IMN

Internationale
Mathematatische
Nachrichten
Nr. 184

Wolfgang Gröbner zum 20. Todestag
7 Millenniumsprobleme (1. Teil)

Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

August 2000

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83) und P. Flor (1986–99).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/1182, A-1040 Wien. e-mail *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.mat.univie.ac.at/~oemg/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen. Jahresbeitrag: 250,– ATS.

Bankverbindung: Scheckkonto Nr. 229-103-892 der Bank Austria AG, Zweigstelle Wieden, oder PSK Kto. Nr. 7823-950, Wien.

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Kopitu, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926.

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 184 (54. Jahrgang) **August 2001**

Inhalt

Das Titelblatt zeigt einen sogenannten *Tribar* — ein Beispiel einer zweidimensionalen Darstellung eines dreidimensional unmöglichen Gegenstandes, der aus drei Stäben gebildet wird, die ein räumliches ‘Dreieck’ mit drei rechten Winkeln bilden; erstmals beschrieben wurde er von Roger Penrose im *British Journal of Psychology*, Band 49 (1958).

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 184 (2001), 1–28

Wolfgang Gröbner (11.2.1899–20.8.1980) zum 20. Todestag

Heinrich Reitberger
Institut für Mathematik der Universität Innsbruck

Um ein Bild Wolfgang Gröbners erstehen zu lassen, erlaube ich mir, zunächst aus der Laudatio von Prof. E. Hlawka aus Anlaß des 80. Geburtstags Gröbners ausführlich zu zitieren[1] und anschließend darauf einzugehen, wie die Gröbnerschen Ideen in den vergangenen 20 Jahren weitergewirkt haben.

1 Sein Leben[2]

Als wir an einem heißen Augusttag des Jahres 1980 Prof. Gröbner in einem Sanatorium geistlicher Schwestern besuchten, meinte er: „Gestern waren meine Heidelberger Enkelkinder da, jetzt kann ich mich ausruhen.“ Nach seinem bewegten Leben hatte er die Ruhe wohlverdient: er war stets um seine große Familie bemüht — und dazu zählte er wohl auch seine Mitarbeiter — er hatte aber meist auch ein speziell angefertigtes Brett bei sich, um auf dieser Unterlage seine Ideen zu Papier bringen zu können. Am liebsten tat er dies in der Veranda seiner Wohnung in der Innsbrucker Kochstraße unter der Fürsorge seiner bemühten Gattin.

Doch nun etwas systematischer zu Gröbners Lebenslauf:

Er wurde am 11. Februar 1899 in Gossensaß an der Südtiroler Seite des Brennerpasses geboren und wuchs dort mit vier Geschwistern auf. Nachhaltige Auswirkungen auf sein späteres Leben hatte das Jesuiteninternat in Feldkirch. 1917

[1] IMN 124 (1980), 74–80 (fälschlicherweise dort Laudatio aus Anlaß der Emeritierung des Jubilars genannt!)

[2] Vgl. auch den Vortrag von R. Liedl anläßlich des Kolloquiums „100 Jahre Gröbner“ *http://mathematik.uibk.ac.at/archiv.html*

ISSN 0020-7926

mußte er an die italienische Front und nach Kriegsende begann er ein Maschinenbaustudium an der Technischen Universität in Graz. Gegen Ende dieses Studiums kam es zu einer dramatischen Wende in Gröbners Weltanschauung: einer seiner Brüder verunglückte an einem Sonntagnachmittag mit dem Motorrad tödlich, ohne zuvor, wie sonst üblich, den Vormittagsgottesdienst besucht zu haben. Die drohende ewige Verdammnis für seinen geliebten Bruder stürzte den Stella-Matutina-Absolventen in eine schwere seelische Krise — es kam zum Abbruch des Technikstudiums und zum Bruch mit der katholischen Kirche. Sein faustisches Suchen nach einer Religiosität ohne Zwänge beschreibt er ein Jahrzehnt später in seinem ersten Buch *Der Weg aufwärts* [63] und in den frühen sechziger Jahren in den Neujahrsthesen sowie seinen Seminaren über Grenzprobleme, die ihn in ernsthafte Schwierigkeiten mit der Innsbrucker Theologischen Fakultät brachten (vgl. P. Goller und G. Oberkofler *... daß auf der Universität für die Lehre, die dort vertreten wird, wirkliche Gründe gegeben werden* [17]).

Die für uns wichtigste Spätfolge bleibt jedoch: Gröbner begann 1929 — nach seiner Verehelichung – mit dem Mathematikstudium an der Universität Wien, weil

> „die Mathematik die wahrhaft königliche Wissenschaft sei, die einzig und ausschließlich auf eigene Einsicht gegründet ist, die konsequent jede fremde Autorität außerhalb des eigenen Verstandes ablehnt und niemals etwas deshalb zu glauben vorschreibt, weil es irgendwer irgendwo irgendeinmal gesagt habe.“ (Österr. Hochschulzeitung 1958)

Für Gröbner die beeindruckendste Lehrer waren W. Wirtinger und Ph. Furtwängler — aber auch er machte Eindruck: Wirtinger hebt in seiner Arbeit *Eine Determinantenidentität und ihre Anwendungen* Gröbners wichtigen Beitrag im Seminar 1933/34 hervor. Gröbners Dissertation bei Furtwängler im Jahre 1932 trägt den Titel *Ein Beitrag zum Problem der Minimalbasen* und erscheint 1934 in den Monatsheften [62] (zuvor 1932 schon kurz angezeigt [60]).

Auf Empfehlung Furtwänglers ging Gröbner gleich nach der Promotion nach Göttingen, um die Vorlesungen von Emmy Noether zu hören. Bereits zu Weihnachten konnte er in einem Brief aus Gossensaß der *„sehr verehrten Frau Professor“* die Lösung einer Problemstellung über irreduzible Ideale skizzieren, die dann zu der meiner Meinung nach bedeutendsten Arbeit Gröbners [61] führte, auf die wir im nächsten Abschnitt eingehen werden.

Gröbner entschuldigt sich auch gleich bei Noether, daß er im Jänner 1933 *„hauptsächlich aus materiellen Gründen“* wieder nach Österreich zurück möchte. Er konnte aber keine Stelle an einer Universität bekommen und wirkte bis 1936 als Privatgelehrter, der unter anderem Kleinkraftwerke baute, in Gossensaß, wo er im Herbst im väterlichen Hotel zufällig mit Prof M. Picone zusammentraf, der dort seine Ferien verbrachte. Dies führte schließlich zu einer Anstellung an dessen Institut für angewandte Mathematik in Rom. Da er als Südtiroler für Deutschland optierte, mußte Gröbner 1939 Rom wieder verlassen und wurde nach einer kurzfristigen Tätigkeit bei der Preußischen Akademie der Wissenschaften im Rahmen der Redaktion der *Fortschritte der Mathematik* in Berlin als Äquivalent zu seiner römischen Position als „Ordentlicher Konsulent“ am 31. 10. 1941 zum Extraordinarius an der Universität Wien ernannt. Allerdings mußte er kurz darauf zum Wehrdienst einrücken, wurde aber am 19. 6. 1942 UK-gestellt und mit dem Aufbau eines *Luftwaffeninstituts zur Anwendung höherer mathematischer Methoden auf Probleme der Luftfahrttechnik* unter Leitung des Freiburger Mathematikers G. Doetsch mit vorläufigem Sitz in Braunschweig betraut. Die von Gröbner geleitete Arbeitsgruppe *Industriemathematik* erstellte Integraltafeln, aber auch einen *Vergleich der zu erwartenden Trefferwahrscheinlichkeit von MGs und Schrapnellraketen im Luftkampf*.

Foto: Bildnis W. Gröbners von R. Liedl

Prof. Hlawka erinnert sich an einen Besuch in Braunschweig:

> „Das Essen an dieser Anstalt war selbst für die damaligen Verhältnisse entsetzlich, aber die Unterhaltung mit Gröbner und den Kollegen, so mit Prof. Peschl, ist mir in lebhafter und schöner Erinnerung."

1945 kann sich Gröbner rechtzeitig zu seiner Familie nach Tirol absetzen — kann aber nach Kriegsende nicht gleich nach Wien:

> „Nach dem Ausscheiden der beiden ordentlichen Professoren des Faches besitzt die Fakultät nur mehr die beiden Extraordinariate, derzeit eingenommen durch Dr. Wolfgang Gröbner und Dr. Nikolaus Hofreiter. Auch diese beiden standen der Fakultät während des Sommersemesters 1945 und des Wintersemesters 1945/46 nicht zur Verfügung, da Prof. Gröbner sich noch immer jenseits der Demarkationslinie in Tirol aufhält ... Der Dekan hat Prof. Gröbner, der nicht Angehöriger der NSDAP ist, beauftragt, mit Beginn des Sommersemesters 1946 sein Lehramt anzutreten; ob es ihm möglich sein wird, rechtzeitig einzutreffen, ist fraglich" [17].

Gröbner traf dann doch in Wien ein, nahm aber 1947 *„zu unser aller großem Bedauern"* (E. Hlawka) ein Ordinariat in Innsbruck an. Es war dies eine Art Personalrochade, da J. Radon, den es zu Kriegsende unter Mithilfe von Prof. Vietoris nach Innsbruck verschlagen hatte, am 24. 1. 1947 zum Ordinarius in Wien ernannt wurde. Im Gegenzug stand im Innsbrucker Besetzungsvorschlag W. Gröbner primo loco:

> „Gröbner gilt als guter Lehrer und ist politisch unbelastet."

Ganz frei vom Geist der damaligen Zeit war aber auch er nicht gewesen, wie aus einem Brief vom 5. 9. 1944 an G. Doetsch hervorgeht:

> „Der Schrecken über die jüngste unglückliche Entwicklung der Kriegslage in Frankreich ist mir ordentlich in die Glieder gefahren. Ich hoffe, daß es trotz allem gelingen wird, das Schicksal zu bezwingen und unser Vaterland zu erretten. Ich bleibe selbstverständlich mit allen Kräften auf meinem mir zugewiesenen Posten, bin aber sofort zu einem anderen Einsatz bereit, falls dies verlangt werden sollte. Ein Weiterleben über eine etwaige Niederlage hinaus würde mir absolut wertlos erscheinen." [17]

Dabei hatte er noch 1935 geschrieben:

> „Die Seele ist autonom, keine äußere Macht kann ihr gebieten".

Sein verdienstvolles Wirken in Innsbruck bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1970 wird aus den folgenden Abschnitten über sein wissenschaftliches Werk ersichtlich sein.

In den Jahren danach trafen wir uns jeden Mittwoch zu einem Arbeitsessen — bis wir schließlich in seinem letzten ‚Stammloka', einem renommierten Hotel in der Nähe seiner Wohnung, Lokalverbot bekamen: Gröbner hatte nämlich seit einem Magendurchbruch nur mehr einen Teil des Magens, was er durch ein Glas Rotwein auszugleichen versuchte — falls es aber mehr wurde, konnte er recht aufbrausend werden und dazu kam seine Schwerhörigkeit — ich konnte das Hotelpersonal fast verstehen. Dennoch: *Der Prophet gilt offenbar nichts im eigenen Land!*

Ein Schlaganfall zwang ihn dann 1980 ins Krankenbett, wo er sich in großer Würde und Güte — wie eingangs erwähnt — von den Seinen verabschiedete; eine seiner Töchter war ihm bereits vorausgegangen.

2 Irreduzible Ideale — Gröbner-Dualität

Zu Gröbners von E. Noether angeregter Untersuchung der irreduziblen Ideale in kommutativen Ringen [61] lassen wir am kompetentesten Emmy Noether selber zu Wort kommen:[3]

> **Gröbner, Wolfgang: Über irreduzible Ideale in kommutativen Ringen.** Math. Ann. **110**, 197–222 (1934).
>
> Irreduzible Ideale sind solche , die sich nicht als Durchschnitt echter Teiler darstellen lassen. Für diese hatte M a c a u l a y [Math. Ann. **74** (1913) und Cambridge Tracts **19** (1916)] im Fall des Polynombereichs — unter anderer Definition — interessante aber schwer zugängliche Resultate vermöge seines „inversen Systems" gewonnen. — Hier wird eine einfache und allgemeine Theorie entwickelt, für beliebige kommutative Ringe mit Teilerkettenbedingung gültig; die ersten Ansätze dazu lagen in (unveröffentlichten) Notizen von Ref. vor. Im Mittelpunkt stehen die verschiedenen Charakterisierungen der irreduziblen Ideale: Ein Primärideal $\mathfrak{q}$ zu Primideal $\mathfrak{p}$ ist dann und nur dann irreduzibel, wenn jeder primäre, zu $\mathfrak{p}$ gehörige Teiler $\mathfrak{a}$ Quotient ist; $\mathfrak{a} = \mathfrak{q} : \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{q} : \mathfrak{a}$. Oder damit gleichbedeutend: Wenn mit einer Kompositionsreihe aus den eben charakterisierten $\mathfrak{a}_i$ jeweils auch die Quotienten $\mathfrak{q} : \mathfrak{a}_i$ eine Kompositionsreihe bilden. Vermöge dieser Charakterisierung ergibt sich als das allgemeine Äquivalent des „inversen Systems" eine eineindeutige Abbildung der Ideale $\mathfrak{a}$, indem

[3]Zentralblatt für Mathematik **9** (1934), p. 290.

> jedem Quotient $\mathfrak{q}:\mathfrak{a}$ als „inverses Ideal" zugeordnet wird. Die dabei geltenden Gesetzmäßigkeiten sind dieselben, die D e d e k i n d zuerst beim Übergang von Modul zu Komplementärmodul betrachtet hat. Diese Abbildung ergibt allgemeine Sätze über irreduzible Ideale und Durchschnitt solcher gegenseitig primar (reguläre Ideale); z. B. Beziehungen zwischen Anzahl der Basiselemente und irreduzibler Komponenten des inversen Ideals; Beziehungen zwischen Anzahl der Basiselemente von $\mathfrak{p}^i$ und $\mathfrak{p}^{\rho-i-1}$ (ρ Exponent von $\mathfrak{q}$) usw. Der Schluß bringt ein Kriterium dafür, daß ein Hauptideal regulär sei.
>
> *E. Noether* (Bryn Mawr)

$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{c}$ nennt man reduzibel; ist dies nicht möglich, so heißt das Ideal $\mathfrak{a}$ irreduzibel.

Ein Beispiel: In $\mathbb{Z}$ ist das Ideal $(10)=(2)\cap(5)$ reduzibel, die Ideale $(2)^2$ und $(5)^3$ irreduzibel, in $\mathbb{C}[x_1,x_2]$ ist $\mathfrak{q}=(x_1^2,x_1x_2,x_2^2)=(x_1^2,x_2)\cap(x_1,x_2^2)$ als Durchschnitt zweier echter Teiler ein reduzibles Primärideal. Die beiden Teiler sind nun aber irreduzible Primärideale.

Die von Gröbner entwickelte Dualitätstheorie irreduzibler Ideale mündet ebenso wie die Pontrjaginsche und die Grothendiecksche in die *Matlis-Dualität*.

Auch W. Krull hat den Wert der Gröbnerschen Arbeit sofort erkannt und sie in seinem Enzyklopädieartikel über die *Theorie der Polynomideale und Eliminationstheorie* ausführlich referiert.

