1}, \dots, C_{i_d})$, called *mixed volumes*, such that

$$V(\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n) = \sum_{i_1, \dots, i_d = 1}^{n} V(C_{i_1}, \dots, C_{i_d})\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_d} \text{ for } \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0.$$

Clearly, the following equalities hold: $V(C,\ldots,C)=W_0(C)=V(C)$, $V(C,\ldots,C,B^d)=W_1(C)=S(C)/d,\ \ldots,\ V(C,B^d,\ldots,B^d)=W_{d-1}(C)$, $V(B^d,\ldots,B^d)=W_d(C)=V(B^d)$ for $C\in\mathcal{C}$.

There are several relations among mixed volumes, including the fundamental *inequality of A. D. Alexandrov and Fenchel* (1936/37) which says that

$$V(C,D,D_3,\ldots,D_d)^2 \geq V(C,C,D_3,\ldots,D_d)V(D,D,D_3,\ldots,D_d)$$

for $C,D,D_3,\ldots,D_d\in\mathcal{C}$. This inequality is one of the most important geometric inequalities. It is an *unsolved problem* to determine the equality cases in the Alexandrov-Fenchel inequality.

Numerous other geometric inequalities are simple consequences of the Alexandrov-Fenchel inequality. We state two. First, the *isoperimetric inequality*:

$$\frac{S(C)^d}{V(C)^{d-1}} \geq \frac{S(B^d)^d}{V(B^d)^{d-1}}$$

for $C\in\mathcal{C}$ with non-empty interior. Here equality holds precisely in case where C is a Euclidean ball. There is no corresponding upper bound for the *isoperimetric quotient*

$$\frac{S(C)^d}{V(C)^{d-1}},$$

but Ball (1991) proved the following *reverse isoperimetric inequality*: Let C be an o-symmetric convex body with non-empty interior, where o is the origin. Then there is a non-singular linear transfomation $T:\mathbb{E}^d\to\mathbb{E}^d$ such that

$$\frac{S(TC)^d}{V(TC)^{d-1}} \leq (2d)^d.$$

Secondly, the *Brunn-Minkowski inequality* (1887/96):

$$V(C+D)^{\frac{1}{d}} \geq V(C)^{\frac{1}{d}} + V(D)^{\frac{1}{d}}$$

for $C,D\in\mathcal{C}$. Here equality holds precisely if C and D are in parallel hyperplanes or are positive homothetic. The Brunn-Minkowski inequality, which also yields the isoperimetric inequality, has led to numerous generalizations. We mention the Prékopa-Leindler inequality for integrals (1971/72) and the so-called generalized isoperimetric inequalities together with the related concentration of measure phenomenon on metric probability spaces.

The modern theory of mixed volumes deals with surface and curvature measures.

In the last decades it turned out that there are several bridges between convex and algebraic geometry. Bridgeheads on the convexity side are mixed volumes and the Alexandrov Fenchel inequality, other ones are Newton polytopes of systems of algebraic equations.

3. Polar Bodies in High Dimensions

Given a convex body C in $\mathbb{E}^d$ with the origin in its interior, its *polar body* C^* is defined by

$$C^* = \{y : x \cdot y \leq 1 \text{ for all } x \in C\}.$$

It is easy to see that C^* is again a convex body with the origin in its interior.

In view of applications in the geometry of numbers, it is of interest to give upper and lower bounds for the quantity

$$V(C)V(C^*).$$

Blaschke (1917) for $d = 3$ and Santaló (1949) for general d, showed that for convex bodies C which are symmetric in o,

$$V(C)V(C^*) \leq V(B^d)^2,$$

where equality holds precisely in case where C is a Euclidean ball. Thinking of applications in the geometry of numbers, Mahler (1939) *conjectured* that for an o-symmetric convex body C with non-empty interior the following inequality holds:

$$\frac{4^d}{d!} \leq V(C)V(C^*).$$

He could prove this only with the smaller constant $4^d/d!^2$. While Mahler's conjecture is still open, Bourgain and Milman (1989) showed that there is an absolute constant $c > 0$ such that in all dimensions d for all o-symmetric convex bodies C with non-empty interior one has,

$$\frac{c^d}{d!} \leq V(C)V(C^*).$$

We have chosen this result as a typical one for the local theory of normed spaces. This theory started with a striking theorem of Dvoretzky (1961) which says that any normed space of sufficiently large finite dimension has comparatively large subspaces which are almost Euclidean. Characteristically, local theory results deal with properties of convex bodies, which are independent of the dimension. In many cases this means that the phenomenon in question is determined by an absolute constant.

4. Valuations

A real *valuation* on the space of convex bodies is a function $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ with the following weak additivity property:

$$\phi(C \cup D) + \phi(C \cap D) = \phi(C) + \phi(D) \text{ for } C, D, C \cup D, C \cap D \in \mathcal{C},$$
$$\text{and } \phi(\emptyset) = 0.$$

Besides real valuations on $\mathcal{C}$, valuations on certain families of sets with values in an Abelian group have been studied. Valuations can be found at many corners of convex and discrete geometry, but it was only Blaschke (1935/37) who first defined valuations and started their systematic study. Examples of valuations are the volume and the surface area, more generally the quermassintegrals, the affine surface area, lattice point enumerators and certain Hamel functions on the space of convex polytopes. Mixed volumes also give rise to valuations. Measure and Jordan measure are valuations on the space of measurable, resp. Jordan measurable sets.

The space $\mathcal{C}$ of convex bodies is endowed with a natural topology. The *main problem* in the theory of valuations is the following: given properties such as continuity or semi-continuity, monotony, translation or rigid motion invariance, describe all valuations with these properties. Here, a function $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ is *rigid motion invariant* if

$$\phi(\rho C) = \phi(C) \text{ for each } C \in \mathcal{C} \text{ and each rigid motion } \rho : \mathbb{E}^d \to \mathbb{E}^d.$$

The *functional theorem of Hadwiger* (1951), anticipated in vague form by Blaschke (1935/37), can be stated as follows: The continuous, rigid motion invariant valuations on $\mathcal{C}$ are precisely the functions $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ which have a representation of the form

$$\phi = \lambda_0 W_0 + \cdots + \lambda_d W_d \text{ with } \lambda_0, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

A recent *functional theorem of Ludwig and Reitzner* (1999) shows that the upper or lower semi-continuous valuations on $\mathcal{C}$ which are invariant with respect to volume-preserving affinities on $\mathbb{E}^d$ are precisely the functions $\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ of the form

$$\phi = \lambda_0 \chi + \lambda_1 A + \lambda_2 V \text{ with } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Here χ and A denote the Euler characteristic and the affine surface area on $\mathcal{C}$. The latter is a notion of surface area which is invariant with respect to volume-preserving affinities. Originally it was introduced in affine differential geometry. In recent years it turned out to be a valuable tool in convex geometry, for example for the problem of approximation of convex bodies by convex polytopes.

These and similar results are satisfying from an aesthetic point of view. Rota even considered Hadwiger's functional theorem to be one of the ten most beautiful theorems of mathematics in the 20th century.

Typical applications of such functional theorems are as follows: Let f be a real function on $\mathcal{C}$. If it can be shown that f is a continuous and rigid motion invariant valuation, the functional theorem implies that it is of the form (1). Possibly, a homogeneity property then yields that f is a multiple of the volume or of some other quermassintegral. The latter may be a relevant geometric result. In this way easy proofs of the *principal kinematic formula* in integral geometry and of a qualitative form of the *Minkowski-Hlawka theorem* in the geometry of numbers can be achieved.

5. Euler's Polytope Formula and Related Topics

Given a convex polytope in $\mathbb{E}^3$ with v vertices, e edges and f facets, *Euler's polytope formula* (1752/53) says that

$$v - e + f = 2.$$

It is surprising that this simple result was not known already in antiquity. A hundred years before Euler, Descartes gave a result of which Euler's formula is an immediate consequence. Euler's proof has been criticized since it used implicitly an argument of the type of the Jordan curve theorem. This criticism should not be taken too seriously, since for the proof Jordan's theorem is needed only in the easy case of polygonal curves. Legendre gave a beautiful alternative proof, using the well-known area formula for spherical polygons.

Schläfli (1850/52) extended Euler's formula to all dimensions: Consider a convex polytope P in $\mathbb{E}^d$ and let f_i be the number of its i-dimensional faces for $i = 0, \dots, d-1$. The vector $f(P) = (f_0, \dots, f_{d-1})$ is called the *f-vector* of P. Then

$$f_0 - f_1 + - \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 + (-1)^{d-1}. \tag{2}$$

Unfortunately, Schläfli's proof contained a serious gap, which was filled only in 1970 by means of the *shelling theorem of Bruggesser and Mani*. A topological proof of Poincaré (1893/99) also had a gap, which could be filled by tools from algebraic topology achieved only by the 1930s. The first elementary proof of (2) is due to Hadwiger (1955).

Considering Euler's polytope formula, the *problem* arises to characterize the integer vectors $(f_0, \dots, f_{d-1})$ which are f-vectors of convex polytopes. For $d = 3$ this was solved by Steinitz (1906): An integer vector (v, e, f) is an f-vector of a convex polytope in $\mathbb{E}^d$ precisely in case where

$$v - e + f = 2, 4 \leq v \leq 2f - 4, 4 \leq f \leq 2v - 4.$$

The problem remains unsolved in dimensions greater than 3. For the important special case of convex polytopes where all faces are simplices, McMullen (1971) stated his *g-conjecture* which characterizes the f-vectors. This conjecture was confirmed by Stanley (1980), Billera and Lee (1981) and McMullen (1993), using deep algebraic tools.

Even questions about the f-vectors of convex polytopes which, presumably, are less demanding remain open. An example is the following *question of Ziegler*:

Give precise bounds for

$$\frac{f_1+f_2}{f_0+f_3+20},$$

where (f_0, f_1, f_2, f_3) ranges over all f-vectors of convex polytopes in $\mathbb{E}^4$.

Given a convex polytope, its faces of all dimensions, including the empty face, form a polytopal cell complex in the sense of algebraic topology, the *boundary complex* of the polytope. The *problem* arises, to characterize the polytopal cell complexes which are (isomorphic to) boundary complexes of convex polytopes. For $d = 3$ this problem was solved by Steinitz (1922). His result is usually stated in the following form: Each 3-connected planar graph is isomorphic to the edge graph of a convex polytope in $\mathbb{E}^3$. In higher dimensions this problem is far from a solution.

The Euler polytope theorem and its extensions have numerous applications in many fields of mathematics, in particular in convex and discrete geometry. We state two. First, the average number of edges of a facet of a convex polytope in $\mathbb{E}^3$ is less than 6. This shows that, in particular, there is no convex polytope in $\mathbb{E}^3$ having only hexagonal facets. Second, *Cauchy's rigidity theorem* (1813): Consider a closed, convex polyhedral surface in $\mathbb{E}^3$, such that all facets are rigid and such that the facets are connected along common edges by hinges. Then the surface is still rigid. Minor errors in Cauchy's proof were corrected later on. Connelly (1978) showed that the rigidity does not hold if the convexity assumption is abandoned: There are (non-convex) flexible polytopal spheres. Recently, Sabitov (1998) proved that the volume of a flexible polytopal sphere remains constant while flexing, thus confirming the *bellows conjecture*.

6. Lattice Polytopes and Lattice Point Enumerators

Let $\mathbb{Z}^d$ denote the *integer lattice* in $\mathbb{E}^d$, i.e. the set of all points with integer coordinates. A convex polytope is a *lattice polytope* if all its vertices are points of $\mathbb{Z}^d$. Define the *lattice point enumerators* L, L^o and $L^{\cdot}$ on the space of all convex lattice polytopes P by

$$L(P) = \#(P \cap \mathbb{Z}^d), L^o(P) = \#\big((\text{relative interior of } P) \cap \mathbb{Z}^d\big),$$
$$L^{\cdot}(P) = L(P) - L^o(P),$$

where # stands for cardinal number.