3 Struktur der Primärideale — Gröbner-Korrespondenz

Ein zentrales Anliegen Gröbners war es, die Struktur von Primäridealen durch Differentialbedingungen zu charakterisieren. Zugrunde liegt die einfache Idee, die Vielfachheit einer Nullstelle eines Polynoms in einer Variablen durch die Ableitung auszudrücken:

$$x_0\ k\text{-fache Nullst. von } f \Leftrightarrow f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\ f^{(k)}(x_0)\neq 0$$

Begonnen hatte er damit in der zweiten Annalenarbeit [67] mit Primidealen — dort wird mit der *Primbasis* übrigens auch ein Beispiel einer Gröbnerbasis (siehe Abschnitt 8) untersucht —, das Problem in [89] bzw. [146] für Primärideale formuliert und es zum Teil in [139] gelöst.

Für diesen Fall führten M.G. Marinari, H.M. Möller und T. Mora 1996 die Bezeichnug *Gröbner duality* ein [35] (siehe U. Obersts umfassende Darstellung [42]).

H. Hauser und G. Müller definieren 1993 eine Zuordnung zwischen Untervarietäten des affinen Raums und *geometrischen* Unteralgebren der Lie-Algebra aller Vektorfelder und nennen sie *Gröbner-Korrespondenz* [20].

4 Multiplizität — Syzygien

Schon beim Hauptsatz der Algebra muß man die Nullstellen mit ihrer Multiplizität zählen, um über $\mathbb{C}$ für ein Polynom n-ten Grades n Nullstellen zu erhalten. Der Schnitt höherdimensionaler Varietäten erfordert, um die *richtige* Anzahl an Schnittpunkten zu erzwingen, entweder eine *dynamische* Vorgangsweise (wie etwa in der Topologie: man *verwackelt* die Situation ein wenig) oder eine mehr *statische* Betrachtung: man legt die Multiplizität eines Primärideals (durch Macaulay's Länge) ein für alle mal fest und verzichtet auf die Allgemeingültigkeit des sog. *Bezoutschen Satzes*.

Die anfangs umkämpfte Entwicklung des Gröbnerschen statischen Standpunkts in Zusammenarbeit mit den Hallenser Algebraikern unter Führung des leider allzu früh verstorbenen Wolfgang Vogel hat zuletzt H. Flenner vorbildlich dargestellt.[4]

Hinsichtlich der Kontroversen zwischen P. Dubreil und Gröbner um die Syzygientheorie und die Charakterisierung *perfekter* Ideale siehe Matutat-Renschuch [36].

5 Schnellschüsse

Obwohl Gröbner beim Rechnen kaum Fehler unterliefen — es tauchen kaum Korrekturen für die Integraltafeln [113],[114] auf (siehe [12]) — war er bei manchen theoretischen Überlegungen etwas voreilig:

1956 hatte er eine *Auflösung der Singularitäten einer algebraischen Varietät* angekündigt, die aber in der Rezension in den Math.Rev. von P. Abellanas ziemlich zerzaust wurde. Dies ging aber andern ebenso — vgl. meine Notiz [44].

Eine längere derartige Episode rankt sich um das Jacobi-Kellersche Umkehrproblem polynomialer Abbildungen.

Als ich im WS 63/64 erstmals bei Prof. Gröbner mitarbeiten durte, stellte er mir die harmlos klingende Aufgabe, die polynomialen Lösungen

$$u = u(x,y),\ \ v = v(x,y)\ \text{ der partiellen Dgl. }\ u_x v_y - u_y v_x = 1$$

zu untersuchen, insbesondere zu prüfen, ob sie polynomiale Umkehrungen besäßen. Analog zum trivialen eindimensionalen Fall kommt man rasch auf die

[4] Wolfgang Vogel's contributions to intersection theory
http://www.mathematik.uni-halle.de/history/vogel/index.html

lineare Lösung

$$u = a + bx + cy, \quad v = d + ex + fy \qquad \text{mit} \quad \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = 1$$

Auch die folgende quadratische Lösung ist wohlbekannt und spielt neben ihrer quadratischen Inversen eine wichtige Rolle in der Theorie dynamischer Systeme:

$$u = x\cos a - (y - x^2)\sin a, \quad v = x\sin a + (y - x^2)\cos a, \qquad \det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1.$$

Ich kam bald darauf, daß Gröbners Frage nach der Umkehrbarkeit einer volumserhaltenden polynomialen Transformation O.H. Kellers Jacobi-Vermutung war, die für Gröbner aktuell war, weil 1955 W. Engel einen *vermeintlichen* Beweis mit Hilfe der Gröbnerschen *Lie-Reihen-Methode* (siehe Abschnitt 6) gegeben hatte, in dem aber Vitushkin später zwei Fehler entdeckte. Weiters hatte B. Segre 1956 drei unvollständige *Beweise* publiziert und nach einem rein algebraischen Beweis gefragt, den Gröbner 1961 prompt lieferte [110]— leider entdeckte O. Zariski darin eine fehlerhafte Formel.

Die Veröffentlichung eines zweiten inkorrekten Gröbnerschen Beweises konnte ich, der ich nun ja hinzugestoßen war, gerade noch verhindern: Gröbner wollte seine Arbeit für eine Festschrift zu Ehren Segres abschicken, da kam mir W. Kaup, der zu einem Vortrag in Innsbruck zu Gast war, zu Hilfe: mir war nämlich aufgefallen, daß die Gröbnersche Argumentationsweise auch für ganz transzendente Abbildungen *richtig* sein müßte; Kaup verwies mich aber auf das injektive Gegenbeispiel von Bieberbach.

1990 hat van den Essen [51] die Frage nach der polynomialen Invertierbarkeit mit reduzierten Gröbner-Basen verknüpft und 1994 [52] wieder aufgegriffen — dabei aber Gröbners Ergebnisse über eine Inversionsformel mit Hilfe der Lie-Reihen-Methode (siehe Abschnitt 6) nicht gekannt (vgl. meine Note [43], siehe auch S. Ahhyankar-W. Li [1]).

Unklare Formulierungen enthält auch Gröbners allerletzte Arbeit: *Galoistheorie* [150] (vgl. K. Girstmair-U. Oberst [16]).

6 Differentialgleichungen und Lie-Reihen

In einem Brief vom 4. 3. 1943 von Gröbner an Doetsch kündigte sich ein weiterer Forschungsschwerpunkt an:

> „Als eine der dringendsten Aufgaben für die theoretische Forschung würde ich die ansehen, systematisch die Untersuchung der nichtlinearen Differentialgleichungen aufzunehmen. Beinahe alle Probleme,

wo man sich nicht mehr mit den allerersten Annäherungen begnügen darf, führen auf nichtlineare Differentialgleichungen und hier liegt fast noch gar nichts an theoretischer Forschung vor.“

Ab dem Jahre 1958 begann Gröbner sich damit systematisch auseinanderzusetzen. Er knüpfte bei der Darstellung der Lösung einer Anfangswertaufgabe für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(*) \qquad \dot{x} = f(x), \ \ x(t_0) = x_0$$

bei Sophus Lie an: G. Kowalewski schreibt in seiner *Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen*:

> „Wir beginnen mit einer Betrachtung, bei der S. Lie in seinen Vorlesungen besonders gern verweilte: Die Reihenentwicklung der Lsg. von $(*)$ schreibt man am besten in der symbolischen Gestalt
>
> $$(**) \qquad x(t) = e^{tV} x|_{x=x_0}, \ \text{ wobei } \ V := \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.\text{“}$$

Gröbner schrieb lieber

$$e^{tD}$$

und unter diesem *Logo*, das an das vertraute Matrixexponential im linearen Fall konstanter Koeffizienten erinnerte, initiierte er — zunächst gemeinsam mit dem theoretischen Physiker F. Cap — ein Forschungsprogramm und konnte *Drittmittel* von der NASA und US Army sichern und uns als Mitarbeiter anstellen.

Zur Computerimplementierung obiger Formel wurde zunächst nach Rekursionsformeln für die Operatorpotenzen gesucht (vgl. G. Wanner [56]).

Gröbner hatte aber auch die fundamentale Idee, den Operator D zu zerlegen: $D = D_1 + D_2$, wo man nach gutem alten Rezept astronomischer Störungsrechnung in D_1 den bekannten Hauptteil des Problems verpacken und D_2 als Störung ansehen konnte. Gröbner bewies mit diesen im allgemeinen nicht kommutativen Operatoren D_1 und D_2 die *Störungsformel*

$$e^{tD} z_i = e^{tD_1} z_i + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t \frac{(t-\tau)^m}{m!} [D_2 D^m z_i] \, d\tau,$$

die ein überaus genaues numerisches Verfahren (mit dem Restglied nach H. Knapp) lieferte, das 1968 im Forschungszentrum in Madison einem Härtetest unterzogen wurde (vgl. H. Knapp — G. Wanner [25]).

Später konnten wir den Zusammenhang mit einer zur selben Zeit von V.M. Alekseev gefundenen Integralgleichung herstellen (siehe [55]).

Um 1980 wurden dann die *Lie-Reihen* von M. Fliess auf den Fall nicht kommutativer Variablen verallgemeinert und auf Fragen der Systemtheorie angewandt (siehe [14],[24].

Ein Spezialfall dieser *Fliess-Reihen*, der auf Chen zurückgeht, läßt sich auch aus der Störungsformel gewinnen (vgl. Diss. K. Kuhnert)

Ein rein kombinatorischer Zugang zu den Lie-Gröbner-Fliess-Chen-Reihen mit Hilfe von *Wurzelbäumen*, die schon auf Cayley zurückgehen, wird einerseits seit 1985 von einer Gruppe um G. Labelle [27],[28] verfolgt — vgl. den sehr gut lesbaren jüngst erschienenen Artikel von R. Winkel [57]. Im 2. Kapitel: *Basic Theory of Lie series* gibt Winkel eine empfehlenswerte Zusammenstellung der Ergebnisse des Gröbnerschen Buches [108].

Es wird auch Gröbners mehrdimensionaler Fall

$$e^{t_1 D_1 + \ldots + t_M D_M} x|_{x=\bar{x}}$$

behandelt, also eine Lie-Reihe mit Koeffizienten in $R[t_1, \ldots, t_M]$ anstelle von R, und auf deren Anwendung zur Inversion einer Potenzreihenabbildung eingegangen (siehe Abschnitt 5, vergleiche auch die Arbeiten einer Gruppe russischer Autoren [22], [34]).

Andrerseits ist in der Numerik seit 1963 der kombinatorische Zugang zu den Runge-Kutta-Verfahren durch J.C. Butcher der Standard [7], [19] (siehe auch das Mathematica package *Butcher.m* und M. Sofroniou [49]).

Die sich für die höheren Ableitungen $y^{(n)}(x)$ von

$$y'(x) = f(y(x))$$

mit Hilfe der Kettenregel (nach Faa di Bruno — vgl. auch [21]) ergebenden Ausdrücke nennt Butcher *elementare Differentiale* und zeigt, wie man sie aus *indizierten Wurzelbäumen* gewinnen kann. Macht man dies ebenso für die Runge-Kuttasche Näherungslösung —, der Einfachheit halber etwa für ein zweistufig explizites Verfahren

$$y_n = y_{n-1} + h(b_1 f(y_{n-1}) + b_2 f(y_{n-1} + h a_{21} f(y_{n-1}))),$$

erhält man die zentralen Bedingungsgleichungen für ein Verfahren einer bestimmten Ordnung (über deren Lösung mit Gröbner-Basen siehe [49]).

1995 führt uns nun H. Munthe-Kaas in seiner Arbeit: *Lie-Butcher Theory for Runge-Kutta Methods* [37] wieder an den Ausgangspunkt zurück:
Wenn man neben $e^{tD} f$ auch

$$e^{tD} F = F + \frac{t}{1!}[D, F] + \frac{t^2}{2!}[D, [D, F]] + \ldots$$

(für ein Vektorfeld F und Lie-Klammern $[\cdot,\cdot]$) betrachtet und den Kommutatoren ebenfalls *Butcherbäume* zuordnet, erhält man auf elegante Weise die oben erwähnten Bedingungsgleichungen (vgl. dazu auch M. Fritsche-H. Toparkus [15]: *Using the Lie series method of Grobner a new method for the derivation of the consistency conditions ... is presented (S. Filippi)*).

Bezüglich strukturerhaltender Integrationsmethoden und Lie-Reihen siehe etwa P.V. Koseleff [26] und J.S. Griffith [18] (weitere Ergebnisse einer Gruppe russischer Mathematiker, die zunächst ausgehend von Filatov und Bondarenko in Taschkent mit Gröbners Lie-Reihen-Methode arbeitete, finden sich in [22], bezüglich Lie-Reihen und stochastischer Differentialgleichungen siehe [31]).

Was die Anfangszeit des *Lie-Projekts* betrifft, möchte ich abschließend bei den Physikerkollegen noch Abbitte leisten: wir hatten immer gemeint, die Physiker machen sich es leicht und rechnen nur Einzelbeispiele; A. Schett hatte zunächst verschiedene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Lie-Reihen untersucht, 1977 aber das quadratische System

$$\dot{x} = yz, \quad \dot{y} = zx, \quad \dot{z} = xy; \qquad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0$$

angegangen und dabei überaus bemerkenswerte Relationen für die Koeffizienten der Jacobischen elliptischen Funktionen gefunden, die dann auch mit dem schon erwähnten kombinatorischen Zugang Labelles reproduziert wurden.

7 Orthogonale Polynome — Mathematik für Physiker

Seit der Zeit bei Picone in Rom faszinierte Gröbner die Konstruktion orthogonaler Polynomsysteme mit Hilfe eines Extremalprinzips. P. Lesky hat dies fortgeführt und erweitert.[5] Erwähnenswert ist, daß er jüngst die Dissertation, die G. Sonderegger unter Gröbners Anleitung 1965 ausgearbeitet hat, aufgegriffen hat und mit dem nun seit über 35 Jahren an einem Vorarlberger Gymnasium tätigen Kollegen eine gemeinsame Arbeit verfaßt hat [29].

Nicht vergessen sollte man Gröbners Bücher *Mathematische Methoden der Physik* [121], *Differentialgleichungen* [148] und *Matrizenrechnung* [129], die Klassiker der Lehrbuchliteratur waren.

8 Gröbner-Basen und Gröbner-Deformationen

Wenn man im *MathSciNet* unter *Anywhere* nach „Grobner" sucht, erhält man derzeit gegen 1000 Einträge — mehr als 90 % davon betreffen *Gröbner-Basen*.

[5] Vgl. den Vortrag anläßlich des Kolloquiums „100 Jahre Gröbner"
http://mathematik.uibk.ac.at/archiv.html

Wir wollen uns nun das Fundament dieses Denkmals, das Bruno Buchberger mit dieser Bezeichnung seinem Lehrer setzte, etwas näher ansehen. Im Sommersemester 1964 begann Gröbner in seinem Dissertantenseminar über *Dimensionstheorie der Polynomideale* mit nulldimensionalen Polynomidealen:

Gröbners Seminarunterlage SS 64

Das Verfahren liefert eine Basis der Polynomalgebra $K[x]/\mathfrak{a}$. Aus der Multiplikationstafel läßt sich auch ein bemerkenswertes neues Erzeugendensystem für das Ideal $\mathfrak{a}$ rückgewinnen:

$$\mathfrak{a} = (x_1^2 + x_2 - 2x_1, x_1x_2 - x_1^2, x_1^3 - x_1^2)$$

Auf den ersten Blick sieht man, daß einige Potenzen niedriger sind als im gegebenen EZS, auf den zweiten Blick fällt jedoch auf, daß eines der erzeugenden Polynome nur mehr x_1 enthält — wir haben mit der *graduiert-lexikographischen Ordnung* der Monome, von der Gröbner ausging, eine *Eliminationsordnung* erwischt und die Frage nach der Nullstellenberechnung für das Ideal auf eine einzige Variable zurückgeführt!

B. Buchberger, der an der neuen ZUSE 23 arbeitete, übernahm es als Dissertationsthema, zunächst das Gröbnersche Verfahren zu programmieren und vor allem herauszufinden, wann man das Verfahren abbrechen kann. Bei diesen Untersuchungen entwickelte er die für das Weitere entscheidende Idee der *S-Polynome* und bewies, dass es genügt, die Reduktion der *endlich vielen S*-Polynome auf 0 zu untersuchen. Daraus ergab sich ein neuer, immer terminierender Algorithmus, der eine Idealbasis liefert, die Buchberger später *Gröbner-Basen* nannte und die — auch unabhängig von der Art, wie sie konstruiert werden — Grundlage für die algorithmische Lösbarkeit einer großen Anzahl fundamentaler Probleme in der Theorie der Polynomideale bilden. Er wagte sich gleich an ein Beispiel in drei Variablen, das heute etwa als MAPLE-Befehlsfolge folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}&\text{with(Groebner)} : \text{WL} := [x^2 - 2y + x, x * z - z, z^3 - 2z + y] :\\ &\text{gbasis}(\text{WL}, \text{tdeg}(z, y, x));\\ &\quad [x^2 - 2y + x, xy - y, xz - z, y^2 - y, zy - z, z^3 - 2z + y]\end{aligned}$$

Hier ist das neue EZS schon doppelt so lang. Beachtenswert ist jedoch: die Leitmonome aller Polynome im Ideal sind Vielfache von Leitmonomen der Elemente des neuen EZS.

Die entscheidenden Überlegungen Buchbergers, wie man durch Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von Potenzprodukten zu *S-Polynomen* kommt, die man allenfalls zum EZS hinzunehmen muß, beginnen in der Dissertation auf Seite 24. Just davor hört aber Gröbner mit der Lektüre auf und beauftragt G. Wanner mit der kritischen Prüfung des 2. Teils.

Buchberger promoviert am 16. Juli 1966 (ich weiß dies so genau, weil wir es gemeinsam hinter uns brachten) und erst 5 Jahre nach Einreichung der Dissertation im Herbst 1965 erschien die gedruckte Fassung der Arbeit [6].

Hironaka hatte zur selben Zeit die Existenz von analogen *Standardbasen* im Potenzreihenring gezeigt.

Daß Gröbner sein Verfahren schon 1949 in der Arbeit *Über die Eliminationstheorie* [82] viel ausführlicher dargestellt hatte — versehen mit einem nahezu vollständigen Programm für dessen Anwendungen — wurde uns erst viel später bewußt. Er schreibt darin,

> „... diese Methode seit etwa 17 Jahren in den verschiedensten, auch komplizierten Fällen verwendet und erprobt zu haben und glaube auf Grund seiner Erfahrungen sagen zu können, daß sie tatsächlich in allen Fällen ein brauchbares und wertvolles Werkzeug zur Lösung von diesen und ähnlichen idealtheoretischen Aufgaben darstellt.“

Eine dieser früheren *Erwähnungen* hatte ich 1990 zufällig entdeckt, als ich einen Vortrag zum Gedächtniskolloquium für Ott-Heinrich Keller vorbereitete:

Gröbners Arbeit *Über die algebraischen Eigenschaften der Integrale von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* [71] stand neben der Kellerschen Arbeit über das Jacobische Umkehrproblem (siehe Abschnitt 5) — beide waren Ph. Furtwängler zum 70. Geburtstag gewidmet. Zu den darin von Gröbner vorgeschlagenen Ideen einer *algebraischen Analysis* siehe die Arbeiten von U. Oberst [41, 38, 39, 40] und zum Zusammenhang mit Additionstheoremen meinen Vortrag (gem. mit U. Oberst) über *Darstellungen von Liealgebren, partieller Differentialgleichungen und Funktionalgleichungen* beim Mathematikertreffen 1999 in Graz.

Als ich in Halle über Gröbners Arbeit berichtete, erzählte mir Bodo Renschuch über seinen *Beitrag zur konstruktiven Theorie der Polynomideale XXIII: Vergessene Arbeiten des Leningrader Mathematikers N.M. Gjunter* [46, 45] und daß darin auch so ähnliche Basen vorkommen!

Heute glaube ich, daß Gjunter um 1913 — zu E. Delassus (1897) etwas später! — der erste war, der nahezu fehlerfrei Riquier-Janets *involutive Basen für Differentialoperatoren* auf Fragen zur Struktur von Polynomidealen anwandte.

Doch halt — schön der Reihe nach zunächst zum Fall nichtkommutativer (assoziativer) Algebren!

V.A. Ufnarowskij gibt in seinem Enzyklopädieartikel [50] eine gut lesbare Darstellung: *Normal Words and a Gröbner Basis of an Ideal of a Free Algebra* zur Frage nach einem *vollständigen System von Relationen* in der Faktoralgebra A/I (in Analogie zum Restklassenring nach einem Polynomideal). Zur Konstruktion benötigt man drei Operationen: Normalisierung, Reduktion und *Komposition*. Das zentrale Kompositionslemma heißt bei Bergman 1978 *diamond lemma*. Zuerst hatte aber 1962 im Kontext von Lie-Algebren A.I. Shirshov eine derartige Konstruktion im Auge.

Eng damit zusammen hängen auch *Termersetzungsverfahren*, die Knuth-Bendix-Vervollständigung und die Church-Rosser-Eigenschaft [33].

Weitaus älter aber sind ähnliche Ideen in Ringen von Differentialoperatoren: Aufbauend auf Méray und Riquier hat Etienne Delassus in seiner Arbeit: *Extension du théorème de Cauchy* ... [10] einen Vervollständigungsprozeß für Differentialgleichungen beschrieben, der zu einer geeigneten kanonischen Form des Systems führt. Ein Jahr später wendet er dies auf algebraische Gleichungen an [11]: er schreibt schlicht und einfach:

> „La méthode que j' ai récemment indiquée pour la reduction des systèmes differentiels le plus généraux à une forme canonique peut, sans modifications importantes, s' applique aux systèmes d' équations algèbriques."

Nun, es waren doch Modifikationen nötig: Gjunter entdeckt nämlich einen Fehler bei Delassus und korrigiert ihn durch seine *normierten Mengen*, 1924 führt M. Janet in [23] — ohne Delassus zu erwähnen — direkt seine *involutorischen Mengen* ein, die die normierten als Spezialfall enthalten.

Die Delassussche Theorie ist übrigens in der französischen Ausgabe der Enzyklopädie I 9.71 p. 164 im Artikel von Netto-Vavasseur über Eliminationstheorie beschrieben.

1978 hat Wen Jun Wu den Riquier-Ritt-Thomasschen Algorithmus — wie er ihn nennt — wieder aufgegriffen, um das Beweisen in der Elementargeometrie zu mechanisieren. 1991 setzt er fort: *On the construction of Groebner basis of a polynomial ideal based on Riquier-Janet theory* [59]. Aus der Zusammenfassung:

> „There may be associated to certain special kinds of differential ideals some well- behaved basis enjoying some well-behaved properties. If the differential ideals are further specialized so that they correspond to ordinary polynomial ideals then such a well-behaved basis will become the usual Grobner basis of the polynomial ideals, while the latter is not known for differential ideals." (Review by J. Apel).

Stimmt allerdings auch nicht ganz: A. Rosenfeld hatte 1959 in [47] ein *ranking of the set of all (including improper and higher) partial derivatives of D-indeterminates by the properties of a complete system of marks of Riquier* und *the reduction process etc. in terms of some ranking* betrachtet.

1989 untersuchte T. Tsujishita *the compatibility of systems of super differential equations*. Das zentrale Konzept ist die *Grobner integrability*. Seit 1985 verwendet F. Schwarz *involutive Systeme* zur Bestimmung von Symmetrien von Differentialgleichungen, ebenso V.L. Topunov.

Für Systeme polynomialer Gleichungen klären in den letzten Jahren A.Yu. Zharkov, Yu.A. Blinkov, V.P. Gerdt, D. Mall [32] u.a. den genauen Zusammenhang zwischen Gröbner-Basen und den involutiven Systemen, indem sie die Divisionsalgorithmen von Thomas, Janet bzw. Pommaret mit dem Buchbergerschen vergleichen. Siehe den Überblicksvortrag von J. Apel: *Gröbner-Basen und Janet-Systeme* beim schon erwähnten Kolloquium zum 100. Geburtstag von W. Gröbner und den eben erschienenen Artikel von A.V. Astrelin, O.D. Golubitsky, E.V. Pankratiev: *Gröbner bases and involutive bases* [3].

Die jüngste Idee von M. Saito, B. Sturmfels und N. Takayama, Gröbner-Basen bezüglich verschiedener Ordnungen (*Gröbner deformations*) und Techniken klassischer Störungsrechnung für das Studium von Systemen mehrdimensionaler hypergeometrischer partieller Dgln. in Verbindung zu bringen [48] würde Gröbner sicher brennend interessieren!

Bezüglich der Theorie und der vielfältigen Anwendungen der Gröbner-Basen siehe B. Buchberger-F. Winkler [5] und die Lehrbücher [54, 8, 53, 9, 58, 13, 2, 4].

9 Schlußwort

Schließen möchte ich wieder mit den Worten Prof. Hlawkas:

> „Wolfgang Gröbner war ein Mensch mit großer Toleranz gegenüber anderer Meinung, er machte keine hierarchischen Unterschiede, er war von bewundernswerter Arbeitskraft, die auch durch Krankheit und durch schwere Schicksalsschläge kaum beeinträchtigt wurde. Seine großartigen Leistungen sind bei den Mathematikern auf der ganzen Welt anerkannt.
>
> Seine zahlreichen Schüler und Freunde werden ihn nie vergessen!“

Für fotografische und TEX-nische Unterstützung danke ich Michael Schgraffer.

Literatur

1. Shreeram S. Abhyankar and Wei Li, *On the Jacobian conjecture: a new approach via Gröbner bases*, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), no. 3, 211–222.

2. William W. Adams and Philippe Loustaunau, *An introduction to Gröbner bases*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

3. A. V. Astrelin, O. D. Golubitsky, and E. V. Pankratiev, *Gröbner bases and involutive bases*, Algebra (Moscow, 1998), de Gruyter, Berlin, 2000, pp. 49–55.

4. Thomas Becker and Volker Weispfenning, *Gröbner bases*, Springer-Verlag, New York, 1993, A computational approach to commutative algebra, In cooperation with Heinz Kredel.

5. B. Buchberger and F. Winkler (eds.), *Gröbner bases and applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, Papers from the Conference on 33 Years of Gröbner Bases held at the University of Linz, Linz, February 2–4, 1998.

6. Bruno Buchberger, *An algorithmic criterion for the solvability of a system of algebraic equations [MR* **42** *#3077]*, Gröbner bases and applications (Linz, 1998), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, Translated from the German by Michael Abramson and Robert Lumbert, pp. 535–545.

7. J. C. Butcher, *The numerical analysis of ordinary differential equations*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987.

8. David Cox, John Little, and Donal O'Shea, *Using algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1998.

9. David A. Cox, *Introduction to Gröbner bases*, Applications of computational algebraic geometry (San Diego, CA, 1997), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 1–24.

10. E. Delassus, *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles.*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 13, 421-467; C. R. 122, 772-775. ((1896)).

11. ______, *Sur les systèmes algébriques et leurs relations avec certains systèmes d'équations aux dérivées partielles.*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 14, 21-44. ((1897)).

12. Harry H. Denman, *Table errata: Integraltafel, Erster Teil: Unbestimmte Integrale (third edition, Springer, Vienna, 1961) by W. Gröbner and N. Hofreiter*, Math. Comp. **24** (1970), no. 110, 504.

13. David Eisenbud, *Commutative algebra*, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.

14. Michel Fliess, *Une approche algébrique du développement fonctionnel des solutions d'équations différentielles non linéaires forcées*, Systems analysis (Conf., Bordeaux, 1978), Soc. Math. France, Paris, 1980, pp. 95–103.

15. Michael Fritsche and Heinz Toparkus, *Zur Herleitung der Konsistenzbedingungen von Runge-Kutta Ansätzen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, IV (Georgenthal, 1985), Friedrich-Schiller-Univ., Jena, 1987, pp. 16–24.

16. Kurt Girstmair and Ulrich Oberst, *Ein Verfahren zur konstruktiven Bestimmung von Galoisgruppen*, Jahrbuch Überblicke Mathematik, 1976, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1976, pp. 31–44.

17. Peter Goller and Gerhard Oberkofler, *...daß auf der Universiät*, Österreichische Mathematik und Physik, Zentralbibliothek Physik, Vienna, 1993, pp. 9–50.

18. J. S. Griffith, *Lie transforms and perturbation methods*, Proceedings of the Manitoba Conference on Numerical Mathematics (Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1971), Dept. Comput. Sci., Univ. Manitoba, Winnipeg, Man., 1971, pp. 201–324.

19. E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. I*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1993, Nonstiff problems.

20. Herwig Hauser and Gerd Müller, *Affine varieties and Lie algebras of vector fields*, Manuscripta Math. **80** (1993), no. 3, 309–337.

21. V. P. Igumnov, *Application of a multidimensional generalization of Bruno's theorem to the problem of calculation of coefficients of Lie series*, Numerical mathematics and mathematical physics (Russian), Moskov. Gos. Ped. Inst., Moscow, 1984, pp. 120–129, 158.

22. ______, *Representation of solutions of differential equations by modified Lie series*, Differentsialnye Uravneniya **20** (1984), no. 6, 952–958.

23. M. Janet, *Les modules de formes algébriques et la théorie générale des systèmes différentielles.*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 41, 27-65 (1924). (1924).

24. Matthias Kawski and Héctor J. Sussmann, *Noncommutative power series and formal Lie-algebraic techniques in nonlinear control theory*, Operators, systems, and linear algebra (Kaiserslautern, 1997), Teubner, Stuttgart, 1997, pp. 111–128.

25. H. Knapp and G. Wanner, *On the numerical treatment of ordinary differential equations*, Contributions to the Method of Lie Series, Chapter II, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967, pp. 43–97.

26. P.-V. Koseleff, *Relations among Lie formal series and construction of symplectic integrators*, Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (San Juan, PR, 1993), Springer, Berlin, 1993, pp. 213–230.

27. Gilbert Labelle, *Éclosions combinatoires appliquées à l'inversion multidimensionnelle des séries formelles*, J. Combin. Theory Ser. A **39** (1985), no. 1, 52–82.

28. Pierre Leroux and Gérard X. Viennot, *Combinatorial resolution of systems of differential equations. I. Ordinary differential equations*, Combinatoire énumérative (Montreal, Que., 1985/Quebec, Que., 1985), Springer, Berlin, 1986, pp. 210–245.

29. P. A. Lesky and H. Sonderegger, *Orthogonalpolynome, die auf einem Intervall im Mittel und in den Randpunkten exakt approximieren*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II **206** (1997), 3–14 (1998).

30. R. Liedl and H. Reitberger, *Wolfgang Gröbner zum Gedenken (11.2.1899–20.8.1980)*, Yearbook: Surveys of mathematics 1981, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1981, pp. 255–256.