A simple *theorem of Pick* (1899) is the following: Let P be a Jordan lattice polygon, that is a planar, not necessarily convex polygon whose boundary is a Jordan polygon and such that all vertices of P are in $\mathbb{Z}^2$. Then

$$V(P) = L(P) - \frac{1}{2}L^{\cdot}(P) - 1.$$

Here, by V we mean the area in $\mathbb{E}^2$. Examples show that no direct extension of this result to higher dimensions is possible. Considering, besides the lattice polytope P, lattice polytopes of the form nP where $n = 1,\dots,d$, Reeve (1957/59) and Macdonald (1963) proved the following result: Let P be a convex lattice polytope with non-empty interior. Then

$$\text{(i)} \qquad d!V(P) = L(dP) - \binom{d}{1} L\big((d-1)P\big) + - \cdots + (-1)^{d-1}\binom{d}{d-1} L(P) + (-1)^d,$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{(d-1)d!}{2} V(P) = M\big((d-1)P\big) - \binom{d-1}{1} M\big((d-2)P\big) - + \cdots \cdots + (-1)^{d-2}\binom{d-1}{d-2} M(P) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^d,$$

$$\text{where } M(P) = L(P) - \frac{1}{2}L^{\cdot}(P) = \frac{1}{2}\big(L(P) + L^o(P)\big).$$

These results lead to the study of the quantities $L(nP), L^o(nP), L^{\cdot}(nP)$ for $n \in \mathbb{N}$, where P is a lattice polytope. Ehrhart (1967) proved the following *Polynomiality theorem:*

$$L(nP) \text{ is a polynomial of degree } d \text{ in } n \in \mathbb{N}.$$

The constant term in this polynomial is 1 and the leading coefficient equals $V(P)$. More general is the *lattice point theorem of McMullen and Bernstein* (1975/76). It resembles Minkowski's theorem on mixed volumes: Let $P_1,\dots,P_m$ be convex lattice polytopes. Then

$$L(n_1P_1 + \cdots + n_mP_m) \text{ is a polynomial in } n_1,\dots,n_m \in \mathbb{N}.$$

The above lattice point enumerators are valuations on the space of all lattice polytopes in $\mathbb{E}^d$ which, in addition, are *integer unimodular invariant*. This means: If U is an integer $d \times d$ matrix with determinant ± 1 and $u \in \mathbb{Z}^d$, then $L(UP+u) = L(P)$ for each convex lattice polytope P, and similarly for L^o and $L^{\cdot}$. The *valuation theorem of Betke and Kneser* (1985) describes these valuations: The integer unimodular valuations on the space of convex lattice polytopes in $\mathbb{E}^d$ with ordinary addition and multiplication with real numbers form a real vector space of dimension $d+1$. This space has a basis $\{L_0,\dots,L_d\}$ such that

$$L_i(nP) = n^i L_i(P) \text{ and } L(nP) = L_0(P) + L_1(P)n + \cdots + L_d(P)n^d$$

for convex lattice polytopes P and $n \in \mathbb{N}$.

These results indicate the rich structure of the space of lattice polytopes. Lattice polytopes play a prominent role in several areas of mathematics and its applications, for example in optimization and crystallography. Newton polytopes, that is convex lattice polytopes determined by polynomials and systems of polynomials in one or several variables, convey important information on the polynomials, resp. on the systems of polynomials.

7. Theorems of Minkowski and Minkowski-Hlawka

Let $f : \mathbb{E}^d \to [0, \infty)$, say, a positive definite quadratic form, and let $c > 0$ be a constant. The problems arise, first, to find out whether the inequality

$$f(u) \le c$$

has integer solutions different from o and, secondly, to determine in the positive case such solutions. These are questions of Diophantine approximation which led to the development of the geometry of numbers and which, in recent years, have been studied in the context of algorithmic geometry.

A *lattice* L in $\mathbb{E}^d$ is the system of all integer linear combinations of d linearly independent vectors. These vectors are said to form a basis of L and the absolute value of their determinant is the *determinant* $d(L)$ of L. An example of a lattice is the integer lattice $\mathbb{Z}^d$. It has determinant 1. The first of the above problems amounts to the question whether the set $C = \{x : f(x) \le c\}$ contains a point $u \ne o$ of the integer lattice. An answer, which in many cases is satisfactory, is given by the *fundamental theorem of Minkowski* (1893): Let C be a convex body with center o and let L be a lattice in $\mathbb{E}^d$. If $V(C) \ge 2^d d(L)$, then C contains at least one pair of points $\pm l \ne o$ of L. On the other hand, we have the following *theorem of Minkowski-Hlawka* (1944): Let J be a Jordan measurable set in $\mathbb{E}^d$ where $V(J) \ge 1$. Then there is a lattice L with $d(L) = 1$ such that J contains no point $l \ne o$ of L.

In order to state more geometric versions of these results, we need the following definitions: Let C be a convex body with center o and L a lattice in $\mathbb{E}^d$. The family $\{C + l : l \in L\}$ of translates of C by lattice vectors is said to be a *lattice packing* of C with packing lattice L if no two of the translates overlap. Its *density* then is the proportion of space covered by the bodies of the packing. In this terminology the fundamental theorem of Minkowski is almost trivial. It simply says that the density of a lattice packing of C is at most one. The Minkowski-Hlawka theorem readily implies that for each convex body C with center o there is a lattice packing with density at least 2^{-d}.

For many years it was thought that the tiny lower bound 2^{-d} for the maximum density of a lattice packing of a convex body with center o was far from the truth. Now it is believed by many mathematicians that for general C no essential refinement of this bound is possible, not even in the case where C is a solid Euclidean ball. This is even more surprising, since all known proofs of the Minkowski-Hlawka theorem are based on mean value arguments, so one is led to think – presumably erroneously – that essential refinements are feasible.

Considering the results of Minkowski and Minkowski-Hlawka, in recent years the questions were considered to specify algorithms to find points of a given lattice in a given convex body and to find lattices which provide dense lattice packings.

A surprisingly efficient algorithm of Betke and Henk (2000) finds densest lattice packings of convex polytopes in dimension 3. As a consequence of the LLL-reduction algorithm for positive definite quadratic forms, Lenstra, Lenstra and Lovász (1982) specified a polynomial algorithm to find lattice points in a convex body of large volume in $\mathbb{E}^d$. Good binary error-correcting codes may be considered as subsets of the set of vertices of the unit cube in $\mathbb{E}^d$ such that any two vertices of such a subset have large distance. Thus suitable balls with centers at these vertices do not overlap, hence give rise to a finite packing of balls. This packing may be continued periodically to give a packing of balls in $\mathbb{E}^d$ which, in some cases, is even a lattice packing. This relation between error-correcting codes and periodic or even lattice packings of balls was discovered by Leech and Sloane (1964/71) and culminated in the work of Rush (1989), who finally constructed in this way lattice packings of balls with density $2^{-d+o(d)}$ as $d \to \infty$, thus reaching the Minkowski-Hlawka bound. Unfortunately, the codes used by Rush are not given in an constructive manner.

We believe that the following *heuristic principle* holds in many contexts: If a situation is sufficiently complicated, then – cum grano salis – the average object is extremal. Here 'sufficiently complicated' may mean 'of sufficiently high dimension' or 'with sufficiently many parameters'. It seems that the Minkowski-Hlawka density bound for lattice packings of balls provides one such example, other examples can be found in the local theory of normed spaces.

8. Sums of Moments

Let J be a Jordan measurable subset of $\mathbb{E}^d$. We consider the *problems* to determine or, at least, to estimate for $n = 1, 2, \dots$ the minimum

$$\min_{\{c_1,\dots,c_n\}\subset\mathbb{E}^d} \int_J \min_{\{c_1,\dots,c_n\}} \{||x - c_i||^2\}\, dx$$

and to describe the n-tuples $\{c_1, \dots, c_n\}$ for which it is attained, the *minimizing configurations*. The integral may be interpreted as the volume above sea level of a mountain landscape with n valleys which have the form of pieces of paraboloids of revolution and with deepest points at $c_1, \dots, c_n$.

Over the last 60 years different versions of these problems appeared in various fields. We state three pertinent results. The first is the *inequality for sums of moments of L. Fejes Tóth* (1952) which is as follows: Let $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ be monotone increasing and let H be a convex 3,4,5 or 6-gon. Then

$$\min_{\{c_1,\dots,c_n\}\subset\mathbb{E}^2} \int_H \min_{\{c_1,\dots,c_n\}} \{f(||x-c_i||)\}\,dx \geq \int_{H_n} f(||x||)\,dx,$$

where H_n is a regular hexagon with center at the origin and area equal to $V(H)/n$. The second result is due to the author (2004) and refines an earlier result of Zador (1982): Let $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ satisfy a certain growth condition. Then there are positive constants div and α depending on f and d, resp. on f, such that

$$\min_{\{c_1,\dots,c_n\}\subset\mathbb{E}^d} \int_J \min_{\{c_1,\dots,c_n\}} \{f(||x-c_i||)\}\,dx \ \sim\ \operatorname{div} V(J)^{\frac{d+\alpha}{d}} f\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{d}}}\right) \text{ as } n\to\infty.$$

Third, let $C_n=\{c_1,\dots,c_n\}$, $n=1,2,\dots,$ be a sequence of minimizing configurations for $d=2$. Then a result of Gruber (2001), reproved by G. Fejes Tóth (2001), shows that asymptotically as $n\to\infty$, C_n is a 'regular hexagonal pattern'. This confirms a *conjecture of Gersho* (1979) in case $d=2$. For $d>2$ Gersho's conjecture remains open. We doubt that it is true for sufficiently large dimensions.

These results have numerous applications. We mention two, one in discrete and one in convex geometry: The maximum density of a packing in $\mathbb{E}^2$ with circular discs, all of the same radius, equals

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

The convex polytopes P_n in $\mathbb{E}^3$ with n facets and minimum isoperimetric quotient have isoperimetric quotient

$$\frac{S(P_n)^3}{V(P_n)^2} \sim 36\pi + 20\sqrt{3}\pi^2\frac{1}{n} = 113.09\dots + \frac{341.98\dots}{n} \text{ as } n\to\infty$$

and in an asymptotic sense their facets are regular hexagons, all of the same size. (The simple consequence of Euler's polytope formula on the average number of edges of a facet of a convex polytope in $\mathbb{E}^3$ mentioned in Section 5 shows that not all facets can be hexagons.) Other applications deal with data transmission, numerical integration, probability and approximation theory.

9. Koebe's Representation Theorem for Planar Graphs

Given a (finite) planar graph $\mathscr{G}$, Koebe (1936) showed in his *representation theorem for planar graphs* that one may assign to each vertex of $\mathscr{G}$ a circular disc such that these discs form a packing in $\mathbb{E}^2$. Two discs touch precisely in the case where the corresponding vertices are connected by an edge. This result was re-discovered by Andreev (1970) and by Thurston (1978). The latter specified an algorithm how to find such packings. An essential refinement of Koebe's theorem is due to Brightwell and Scheinerman (1993): Let $\mathscr{G}$ be a 3-connected planar graph. Then to each vertex there corresponds a circular disc. These discs form a packing such that any two discs touch precisely in the case where the corresponding vertices are connected by an edge. In addition, to each country of the graph corresponds a circular disc such that these discs also form a packing and any two discs touch precisely in the case where the corresponding countries have a common edge. Finally, for any edge of $\mathscr{G}$ the discs corresponding to its vertices and the discs corresponding to the adjacent countries have a common point where the vertex circles intersect the country circles orthogonally.