31. X. Q. Liu and C. W. Li, *Product expansion for stochastic jump diffusions and its application to numerical approximation*, J. Comput. Appl. Math. **108** (1999), no. 1-2, 1–17.

32. Daniel Mall, *On the relation between Gröbner and Pommaret bases*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **9** (1998), no. 2, 117–123.

33. Claude Marché, *Normalized rewriting: a unified view of Knuth-Bendix completion and Gröbner bases computation*, Symbolic rewriting techniques (Ascona, 1995), Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 193–208.

34. I. S. Marenich, *Application of Lie series and their generalizations to solving differential equations*, Partial differential equations (Russian), "Obrazovanie", St. Petersburg, 1992, pp. 82–97.

35. M. G. Marinari, H. M. Möller, and T. Mora, *On multiplicities in polynomial system solving*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 8, 3283–3321.

36. Elisabeth Matutat and Bodo Renschuch, *Perfekte Ideale und Idealtypen von Dubreil*, Wiss. Z. Pädagog. Hochsch. "Karl Liebknecht" Potsdam **17** (1973), 133–140.

37. Hans Munthe-Kaas, *Lie-Butcher theory for Runge-Kutta methods*, BIT **35** (1995), no. 4, 572–587.

38. Ulrich Oberst, *Multidimensional constant linear systems*, Acta Appl. Math. **20** (1990), no. 1-2, 1–175.

39. ______, *On the minimal number of trajectories determining a multidimensional system*, Math. Control Signals Systems **6** (1993), no. 3, 264–288.

40. ______, *Variations on the fundamental principle for linear systems of partial differential and difference equations with constant coefficients*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **6** (1995), no. 4-5, 211–243.

41. ______, *Finite-dimensional systems of partial differential or difference equations*, Adv. in Appl. Math. **17** (1996), no. 3, 337–356.

42. ______, *The construction of Noetherian operators*, J. Algebra **222** (1999), no. 2, 595–620.

43. Heinrich Reitberger, *Inversionsformeln, G.–Basen und Lie-Reihen.*, In Vorb.

44. ______, *The turbulent fifties in resolution of singularities*, Resolution of singularities (Obergurgl, 1997), Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 533–537.

45. B. Renschuch, H. Roloff, and G.G. Rasputin, *On forgotten papers of N. M. Gyunter on the theory of polynomial ideals.*, Vestn. Leningr. Univ., Ser. I **1987** (1987), no. 1, 119–122 (Russian. English summary).

46. Bodo Renschuch, Hartmut Roloff, and Georgij G. Rasputin, *Beitraege zur konstruktiven Theorie der Polynomideale. XXIII: Vergessene Arbeiten des Leningrader Mathematikers N. M. Gjunter zur Theorie der Polynomideale. (Contributions to the constructive theory of polynomial ideals. XXIII: Forgotten papers of the Leningrad mathematician N. M. Gjunter on the theory of polynomial ideals).*, Wiss. Z. Paedagog. Hochsch. Karl Liebknecht, Potsdam **31** (1987), 111–126 (German).

47. Azriel Rosenfeld, *Specializations in differential algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 394–407.

48. Mutsumi Saito, Bernd Sturmfels, and Nobuki Takayama, *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

49. M. Sofroniou, *Symbolic derivation of Runge-Kutta methods*, J. Symbolic Comput. **18** (1994), no. 3, 265–296.

50. V. A. Ufnarovskiĭ, *Combinatorial and asymptotic methods in algebra*, Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 57 (Russian), Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1990, pp. 5–177.

51. Arno van den Essen, *A criterion to decide if a polynomial map is invertible and to compute the inverse*, Comm. Algebra **18** (1990), no. 10, 3183–3186.

52. ______, *Locally finite and locally nilpotent derivations with applications to polynomial flows, morphisms and G_a-actions. II*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), no. 3, 667–678.

53. Wolmer V. Vasconcelos, *Computational methods in commutative algebra and algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1998, With chapters by David Eisenbud, Daniel R. Grayson, Jürgen Herzog and Michael Stillman.

54. Joachim von zur Gathen and Jürgen Gerhard, *Modern computer algebra*, Cambridge University Press, New York, 1999.

55. G. Wanner and H. Reitberger, *On the perturbation formulas of Gröbner and Alekseev*, Bul. Inst. Politehn. Iaşi (N.S.) **19(23)** (1973), no. 1-2, part I, 15–26.

56. Gerhard Wanner, *Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Lie-Reihen (mit Programmen), Runge-Kutta-Methoden*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1969, B.I-Hochschulskripten, 831/831a.

57. Rudolf Winkel, *An exponential formula for polynomial vector fields. II. Lie series, exponential substitution, and rooted trees*, Adv. Math. **147** (1999), no. 2, 260–303.

58. F. Winkler, *Polynomial algorithms in computer algebra*, Springer-Verlag, Vienna, 1996.

59. Wen Jun Wu, *On the construction of Groebner basis of a polynomial ideal based on Riquier-Janet theory*, Systems Sci. Math. Sci. **4** (1991), no. 3, 193–207.

Gröbners Werk

60. W. Gröbner, *Über Minimalbasen fuer die Invariantenkörper zyklischer und metazyklischer Permutationsgruppen*, Anz. Akad. Wiss., Wien No. **5** (1932), 43–44.

61. ______, *Über irreduzible Ideale in kommutativen Ringen*, Math. Ann. **110** (1934), 197–222.

62. ______, *Minimalbasis der Quaternionengruppe.*, Monatsh. Math. Phys. **41** (1934), 78–84.

63. ______, *Der Weg aufwärts*, Braumüller-Verlag, Wien-Leipzig, 1935, Ein Buch über Religion und Weltanschauung.

64. ______, *Algebraische Geometrie auf vektorieller Grundlage*, Abh. Math. Semin. Hansische Univ. **12** (1938), 354–368.

65. ______, *Severis Begründung der algebraischen Geometrie mittels des „Metodo rapido“*, Abh. Math. Semin. Hansische Univ. **12** (1938), 340–353.

66. ______, *über das Macaulaysche inverse System und dessen Bedeutung für die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten*, Abh. Math. Semin. Hansische Univ. **12** (1938), 127–132.

67. ______, *Über eine neue idealtheoretische Grundlegung der algebraischen Geometrie*, Math. Ann. **115** (1938), 333–358.

68. Wolfango Groebner, *Ricerche sopra il rango dei moduli nei campi dei polinomi omogenei*, Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital., Firenze 1937, 1938, pp. 219–221.

69. ______, *Risultati dell'applicazione del metodo variazionale in alcuni problemi di propagazione*, Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital., Firenze 1937, 1938, pp. 222–225.

70. ______, *Sistemi di polinomi ortogonali soddisfacenti a date condizioni*, Rend. Semin. Mat. Roma, IV. Ser. **3** (1939), 29–53.

71. W. Gröbner, *Über die algebraischen Eigenschaften der Integrale von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten*, Monatsh. Math. Phys. **47** (1939), 247–284.

72. Giulio Krall and Wolfango Groebner, *Analisi del moto fluido in un tunnel idrodinamico a sezione rettangolare e radialsimmetrico (con deflusso al entro) secondo il metodo di Karman*, Ric. Sci. Progr. Tecn. Econom. Naz. **10** (1939), 42–48.

73. Wolfango Gröbner, *Sistemi di polinomi ortogonali soddisfacenti a date condizioni*, Rend. Sem. Mat. Roma **3** (1939), 29–53.

74. W. Gröbner, *Idealtheoretischer Aufbau der algebraischen Geometrie. I*, Hamburger Math. Einzelschr. **30** (1941), 56.

75. ______, *Über eine Näherungsmethode für die ebene Potentialströmung einer kompressiblen Flüssigkeit*, Luftfahrtforschung **20** (1943), 184–191.

76. ______, *L'algebra moderna e la geometria algebrica*, Atti Convegno Mat. Roma **1942** (1942), 215–222 (1945).

77. ______, *Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zwei-dimensionalen Bereichen*, Monatsh. Math. **52** (1948), 38–54.

78. ______, *Applicazione del calcolo vettoriale alla geometria algebrica*, Ann. Univ. Ferrara. Parte I. **8** (1948–50), 63–68 (1951).

79. ______, *Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen*, Springer-Verlag, Wien und Innsbruck, 1949.

80. ______, *Sulle varietà perfette*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **28** (1949), 217–219.

81. ______, *Über die Syzygientheorie der Polynomideale*, Monatsh. Math. **53** (1949), 1–16.

82. ______, *Über die Eliminationstheorie*, Monatsh. Math. **54** (1950), 71–78.

83. ______, *Ein Irreduzibilitätskriterium für Primärideale in kommutativen Ringen*, Monatsh. Math. **55** (1951), 138–145.

84. ______, *Oberflächenwellen von Flüssigkeiten*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (3) **5** (1951), 175–191.

85. ______, *Über den idealtheoretischen Beweis des Satzes von Bézout*, Monatsh. Math. **55** (1951), 82–86.

86. ______, *Über die Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Physik*, Studium Generale **4** (1951), 72–77.

87. ______, *L'ideale aggiunto di una varietá algebrica*, Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) **10** (1951), 57–63.

88. ______, *Über den Multiplizitätsbegriff in der algebraischen Geometrie*, Math. Nachr. **4** (1951), 193–201.

89. ______, *La théorie des idéaux et la géométrie algébrique*, Deuxième Colloque de Géométrie Algébrique, Liège, 1952, Georges Thone, Liège, 1952, pp. 129–144.

90. ______, *Sopra un teorema di Severi*, Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) **11** (1952), 217–223.

91. ______, *Über das arithmetische Geschlecht einer algebraischen Mannigfaltigkeit*, Arch. Math. **3** (1952), 351–359.

92. W. Gröbner und P. Lesky, *Eigenschwingungen eines Kreisringes mit rechteckigem Querschnitt*, Österreich. Ing.-Arch. **7** (1953), 254–262.

93. W. Gröbner, *Über das Verhalten der Hilbertfunktion eines H-Ideals bei rationalen Transformationen*, Arch. Math. **5** (1954), 1–3.

94. ______, *Die birationalen Transformationen der Polynomideale*, Monatsh. Math. **58** (1954), 266–286.

95. ______, *Über Streuungs- und Stabilisierungsfunktionen bei Differentialgleichungen der theoretischen Mechanik*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **39** (1955), 11–14.

96. F. Cap and W. Gröbner, *New method for the solution of the deuteron problem and its application to a regular potential*, Nuovo Cimento (10) **1** (1955), 1211–1222.

97. Fabio Conforto, *Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1956, Aus dem Nachlass bearbeitet und herausgegeben von W. Gröbner, A. Andreotti und M. Rosati.

98. W. Gröbner, *Über die Berücksichtigung der Reibung bei Schwingungsproblemen*, Österreich. Ing.-Arch. **10** (1956), 171–175.

99. ______, *Über die idealtheoretische Grundlegung der algebraischen Geometrie*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1954, Amsterdam, vol. III, Erven P. Noordhoff N.V., Groningen, 1956, pp. 447–456.

100. ______, *Matrizenrechnung*, Verlag von R. Oldenbourg, München, 1956.

101. ______, *Sopra lo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **11** (1956), 319–327.

102. Volfango Gröbner, *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi di equazioni differenziali nel campo analitico*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **23** (1957), 375–379.

103. W. Gröbner, *Kontinuierliche Transformationsgruppen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten*, Monatsh. Math. **61** (1957), 209–224.

104. ______, *Die Darstellung der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen durch Liesche Reihen*, Arch. Math. **9** (1958), 82–93.

105. ______, *Le soluzioni generali del problema degli n corpi rappresentate mediante serie di Lie*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **24** (1958), 11–15.

106. ______, *L'inversione di un sistema di funzioni analitiche mediante serie di Lie*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **24** (1958), 386–390.

107. ______, *Über die Parameterdarstellungen algebraischer Mannigfaltigkeiten mittels Liescher Reihen*, Math. Nachr. **18** (1958), 360–375.

108. ______, *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960, Mathematische Monographien, 3.

109. ______, *Applicazioni delle serie di Lie nella geometria algebrica*, Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Mat. **20** (1960/1961), 217–226.

110. ______, *Sopra un teorema di B. Segre*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **31** (1961), 118–122.

111. ______, *Steuerungsprobleme mit Optimalbedingung*, Math.-Tech.-Wirtschaft **8** (1961), 62–64.

112. ______, *Über das Umkehrproblem der Abelschen Integrale*, Math. Z. **77** (1961), 101–105.

113. W. Gröbner und N. Hofreiter, *Integraltafel. Teil 1: Unbestimmte Integrale*, Springer-Verlag, Vienna, 1961, 3. verbesserte Aufl.

114. ______, *Integraltafel. Teil 2: Bestimmte Integrale*, Springer-Verlag, Vienna, 1961, 3. verbesserte Aufl.

115. F. Cap, W. Gröbner, and P. Lesky, *The astronomical n-body problem with time-dependent forces*, Acta Phys. Austriaca **15** (1962), 213–216.

116. W. Gröbner, *Über die Darstellung von implizit gegebenen Funktionen mittels Lie-Reihen und Verallgemeinerungen der Lagrangeschen Reihe*, Monatsh. Math. **66** (1962), 129–139.

117. ______, *Applicazioni delle serie di Lie nella geometria algebrica*, Atti Convegno Internaz. Geometria Algebrica (Torino, 1961), Rattero, Turin, 1962, pp. 165–174.

118. ______, *Über die Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungssystemen mit Randbedingungen*, Math.-Tech.-Wirtschaft **9** (1962), 148–151.

119. W. Gröbner und I. Raab, *Über die Berechnung von Raketenbahnen im Felde mehrerer gravitierender Massen mit Hilfe von Lie-Reihen*, Acta Phys. Austriaca **16** (1963), 379–381.

120. W. Gröbner und G. Helmberg, *Ein Regularitätskriterium für Stellenringe*, J. Reine Angew. Math. **213** (1963/1964), 39–42.

121. W. Gröbner und P. Lesky, *Mathematische Methoden der Physik. I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1964, B.I. Hochschultaschenbücher, Band 89.

122. W. Gröbner, *Lösung der allgemeinen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung mittels Li-Reihen*, Monatsh. Math. **68** (1964), 113–124.

123. ______, *Recenti risultati ed applicazioni delle serie di Lie*, Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Mat. **24** (1964/1965), 31–40.

124. ______, *Applicazioni delle serie di Lie ai problemi della meccanica razionale*, Simpos. Internaz. Appl. Anal. Fis. Mat. (Cagliari-Sassari, 1964), Edizioni Cremonese, Rome, 1965, pp. 78–83.

125. ______, *Sulle matrici risolventi di Picone che verificano la condizione di permutabilità*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **39** (1965), 167–169.

126. ———, *Teoria degli ideali e geometria algebrica*, Seminari 1962/63 Anal. Alg. Geom. e Topol., Vol. 1, Ist. Naz. Alta Mat., Ediz. Cremonese, Rome, 1965, pp. 216–312.

127. ———, *Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen*, Arch. Math. **16** (1965), 257–264.

128. W. Gröbner und W. Watzlawek, *Verallgemeinerte Lie-Reihen mit Operatoren höherer Ordnung*, Monatsh. Math. **69** (1965), 136–145.

129. W. Gröbner, *Matrizenrechnung*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1966, B. I.-Hochschultaschenbücher, No. 103/103a.

130. W. Gröbner (ed.), *Contributions to the method of Lie series*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.

131. W. Gröbner, *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, Zweite, überarbeitete und erweiterte Auflage. Mathematische Monographien, Band 3.

132. ———, *Orthogonale Polynomsysteme, die gleichzeitig mit $f(x)$ auch deren Ableitung $f'(x)$ approximieren*, Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Numerische Mathematik (Oberwolfach, 1965), Birkhäuser, Basel, 1967, pp. 24–32.

133. W. Groebner, H. Reitberger, and G. Wanner, *Invariant functions and characteristics belonging to Lie operators*, Contributions to the Method of Lie Series, Chapter III, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967, pp. 99–177.

134. W. Groebner and W. Watzlawek, *Linear partial differential equations of higher order*, Contributions to the Method of Lie Series, Chapter V, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967, pp. 221–253.

135. W. Groebner, *General theory of the Lie series*, Contributions to the Method of Lie Series, Chapter I, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967, pp. 1–42.

136. ———, *Nonlinear partial differential equations of the first order and application*, Contributions to the Method of Lie Series, Chapter IV, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967, pp. 179–220.

137. ———, *Algebraische Geometrie. 1. Teil: Allgemeine Theorie der kommutativen Ringe und Körper*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1968, B.I. Hochschultaschenbücher, 273/273a.

138. ———, *Über das Reduzibilitätsideal eines Polynoms*, J. Reine Angew. Math. **239/240** (1969), 214–219.

139. ______, *Algebraische Geometrie. 2. Teil: Arithmetische Theorie der Polynomringe*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1970, B. I. Hochschultaschenbücher, 737/737a*.

140. ______, *Il concetto di molteplicità nella geometria algebrica*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **40** (1970), 93–100.

141. ______, *Teoria degli ideali e geometria algebrica*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **41** (1971), 171–242.

142. ______, *Sul gruppo ortogonale e sulle rotazioni nello* IR^n, Accad. Naz. Sci. Lett. Arti Modena Atti Mem. (6) **13** (1971), 74–91.

143. ______, *Über die idealth. Grundl. der algebr. Geom.*, Geometrie (K. Strubecker, ed.), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1972, Wege der Forschung, Band CLXXVII, pp. vi+448.

144. ______, *Serie di Lie e loro applicazioni*, Cremonese, Rome, 1973, Con un'appendice ,,Applicazioni numeriche della serie di Lie per la soluzione di equazioni differenziali ordinarie" di H. Knapp e G. Wanner, Poliedro, No. 18.

145. ______, *Introd. to Part B, Rings and ideals (with P.Lesky)*, Fundamentals of mathematics (H. Behnke, K. Fladt, W. Süss, F. Hohenberg, G. Pickert, and H. Rau, eds.), MIT Press, Cambridge, Mass., 1974, Vol. I: Foundations of mathematics. The real number system and algebra, Translated from the second German edition by S. H. Gould, pp. x+549.

146. W. Gröbner und H. Reitberger, *Über einige neue Ergebnisse und Probleme in der algebraischen Geometrie*, Beiträge zur algebraischen Geometrie, Univ. Innsbruck, Innsbruck, 1974, pp. 7–15. Veröffentlichungen Univ. Innsbruck, No. 91, Math. Studien, No. I.

147. W. Gröbner, *Gruppi, anelli e algebre di Lie*, Cremonese, Rome, 1975, Con un'appendice ,,Sulla linearizzazione degli operatori differenziali nell'intorno di un punto critico" di H. Reitberger, Poliedro, No. 20.

148. ______, *Differentialgleichungen. I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1977, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Mathematik für Physiker, Band 6.

149. ______, *Differentialgleichungen. II*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1977, Partielle Differentialgleichungen, Mathematik für Physiker, Band 7.

150. ______, *Die Galois-Theorie*, Monatsh. Math. **85** (1978), no. 3, 185–188.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 184 (2001), 29–36

Sieben Millenniums-Probleme. I.

Michael Drmota
Institut für Geometrie der TU Wien

Am 8. August 1900 formulierte David Hilbert am zweiten Internationalen Kongreß in Paris seine berühmten Probleme, die zahlreiche Mathematiker des 20. Jahrhunderts inspiriert und geleitet hatten.

Um dieses Jubiläum zu feiern und um das neue Millennium mit weiteren mathematischen Problemen zu bereichern, wurde vom *Clay Mathematics Institute* am 24. Mai 2000 am Collège de France ein Millenniums-Treffen veranstaltet, auf dem sieben ausgewählte Probleme[1] der Öffentlichkeit vorgestellt wurden:

1. Das *P*-*NP*-Problem
2. Die Hodgesche Vermutung
3. Die Poincarésche Vermutung
4. Die Riemannsche Vermutung
5. Yang-Mills-Theorie
6. Existenz und Glattheit der Navier-Stokes-Gleichung
7. Die Birch- und Swinnerton-Dyer-Vermutung.

Es wird nicht angenommen, daß ausschließlich deren Lösung der Mathematik von morgen die wesentlichen Impulse geben wird, vielmehr handelt es sich um eine ausgesuchte Sammlung von Problemstellungen, die jahrzehntelang trotz intensiven Bemühens der *besten mathematischen Köpfe* nicht gelöst werden konnten. Genau eines dieser Probleme, nämlich die *Riemannsche Vermutung*, war schon Bestandteil der Hilbertschen Liste.

[1] Eine genauere Beschreibung der Ziele des Clay Mathematics Institute und der MillenniumsProbleme findet man auf der InternetSeite *http://www.claymath.org*. Vgl. auch mit dem Artikel [13] von E. Zeidler.

ISSN 0020-7926

Jede Lösung eines der sieben Millenniums-Probleme ist mit einer Million Dollar dotiert. Voraussetzung für die Ausbezahlung dieser Summe ist, daß eine Lösung in einer renommierten mathematischen Zeitschrift publiziert wurde und zwei Jahre nach der Veröffentlichung noch als korrekt anerkannt wird.

Die sieben Probleme wurden vom *Scientific Advisory Board* des Clay Mathematics Institute ausgewählt, dem derzeit *Alain Connes, Arthur Jaffe, Andrew Wiles,* und *Edward Witten* angehören. Dieses Gremium entscheidet auch über die etwaige Zuerkennung eines Preises.

Im ersten Teil dieses Artikels werden drei dieser Probleme eingehender geschildert: das P-NP-Problem, die Riemannsche Vermutung und die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer.[2]

1 Das P-NP-Problem

Ist es leichter, eine natürliche Zahl N zu faktorisieren, oder zu überprüfen, ob N tatsächlich eine vorgegebene Faktorisierung besitzt? Selbstverständlich ist das letztere einfacher, da man nur multiplizieren und vergleichen muß. Trotzdem ist es nicht klar, um wie viel das erstere schwieriger ist. Ist es ähnlich schwierig oder substantiell schwieriger?

Die einfachste Methode, um eine Zahl zu faktorisieren, ist, alle Möglichkeiten zu versuchen. Das ist zwar nicht sehr kreativ, doch sind die bisher besten Faktorisierungsalgorithmen von einem gewissen Standpunkt aus nicht viel besser. Ähnliche Problemstellungen treten in der Informatik und der algorithmischen Mathematik immer wieder auf, man denke z.B. an das "travelling salesman problem". Es gibt aber noch keinen Nachweis, daß es tatsächlich unmöglich ist, ein Verfahren zu entwicklen, eines dieser Probleme deutlich schneller — also in polynomieller Zeit — zu lösen.

Eine exakte Problembeschreibung geht auf Stephen Cook [2] zurück. Dazu werden die Problemklassen **P** und **NP** definiert.

Eine Sprache L ist eine Teilmenge endlicher Zeichenketten w über einem endlichen Alphabet Σ. Insbesondere kann man jeder Turing-Maschine M (bzw. einem entsprechenden Computerprogramm) die Sprache $L(M)$ zuordnen, die genau aus jenen Zeichenketten besteht, die von M akzeptiert werden, d.h. nach Abarbeiten des Inputs w befindet sich M in einem bestimmten Zustand, dem *accepting state*. Weiters bezeichne $t_M(w)$ die Anzahl der Rechenschritte, die M bei Eingabe von w benötigt, bis M terminiert. Man sagt nun, *M läuft in polynomieller Zeit*, falls es ein k gibt, so daß für alle Zeichenketten w der Länge n

$$t_M(w) \leq n^k + k$$

[2]Vergleiche auch mit den Problembeschreibungen von *Stephen Cook*, *Enrico Bombieri* und *Andrew Wiles*: *http://www.claymath.org/prize_problems/*.

gilt. Die Problemklasse **P** besteht nun aus allen Sprachen L, für die es eine in polynomieller Zeit laufende Turing-Maschine M mit $L = L(M)$ gibt.

Beispielsweise bilden die Quadrate natürlicher Zahlen eine Sprache in **P**. Dabei werden natürliche Zahlen z.B. als Dezimalzahlen kodiert.[3]

Um die zweite Problemklasse **NP** zu definieren, betrachte man zunächst eine binäre Relation R — auch *checking relation* genannt — zwischen Zeichenketten w (über einem Alphabet Σ) und y (über einem Alphabet Σ_1) und die Sprache $L_R := \{w\#y : wRy\}$ (über den Alphabet $\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \{\#\}$, wobei $\# \not\in \Sigma \cup \Sigma_1$).

NP wird nun aus allen Sprachen L gebildet, für die es ein k und eine binäre Relation R gibt, so daß L_R in **P** liegt und

$$w \in L \Longleftrightarrow \exists y : \; |y| \leq |w|^k \text{ und } wRy$$

gilt.

Die zusammengesetzten natürlichen Zahlen liegen z.B. in **NP**.[4] Als Relation R kann man etwa

$$aRb \Longleftrightarrow 1 < b < a \text{ und } b|a$$

verwenden (mit R wird also überprüft, ob b ein echter Teiler von a ist; das geschieht natürlich immer in polynomieller Zeit, und es werden die zusammengesetzten Zahlen charakterisiert).

Es ist leicht einzusehen, daß $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ gilt. Für $L \in \mathbf{P}$ definiere man $wRy \Longleftrightarrow w \in L$ (für alle Zeichenketten y über $\Sigma_1 = \Sigma$). Offensichtlich ist dann auch $L_R \in \mathbf{P}$.

Das eigentliche Problem lautet nun: Gilt $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ oder $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$?

Um der Lösung dieser Fragestellung näher zu kommen, wurde noch eine Teilklasse von **NP**-Problemen definiert, die **NP**-vollständigen Probleme. Diese sind in einem gewissen Sinn die kompliziertesten Probleme in **NP**. Kann man nämlich für ein **NP**-vollständiges Probem L zeigen, daß es auch in **P** liegt, so gilt bereits $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. Im Appendix von [7] werden 300 bekannte **NP**-vollständige Probleme aufgelistet.

Die meisten Komplexitätstheoretiker glauben jedoch an $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$. Es wäre wirklich sensationell, wenn sich z.B. herausstellte, daß das Faktorisieren natürlicher Zahlen tatsächlich in **P** läge.

[3] Um eine natürliche Zahl n als Dezimalzahl zu kodieren, benötigt man $[\log_{10} n] + 1$ Dezimalstellen. Polynomiell bedeutet daher, daß in $O((\log n)^k)$ (für ein $k \geq 1$) Schritten entschieden werden kann, ob n Quadratzahl ist oder nicht.

[4] Aus der Riemannschen Vermutung für L-Reihen folgt auch, daß die zusammengesetzten Zahlen in **P** liegen.

2 Die Riemannsche Vermutung

In seiner für die analytische Zahlentheorie bahnbrechenden Arbeit [9] führte Riemann die später nach ihm benannte Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

zunächst für komplexe Zahlen s mit $\Re(s) > 1$ ein. Es ist nicht schwer nachzuweisen, daß diese analytische Funktion eine meromorphe Fortsetzung auf die gesamte Zahlenebene besitzt, wobei $s_0 = 1$ die einzige (einfache) Polstelle (mit Residuum 1) ist. Aus der Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - \int_1^{\infty} (x - [x]) x^{-s-1}\, dx$$

erkennt man, daß $\zeta(s)$ für s mit $\Re(s) > 0$ definiert werden kann. Schließlich zeigt die bereits von Riemann [9] angegebene Funktionalgleichung

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

daß $\zeta(s)$, wie bereits erwähnt, auf die gesamte komplexe Ebene fortgesetzt werden kann. Sie zeigt auch, daß die negativen ganzen Zahlen Nullstellen von $\zeta(s)$ sind und daß im *kritischen Streifen* $0 \le \Re(s) \le 1$ alle möglichen vorhandenen Nullstellen symmetrisch zur *kritischen Geraden* $\Re(s) = \frac{1}{2}$ liegen (weitere Nullstellen gibt es nicht).

Riemanns Leistung war es, zu erkennen, daß mit Hilfe der Nullstellen von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen die Verteilung der Primzahlen beschrieben werden kann. Insbesondere vermutete er in seiner Arbeit [9], daß alle Nullstellen im kritischen Streifen auf der kritischen Geraden liegen, also alle $\Im(s) = \frac{1}{2}$ haben.

Dieselbe Vermutung besteht für Dirichletsche L-Reihen

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

wobei χ einen Dirichletschen Charakter bezeichnet, und auch für noch allgemeinere sogenannte L-Funktionen (siehe [8].) Es wird auch vermutet, daß all diese Nullstellen einfach sind.

Bisher wurde mit numerischen Methoden gezeigt, daß alle Nullstellen von $\zeta(s)$ für $|\Im(s)| \le 5 \times 10^8$ im kritischen Streifen auf der kritischen Geraden liegen und einfach sind. Es ist auch bekannt, daß *fast alle* Nullstellen auf der kritischen Geraden liegen, d.h. daß der relative Anteil der nicht auf der kritischen Geraden liegenden Nullstellen gegen Null geht. Es ist auch noch kein Gegenbeispiel für die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung (für L-Funktionen) bekannt.

Interessanterweise konnte eine in einem gewissen Sinn analoge Fragestellung für die Zetafunktion algebraischer Kurven (und allgemeiner für algebraische Varietäten über endlichen Körpern) von A. Weil [11] und Deligne [4, 5] gelöst werden.

Alle Indizien sprechen daher für die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung. Trotzdem hat sie bisher allen Lösungsversuchen widerstanden.

3 Die Birch- und Swinnerton-Dyer-Vermutung

Ein wichtiger Spezialfall diophantischer Gleichungen sind Gleichungen der Form

$$F(x,y,z) = 0,$$

wobei $F(x,y,z)$ ein homogenes ganzzahliges Polynom bezeichnet und eben ganzzahlige Lösungen $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ gesucht werden. Anders formuliert, beschreibt die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ eine projektive Kurve $C = C(\mathbb{Q})$ über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.[5] Betrachtet man C über den komplexen Zahlen, so beschreibt C (im nicht-singulären Fall) eine kompakte Riemannsche Fläche und kann durch das Geschlecht $g = g(C)$ topologisch charakterisiert werden.

Die wichtigsten Fragen sind die folgenden:

- Ist die diophantische Gleichung $F(x,y,z) = 0$ lösbar oder unlösbar?
- Hat sie endlich viele oder unendlich viele Lösungen?
- Kann man alle Lösungen angeben bzw. vollständig beschreiben?

Wie schwer allein die erste Frage zu beantworten ist, zeigt die Fermatgleichung $x^n + y^n - z^n = 0$. Die erste Frage ist i.a. noch vollkommen ungeklärt.