Koebe's theorem, its generalizations and the algorithm of Thurston have numerous applications, in particular in graph theory. We consider two deep applications. First, by stereographic projection, the Brightwell-Scheinerman theorem easily yields the Steinitz representation theorem for convex polytopes mentioned in Section 5. Secondly, let D be a simply connected domain in the complex plane. Then the algorithm of Thurston permits to construct arbitrarily precise piecewise linear approximations to the analytic function which maps D onto the unit disc.

Acknowledgements

For valuable remarks we thank Franziska Berger, Monika Ludwig, Gerhard Ramharter, Matthias Reitzner and Elisabeth Werner.

References

1. Barvinok, A., A course in convexity, Amer. Math. Soc., Providence, RI 2002
2. Berger, M., Convexity, Amer. Math. Monthly **97** (1990) 650–678
3. Böröczky, K., Jr., Finite packing and covering, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
4. Conway, J. H., Sloane, N. J. A., Sphere packings, lattices and groups, 3rd ed., with additional contributions by E. Bannai, R. E. Borcherds, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov, Springer Verlag, New York 1999
5. Erdös, P., Gruber, P. M., Hammer, J., Lattice points, Longman Scientific & Technical, Harlow, Wiley, New York 1989
6. Fejes Tóth, L., Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, 2nd ed., Springer Verlag, Berlin 1972
7. Gardner, R. J., Geometric tomography, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1995

8. Goodman, J. E., O'Rourke, J., eds., Handbook of discrete and computational geometry, 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL 2004
9. Groemer, H., Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1996
10. Grötschel, M., Lovász, L., Schrijver, A., Geometric algorithms and combinatorial optimization, Springer Verlag, Berlin 1988
11. Gruber, P. M., Seven small pearls from convexity, Math. Intelligencer **5** (1983) 16–19
12. Gruber, P. M., Aspects of convexity and its applications, Exposition. Math. **2** (1984) 47–83
13. Gruber, P. M., Beziehungen der Konvexgeometrie zu anderen Gebieten, Wiss. Nachrichten (Wien) **125** (2004) 30–34
14. Gruber, P. M., Convex and discrete geometry, in preparation
15. Gruber, P. M., Lekkerkerker, C. G., Geometry of numbers, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam 1987
16. Gruber, P. M., Wills, J. M., eds., Convexity and its applications, Birkhäuser, Basel 1983
17. Gruber, P. M., Wills, J. M., eds., Handbook of convex geometry **A,B**, North-Holland, Amsterdam 1993
18. Grünbaum, B., Convex polytopes, 2nd ed., Prepared and with a preface by V. Kaibel, V. Klee and G. M. Ziegler, Springer Verlag, New York 2003
19. Klee, V., What is a convex set? Amer. Math. Monthly **78** (1971) 616–631
20. Matoušek, J., Lectures on discrete geometry, Springer Verlag, New York 2002
21. McMullen, P., Schulte, E., Abstract regular polytopes, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2002
22. Schneider, R., Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1993
23. Thompson, A. C., Minkowski geometry, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1996
24. Webster, R., Convexity, Oxford Univ. Press, Oxford 1994
25. Ziegler, G. M., Lectures on polytopes, 2nd ed., Springer Verlag, New York 1995

Peter M. Gruber
Forschungsgruppe Konvexe und Diskrete Geometrie
TU Wien
A–1040 Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10/10460
e-mail *peter.gruber@tuwien.ac.at*
http://www.dmg.tuwien.ac.at/fg6/

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 199 (2005), 31–37

35 Jahre Österreichische Mathematische Olympiade und 65 Jahre Gerd Baron

Michael Drmota und Robert F. Tichy
TU Wien und TU Graz

Voriges Jahr feierte die Österreichische Mathematische Olympiade (ÖMO) ihr 35-jähriges Jubiläum, und kein Name ist mit der ÖMO so verbunden wie der von Gerd Baron. Er hat sie von Anfang an wissenschaftlich betreut und durch seinen unermüdlichen Einsatz prägend gestaltet. Er feiert dieses Jahr seinen 65. Geburtstag. Die ÖMG und insbesondere die Autoren möchten herzlich gratulieren und Danke sagen. Viele Mathematiker in Österreich – nicht nur die beiden Autoren – haben durch die ÖMO sehr profitiert.

Im folgenden Artikel soll ein kurzer Überblick über die Anfänge und die Organisation der ÖMO gegeben werden. Weiters wird über die Internationale Mathematikolympiade 1976 in Österreich und über den Österreichisch-Polnischen Mathematikwettbewerb berichtet. In all diesen *Etappen* ist bzw. war Gerd Baron immer an vorderster Front aktiv und ist zweifellos die *Idealbesetzung*. Es gibt wohl kaum jemanden, der praktisch alle bisher gestellten Olympiadebeispiele kennt und in wenigen Augenblicken auch noch so komplizierte (neue) Beispiele lösen kann, sondern auch über Jahrzehnte hinweg die oft undankbare Aufgabe der (Mit-) Organisation von Wettbewerben und des Zusammenstellens von Wettbewerbsbeispielen übernommen hat.

1 Anfänge

Im Jahr 1968 wurde Österreich von Russland eingeladen, an der 10. Internationalen Mathematikolympiade (IMO) in Moskau teilzunehmen, entsandte aber vorerst nur einen Beobachter, den Landesschulinspektor Alexander. Sein Bericht in der Arbeitsgemeinschaft für Mathematiklehrer, der auch die gestellten Aufgaben

ISSN 0020-7926

enthielt,[1] zeigte, dass es notwendig war, falls österreichische Schüler an der IMO teilnehmen sollten, eine zusätzliche *Ausbildung* anzubieten.[2]

Im Ministerium war damals Ministerialrat Eduard Szirucsek federführend zuständig, und es wurde der Beschluss gefasst, dass Österreich sich an der IMO beteiligen werde. Im Herbst 1969 war es dann soweit: in ganz Österreich wurden ca. 30 Vorbereitungskurse eingerichtet, als Kursleiter fungierten u.a. Gerd Baron,[3] Wilhelm Körperth, Walter Kranzer und Herbert Vohla in Wien und Wolfgang Ratzinger, Franz Thannhausser und Erich und Gerhard Windischbacher in den Bundenländern.

Nach Kurs- und Landeswettbewerben und dem Bundeswettbewerb am 22. Juni 1970 wurden in diesem Sommer acht Schüler (Karl Czakler, Johann Hackl, Franz Hofbauer, Gerald Leitner, Wolfgang Matej, Angelika Rindler, Erich Steinbauer, Herbert Tobisch) zur 12. IMO nach Ungarn geschickt, an der bereits 14 Länder teilnahmen. Österrreich konnte durch Johann Hackl eine Bronzemedaille erringen und landete knapp hinter Schweden und Polen an der 12. Stelle. Schon damals war Thomas Mühlgassner Delegationsleiter, sein Stellvertreter war zunächst Wolfgang Ratzinger, ab 1979 Gerhard Windischbacher und seit 2000 Robert Geretschläger. Der Delegationsleiter ist übrigens immer auch Mitglied der Jury, der Stellvertreter ist Schülerbegleiter, unterstützt aber auch die Korrektur.

Neben den Schülerkursen wurden bereits Kursleiterseminare organisiert. Es gab damals ja auch kaum Möglichkeiten, Zugang zu entsprechenden Beispielen (für die Kurse) zu bekommen. Vortragende waren u.a. Edmund Hlawka (Ungleichungen, Zahlentheorie), Hans Vogler und Walter Wunderlich (Geometrie), die übrigens auch bei der Auswahl der Beispiele für die ersten zwei Bundeswettbewerbe mitwirkten.

2 Schülerkurse

Bereits im zweiten Jahr wurden Anfänger- und Fortgeschrittenenkurse angeboten und Österreich in drei Gebiete (derzeit Wien-Niederösterreich-Burgenland, Steiermark-Kärnten, Oberösterreich-Salzburg-Tirol-Vorarlberg[4]) eingeteilt. Bei den Anfängerkursen gibt es nur Kurs- und Landeswettbewerbe, bei den Fortgeschrittenen Kurs- und Gebietswettbewerbe und den Bundeswettbewerb.

Ab dem Jahr 1973 wurden die Besten der Gebietswettbewerbe der Fortgeschrittenenkurse im Seminarzentrum Raach zu einem zweiwöchigen Intensivvorberei-

[1] . . . die übrigens von Gerd Baron sofort gelöst wurden.

[2] Auch zur nächsten IMO in Rumänien wurde noch ein Beobachter entsandt, Oberstudienrat Flick.

[3] bis 1973.

[4] Burgenland war anfänglich dem zweiten Gebiet zugeordnet, Kärnten war teilweise beim dritten, und Vorarlberg ist erst seit 1998 Teil des dritten Gebiets.

Gerd Baron

tungskurs für den Bundeswettbewerb zusammengefasst,[5] und seit diesem Zeitpunkt ist auch Gerd Baron daran leitend beteiligt.

Ein entscheidender Punkt bei mathematischen Wettbewerben ist die Auswahl geeigneter Wettbewerbsbeispiele. Bei den Internationalen Mathematikolympiaden reichen die teilnehmenden Länder Beispiele ein, aus denen dann einige ausgewählt werden. In Österreich wurde zunächst ähnlich vorgegangen. 1973 und 1974 wurden die Beispiele von Gerd Baron und Roland Fischer (Klagenfurt) aus Beispielen ausgewählt, die von Kursleitern eingeschickt worden waren. Doch bereits ab dem Jahr 1975 wurden, um noch größere Objektivität zu erzielen, alle Beispiele von Gerd Baron auch zusammengestellt, für den Bundeswettbewerb, für die Landes- und Gebietswettbewerbe und einige Zeit auch für die Kurswettbewerbe. Seit dieser Zeit ist er wissenschaftlicher Leiter der ÖMO.

3 Die Internationale Mathematische Olympiade in Österreich

Im Jahr 1976 war Österreich Organisator der 18. Internationalen Mathematikolympiade. Das Besondere daran war, dass es die erste IMO war, die außerhalb des damaligen *Ostblocks* stattfand. Es nahmen allerdings bereits 18 Länder teil,

[5] Im Jahr davor gab es bereits einen ähnlichen Kurs in Strobl am Wolfgangsee.

Was nicht im Protokoll steht ...

Die IMO in Österreich war ja die erste außerhalb der osteuropäischen Staaten bzw. der ehemaligen UdSSR. Im Vorfeld wurden von einigen Staaten *Garantien* gefordert, dass sich Schüler nicht absetzen können. Diese wurden zwar nicht erteilt, im Gegenzug wurden allerdings auffallend viele *Berichterstatter für Schülerzeitungen* mitentsandt.

Der *Sprachfähigkeit* der österreichischen Jury ist es zu verdanken, dass bei der Punktevergabe alles fair verlief. So wurde auch ein Delegationsleiter sofort ertappt, als er viel mehr übersetzte, als der Schüler tatsächlich geschrieben hatte.

Der Leiter der Jury hat keine Mühe gescheut und alle seine Kontakte genutzt, den verschiedenen Delegationen den Aufenthalt und auch die Reisen so problemlos wie möglich zu gestalten. So konnte er dem bulgarischen Delegationsleiter erfolgreich zusagen, dass sich das (ihm nicht passende regnerische) Wetter nach der Punktekoordination bessern würde, obwohl dies dem Wetterbericht zu Folge nicht zu erwarten war. Andere Probleme hatte der britische Delegationsleiter. Ohne die (wieder erfolgreiche) Intervention des Leiters der Jury hätte er beim Rückflug für das durch die österreichischen Geschenke verursachte Übergepäck auch noch zahlen müssen.

Auch für das Seelenwohl wurde gesorgt. Auf Initiative von Prof. Hlawka wurde Thomas Mühlgassner verpflichtet, Interessenten zu einer Frühmesse um 5 Uhr Früh zu bringen. Das Angebot wurde auch von zwei Delegationsmitgliedern der damaligen Ostblockstaaten angenommen.