Vollständig gelöst ist nur der Fall $g(C) = 0$. Hier kann mit Hilfe des Hasse-Prinzips[6] entschieden werden, ob es eine Lösung gibt oder nicht. Weiters können alle

---

[5] Offensichtlich ist es gleichbedeutend, ob man rationale oder ganzzahlige Lösungen sucht. Übrigens ist eine entsprechende affine Kurve etwa durch die Gleichung $f(x,y) = F(x,y,1) = 0$ gegeben, und das obige Problem ist gleichbedeutend mit der Suche nach rationalen Punkten (x,y) mit $f(x,y) = 0$.

[6] Eine nicht-singuläre Kurve vom Geschlecht $g(C) = 0$ kann durch ein quadratisches (homogenes) Polynom $F(x,y,z) = 0$ beschrieben werden. Das Hasse-Prinzip besagt, daß diese diophantische Gleichung genau dann lösbar ist, wenn sie modulo aller Primzahlen p lösbar ist (was leicht überprüft werden kann, da sich das Problem auf endlich viele Primzahlen reduziert) und die quadratische Form $F(x,y,z)$ über $\mathbb{R}$ indefinit ist.

Lösungen (falls es überhaupt eine gibt) rational parametrisiert werden. Es gibt also keine oder unendlich viele Lösungen.

Ist hingegen das Geschlecht $g(C) \geq 2$, so gibt es höchstens endlich viele Lösungen. Diese Eigenschaft wurde von Mordell vermutet und 1983 von Faltings [6] bewiesen. Es gibt zwar effektive Abschätzungen für die Anzahl der Lösungen, aber bis jetzt keine effektive Methode, um tatsächlich alle Lösungen zu bestimmen. Solch eine Methode wäre dann auch auf das (auf anderem Weg bereits gelöste) Fermatsche Problem anwendbar.

Eine Zwischenstellung nehmen die Kurven vom Geschlecht $g(C) = 1$ ein. Hier können alle Fälle auftreten: keine Lösung, endlich viele Lösungen und unendlich viele Lösungen. Falls es Lösungen gibt (was i.a. noch nicht entschieden werden kann), kann C als elliptische Kurve in Weierstraß-Form

$$C:\; y^2 = x^3 + ax + b$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$ (affin) geschrieben werden, und alle rationalen Lösungen bilden eine abelsche Gruppe.[7] Der Satz von Mordell-Weil besagt, daß C, aufgefaßt als Gruppe, endlich erzeugt ist, d.h.

$$C(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^r \times T,$$

wobei T endlich ist und r den Rang der elliptischen Kurve $C(\mathbb{Q})$ bezeichnet. Die Entscheidung, ob $C(\mathbb{Q})$ endlich oder unendlich ist, reduziert sich auf die Bestimmung von r.

Man definiert nun die L-Reihe von C durch

$$L(C,s) = \prod_{p \text{ prim},\; p \nmid 2\Delta} \frac{1}{1 - (p - N_p)p^{-s} + p^{1-2s}},$$

wobei N_p die Anzahl der Lösungen von $y^2 \equiv x^3 + ax + b \bmod p$ bezeichnen und Δ die Diskrimante von C ist. Es zeigt sich, daß dieses Eulerprodukt für komplexe s mit $\Re(s) > \frac{3}{2}$ konvergiert. Es war eine lange offene Frage, ob es immer möglich ist, diese L-Reihe analytisch auf die ganze Ebene fortzusetzen. Dieses Problem wurde kürzlich von Wiles u.a. [12, 10, 1] gelöst.[8]

Die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer besagt nun, daß $L(C,s)$ an der Stelle $s_0 = 1$ eine r-fache Nullstelle hat, also insbesondere folgende Eigenschaft gilt:

$$L(C,1) = 0 \Longleftrightarrow C \text{ hat unendlich viele Punkte.}$$

---

[7] Sind beispielsweise $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ zwei (rationale) Punkte auf C, so schneidet die Verbindungsgerade $[A, B]$ die Kurve C in genau einem dritten Punkt $R = (x_3, y_3)$. Als Summe von P und Q bezeichnet man den Punkt $-R := (x_3, -y_3)$. Neutrales Element dieser Addition ist der Fernpunkt in Richtung der y-Achse.

[8] Eine Folgerung daraus war auch die Lösung der Fermatschen Vermutung.

Damit wäre die zweite Frage für Kurven mit Geschlecht $g(C) = 1$ gelöst, und man wäre auch einer Lösung der dritten sehr nahe, da die Struktur der Lösungen (als endlich erzeugte abelsche Gruppe) bereits bekannt ist.

Bisher wurden nur die Implikationen

$$L(C,1) \neq 0 \Longrightarrow r = 0$$

und

$$L(C,1) = 0,\ L(C,1)' \neq 0 \Longrightarrow r = 1$$

bewiesen (siehe dazu [3]).

Literatur

1. C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, and R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises*, preprint.

2. St.A. Cook, *The complexity of theorem-proving procedures*, in: Conference Record of Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 151–158, Shaker Height, Ohio, 3–5, 1971.

3. H. Darmon, *Wiles' theorem and the arithmetic of elliptic curves*, in: Modular forms and Fermat's Last Theorem, Springer, 1997, 549–569.

4. P. Deligne, *La Conjecture de Weil I*, Publicationes Math. IHES **43** (1974), 273–308.

5. P. Deligne, *La Conjecture de Weil II*, Publicationes Math. IHES **52** (1980), 137–252.

6. G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), 549–576.

7. M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and Intractibility, ad Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1979.

8. H. Iwaniec and P. Sarnak, *Perspectives on the analytic theory of L-functions*, Proceedings on the conference *Visions 2000*, im Erscheinen.

9. B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*, Monat. der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus dem Jahre 1859 (1860), 671–680; Gesammelte math. Werke und wissensch. Nachlaß, 2. Aufl, 1892, 145–155.

10. R. Taylor and A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. Math. **142** (1995), 553–572.

11. A. Weil, *Sur les Courbes Algébriques et les Variétés que s'en déduissent*, Hermann & C$^{\text{ie}}$, Paris, 1948.

12. A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math. **142** (1995), 443–551.

13. E. Zeidler, *Hundert Jahre nach Hilbert. Sieben Milleniumspreise für sieben Millionen Dollar*, DMV-Mitteilungen 3/2000, 56–59.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 184 (2001), 37–41

Das Institut für Algebra, Stochastik und wissensbasierte mathematische Systeme an der Johannes-Kepler-Universität Linz

Günter Pilz

Das Institut für Algebra, Stochastik und wissensbasierte mathematische Systeme entstand aufgrund einer Aufteilung des ehemaligen Instituts für Mathematik. Es gliedert sich weiter in die Abteilungen für Algebra, Stochastik, sowie Fuzzy Logic Laboratorium. Die Verbindung zwischen diesen Gebieten ist stärker (s. unten), als es die Namen vermuten lassen.

Am Institut arbeiten 4 Habilitierte (die Professoren Erich Peter Klement, Günter Pilz und Peter Weiß sowie Dozent Peter Fuchs), drei Assistenten (Dr. Erhard Aichinger, Dr. Klaus Schiefermayer, NN), eine wissenschaftliche Beamtin (Dr. Christine Takacs), zwei Sekretärinnen (Waltraud Eidljörg, Sabine Lumpi) sowie ein Techniker (Markus Hetzmannseder). Dazu kommen etwa 10 Mitarbeiter, die im Rahmen der Teilrechtsfähigkeit angestellt sind.

In der Lehre betreut unser Institut natürlich die Interessensgebiete, die direkt mit der Forschung am Institut zusammenhängen, sowie eine beträchtliche Zahl großer Lehrveranstaltungen, wie Einführungsveranstaltungen (z.B. die Lineare Algebra) und Servicelehrveranstaltungen (für Chemiker, Informatiker, Mechatroniker, Physiker, Betriebswirte, Wirtschaftsmathematiker, Wirtschaftsstatistiker u.ä.m.). Einige Institutsmitglieder tragen auch an Fachhochschulen vor. Das Institut koordiniert ein vom seinerzeitigen Bundesministerium für Wissenschaft und Verkehr gefördertes Projekt (IMMENSE), in dem auf Basis des Computeralgebra-Programms *Mathematica* eine multimediale, interaktive Lernsoftware für die Mathematik-Ausbildung in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften entwickelt wird.

Besonders erwähnen möchte ich die Betreuung der Mechatronik, einer innovativen Studienrichtung, die von Herrn Kollegen Prof. Peter Weiß mit enormem

ISSN 0020-7926

Energieeinsatz ins Leben gerufen wurde. Diese Studienrichtung ist ein Aushängeschild der Universität Linz. Das Institut ist daher auch am IKMA („Industrielles Kompetenzzentrum für Mechatronik und Automatisierung“) im Rahmen des *Kind*-Programms der österreichischen Bundesregierung beteiligt. Mitglieder des Instituts beteiligen sich auch in der Organisation der Johannes-Kepler-Universität Linz, z.B. als Vorsitzender des Senats, Studiendekan, Vizestudiendekan sowie als Vizerektor für Forschung.

1 Abteilung für Algebra

Leitendes Thema der Abteilung für Algebra sind jene algebraischen Strukturen, die man für das Studium nichtlinearer Funktionen auf Gruppen benötigt, die Fastringe. Das sind verallgemeinerte Ringe, bei denen die Addition nicht kommutativ sein muß und nur ein Distributivgesetz gefordert wird; sie entstehen in natürlicher Weise beim Studium von (beliebigen) Abbildungen auf Gruppen $(G,+)$ bezüglich der punktweisen Addition und der Komposition von Funktionen. Eine weitere Beispielklasse sind die Polynomfastringe $(R[x],+,\circ)$. Daher kann man die Fastringtheorie als „nichtlineare Ringtheorie“ bezeichnen. Im folgenden die wichtigsten Themen, die in den letzten Jahren untersucht wurden:

- Zerlegung von Polynomfunktionen bezüglich der Hintereinanderausführung von Funktionen.
- Beschreibung der Fastringe durch das Charakterisieren einfacher Fastringe bzw. des Auffindens maximaler Ideale.
- Anwendungen in der Geometrie („wann kann man Fastringe als Koordinatenbereich wählen?“), in der Systemtheorie (lineare Systeme bilden Ringe bezüglich Parallel- bzw. Serienschaltung, nichtlineare Systeme bilden Fastringe) und in der Codierungstheorie (s. unten).
- Das Rechnen in Fastringen am Computer. Dabei wurde das Programmpaket SONATA (System of Near-Rings and Their Applications) entwickelt, das heute bereits weltweit eingesetzt wird.
- Das Studium verwandter Strukturen (Gruppen, Ringe, Kompositionsringe, universelle Algebren).

Eine weitere Anwendung von Fastringen liegt in der Konstruktion von Blockplänen („BIB-Designs“) zur Erstellung statistischer Versuchspläne und zur Konstruktion effizienter nichtlinearer Codes. Für einen endlichen Fastring F mit einer Zusatzeigenschaft („Planarität“) ist nämlich jede Teilmenge $a \circ F^* + b$ von F gleich groß ($F^* = F \setminus \{0\}$), und man erhält dadurch in sehr einfacher Weise

BIB-Designs mit exzellenten Eigenschaften; einige dieser Designs werden auch tatsächlich für statistische Versuchsplanungen in der Landwirtschaft verwendet. Nimmt man die Zeilen der Inzidenzmatrix solch eines Designs als Codewörter, so entstehen binäre equal-weight-codes. Diese sind optimal in dem Sinn, daß sie (falls Wortlänge, Gewicht und Minimaldistanz fix sind) die maximal mögliche Zahl an Codewörtern besitzen. Sie lösen daher auch Probleme diskreter Kugelpackungen. Planare Fastringe sind „im wesentlichen" fixpunktfreie Automorphismengruppen auf nilpotenten Gruppen. Für die Untersuchung dieser Automorphismengruppen wurde DI Peter May mit dem ÖMG-Studienpreis 2000 ausgezeichnet.

2 Abteilung für Stochastik

In dieser Abteilung sind im wesentlichen die folgenden Arbeitsgebiete vertreten:

- Statistische Datenanalyse: wir befassen uns dabei mit der Analyse von realen Daten aus der Medizin, der Technik und den Naturwissenschaften und verbessern im Rahmen von konkreten Projekten die bereits vorhandenen Methoden.

- Sonnenfleckenaktivitäten: im Berichtszeitraum wurde das über mehrere Jahre laufende Projekt (finanziert von der ESA) zur Prognose von Sonnenflecken abgeschlossen.

- Nichtparametrische Testtheorie: die im Rahmen der nichtparametrischen Testtheorie verwendeten Tabellen sind zum Teil fehlerhaft und somit nicht sehr zuverlässig. Aufbauend auf Arbeiten von P. Mitic wurde ein Algorithmus entwickelt, mit dessen Hilfe sich die Verteilungsfunktionen, die Quantile und ähnliche Größen für die wesentlichsten Teststatistiken der nichtparametrischen Testtheorie leicht berechnen lassen.

- Metaanalyse: im Rahmen einer Diplomarbeit wurden einige wichtige statistische Methoden der Metaanalyse erarbeitet und mit Hilfe von Simulationsstudien auf deren Güte untersucht.

- Irrfahrten auf Bäumen: basierend auf den im Berichtszeitraum und davor erschienen Publikationen wurden Bäume als elektrische Schaltungen interpretiert und Zusammenhänge zwischen elektrischen Kenngrößen und Irrfahrten auf ihnen studiert. Besonderes Augenmerk wurde neben dem zeitlichen auf das räumliche Fluchtverhalten der Irrfahrt gelegt. Durch das Liften der Markov-Ketten in den Zustandsraum der Bäume wird es oft möglich, auch im Fall der transienten Irrfahrt stationäre Prozesse zu gewinnen.

3 Abteilung Fuzzy Logic Laboratorium

Das Arbeitsgebiet dieser Abteilung sind wissensbasierte mathematische Systeme mit Schwerpunkten in den Bereichen Fuzzy Logic, Genetische Algorithmen, Neuronale Netze und Machine Learning.

Im Bereich der Grundlagenforschung wurde in den letzten Jahren die Monographie "Triangular Norms" (E.P. Klement, R. Mesiar und E. Pap, Kluwer, 2000) fertiggestellt. Darin werden wesentliche, zu einem guten Teil bisher unveröffentlichte Aspekte dieser algebraischen Operationen zusammengestellt, die auf Karl Menger zurückgehen und die nicht nur wesentlich für Gebiete wie mehrwertige Logik, Fuzzy Logic oder probabilistische metrische Räume sind, sondern auch Anwendungen in der Theorie verallgemeinerter, nicht-additiver Maße und ihrer zugehörigen Integrale finden.

Im angewandten Bereich ist das Projekt FARAC ("Fuzzy Algorithm for Robot Actuator Coordination", Förderung durch den FWF und das Land Oberösterreich) zu nennen, in dessen Rahmen unter der Federführung von PROFACTOR (Steyr) eine maßgeblich auf Fuzzy Control basierende Steuerung eines redundanten mobilen Roboters (AMADEUS) entwickelt wurde, der in der Lage ist, Hindernisse mit Hilfe von Sensoren zu erkennen und diesen auszuweichen.

Wesentliche Beiträge zu Fuzzy Contel wurden in den FWF-Projekten „Fuzzy Modelle von numerischen Input/Output-Beziehungen: Analyse und Entwurfsmethoden“ und RIFPOS ("Rule Interpolation for Fuzzy and Possibilistic Systems") erarbeitet.