Die IMO in Österreich war in modischen Belangen Trendsetter. Erstmals bekamen alle Teilnehmer ein T-Shirt mit einem aufgedruckten Emblem der IMO 1976. Alle weiteren IMOs folgten diesem Beispiel.

Selbst bei der perfektesten Organisation kann auch etwas schiefgehen. Bei der Preisverleihung in der Hofburg, die vom damaligen Unterrichtsminister Fred Sinowatz vorgenommen wurde, mussten die im Ministerium liegengebliebenen Urkunden im letzten Moment nachgebracht werden. Fast hätte der Kapellmeister die Eingangsmusik wiederholen müssen – er wartete schon auf ein Zeichen der Organisatoren –, um den (davon nicht informierten) Minister nicht durch eine *Kunstpause* zu vergrämen.

darunter auch schon die USA. Das sind zwar im Vergleich zu heute[6] relativ wenig, trotzdem erforderte die Organisation umfangreiche Vorbereitungen. Traditio-

[6] Im Jahr 2005 nahmen bei der IMO 91 Länder teil.

nellerweise nahmen an den Olympiaden praktisch alle osteuropäischen Staaten teil. Diese konnten damals ihre Teilnahme aber erst zusagen, nachdem Russland zugesagt hatte. Dem Organisationskomitee gehörten Gerd Baron, Stefan Jezik, Thomas Mühlgassner, Wolfgang Ratzinger, Eduard Szirucsek, und die Ministerialrätin Weißmann an.

Die Schüler wurden in Lienz untergebracht, wo auch der eigentliche Wettbewerb stattfand. Die Jury wurde räumlich getrennt, zuerst in Eisenstadt und dann in Heiligenblut *kaserniert*. Vorsitzender der Jury war Gerd Baron, Edmund Hlawka war Ehrenvorsitzender. Weiters hatte jedes der sechs Wettbewerbsbeispiele einen Koordinator (Werner Baron, Roland Fischer, Peter Gruber, Rainer Mlitz, Reinhard Razen und Hans Vogler). Diese Gruppe von Personen hatte bereits im Vorfeld die Aufgabe, aus den 60 eingesandten Beispielen 20 auszuwählen, die jeder Delegationsleiter bei der Ankunft in Eisenstadt in vier Sprachen (Deutsch, Englisch, Französisch, Russisch) erhielt. Aus diesen 20 Beispielen wurden zunächst die sechs Wettbewerbsbeispiele durch Abstimmung in der Jury (Vorsitz, Koordinatoren, Delegationsleiter) ausgewählt und darauf in alle Sprachen übersetzt.

Der eigentliche Wettbewerb fand an zwei aufeinanderfolgenden Tagen statt. Dabei mussten (wie übrigens bei jeder IMO) jeweils drei Beispiele in $4\frac{1}{2}$ Stunden gelöst werden. Am Beginn stand noch eine halbe Stunde für Fragen zur Verfügung.[7]

Die Arbeiten wurden zunächst von den Delegationsleitern für ihre eigenen Schüler (mit einem Punktevorschlag) korrigiert. Die endgültigen Punkte wurden aber von den Koordinatoren der jeweiligen Beispiele vergeben. Jeder Koordinator musste mit jedem Delegationsleiter einzeln *verhandeln*.[8]

Die Schüler hatten in der Zwischenzeit Gelegenheit, Österreich ein wenig kennen zu lernen (Großglockner etc.). Die Preisverleihung fand in Wien in der Hofburg durch den damaligen Unterrichtsminister Dr. F. Sinowatz statt. Österreich errang damals (in der immer inoffiziellen Länderwertung) den hervorragenden fünften Rang.

4 Der Österreichisch-Polnische Mathematikwettbewerb

Im Jahr 1977 wurde auf Ministerebene ein Kulturabkommen zwischen Polen und Österreich unterzeichnet, das u.a. einen Österreichisch-Polnischen Mathematikwettbewerb (ÖPMW) enthält, der abwechselnd in Polen und Österreich stattfinden soll. 1978 fand er erstmals in Polen statt und Delegationsleiter ist (wie auch heute noch) Gerd Baron. Sein Gegenüber war in den ersten Jahren übrigens der bekannte polnische Zahlentheoretiker Andrzej Schinzel.

[7] Diese wurden schriftlich an die räumlich getrennte Jury gestellt. Die Antworten mussten von der Jury gemeinsam beschlossen und wieder schriftlich ausgefolgt werden.

[8] Beim österreichischen Delegationsleiter wurde übrigens jeweils noch ein *Kontrollor* aus dem Einsendeland des entsprechenden Beispiels zugezogen.

Die **Internationale Mathematische Olympiade (IMO)** ist der höchste internationale mathematische Wettbewerb für Schüler. Sie fand erstmals 1959 in Brasov (Rumänien) unter Beteiligung von 7 Ländern (Bulgarien, DDR, Ungarn, Polen, Rumänien, Tschechoslowakei, UdSSR) statt. Seither fand sie mit Ausnahme des Jahres 1980 jährlich statt. Schrittweise nahmen immer mehr Länder, zuerst die osteuropäischen, dann auch die westeuropäischen und schließlich mehr als 90 Länder aus allen Kontinenten teil.

Die Art des Wettbewerbs hat sich seit den Anfängen der IMO praktisch nicht verändert. Jedes Land kann bis zu 6 Teilnehmer entsenden. Der jeweilige Delegationsleiter ist Mitglied der Jury, nimmt bei der Auswahl der Beispiele teil und ist bis zum Ende des Wettbewerbs von seinem Team isoliert. Sein Stellvertreter ist für die Betreuung der teilnehmenden Schüler verantwortlich. Der eigentliche Wettbewerb dauert 2 Tage. Innerhalb von jeweils $4\frac{1}{2}$ Stunden sollen 3 Beispiele (also insgesamt 6) gelöst werden. Dabei ist an jedem Tag das erste Beispiel üblicherweise am leichtesten und das dritte am schwierigsten. Bei jedem Beispiel können maximal 7 Punkte erzielt werden. Die Punkte werden von der Jury vergeben.

Es werden nur individuelle Preise vergeben, obwohl die Länder natürlich ihre *Gesamtergebnisse* vergleichen. Höchstens einem Zwölftel aller Teilnehmer kann eine Goldmedaille zugesprochen werden, höchstens einem Viertel eine Gold- oder Silbermedaille und höchstens der Hälfte eine Gold-, Silber- oder Bronzemedaille. Weiters erhalten alle weiteren Teilnehmer, die bei wenigstens einem Beispiel alle 7 Punkte errungen haben, eine lobende Erwähnung. Dieses System hat sich gut bewährt.

Bisher haben österreichische Teilnehmer insgesamt 13 Gold-, 26 Silber- und 72 Bronzemedaillen erringen können, im Jahr 1981 (wo noch 8 Teilnehmer zugelassen waren) sogar 4 Gold-, 2 Silber- und 1 Bronzemedaille. In der (inoffiziellen) Länderwertung ergab dies den bisher größten Erfolg, nämlich den 4. Rang.

So ähnlich wie bei der IMO nehmen jeweise sechs Schüler der beiden Länder teil.[9] Neben dem Einzelbewerb mit insgesamt sechs Beispielen wird zusätzlich ein Mannschaftswettbewerb mit drei (heute vier) Beispielen durchgeführt, wo die gesamte Mannschaft zusammenarbeiten kann. Aufgrund der Osterweiterung der EU ist es nicht klar, ob dieser schöne Wettbewerb weitergeführt werden kann.

[9] Üblicherweise Teilnehmer des Bundesbewerbes, die die Plätze 7–12 erreicht haben.

5 Die Bedeutung der ÖMO

Die ÖMO ist – nicht zuletzt durch den großen Einsatz von Gerd Baron – zu einer unverzichtbaren Einrichtung in der österreichischen Bildungslandschaft geworden. Durch sie werden mathematische Begabungen auf hohem Niveau gefördert. Sie hat auch eine Vorreiterrolle gespielt. Erst später haben sich entsprechende Wettbewerbe für Physik, Chemie oder Latein etabliert.

Die Vorbereitungskurse bieten interessierten Schülern die Möglichkeit, sich in das Fach Mathematik zu vertiefen und sind eine Schule sowohl des kreativen als auch des logisch strukturierten Denkens. Die Wettbewerbe sind zusätzlicher Ansporn und Motivation.

Viele österreichische Mathematiker, die national oder international wissenschaftlich tätig sind, sind durch die Schule der ÖMO gegangen, haben durch die Begegnung mit der ÖMO ihr Interesse für Mathematik geweckt bekommen, und ihre Studien- und Berufswahl wurde damit entsprechend beeinflusst. Die ÖMO ist daher auch eine außerordentlich wichtige Einrichtung zur Heranbildung des wissenschaftlichen Nachwuchses.

Beide Autoren dieses Artikels verdanken der ÖMO ihre Entscheidung, Mathematik studiert zu haben – beim zweitgenannten Autor wäre es sonst wohl Astronomie oder Physik geworden. Gerd Baron und einige Kursleiter haben ihnen die Mathematik und dabei insbesondere das Problemlösen schmackhaft gemacht. Im Vorbereitungskurs in Raach, aber auch beim ÖPMW, war Gerd Baron immer für Fragen aller Art offen und seine originelle Persönlichkeit war eine wesentliche Bereicherung in der doch häufig eher trockenen Schulmathematik.

Die Autoren danken Gerd Baron und Thomas Mühlgassner für zahlreiche Fakten und Informationen.

Literatur

- T. Mühlgassner und E. Windischbacher: 25 Jahre Mathematikolympiade in Österreich.
- G. Baron und E. Windischbacher: Österreichische Mathematikolympiaden 1970–1989. Universitätsverlag Wagner, Innsbruck, 1990.
- G. Baron, E. Windischbacher und V. Lautscham: Österreichische Mathematikolympiaden 1990–1999. öbv&hpt, Wien 1999.
- *http://www.oemo.at*
- *http://imo.math.ca*
- *http://www.srcf.ucam.org/∼jsm28/imo-scores/*
- *http://www.matf.bg.ac.yu/∼matic/competitions/aboutimo_e.html*

Die Beispiele der 18. IMO in Österreich

1. In einem ebenen konvexes Viereck mit dem Flächeninhalt 32 cm^2 sei die Summe der Länge der einen Diagonale und der Längen zweier gegenüberliegender Seiten gleich 16 cm.
   Man bestimme alle möglichen Längen der anderen Diagonale.

2. Sei $P_1(x) = x^2 - 2$ und $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ für $j = 2, 3, \cdots$.
   Man zeige, dass für jede positive natürliche Zahl n alle Lösungen der Gleichung $P_n(x) = x$ reell und paarweise verschieden sind.

3. Eine quaderförmige Schachtel sei derart, dass sie vollständig mit Einheitswürfeln (Kantenlänge 1) gefüllt werden kann. Legt man möglichst viele Würfel des Volumens 2 so in die Schachtel, dass ihre Kanten parallel zu den Kanten der Schachtel liegen, so füllt ihr Gesamtvolumen genau 40 % des Hohlraums der Schachtel.
   Man bestimme die Innenmaße aller Schachteln mit dieser Eigenschaft.
   $(2^{1/3} = 1.2599\ldots)$

4. Man bestimme den größten Wert des Produkts positiver ganzer Zahlen, deren Summe 1976 ist.

5. Gegeben sei folgendes System von p Gleichungen mit $q = 2p$ Unbekannten $x_1, x_2, \cdots, x_q$:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q & = & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q & = & 0, \end{array} \qquad (1)$$

   wobei $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, q$.
   Man beweise, dass eine Lösung $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ von (1) mit folgenden Eigenschaften existiert:
   (a) alle x_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ sind ganzzahlig,
   (b) mindestens eines der x_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ ist ungleich Null,
   (c) $|x_j| \leq q$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$.