Im europäischen Bereich war die Abteilung am mittlerweile abgeschlossenen ESPRIT-Projekt REFORM "A Reusable Framework for Rolling Mills" (Antragsteller SIEMENS AG, Erlagen) und an der ebenfalls erfolgreich abgeschlossenen COST Aktion 15 "Many-Valued Logics for Computer Science Applications“ (Federführung Université Lyon I) beteiligt. Sie ist weiterhin Partner im CEEPUS Netzwerk "Fuzzy Control and Fuzzy Logic" (koordiniert durch die Technische Universität Bratislava).

Das Fuzzy Logic Laboratorium ist an zwei K*plus*-Kompetenzzentren als wissenschaftlicher Partner beteiligt: am SCCH "Software Competence Center Hagenberg" (genehmigt 1998) und am LCM "Linz Center of Competence in Mechatronics" (genehmigt 2000).

Umfangreiche Industriekooperationen werden im Rahmen der Teilrechtsfähigkeit im Softwarepark Hagenberg durchgeführt. Das Hauptaugenmerk liegt hier auf der intelligenten, automatisierten Interpretation von Signalen (u.a. Bilder, akustische und Radar-Signale, Meßergebnisse aller Art). Wichtigste Partner in diesem Bereich sind SONY DADC Austria (Anif, Partnerschaft seit 1994), SCA Laakirchen, HILTI (Schaan), KEBA (Linz) und UNI SOFTWARE PLUS (Hagenberg). Anspruchsvolle Fuzzy Control-Anwendungen werden gemeinsam mit dem Verbund-Konzern entwickelt: individuelle Oberwasserpegel-Regler für die einzelnen Donaukraftwerke (bisher für Testzwecke implementiert: Melk, Ybbs) sowie ein übergeordneter strategischer Regler für die gesamte Kraftwerkskette an der Donau, mit dessen Hilfe etwa Vorabsenkungen bei einer herannahenden Hochwasserwelle weitgehend automatisiert werden.

Buchbesprechungen

Allgemeines — General — Généralités

V. Klee, St. Wagon: Alte und neue ungelöste Probleme in der Zahlentheorie und Geometrie der Ebene. Aus dem Amerikanischen von M. Stern. Birkhäuser Verlag, Basel u.a., 1997, XIII+306 S. ISBN 3-7643-5308-2 P/b sfr 48,–.

Die Originalausgabe dieses Buches erschien im Jahre 1991 unter dem Titel *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*. Die drei Kapitelüberschriften der vorliegenden deutsche Übersetzung sind: 1. Zweidimensionale Geometrie, 2. Zahlentheorie, 3. Interessante reelle Zahlen.

Jedes Kapitel besteht aus zwei Teilen: In Teil 1 (Grundlagen) werden Probleme vorgestellt, veranschaulicht und vom elementaren Standpunkt diskutiert. Diese Teile können von jedem Studierenden schon im ersten oder zweiten Studienjahr mit Gewinn gelesen werden und bieten auch so manche Anregung für den Schulunterricht, wobei es am Lehrer liegt, mit dem nötigen Augenmaß vorzugehen. Teil 2 (Weiterführende Bemerkungen) ist jeweils den mathematischen Grundlagen, Querverbindungen und Literaturhinweisen gewidmet. Er richtet sich an höhersemestrige Studierende. Für Schüler und mathematische Laien sind diese Teile wohl zu anspruchsvoll.

Es ist aus Platzgründen leider nicht möglich, alle vorgestellten Probleme anzugeben; die folgende Auswahl ist naturgemäß subjektiv: Beleuchtung eines Polygons, Parkettierungen und Färbungen der Ebene, Quadratur des Kreises, Vollkommene Zahlen, Riemannsche Vermutung, Das $(3n+1)$-Problem, Gesetzmässigkeiten bei π, Beziehungen zwischen π und e.

Wie die Autoren im Vorwort betonen, ist das Buch ausschließlich Problemen der einfachen Art gewidmet — Problemen, deren Aussagen kurz und leicht zu verstehen sind. Dass man auch unter diesen Einschränkungen sehr schnell an die Grenzen der aktuellen Forschung gelangen kann, wird eindrucksvoll dargestellt.

Ich habe dieses Buch mit sehr viel Freude gelesen.

H. Havlicek (Wien)

Biographie — Biography — Biographie

D. Van Dalen: Mystic, Geometer, and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer. Vol. 1: The Dawning Revolution. Clarendon Press, Oxford, 1999, XV+440 S. ISBN 0-19-850297-4 H/b £ 75,–.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer ist eine der interessantesten Persönlichkeiten in der Mathematik des 20. Jahrhunderts: ein Genie mit philosophischen, gar mystischen Anwandlungen, der Begründer des Intuitionismus und der Idee eines „kreativen Subjekts" in der Mathematik. Seine Bedeutung, insbesondere im Gebiet der Topologie, ist unbestritten, wie auch seine wilde Auseinandersetzung mit Hilbert legendäre Ausmaße annahm. Daneben nahm Brouwer innerhalb der holländischen Gesellschaft seiner Zeit aufgrund seiner kompromißlosen politischen Ansichten – er galt als Gerechtigkeitsfanatiker – eine maßgebliche Stellung ein. Das vorliegende Werk behandelt die Persönlichkeit Brouwers und die mathematische Grundlagenkrise zu seiner Zeit in einer stupenden Detailkenntnis, mit einem beeindruckenden Vermögen, die geistige Situation der damaligen Zeit dem Leser erneut vor Augen zu führen, und mit der kunstvollen Kraft, die vielen Einzelheiten und agierenden Persönlichkeiten in den unfassenden Rahmen einer einheitlichen Sicht einzuordnen. Dies ist um so mehr zu bewundern, als das Leben Brouwers von Mystik und Politik, von Topologie und Sprachphilosophie, von Intuitionismus und der bürokratischen Arbeit eines Zeitschriftherausgebers, von Universitäten und Frauenbekanntschaften sowie von vielen anderen in die verschiedensten Richtungen weisenden Gegensatzpaaren geprägt war.

R. Taschner (Wien)

Logik und Grundlagen — Logic, Foundations — Logique et fondements

P. Taylor: Practical Foundations of Mathematics. (Cambridge studies in advanced mathematics 59.) Cambridge University Press, 1999, XI+572 S., ISBN 0-521-63107-6 H/b £ 50,–..

Das Buch „Practical Foundations" bietet eine Zusammenstellung der Methoden, derer sich die Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts bediente, um ihre Objekte zu konstruieren. Im wesentlichen hält es sich dabei an einen Rahmen, der von einer naiven Zermelo-Fraenkelschen Mengentheorie abgesteckt wird, aber es führt auch in die Bereiche der Typentheorie und der rekursiven Funktionen ein. Dem Charakter eines Handbuchs entsprechend können die einzelnen Kapitel im allgemeinen unabhängig voneinander studiert werden, und die ersten zwei

Drittel des Textes sind von jedem in der mathematischen Praxis geschulten Leser zu bewältigen. Die Philosophie dieses Buches besteht nicht darin, ein spezielles Grundlagensystem vorzuschlagen; die logischen Grundlagen werden vielmehr als „Vehikel“ des Verstehens und nicht als dessen „Fracht“ betrachtet. Auf diese Weise ist der Autor bestrebt, dem Leser all das an logischer Methodik zu bieten, was dieser für seine Mathematik (jedenfalls implizit) benötigt.

R. Taschner (Wien)

Algebra und Zahlentheorie — Algebra and Number Theory — Algèbre et théorie des nombres

L. J. Billera, A. Björner, C. Greene, R. E. Simion, R. P. Stanley R. P. (Eds.): New Perspectives in Algebraic Combinatorics. (Mathematical Sciences Research Institute Publications 38.) Cambridge University Press, 1999, IX+345 S. ISBN 0-521-77087-4 H/b £ 32,50.

This volume grew out of work done or presented at the 1996/97 full academic year Combinatorics Program at the Mathematical Sciences Research Institute in Berkeley. “Algebraic Combinatorics” is the field where techniques from algebra, topology and geometry are used in the solution of combinatorial problems, or where combinatorial methods are used to attack problems in these areas. The articles in this volume constitute a representative sample of what “Algebraic Combinatorics” can be. Most of the articles survey research areas in which a lot of activity could be witnessed recently, such as “Matroid Bundles” by *L. Anderson*, “Combinatorial Representation Theory” by *H. Barcelo* and *A. Ram*, “An Algorithmic Theory of Lattice Points in Polyhedra” by *A. Barvinok* and *J. E. Pommersheim*, “Combinatorial Differential Topology and Geometry” by *R. Forman*, “The Generalized Baues Problem” by *V. Reiner*, and “Littlewood-Richardson Semigroups” by *A. Zelevinsky*, but one finds also research papers: “Some Algebraic Properties of the Schechtman-Varchenko Bilinear Forms” by *G. Denham* and *Ph. Hanlon*, and “Macdonald Polynomials and Geometry” by *M. Haiman*, as well as a collection of problems: “Enumeration of Matchings: Problems and Progress” by *J. Propp*.

Ch. Krattenthaler (Wien)

P. J. Cameron: Introduction to Algebra. Oxford University Press, 1998, X+ 295 S. ISBN 0-19-850194-3 P/b £ 16,95, ISBN 0-19-850195-1 H/b.

Besides the standard topics of ring, field and group theory and the basics of the theory of vector spaces, this book includes chapters on modules, number systems and applications. To give a flavour of the themes dealt with there we mention some: normal forms of matrices (over arbitrary fields), a proof of the transcendence of *e* and Liouville numbers, coding theory and Galois theory. Also in the other chapters at least glimpses to more advanced topics are given, e. g. on finite simple groups, group extensions and homological algebra, algebraic geometry, universal algebra and category theory. Altogether this is a concise but solid introduction into algebra and linear algebra.

G. Kowol (Wien)

P. J. Cameron: Permutation Groups. (London Mathematical Society Student Texts 45.) Cambridge University Press, 1999, X+220 S., ISBN 0-521-65302-9 H/b £ 43,50, ISBN 0-521-65378-9 P/b £ 15,95.

Dieses Buch basiert auf einer Spezialvorlesung des Autors am Euler-Institut im Jahr 1997. Es behandelt ausgewählte Kapitel über Gruppen von Permutationen einer diskreten Menge. Zunächst werden nur grundlegende Kenntnisse der Gruppentheorie vorausgesetzt; das erste Kapitel fängt sozusagen von „unten“ mit der Aktion von Gruppen an und stößt sehr rasch zu interessanten Themen vor. Die weiteren Kapitelüberschriften: 2. Representation theory, 3. Coherent configurations, 4. The O’Nan-Scott Theorem, 5. Oligomorphic groups, 6. Miscellanea. Das letzte Kapitel (7.) enthält Gruppentafeln für die endlichen einfachen und die endlichen 2-transitiven Gruppen. Längere Beweise werden zum Teil nur in geraffter Form präsentiert. Jedes Kapitel schließt mit einer Vielzahl von Übungsbeispielen. Darüber hinaus werden auch einige Beispiele zum Computerrechnen mit Permutationsgruppen mit dem Programmiersystem GAP gegeben.

Der „Klassiker“ auf dem Gebiet der Permutationsgruppen, das Werk von Wielandt (Finite Permutation Groups), ist schon 36 Jahre alt. Bücher jüngeren Datums stammen von Cameron selbst (1990), Dixon und Mortimer (1996) und Bhattacharjee et. al. (1997). Das vorliegende Buch, obwohl es (bewußt) nicht den gesamten Bogen der möglichen Themen umfaßt, gibt einen guten Einblick in den aktuellen Stand. Es ist zum Selbststudium sowie als Unterlage für Spezialvorlesungen und Seminare geeignet.

W. Woess (Graz)

J. Neukirch: Algebraic Number Theory. Translated from the German by N. Schappacher. With 16 Figures. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 322.) Springer, Berlin u.a., 1999, XVII+571 S. ISBN 3-540-65399-6 H/b DM 179,–.

Es liegt nun die von Norbert Schappacher verfaßte englische Übersetzung dieses 1992 in deutscher Sprache erschienenen Lehrbuches vor. Dies war keine leichte Aufgabe, wenn man den gewählten, fast literarischen Stil des leider schon vor 3 Jahren verstorbenen Autors kennt, in dem er die Überleitungen zwischen den rein mathematischen Teilen des Textes verfaßt hat. So beginnt das Kapitel über allgemeine Klassenkörpertheorie wie folgt: “*Jeder Körper k geht einher mit einer ausgezeichneten galoisschen Erweiterung: dem separablen Abschluß* $\bar{k}|k$. *… Diese Erweiterung ist in aller Regel von unendlichem Grad, hat jedoch den Vorzug, die sämtlichen endlichen galoisschen Erweiterungen von k in sich zu versammeln.*”

Doch nun zum mathematischen Inhalt dieses Werkes, der exakt und platzsparend verfaßt ist, den Leser aber doch immer wieder glauben läßt, daß alles ja „gar nicht so schwer“ sei. Grob läßt sich das Buch in 3 Abschnitte einteilen: die ersten 3 Kapitel entwickeln die globale und lokale Theorie der algebraischen Zahlkörper, wobei im wesentlichen nur algebraische Grundlagen vorausgesetzt werden. Diesen Teil schlägt der Autor auch als Stoff für eine zweisemestrige Vorlesung vor. Die nächsten 3 Kapitel über Klassenkörpertheorie bilden den zweiten Abschnitt, in dem der Autor, dem Muster seines Buches “Class field theory” folgend, erst die abstrakte Klassenkörpertheorie entwickelt und daraus die lokale und globale herleitet. Gegenüber letzterem Buch wird hier jedoch ausführlicher motiviert und werden Ergänzungen wie *Mikroprimstelle* oder *G-Modulation* in den Übungsbeispielen integriert. Der dritte Teil ist Kapitel VII „Zetafunktionen und *L*-Reihen“, in dem als Einführung Dirichletsche, dann Heckesche und schließlich Artinsche *L*-Reihen studiert werden. Hier folgt der Autor den ursprünglichen, *„dem direkten Verständnis nur schwer zugänglichen“* Pfaden Heckes und bringt dessen Beweisführung in einer zeitgemäßen Form. Der in “Tate’s thesis” gefundene alternative Zugang zum Beweis der Funktionalgleichung der Heckeschen *L*-Funktionen mittels harmonischer Analysis wurde ohnehin bereits von Serge Lang aufbereitet.

Grundsätzliches Anliegen des Autors ist es, im Sinne der Arakelowschen Theorie die algebraische Zahlentheorie als Spezialfall der (arithmetischen) algebraischen Geometrie zu erkennen und dazu möglichst viele Parallelitäten aufzuzeigen. So wird in Kapitel III die Riemann-Roch-Theorie für Zahlkörper entwickelt: Arakelow-Klassengruppe, Geschlecht, Satz von Riemann-Roch (*„Eine geometrisch sich gebärdende Zahlentheorie muß darauf gerichtet sein, auch diesen Satz in adäquater Form einzubeziehen.“*) und ein Analogon der Hurwitzschen Geschlechtsformel, Poincaré-Homomorphismus, Chern-Charakter, Grothendieck-Riemann-Roch und Euler-Minkowski-Charakteristik — alles ist auch für algebraische Zahlkörper möglich! Um die „richtigen“ lokalen Bestandteile für die unendlichen Primstellen zu erhalten, ist es insbesondere wichtig zu klären, ob die Erweiterung $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ nun als verzweigt oder unverzweigt aufgefaßt werden soll (oder gleichbedeutend damit: welches Maß auf dem Minkowski-Raum verwendet werden soll) — nachzulesen im Anschluß an III.(3.13).