6. Eine Zahlenfolge $u_0, u_1, u_2, \ldots$ sei wie folgt definiert:

$$u_0 = 2,\ u_1 = 5/2,\ u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \text{ für } n = 1, 2, \cdots$$

   Man zeige, dass $[u_n] = 2^{(2^n - (-1)^n)/3}$ gilt, $n = 1, 2, \ldots$

Buchbesprechungen

D. Alpay (ed.): Reproducing Kernel Spaces and Applications. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 143). Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2003, XV+344 S. ISBN 3-7643-0068-X H/b € 115,56.

Hilberträume mit reproduzierendem Kern sind bekanntlich Funktionenräume, in denen die Funktionsauswertungen $x \mapsto f(x)$ beschränkt sind. Nutzen und Schönheit dieser Theorie sind unbestreitbar. Stefan Bergman war von den reproduzierenden Kernen so begeistert, dass er jeden, der bei ihm ein neues Resultat zu dem nach ihm benannten Kern zeigte, zu einem opulenten Abendessen einlud.

Daniel Alpay legt nun im Florilegium neue Ergebnisse bekannter Autoren vor. Diese Anthologie konzentriert sich auf vier wichtige Gebiete, nämlich die komplexe Analysis in einer Veränderlichen, die Differentialoperatoren, die komplexe Analysis in mehreren Veränderlichen und die nicht kommutative komplexe Analysis. Nach einer trefflichen und auch erbaulichen Einführung des Herausgebers D. Alpay folgen zwölf Beiträge renommierter Autoren:

J. Agler, F. B. Yeh and N. J. Young: Realization of functions into the symmetrised bidisc. *D. Alpay, T. Ya. Azizov, A. Dijksma, H. Langer and G. Wanjala:* A basic interpolation problem for generalized Schur functions and coisometric realizations. *J. A. Ball and V. Vinnikov:* Formal reproducing kernel Hilbert spaces: the commutative and noncommutative settings. *M. F. Bessmertnyĭ:* On realizations of rational matrix functions of several complex variables II. *D.-C. Chang, R. Gilbert and J. Tie:* Bergman projection and weighted holomorphic functions. *H. Dym:* Linear fractional transformations, Riccati equations and bitangential interpolation, revisited. *F. Gesztesy and L. A. Sakhnovich:* A class of matrix-valued Schrödinger operators with prescribed finite-band spectra. *T. L. Kriete:* Laplace transforms asymptotics, Bergman kernels and composition operators. *M. Mboup:* On the structure of self-similar systems: a Hilbert space approach. *S. Saitoh:* Reproducing kernels and a family of bounded linear operators. *F. H. Szafraniec:* Multipliers in the reproducing kernel Hilbert space, subnormality and noncommutative complex analysis. *F.-H. Vasilescu:* Existence of unitary dilations as a moment problem.

Dieser Band 143 der Reihe *Operator Theory: Advances and Applications* führt den Leser an die Front der aktuellen Forschung in einigen zentralen Bereichen der reproduzierenden Kerne heran. Das Werk ist für Spezialisten in den Gebieten ein Muss, jedoch auch für jede Bibliothek mit Schwerpunkt Analysis eine Bereicherung.

P. Zinterhof (Salzburg)

K. T. Arasu, Á. Seress (eds.): Codes and Designs. (Proceedings of the conference held in Columbis, Ohio, 2000). Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. 10. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002, VIII+322 S. ISBN 3-11-017396-4 H/b € 128,–.

This volume contains the following 22 articles of a conference held in honour of Professor Dijen Ray-Chaudhuri on the occasion of his 65th birthday:

Á. Seress: Highlights of Dijen Ray-Chaudhuri's research. *K. T. Arasu, H. D. L. Hollmann, K. Player, and Q. Xiang*: On the p-ranks of GMW difference sets. *S. Bang and S.-Y. Song:* Characterization of maximal rational circulant association schemes. *M. Deza:* Face-regular polyhedra and tilings with two combinatorial types of faces. *J. F. Dillon:* Geometry, codes and difference sets: exceptional connections. *J. H. Dinitz and D. R. Stinson:* A singular direct product for bicolorable Steiner triple systems. *D. Elvira and Y. Hiramine:* On semi-regular relative difference sets in non-abelian p-groups. *N. C. Fiala:* Every λ-design on $6p+1$ points is type-1. *C. Fremuth-Paeger and D. Jungnickel:* An introduction to balanced network flows. *D. W. Hein and Y. J. Ionin:* On the λ-design conjecture for $v = 5p+1$ points. *H. Kharaghani and V. D. Tonchev:* On a class of twin balanced incomplete block designs. *J.-L. Kim and V. Pless:* Decoding some doubly-even self-dual $[32,16,8]$ codes by hand. *D. L. Kreher and R. S. Rees:* On the maximum size of a hole in an incomplete t-wise balanced design with specified minimum block size. *W. de Launey:* On a family of cocyclic Hadamard matrices. *A. Munemasa:* A mass formula for Type II codes over finite fields of characteristic two. *E. J. Schram:* A posteriori probability decoding through the discrete Fourier transform and the dual code. *M. S. Shrikhande:* Subdesigns of symmetric designs. *I. Siap:* Linear codes over $F_2 + uF_2$ and their complete weight enumerators. *N. J. A. Sloane:* On single-deletion-correcting codes. *Z.-X. Wan:* Critical problems in finite vector spaces. *R. M. Wilson:* Existence of Steiner systems that admit automorphisms with large cycles. *A. J. Woldar:* Rainbow graphs.

H. Havlicek (Wien)

M. Audin, A. Cannas da Silva, E. Lerman: Symplectic Geometry of Integrable Hamiltonian Systems. (Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona). Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2003, X+225 S. ISBN 3-7643-2167-9 P/b € 28,–.

Es liegt hier ein Sammelband vor, der die Ausarbeitungen dreier Vorlesungen enthält, die im Jahre 2001 im Rahmen einer Sommerschule in Barcelona gehalten wurden. Ihr Gegenstand sind verschiedene geometrische Strukturen in symplektischen Mannigfaltigkeiten, die spezielle Züge aufweisen, wie sie auch die Phasenräume vollständig integrabler Hamiltonscher Systeme zeigen.

Der erste Beitrag von M. Audin behandelt Lagrangeschen Unterräume von symplektischen Räumen und insbesondere die in Bezug auf eine Orientierung definierten speziellen Lagrangesche Unterräume sowie die Verallgemeinerung dieser Begriffe auf geeignete symplektische Mannigfaltigkeiten. Der zweite Teil von A. Cannas da Silva geht auf Mannigfaltigkeiten ein, auf denen eine Hamiltonsche Wirkung einer Torusgruppe gegeben ist, und stellt ihnen projektive Varietäten mit einer solchen Wirkung gegenüber, wobei in beiden Fällen die Klassifizierung behandelt wird. Der dritte Beitrag von E. Lerman behandelt die Freiheit von Toruswirkungen auf Tangentialbündeln von Tori und ihre Beziehungen zu Kontaktmannigfaltigkeiten mit Toruswirkung.

Alle drei Beiträge geben hinreichend gestraffte Überblicke über die jeweiligen Themen. Den breitesten Blickwinkel hat der zweite, der auch als einziger ein Sachverzeichnis aufweist. Insgesamt ist der ganze Band eine gute Zusammenstellung von Kostproben verschiedener Richtungen, in die sich die Theorie der symplektischen Mannigfaltigkeiten entwickelt hat.

W. Bulla (Graz)

E. B. Burger, R. Tubbs: Making Transcendence Transparent. An intuitive approach to classical transcendental number theory. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2004, IX+263 S. ISBN 0-387-21444-5 H/b € 39,95.

Dieses Buch ist eine sehr gute Einführung in die Theorie der transzendenten Zahlen. Es enthält ausführliche, klare Beweise der klassischen Ergebnisse, die im 19. Jahrhundert und in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts veröffentlicht wurden.

Das erste Kapitel ist den Liouvilleschen Zahlen gewidmet, die die ersten Beispiele von transzendenten Zahlen sind. Im zweiten Kapitel kann man einen Beweis der Transzendenz von e finden sowie auch einen der Irrationalität von π. Die Transzendenz von π wird im dritten Kapitel bewiesen und sogar die Transzendenz von allen Zahlen e^{α}, wo $\alpha \neq 0$ eine algebraische Zahl ist (Satz von Hermite-Lindemann): wäre π algebraisch, dann wäre auch $e^{i\pi} = -1$, ein Widerspruch. Der Satz von Lindemann–Weierstrass über die algebraische unabhängigkeit solcher Zahlen für lineare unabhängige α wird hier erwähnt.

Dann kommt die Transzendenz von e^{π} an der Reihe (Satz von Gelfond). Im fünften Kapitel findet man die Lösung des siebten Hilbertschen Problems: $2^{\sqrt{2}}$ ist eine transzendente Zahl (unabhängig bewiesen von Gelfond und Schneider). Danach folgt eine Zusammenfassung des Beweises des Satzes von den sechs Exponentiellen. Die Mahlersche Klassifikation der Zahlen ist der Kernpunkt des sechsten Kapitels. Das siebte Kapitel beschäftigt sich mit der Transzendenz von $\Gamma(1/4)^2/\sqrt{\pi}$ und mit einigen Ergebnissen von Schneider über die Transzendenz von Perioden von elliptischen Kurven. Das achte und letzte Kapitel ist eine Einleitung in die Theorie der Transzendenz in Körpern mit endlicher Charakteristik.

Um dieses Buch zu genießen, sind keine besonderen Vorkenntnisse notwendig. Die Verfasser haben sich bemüht, es für Anfänger zu schreiben, und sie haben dieses Ziel erreicht. Die klaren Beweise enthalten zahlreiche Details und Argumente, und es gibt auch viele Erklärungen und Kommentare.

Y. Bugeaud (Wien)

G. N. Frederickson: Hinged Dissections. Swinging & Twisting. Cambridge University Press, 2002, XI+287 S. ISBN 0-521-81192-9 H/b £ 35,–.

Hinged Dissections is the sequel to the author's monograph on *Dissections*. Clearly, it would never have been written without this first book. However, it is self-contained, and can be read and enjoyed independently. Moreover, as the author puts it: "Swinging pieces around on hinges is fundamentally different from just rearranging them. Furthermore, there is a certain tidiness associated with hinged dissections. Gone is that pile of seemingly odd-shaped pieces that demand too much patience to assemble and are ruined if one piece gets lost. Instead, the pieces are all connected, with the connections providing hints for the rearrangement." Again, this book can be read as a research monograph in discrete geometry (it both presents much new material and is the first systematic treatment of a subject which, up to now, could be found only in a few scattered sources), but also as a leisure-time book for everybody interested in geometrical puzzles and patterns, in ingenious and surprising constructions, that is, for all who love the beauty and diversity of geometrical objects.

P. Schmitt (Wien)

V. Gutenmacher, N. B. Vasilyev: Lines and Curves. A Practical Geometry Handbook. Based on an English translation of the original Russian edition by A. Kundu. Foreword by M. Saul. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2004, XV+156 S. ISBN 0-8176-4161-0 P/b € 46,20.

This is a gentle introduction to planar geometry. The authors avoid to bore the reader by starting with a list of axioms or definitions; they rather plunge him directly into the mathematical experience by presenting a handful of interesting problems. The reader is led, almost imperceptibly, to classic results in synthetic geometry, then on to new problems, whose traditional solutions are considerably more complicated than those offered in the book.

In Chapter 2 things begin to look more traditional, as the authors introduce some kind of a toolkit, i.e., a set of elementary geometric theorems which they call "the alphabet". They set aside giving a strict axiomatic proof of every single of these theorems. The intention rather is to apply the alphabet soon to quite a host of interesting tasks.

Combining the components of the alphabet, the reader is led to more challenging problems, for example extreme value problems over 1- or 2-dimensional domains of the plane (Chapter 4: Maximum and Minimum; Chapter 5: Level Curves).

Astonishingly those tasks are solved by mere geometric considerations without making any use of methods from calculus.

Analytic machinery does not appear earlier than in Chapter 6, which deals with quadratic curves. The locus definition of ellipses, hyperbolas and parabolas as well as the one by quadratic equations is presented and the equivalency of these two definitions is shown.

Chapter 6 delivers an insight into planar kinematics. For instance, the point-paths generated by the motion of a circle rolling on another one are investigated.

In the last chapter the reader arrives at some demanding theorems concerning triangles: Feuerbach's circle, the Wallace-Simson line and the theorem of Morley are discussed.

The book can be recommended to novices in geometry; they will be led through a geometry course on a gentle, but also exciting path. On the other hand the experienced reader, too, will find some new perspectives of well known results.

A. Gfrerrer (Graz)

R. K. Guy: Unsolved Problems in Number Theory. Third Edition. With 18 Figures. (Problem Books in Mathematics). Springer, New York u.a. 2004, XVIII +437 S. ISBN 0-387-20860-7 H/b € 69,95.

Der einfache Titel der Sammlung an zahlentheoretischen Problemen wird dem Inhalt auch dieser dritten Auflage keineswegs gerecht. Neben hunderten von offenen Fragestellungen aus dem Bereich der Zahlentheorie, sorgfältig eingeteilt in 6 verschiedene Themengebiete (Primzahlen, Teilbarkeit, additive Zahlentheorie, Diophantische Gleichungen, Zahlenfolgen und Diverses) werden auch bereits gelöste Probleme angesprochen und durch ausführliche Literaturangaben unterlegt. Bezeichnend hierfür ist, dass bereits der Index der zitierten Autoren 23 Seiten umfasst.

Dieses Buch ist eine enorme Schatzkiste an relativ einfach formulierten und diskutierten (aber, wie für die Zahlentheorie typisch, meist schwierig zu lösenden) Problemstellungen, die sowohl für Spezialisten aus der Zahlentheorie, als auch für Mathematiker und Interessierte aus anderen Bereichen spannend und anregend sind. Es ist wohl zu erwarten, dass in Zukunft noch öfter Veröffentlichungen auftauchen, die einzelne in diesem Buch aufgeworfene Fragestellungen lösen oder Gegenbeispiele bringen.

R. Kainhofer (Wien)

T. Hull (ed.): Origami ^{3}. Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education. Sponsored by OrigamiUSA. A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2002, XI+353 S. ISBN 1-56881-181-0 P/b $ 49,–.

This volume contains 31 contributions on Origami, the ancient art of paper folding, from a (mainly) mathematical viewpoint. It is the proceedings volume of a conference held in Asilomar (California, 2001) which was the third in a series of conferences (and accompanying books) which started in Ferrara (Italy, 1989), and was continued in Otsu (Japan, 1994). The articles cover a wide variety of topics, from specific problems (like folding a regular 17-gon) over algorithmic questions, mathematical models, some applications (e.g. on the folding of maps) and, last but not least, on origami in education. Accordingly, this collection will be of interest to a broad audience.

P. Schmitt (Wien)

A. Iserles (ed.): Acta Numerica 2003, Vol. 12. Cambridge University Press, 2003, 512 S. ISBN 0-521-82523-7 H/b £ 55,–.

Acta Numerica is an annual publication which contains invited survey papers by leading researchers in numerical mathematics and scientific computing. The seven papers of volume 12, accessible to anyone with a solid background in numerics, present recent developments and the state of the art regarding techniques and analysis.

The first paper (*I. Babuška, U. Banerjee and J. Osborn: Survey of meshless and generalized finite element methods: A unified approach*) is devoted to meshless generalized finite element methods, which have an advantage over other finite element methods if the domain of the problem has a high complexity, is changing in time, or an adaptive procedure require changes of the mesh during computation.

B. Cockburn: Continuous dependence and error estimation for viscosity methods gives an overview of the theory of continuous dependence and error estimation for the entropy solution of scalar hyperbolic conservation laws.

B. Enquist and O. Runborg, in *Computational high frequency wave propagation*, review their own and others' work in that area. They consider variants of geometrical optics, which are asymptotic approximations obtained when the frequency tends to infinity.

The next paper is *R. Freund: Model reduction methods based on Krylov subspaces*. techniques based on Krylov subspaces. It describes some applications of reduced-order models in circuit simulation, which are defined via Padé or Padé-type approximation.

A. Griewank: A mathematical view of automatic differentiation discusses the need for and several aspects of automatic differentiation.

E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner: Geometric numerical integration illustrated *by the Störmer-Verlet method* deals with numerical integrators that preserve geometric properties of the flow of a differential equation.

E. Tadmor: Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems also considers related time-dependent problems governed by additional dissipative and dispersive forcing terms.

E. Hausenblas (Salzburg)

Shrawan Kumar: Kac-Moody Groups, their Flag Varieties and Representation Theory. (Progress in Mathematics, Vol. 204). Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2002, XIV+606 S. ISBN 0-8176-4227-7, 3-7643-4227-7 H/b € 111,03.

Im Jahr 1967 wurden von V. Kac und R. Moody unabhängig voneinander die heute als Kac-Moody-Algebren bekannten unendlichdimensionalen Verallgemeinerungen der klassischen komplexen halbeinfachen Lie-Algebren entdeckt, und seither hat dieses Gebiet eine explosive Entwicklung erfahren. Merkwürdigerweise ist nach wie vor keine „natürliche“ Definition dieser Algebren, etwa als Derivationsalgebren anderer natürlich auftretender algebraischer Strukturen, bekannt, sondern man ist auf die Beschreibung durch Erzeugende und Relationen angewiesen. Wegen der starken Analogien zur klassischen Lie-Theorie lag es nahe, nach der Existenz von Gruppen zu Kac-Moody-Algebren zu fragen. Erste Ansätze dazu stammen schon aus dem Jahr 1972 von Moody und Teo. Seitdem wurden mehrere Konstruktionen vorgeschlagen, insbesondere von V. Kac, D. Peterson, J. Tits und O. Mathieu. Wie zu erwarten, sind auch diese Gruppen durch Erzeugende und Relationen definiert und noch um ein Vielfaches komplizierter als die Algebren.

Im vorliegenden Buch versucht der Autor, eine weitgehend autarke Einführung in die Theorie der Kac-Moody-Gruppen über den komplexen Zahlen zu geben. Weiters werden ihre Darstellungstheorie und die Theorie der verallgemeinerten Fahnenmannigfaltigkeiten, also der Quotienten nach parabolischen Untergruppen, ausführlich behandelt. Nicht untersucht werden Probleme, die bei der Definition von Analoga der algebraischen Gruppen zu Kac-Moody-Algebren über beliebigen Körpern oder sogar Ringen auftreten. Hierüber gibt es neben den Originalarbeiten von J. Tits Monographien von O. Mathieu (Astérisque 159–60, 1988) und B. Rémy (Astérisque 277, 2002).

Angesichts des Umfangs und der Komplexität der Materie gleicht ein Aufbruch in das Gebiet der Kac-Moody-Gruppen einer Himalaya-Expedition. Der lange Anmarschweg läßt sich schon daraus erkennen, daß die Definition der Gruppe zu einer Kac-Moody-Algebra erst im Kapitel 6 auf Seite 183 erfolgt. Zuvor finden sich einführende Kapitel über Kac-Moody-Algebren und ihre Darstellungstheorie, Homologie und Kohomologie von Lie-Algebren, Ind-Varietäten und Pro-Gruppen und Titssche Systeme (BN-Paare). Es folgt das Studium der Fahnenmannigfaltigkeiten, der Charakterformeln von Demazure und Weyl-Kac, der Bernstein-Gelfand-Gelfand-Auflösung sowie der Topologie der Kac-Moody-Gruppen und ihrer

Fahnenmannigfaltigkeiten. Das Buch wird abgerundet durch 5 Anhänge, die in knapper aber gut lesbarer Form benötigtes Material aus der algebraischen Geometrie, Kohomologie, homologischen Algebra und der Theorie der Spektralfolgen bereitstellen.

Man kann ohne Einschränkung sagen, daß es dem Autor in bewundernswerter Weise gelungen ist, ausgehend von relativ geringen Voraussetzungen eine gut lesbare Darstellung dieses komplizierten, aber nach wie vor hochaktuellen Gebietes zu geben. Wie der Autor selbst schreibt, ist das Buch für eine Vorlesung auf dem Niveau von Dissertanten geeignet. Allerdings muß man eines mitbringen: einen langen Atem.

O. Loos (Innsbruck)

S. B. Maurer, A. Ralston: Discrete Algorithmic Mathematics. Third Edition. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2004, XXVIII+772 S. ISBN 1-56881-166-7 H/b $ 88,–.

Das Buch ist die Neuauflage eines Werkes der Autoren unter demselben Titel, welches bereits 1991 erschienen ist. Es ist ein typisches 'Undergraduate'-Lehrbuch über algorithmische diskrete Mathematik.

Nach einleitenden Kapiteln über Grundlagen folgt ein Kapitel über Induktion und rekursive Algorithmen. Danach werden elementare Probleme auf Graphen betrachtet (Wege, Kreise, Adjazenzmatrix, Erreichbarkeit, Bäume). Das Kapitel über kombinatorische Enumeration gibt eine Einführung zu Abzählverfahren (Binomischer Lehrsatz, Erzeugende Funktionen). Breiter Raum wird auch der Behandlung von Differenzengleichungen gewidmet. Das Buch wird abgeschlossen mit einem Kapitel über Wahrscheinlichkeitstheorie und ein Kapitel über Logik.

Das Buch ist durchsetzt mit einer Fülle von Übungsaufgaben und richtet sich auch im Ton hauptsächlich an Studierende. Beispielsweise werden gelegentlich auch „falsche“ Beweise angegeben, und die Leser sind gefordert, die Fehler in der Argumentation festzustellen.

Für etwas erfahrenere Leser mag der Stil gelegentlich etwas zu ausführlich erscheinen, als Lernbehelf für Studierende ist das Buch aber uneingeschränkt zu empfehlen.

F. Rendl (Klagenfurt)

S. Pemmaraju, S. Skiena: Computational Discrete Mathematics. Combinatorics and Graph Theory with *Mathematica*. Cambridge University Press, 2003, XIV+480 S. ISBN 0-521-80686-0 H/b £ 40,00.

Dieses Buch ist das Handbuch zum *Mathematica*-Package „Combinatorica“ (*http://www.combinatorica.com/*), welches diverseste Funktionen zur Darstellung und Analyse von Graphen zur Verfügung stellt.

Die Autoren dokumentieren einerseits genauestens die Funktionalität aller Funktionen im Package (das übrigens gleich mit *Mathematica* standardmäßig ausgeliefert und installiert wird, und leicht mittels <<*DiscreteMath'Combinatorica'* geladen werden kann), verwenden aber den überwiegenden ersten Teil des Buches, um die tatsächliche Verwendung der Funktionalität an vielen Beispielen zu zeigen. Am Ende jedes Unterkapitels werden außerdem etliche theoretische als auch experimentelle Aufgabenstellungen zum Selber-Lösen gegeben.

Nicht nur für Mathematiker aus den Gebieten der Kombinatorik oder Graphentheorie ist das Paket und dieses Buch ein sehr praktisches Hilfsmittel, um Probleme zu analysieren, aber auch, um auch komplexere Graphen grafisch darzustellen und tolle Illustrationen zu erzeugen.

R. Kainhofer (Wien)

C. C. Ross: Differential Equations. An Introduction with *Mathematica*. Second Edition. With 88 Figures. (Undergraduate Texts in Mathematics.) Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2004, XIII+431 S. ISBN 0-387-21284-1 H/b € 59,95.

In den letzten Jahren erschienen zahlreiche Bücher, in denen die Stärken von Computeralgebrasystemen bei der Vermittlung von verschiedensten mathematischen Themen aufgezeigt werden. Im vorliegenden Buch werden gewöhnliche Differentialgleichungen und *Mathematica* dafür herangezogen. Ziel des Autors ist es nicht, den Eindruck zu vermitteln, daß die symbolische Computermathematik das händische Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen unnötig macht. Vielmehr soll der Einsatz von *Mathematica* den Lernenden von oft mühsamen Berechnungen entlasten, um so die mathematischen Inhalte des Themas deutlicher herauszustellen. Darüber hinaus weist der Autor an vielen Stellen des Buches auf die graphischen Fähigkeiten von *Mathematica* und die dadurch ermöglichte, elegante Plausibilitätsprüfung der Resultate hin. Der Stoff und seine Darstellung entsprechen weitgehend einer klassischen Einführung in das Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen (inkl. der DGL-Systeme). Auf eine detaillierte Darstellung des Inhaltes kann daher an dieser Stelle verzichtet werden.

Das Buch ist didaktisch vorzüglich aufbereitet und besticht durch seine mathematische Strenge sowie die zahlreichen (mit Hilfe von *Mathematica*) gelösten Beispiele. Dieser Aspekt macht die Beschäftigung mit dem Buch besonders wertvoll, weil sich der Leser eine Sammlung von Programmierbeispielen anlegen kann, die jeweils mit wenig Aufwand auf weitergehende Probleme übertragbar sind. Das Buch kann Lernenden und Lehrenden gleichermaßen empfohlen werden.

E. Werner (München)

G. Schuppener, K. Mačák: Prager Jesuiten-Mathematik von 1600 bis 1740. Leipziger Universitätsverlag, 2002, 232 S. ISBN 3-936522-18-9 P/b € 32,–.

Mit dieser Monographie geben die Autoren anhand des Prager Klementinums einen ersten, zusammenfassenden Überblick zur jesuitischen Mathematik in den böhmischen Ländern. Leitmotiv sind dabei die (rekonstruierten) mathematischen Bestände der Bibliothek dieses 1556 im vormaligen Dominikanerkloster St. Clemens eingerichteten Jesuitenkollegs und davon vor allem die (vermutlich) dort entstandenen mathematischen Schriften (Bücher und Handschriften). Genauer eingegangen wird auf Matthaeus Coppylius (Vorlesungen), Johannes Hancke (vollkommene Zahlen), Ignatius Mühlwentzel (ein Lehrbuch), Caspar Knittel (Kombinatorik), und Jakub Kresa (Trigonometrie).

P. Schmitt (Wien)

H. Tijms: Understanding Probability. Chance Rules in Everyday Life. Cambridge University Press, 2004, X+380 S. ISBN 0-521-83329-9 H/b £ 40,–, ISBN 0-521-54036-4 P/b £ 18,99*.

The book has 14 chapters in two parts plus appendices such as recommended readings, answers to problems, and a bibliography. The first part, titled "Probability in Action", contains chapters on *The Law of Large Numbers and Simulations*, *Probabilities in Everyday Life*, *Rare Events and Lotteries*, *Probability and Statistics* and *Chance Trees and Bayes' Rule*. This part introduces the elementary ideas and concepts of probability and gives illustrations that have the potential of being familiar to the reader. The drunkard's walk, the Kelly betting system, and Benford's law are examples of such illustrations; examples from gambling are used as well, not with the intention to acquaint the reader with combinatorics, but again to illustrate probability. This first part, about two thirds of the book, is readable with little mathematical background. The second part on *Essentials of Probability* includes the more technical concepts such as expected value, joint and multivariate distributions, and generating functions. It requires a deeper understanding of mathematics than the first part. Each chapter of the book is accompanied by a large number of good exercises that help to develop the understanding of the reader. As the preface states, several examples and exercises are inspired by material from the well known Dartmouth website *Chance News*. Henk Tijms is not only an outstanding scientist but also engaged in popularizing applied probability in Dutch high schools. The book is an extremely well-done result of carefully designing an introduction to probablity and an excellent choice if a textbook for a first course in probability for students from a wide area of disciplines is to be chosen.

P. Hackl (Wien)

A. Vretblad: Fourier Analysis and its Applications. (Graduate Texts in Mathematics, Vol. 223). Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2003, XI+269 S. ISBN 0-387-00836-5 H/b € 64,95.

Das vorliegende Buch basiert auf einer Vorlesung des Autors für Ingenieurstudenten und möchte eine elementare Einführung in die Fourieranalysis geben. Der Autor versucht, eine in sich geschlossene Darstellung des Themenbereichs zu geben, die möglichst ohne Vorkenntnisse auskommt. So wird auch auf die Kenntnis des Lebesgue-Integrals verzichtet. Neben Fourier-Reihen und der Fourier-Transformation werden auch die Laplace-Transformation und ihr diskretes Analogon, die Z-Transformation, sowie Grundlagen der Distributionen behandelt. Das Buch folgt zuerst dem Fourierschen Zugang über partielle Differentialgleichungen, die immer wieder zur Motivation und für Übungsbeispiele herangezogen werden. Jedes Kapitel endet mit einem kurzen historischen Abriß und einer großen Anzahl von Übungsaufgaben, für die im Anhang Lösungen zu finden sind.

Die sehr spezielle Themenauswahl macht das Buch nur bedingt als Grundlage für eine Vorlesung für Mathematikstudenten verwendbar; es kann aber für interessierte Ingenieurstudenten zum weiterführenden Selbststudium und als Quelle für Übungsaufgaben empfohlen werden.

P. Grabner (Graz)

P. Winkler: Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection. A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2004, XI+163 S. ISBN 1-56881-201-9 P/b $ 18,–.

Mathematische Rätsel sind Probleme, die amüsant sind, aber nicht wichtig sein sollen. So definiert der Autor seine Sammlung von über 100 Rätseln in diesem Werk. Er gliedert diese Sammlung nach der Charakteristik der Rätsel. Nach einem ersten Kapitel, in dem sich Rätsel ohne spezifischen Bezug auf Gebiet oder Technik befinden, folgen Kapitel mit zahlentheoretischer, kombinatorischer, wahrscheinlichkeitstheoretischer, geometrischer, spielorientierter und algorithmischer Ausrichtung. Der Autor hat es sich nicht nehmen lassen, auch ein Kapitel mit geografischen Aufgabenstellungen, wo die Oberfläche der Erde im Zentrum der Rätsel steht, einzufügen. Die abschließenden drei Kapitel liefern Handicaps sowie schwierige und ungelöste Rätsel. Der Aufbau der einzelnen Kapitel ist sehr ansprechend. Nach einigen kurzen allgemeinen Bemerkungen liefert der Autor jeweils ein Beispiel mit unmittelbar folgender Lösung, um in die Art der Problemstellungen und mögliche Lösungsansätze einzuführen. Anschließend folgen in jedem Kapitel die Beschreibungen der einzelnen Rätsel, bevor für dieselben die Lösungen (inkl. von Quellenhinweisen und Querbezügen) ausführlich dargelegt werden – natürlich mit Ausnahme des letzten Kapitels, der ungelösten Rätsel, für die Quellen und Kommentare angegeben werden. Das gesamte Werk ist sehr ansprechend und sorgfältig zusammengestellt und sollte jeden Freund mathematischer Rätsel erfreuen.

G. Haring (Wien)

N. Yoshigahara: Puzzles 101. A Puzzlemaster's Challenge. Translated by R. Weyhrauch and Y. Weyhrauch. A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2004, X+121 S. ISBN 1-56881-177-2 P/b $ 14,–.

Der international bekannte Erfinder und Sammler von Rätseln hat in diesem kleinen Buch eine Sammlung von 101 Rätseln zusammengestellt. Es handelt sich hierbei sowohl um eigene Werke als auch solche von Freunden bzw. Unbekannten und stellt eine ausgewogene Mischung von einfachen und anspruchsvollen Rätseln dar. Ziel des Autors bei der Zusammenstellung war es, das Interesse und die Motivation des Lesers und Rätsellösers zu wecken bzw. zu erhalten. Der Autor glaubt nicht, dass es jemanden gibt, der alle Rätsel in einem Jahr löst; das kann man auch als Herausforderung sehen. Bei den Rätseln handelt es sich um solche sehr unterschiedlichen Charakters, nicht nur um mathematische Rätsel. Der Autor hat auch darauf verzichtet, die 101 Rätsel nach bestimmten Eigenschaften zu gruppieren. Einige Rätselbeschreibungen hätten etwas besser und ausführlicher ausfallen können. Auch der Lösungsteil ist sehr knapp gehalten, indem er nur jeweils die Lösung angibt, der Leser sich aber vielleicht Hinweise auf Rätselcharakteristika sowie mögliche Lösungswege und Prinzipien erwartet. Schade, man hätte wahrscheinlich aus dieser Sammlung netter und teilweise anspruchsvoller Rätsel etwas mehr machen können als vorliegt.

G. Haring (Wien)

Internationale Mathematische Nachrichten

Special Semester on Groebner Bases and Related Methosd

The Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (RICAM; director: Heinz Engl), in close cooperation with the Research Institute for Symbolic Computation (RISC), is organizing a

Special Semester on Groebner Bases and Related Method,

February–July 2006, see *http://www.ricam.oeaw.ac.at/srs/groeb/index.htm*.

This event will bring together key researchers in this area with postdocs and docs for intensive joint research. Also, tutorials will be offered. If you are interested in taking part, go to the web site and fill out the expression of interest. Some limited funds for supporting participation are available.

If you have any questions, please, write directly to *Bruno Buchberger*, Director of the Special Semester, Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University, A 4232 Castle of Hagenberg, Austria. e-mail *bruno.buchberger@jku.at*, *http://www.risc.uni-linz.ac.at/people/buchberger*.

10th Rhine Workshop on Computer Algebra

The *10th Rhine Workshop on Computer Algebra* will be held on March 16 and 17, 2006, in Basel, Switzerland.

This informal workshop is held every other year and gives young researchers in all subfields of computer algebra an opportunity to present their work. Apart from that, it stimulates contact between computer algebraists in the region–though, of course, the workshop is open for everyone to submit papers or attend.

The workshop is organized by Jan Draisma and Hanspeter Kraft. For information on participation and submission see *http://www.math.unibas.ch/~draisma/rwca06*.

Preise

Ostrowski Prize 2003: Paul D. Seymour (Univ. Princeton).

Steele Prize 2004 / Mathematical Exposition: John W. Milnor.

Steele Prize 2004 / Seminal Contribution to Research: Lawrence C. Evans und Nicolai V. Krylov.

Steele Prize 2004 / Lifetime Achievement: Cathleen Synge Morawetz.

Steele Prize 2005 / Mathematical Exposition: Branko Grünbaum.

Steele Prize 2005 / Seminal Contribution to Research: Robert P. Langlands.

Steele Prize 2005 / Lifetime Achievement: Israel M. Gel'fand.

Nemmers Prize 2004: Mikhael L. Gromov.

Shaw Prize 2004: Shiing-Shen Chern. Dieser Preis wurde 2004 zum ersten Mal vergeben.

Shaw Prize 2005: Andrew J. Wiles (Princeton Univ.).

Balzan Prize 2004: Pierre Deligne (Inst. for Advanced Study, Princeton).

CRM-Fields Prize 2004: Donald Dawson (Carleton Univ.).

CRM-Fields Prize 2005: David Boyd (Univ. British Columbia).

Ferran Sunyer i Balaguer Prize 2004: Guy David (Univ. Paris-Sud).

Ferran Sunyer i Balaguer Prize 2005: Antonio Abrosetti und Andrea Malchiodi (SISSA/ISAS, Triest) sowie José Seade (UNAM-Cuernavaca, Mexico).

Leibniz-Preis 2004: Frank Allgöwer (Univ. Stuttgart).

EMS-Preise 2004: Frank Barthe (Toulouse), Stefano Bianchini (Rom), Paul Biràn (Tel Aviv Univ.), Elon Lindenstrauss (Clay Math. Inst. und Courant Inst. of Math. Scieces), Andrei Okounkov (Princeton Univ.), Sylvia Servaty (Courant Inst. of Math. Scieces), Stanislav Smirnov (Royal Inst. of Techn., Schweden), Xavier Tolsa (ICREA, Spanien), Warwick Tucker (Uppsala Univ.), Otmar Venjakob (Univ. Heidelberg).

SIAM-Preise 2004: Theodor von Kármán Prize: Roland Glowinski (Univ. Houston).

SIAM-Preise 2004: W.T. and Idalia Reid Prize: Arhur J. Krener (Univ. California, Davis).

SIAM-Preise 2004: George Pólya Prize: Neil Robertson (Ohio State Univ.) und Paul Seymour (Princeton Univ.).

Dirac Medal 2004: James D. Bjorken (Stanford Univ.) und Curtis G. Callan (Princeton Univ.).

Clay Research Award 2004: Ben Green (Trinity College, Cambridge), Gérard Laumon (Univ. Paris-Sud und CNRS), Bao-Chau Ngo (Univ. Paris-Sud und CNRS).

Cantor-Medaille 2004: Friedrich Hirzebruch.

John von Neumann Theory Prize 2004: J. Michael Harrison (Stanford Univ.).

A. M. Turing Award 2005: Vinton G. Cerf und Robert E. Kahn.

Stefan Bergmann Prize 2005: Elias M. Stein (Princeton Univ.).

AMS-Preise 2005: Cole Prize in Number Theory: Peter Sarnak (New York Univ., Princeton Univ.).

AMS-Preise 2005: Bôcher Prize: Frank Merle (Cergy-Pontoise).

L. E. J. Brouwer Medal 2005: Lucien Birgé (Univ. Paris VI).

Rolf Schock Prize 2005: Jaakko Hintikka (Boston Univ.), Luis A. Caffareilli (Univ. Texas).

Salem Prize 2005: Ben Green (Univ. Bristol).

(Notices AMS)

INDIANA UNIVERSITY MATHEMATICS JOURNAL
(Formerly the Journal of Mathematics and Mechanics)

Edited by

P. Sternberg, E. Bedford, H. Bercovici, R. Glassey, M. Larsen, K. Zumbrun.

The subscription price is \$ 175.00 for subscribers in the U.S. and Canada, and \$ 185.00 for all others. Private individuals personally engaged in research of teaching are accorded a reduced rate of \$ 80.00 per volume. The JOURNAL appears in quarterly issues making one annual volume of approximately 1200 pages.

Indiana University, Bloomington, Indiana U.S.A

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Brief des Vorsitzenden

Wenn Sie dieses Heft in Händen haben, steht der Klagenfurter Kongress (19.–23. September 2005) mit seinem attraktiven wissenschaftlichen und Rahmenprogramm (*http://oemg2005.uni-klu.ac.at*) unmittelbar bevor. Die Europäische Kommission wird bei der Eröffnung und bei möglichen forschungspolitischen Diskussionen nun durch Herve Pero, den Leiter der Abteilung "Large Infrastructures", vertreten sein. Seit dem Erscheinen der letzten IMN ist der Bericht über die Mathematik-Evaluierung veröffentlicht worden. Er ist über die Homepage der ÖMG (*http://www.oemg.ac.at*) abrufbar. Wie im letzten Heft der IMN angekündigt, wurde der Bericht von den beiden Vorsitzenden der Evaluierungskommission, Karl-Heinz Hoffmann und Jean-Pierre Bourguignon, in einer sehr gut besuchten Veranstaltung im Wissenschaftsministerium am 6. Juli 2005 öffentlich präsentiert. Diese Präsentation war auch deshalb wichtig, weil einige mögliche Missverständnisse klargestellt werden konnten: so hat etwa Herr Hoffmann darauf hingewiesen, dass aus der Nichterwähnung mancher Arbeitsgruppen keineswegs irgendwelche negativen Schlüsse gezogen werden dürfen. Es ist wohl unvermeidbar, dass in einem Bericht dieser Dimension nicht jedes Detail objektiv richtig sein wird, mit Auslassungen, Missverständnissen oder auch Fehlinterpretationen (hoffentlich insgesamt geringerem Umfangs) muss gerechnet werden.

Deshalb hat der Vorstand der ÖMG beschlossen, neben der Veröffentlichung des Berichts auch allen Betroffenen Gelegenheit zur Stellungnahme auf der Homepage der ÖMG zu geben, wo auch die Bedingungen für solche Stellungnahmen publiziert sind, die im Wesentlichen darin bestehen, dass Stellungnahmen nur die jeweilige eigene Arbeitsgruppe betreffen dürfen und keine Attacken auf Gutachter publiziert werden. Wir wollen auf diese Weise auch den Adressaten des Evaluierungsberichts Gelegenheit geben, sich ein möglichst umfassendes Bild an einer Stelle, nämlich der Homepage der ÖMG, zu verschaffen. Der Bericht wird wohl (und das war ja auch die Absicht dieses gesamten Projekts) in Zukunft eine wesentliche Entscheidungsgrundlage für Ressourcenentscheidungen sein, aber natürlich nicht die einzige und wohl auch nicht unreflektiert ohne Anhörung der Betroffenen. In diesem Sinn bin ich überzeugt, dass dieses umfangreiche Evaluierungsprojekt insgesamt sehr positive Auswirkungen auf die Entwicklung der

Österreichischen Mathematik in den nächsten Jahren haben wird.

In den letzten IMN wurde über eine Resolution der ÖMG zur Lehrerausbildung berichtet. Erfreulicherweise hatte unsere Intervention (wie ich annehme, gemeinsam mit anderen, sinngemäß gleichen Interventionen) Erfolg: ich wurde vom BMBWK davon informiert, dass die Ausbildung der Gymnasiallehrer auch nach Gründung der Pädagogischen Hochschulen weiterhin an der Universität verbleiben wird; eine Kooperation insbesondere im Bereich der Pädagogik und Didaktik mit den Pädagogischen Hochschulen ist angestrebt. Ich habe angeboten, dass die ÖMG sich an den Diskussionen über Details dieser Absicht beteiligen wird.

In diesem Heft der IMN finden Sie auch die Einladung zur Generalversammlung der ÖMG, die im Rahmen des Klagenfurter Kongresses stattfinden wird. Ein wichtiger Punkt auf dieser Generalversammlung wird die Neuwahl des Vorstandes, insbesondere des Vorsitzenden, für die Jahre 2006 und 2007 sein. Der Vorstand hat einen Wahlvorschlag erarbeitet, den ich aber vor Befassung des Beirats nicht bekannt geben möchte; was die Person des vorgeschlagenen Vorsitzenden betrifft, wird der Wahlvorschlag allerdings nicht überraschend sein. Ich bitte alle Mitglieder, die Generalversammlung zu besuchen, nicht zuletzt, um auch die Vorstellung der diesjährigen ÖMG-Preisträger und unseres neuen Ehrenmitglieds Helmut Neunzert mit ihrer Anwesenheit zu beehren.

Heinz W. Engl

Emeritierungsfeier von Prof. Johann Cigler

Die Emeritierungsfeier von *Prof. Johann Cigler* findet am Freitag, dem 30. September 2005 ab 9 Uhr an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien (Hörsaal 3, UZA 2, Geozentrum, Althanstr. 14, 1090 Wien) statt.

Gastvortragende sind *Dominique Foata* (Univ. Strasbourg), *Peter Kirschenhofer* (Univ. Leoben), *Peter Paule* (Univ. Linz) und *Christian Krattenthaler* (Univ. Wien).

Um Anmeldung wird gebeten: Tel. (01) 4277 50601, e-mail *dekanat.mathematik @univie.ac.at*

Analysis-Kolloquium

Am 20. Oktober 2005 findet am Institut für Analysis und Scientific Computing der TU Wien ein Analysis-Kolloquium statt.

Gastvortragende sind *Hans Troger* (TU Wien), *Gregory Derfel* (Ben Gurion Univ.), *Martin Blümlinger* (TU Wien), *Robert Tichy* (TU Graz) und *Josef Descovich*.

Kolloquium zum 65. Geburtstag von Prof. Gerd Baron

Am 21. Oktober 2005 findet ab 13 Uhr 15 am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der TU Wien (SEM 104, Freihaus, Turm A, 5. Stock, Wiedner Hauptstr. 8–10, 1040 Wien) ein Kolloquium anlässlich des 65. Geburtstags von *Prof. Gerd Baron* statt.

Gastvortragende sind *Thomas Mühlgassner* (Eisenstadt), *Władysław Narkiewicz* (Univ. Wroclaw) und *Stefan Wagner* (TU Graz).

Vortrag im Rahmen der ÖMG in Wien

3. 6. 2005: *Günter Ziegler* (TU Berlin): Über die Kombinatorik der 3-dimensionalen Sphäre.

Neue Mitglieder

Nina Brandstätter, Mag. — Institut für Finanzmathematik, Univ. Linz, Altenbergerstr. 69, 4040 Linz, Österreich. geb. 1976. 2004–05 Forschungsassistentin am RICAM, seit 2005 Forschungsassistentin am Institut für Finanzmathematik Uni Linz. e-mail *nina.brandstaetter@oeaw.ac.at*.

Erich Plasser, Dr. techn., Dipl.Ing., MBA — Wien. Studium Elektrotechnik/Regelungstechnik TU Graz, MBA der Universität Krems, Doktorat der TU Wien auf dem Gebiet der Kommunikationsnetze.

Dirk Praetorius, Ao. Univ.Prof., Dipl.Math., Dr. techn. — Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien, Wiedner Hauptstr. 8–10, 1040 Wien. geb. 1974. 2002 Erstes Staatsexamen in Mathematik und Lateinischer Philologie (Kiel), 2000 Diplom in Mathematik (Kiel), 2001–05 Univ.Ass. Institut für Analysis und Scientific Computing der TU Wien, 2003 Promotion Technische Mathematik, 2005 Habilitation für Numerische Mathematik. e-mail *dirk.praetorius @tuwien.ac.at*, *http://www.math.ac.at/∼dirk*.

Carola-Bibiane Schönlieb, Mag. — Fachbereich Mathematik, Universität Salzburg, Hellbrunnerstr. 34, 5020 Salzburg. geb. 1979. 1998–2004 Diplomstudium Mathematik Univ. Salzburg, 2001/02 Hans-Stegbuchner-Preis für außergewöhnliche Studienleistungen, 2002–04 Mitarbeiterin im FWF-Projekt *Automated Analysis, Interpretation and Classification of Drawings and Paintings*, Diplomarbeit: Invariante Momente, 2004 Diplom mit ausgezeichnetem Erfolg. Seit 2004 Dissertantin, seit 2004 Lehrbeauftragte. e-mail *carola.schoenlieb@sbg.ac.at*.

Einladung zur Generalversammlung der ÖMG

Zeit: Dienstag, 20. September 2005, 17 Uhr
Ort: Universität Klagenfurt, Hörsaal B (im Neubau)

Tagesordnung:

1. Feststellung der Beschlussfähigkeit
2. Berichte des Vorsitzenden und weiterer Vorstandsmitglieder, insbesondere des Kassiers
3. Berichte aus den Landessektionen
4. Bericht der Vorsitzenden von Didaktikkommission und Lehrersektion
5. Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands
6. Neuwahl des Vorsitzenden und des Vorstandes für die Jahre 2006 und 2007
7. Neuwahl der Rechnungsprüfer
8. Verleihung der Förderungs- und Studienpreise
9. Verleihung der Ehrenmitgliedschaft an Prof. Helmut Neunzert laut Beschluss der letzten Generalversammlung
10. Allfälliges

o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Heinz Engl