Schließen möchte ich mit den Worten von Falko Lorenz: „Selten genug ist dem Leser eines Buches der Enthusiasmus des Autors für seinen Gegenstand so fühlbar wie bei diesem. Ein gutes, ein schönes Buch!“

G. Lettl (Graz)

Geometrie — Geometry — Géométrie

J. W. Anderson: Hyperbolic Geometry. With 20 Figures. (Springer Undergraduate Mathematics Series.) Springer, London u.a., 1999, IX+230 S. ISBN 1-85233-156-9 P/b DM 59,–.

Das vorliegende Buch behandelt einige Aspekte der ebenen hyperbolischen Geometrie anhand des Halbebenenmodells sowie, zu einem sehr kleinen Teil, anhand des Scheibenmodells von Poincaré.

Der gewählte modellhafte Zugang erfordert zunächst eine ausführliche Diskussion einerseits der einpunktig abgeschlossenen Ebene der komplexen Zahlen und andererseits der auf ihr operierenden gleich- und gegensinnigen Möbiustransformationen. Letztere führen dann in bekannter Weise zu den Isometrien der beiden oben genannten Modelle der hyperbolischen Ebene.

Sieht man von einigen Grundbegriffen ab, so beginnt das Studium der hyperbolischen Geometrie erst auf Seite 57: Durch „Skalieren“ des euklidischen Fundamentaltensorfeldes in der oberen Halbebene wird diese zu einem Riemannschen Raumstück gemacht. Mit Hilfe dieses neuen Tensorfeldes werden Kurvenintegrale und die hyperbolische Bogenlänge aufgebaut. Erst danach wird aus dem Bogenlängenbegriff der hyperbolische Abstand zweier Punkte hergeleitet. Ebenfalls diskutiert werden konvexe Mengen, Polygone, der hyperbolische Flächeninhalt sowie die Anfangsgründe der hyperbolische Trigonometrie.

Ein abschließendes Kapitel ist den auf der oberen Halbebene operierenden diskreten Gruppen von Isometrien gewidmet.

Zahlreiche Detailüberlegungen werden in Übungsaufgaben verlagert. Auf den letzten 40 Textseiten werden Lösungen dieser Aufgaben vorgestellt.

H. Havlicek (Wien)

S. D. Eidelman, N. V. Zhitarashu: Parabolic Boundary Value Problems. Translated from the Russian by G. Pasechnik and A. Iacob. (Operator Theory, Advances and Applications, Vol. 101.) Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1998, XI+298 S. ISBN 3-7643-2972-6, 0-8176-2972-6 H/b sfr 198.–.

Nach grundsätzlichen Definitionen, der Formulierung des Problems und zahlreichen Beispielen betrachten die Autoren Eigenschaften von Distributionen und die notwendigen Grundlagen über Sobolev-Räume. Die Beschränktheit verschiedener Operatoren und Greensche Formeln bilden die Voraussetung der weiteren Betrachtungen, namentlich des Studiums einer Modellgleichung im Raum gewöhnlicher Funktionen und Distributionen. Die Untersuchungen von Randwertproblemen in zylindrischen Bereichen verallgemeinern und vervollständigen Resultate, die im Falle glatter und verallgemeinerter Lösungen bekannt sind. Die Ergebnisse gestatten eine Anwendung auf Probleme, deren rechte Seiten potenzartige Singularitäten aufweisen und auf Probleme, die die Existenz von Grenzwerten schwacher Lösungen und ihrer Normalableitungen am Rand von zylindrischen Bereichen betreffen. Nach einem Überblick, der zahlreiche Literaturhinweise vermittelt, werden Ergebnisse des asymptotischen Verhaltens und der Stabilisierung für $t \to \infty$ präsentiert.

J. Hertling (Wien)

V. P. Havin, N. K. Nikolski (Eds.): Commutative Harmonic Analysis II. Group Methods in Commutative Harmonic Analysis. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 25.) Springer, Berlin u.a., 1998, VIII+325 S. ISBN 3-540-51998-X H/b DM 158,–.

Das Buch ist gegliedert in zwei Kapitel: “Convolution and Translation in Classical Analysis” und “Invariant Integration and Harmonic Analysis on Locally Compact Abelian Groups”. Das erste behandelt Ergebnisse der harmonischen Analysis im $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$. Verschiedene Zugänge werden referiert, Überschneidungen mit den anderen Enzyklopädiebänden sind gegeben. Für das zweite sei stellvertretend für eine präzise Beschreibung das Zitat von Mackey (1978) angeführt: “The representation theory of finite groups and compact Lie groups on the one hand and the Pontrjagin-van Kampen Duality Theorem on the other constitute two rather different generalizations of the harmonic analysis of the nineteenth century. The first of these began to have applications to number theory and physics in the mid-1920s. Applications of the Pontrjagin-van Kampen Duality Theorem began in 1936 with the introduction by Chevalley of the concept of an idele and of the idele group of an algebraic number field.” (pp. 186). Besonders betont sei noch, dass das

Buch — vergleichbar einem Handbuch — eine Fülle von Ergebnissen (und deren Entwicklung) darstellt.

N. Ortner (Innsbruck)

Angewandte Mathematik — Applied Mathematics — Mathématiques appliquées

G. Anderson: Applied Mathematics with Maple. Studentlitteratur, Lund — Chartwell Bratt, 1997, 448 S. ISBN 91-44-00149-5 (Studentlitteratur), 0-86238-490-7 (Chartwell Bratt).

Das Software-Paket „Maple" darf als hinreiched bekannt vorausgesetzt werden. Es ermöglicht numerische und symbolische Berechnungen sowie die Visualisierung in Bildern oder film-artigen Bildfolgen. Die Anwendung erstreckt sich auf Aufgaben der Algebra, Logik, Vektorrechnung, linearen Algebra, Differentialrechnung, Differentialgleichungen, Folgen und Reihen bis zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Es muß nicht betont werden, daß ein solches Werkzeug auf einem elementaren Niveau der höheren Mathematik im Lehren und im Lernen von großer Hilfe ist.

J. Hertling (Wien)

R. B. Banks: Slicing Pizzas, Racing Turtles and Further Adventures in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1999, XIII+286 S. ISBN 0-691-05947-0 H/b $ 24,95.

Das Buch bietet eine abwechslungsreiche Sammlung von Beispielen angewandter Mathematik im populärwissenschaftlichen Sinn. In 26 Kapiteln werden von Flächeninhaltsberechnungen zur Farbenverteilung in der Fahne der USA über Probleme der Fortbewegung im Regen, gängige Verfahren der Kartographie bis hin zur Bestimmung der Länge der Route gewisser Weltreisen über die Erdkugel instruktive Probleme aus mathematischer Sicht vorgestellt. Die meisten lassen sich mit nicht allzuhohen mathematischen Methoden lösen. Das Buch bietet großes Lesevergnügen und ist vor allem jenen Mathematiklehrern zu empfehlen, die Stoff und Anregung für die Auflockerung ihres Unterrichts mittels gut lösbarer anwendungsorientierter Probleme suchen.

O. Röschel (Graz)

D. Marsh: Applied Geometry for Computer Graphics and CAD. With 95 Figures. (Springer Undergraduate Mathematics Series.) Springer, London u.a., 1999, XII+288 S. ISBN 1-85233-080-5 P/b DM 59,–.

Dieses Buch wendet sich an Einsteiger in das Gebiet der Computergraphik und des CAD. Sämtliche mathematischen und geometrischen Grundlagen für das Verständnis von computergraphischen Algorithmen werden sorgfältig besprochen und mit vielen explizit ausgerechneten Beispielen illustriert. Fast jedes Kapitel endet mit einem Abschnitt, in dem Anwendungsmöglichkeiten der erarbeiteten Methoden in der Computergraphik, aber auch in der Robotik und Mechanik aufgezeigt werden. Das Buch beginnt mit einer elementaren Einführung in die ebenen euklidischen Transformationen. Kapitel zwei führt in homogene Koordinaten und in die vereinheitlichte Schreibweise der ebenen Transformationen mit Hilfe der homogenen Koordinaten ein. Kapitel drei ist den räumlichen Transformationen gewidmet, und in Kapitel vier werden die Projektionen und Bildschirmkoordinatentransformationen behandelt. Nach einer Einführung in die Darstellung von Kurven in Ebene und Raum werden Bezierkurven, B-Splines und NURBS in großer Breite behandelt. Das neunte Kapitel ist der Flächendarstellung gewidmet. Behandelt werden Quadriken, Bezier- und B-Splineflächen sowie eine Reihe von Bewegflächen. Das letzte Kapitel handelt von der Krümmung der Kurven und Flächen. Viele Beispiele und Übungsaufgaben mit Lösungen machen dieses Buch zu einer wertvollen Lektüre für den Einsteiger in Computergraphik und deren Grundlagen. Es könnte aber durchaus auch als Grundlage für eine Einführungsvorlesung in computergraphische Algorithmen dienen.

M. Husty (Leoben)

Y. Nievergelt: Wavelets Made Easy. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1999, XI+297 S. ISBN 0-8176-4061-4, 3-7643-4061-4 H/b öS 643,–.

Der Titel stimmt. Das Buch beginnt elementar mit Rezepten, präzisiert dann die Begriffe, stellt Hilfsmittel aus Analysis und Algebra bereit und schliesst mit dem Beweis von Sätzen über Existenz, Eindeutigkeit und Konvergenz. — Im einzelnen werden in jedem Kapitel die Ausführungen mit Haar- und Daubechie-Wavelets, also je einem Vertreter des diskreten und des kontinuierlichen Typs belegt. Zahlreiche Abbildungen erleichtern das Verständnis. Am Schluss jeden Kapitels folgen noch Anwendungen und Übungsaufgaben. — In einem eigenen Abschnitt werden die wichtigsten Sätze über Trigonometrische Polynome und Fourierreihen und Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu Wavelets deutlich gemacht. — Mehrdimensionale Wavelets werden mit besonderem Schwerpunkt auf dem zweidimensionalen Fall ebenfalls behandelt. — Wavelets besitzen aktuelle Anwendungen in der Signal- und Bildverarbeitung, und das Buch erläutert die zugrundeliegenden Ideen hevorragend.

W. Knödel (Stuttgart)

Mathematische Physik — Mathematical Physics — Physique mathématique

B. Gruber, M. Ramek (Eds.): Symmetries in Science X.. Plenum Press, New York, London, 1998, IX+454 S. ISBN 0-306-45908-6 H/b $ 139,50.

Das internationale Symposium „Symmetries in Science X“ fand im Juli 1997 in Bregenz statt. Die 28 Beiträge in den vorliegenden Proceedings stellen verschiedene algebraische (vor allem gruppentheoretische) Methoden und ihre Anwendungen auf Probleme der Physik vor.

F. Pauer (Innsbruck)

R. Ticciati: Quantum Field Theory for Mathematicians. (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 72.) Cambridge University Press, 1999, XV+699 S. ISBN 0-521-63265-X H/b £ 70,–.

Nach dem von Erwartung geleiteten Durchgehen des vorliegenden Werkes fragt sich der Besprecher, wie der Titel des Buchs aufzufassen sei. Wie schon aus dem Vorwort hervorgeht, ist eine mathematisch strenge Quantenfeldtheorie (QFT) nicht sein Gegenstand, da eine solche Theorie in einer vierdimensionalen Raumzeit bisher nur freie Felder zu behandeln gestattet. Einige knappe, im Text verstreute Hinweise auf zugrundeliegende mathematische Strukturen, oft in Kleindruck gesetzt, stellen wohl nur für jene Leser Bezüge her, denen die angesprochenen Strukturen schon geläufig sind. Eine Ausnahme davon bildet die Einführung in die endlichdimensionalen Darstellungen der Liealgebren der wichtigsten Matrix-Liegruppen in Chapter 6. Aber auch ein Leser, der wegen der Ausrichtung nur erwartet, ein weiterführendes kommentiertes Schrifttumsverzeichnis zu einer mathematischen QFT vorzufinden, kommt nicht auf seine Rechnung: Das einzige dort angeführte Werk über mathematische QFT ist das Buch von Bogoljubov/Logunov/Todorov aus dem Jahre 1975, seine weitgehende Neufassung unter Einbeziehung des Mitverfassers Oksak aus dem Jahre 1987 (engl. 1990) oder das Buch von R. Haag (Local Quantum Physics) fehlen hier ebenso wie einschlägige Grundlagenliteratur der mathematischen Physik. So verbleibt als nobelste Deutung des Titels jene, dass man anhand dieses Buchs ersehen kann, auf wie wenig mathematische Weise von Physikern weiterhin realistische, anwendbare QFT betrieben werden muss.

W. Bulla (Graz)

Wahrscheinlichkeistheorie und Statistik — Probability Theory and Statictics — Théorie des probabilités, statistique

R. C. Dalang, M. Dozzi, F. Russo (eds.): Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications. Centro Stefano Franscini, Ascona, September 1996. (Progress in Probability, Vol. 45.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1999, X+300 S., ISBN 3-7643-6106-9, 0-8176-6106-9 H/b öS 1373,–.

Der vorliegende Band ist das Ergebnis eines sechstägigen Seminars, das im September 1996 in Ascona stattfand. Die präsentierten Arbeiten geben einen interessanten Einblick in aktuelle Forschungsbereiche auf dem Gebiet der stochastischen Analysis. Neben klassischen Fragestellungen wie stochastischen Integralen und stochastischen (partiellen) Differentialgleichungen finden sich auch exotischere Themen, wie etwa die iterierte Brown'sche Bewegung.

K. Grill (Wien)

B. S. Everitt: Chance Rules. An Informal Guide to Probability, Risk, and Statistics. Copernicus (Springer), New York, 1999, XIV+202 S. ISBN 0-387-98768-1 P/b DM 49,–.

Das gelungene Buch hält, was es verspricht. Es ist eine gut und mit Vergnügen zu lesende Behandlung des Themas, die interessante historische, philosophische und Anwendungsaspekte von Wahrscheinlichkeitsüberlegungen, Risikobetrachtungen und Statistik bringt. Es umfasst folgende Abschnitte: A Brief History of Chance; Tossing Coins and Having Babies; Dice; Gambling for Fun: Lotteries and Football Pools; "Serious" Gambling: Roulette, Cards, and Horse Racing; Balls, Birthdays, and Coincidences; Conditional Probability and the Reverend Thomas Bayes; Puzzling Probabilities; Taking Risks; Statistics, Statisticians, and Medicine; Alternative Therapies: Panaceas or Placebos? Chance, Chaos, and Chromosomes. Es werden auch Entscheidungsprobleme der Medizin und grundsätzliche Fragen erörtert und erfreulicherweise sogar die Bedeutung Bayes'scher Analyse in emotionsloser Weise. Auch für Statistiker sind interessante historische und andere Informationen enthalten. Die gute Druckqualität macht den Band zu einer empfehlenswerten Lektüre, wie es auch das vom selben Autor verfasste Dictionary of Statistics ist. Ein enthaltenes Zitat: "Chance is the pseudonym of God when he does not want to sign" wird manche aufhorchen lassen. Vielleicht ist die Stochastik wichtiger, als viele glauben.

R. Viertl (Wien)

D. Revuz, M. Yor: Continuous Martingales and Brownian Motion. Third Edition. With 8 Figures. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 293.) Springer, Berlin u.a., 1999, XIII+602 S., ISBN 3-540-64325-7 H/b DM 179,–.

Dieses Buch kann mit Recht als eines der zentralen Referenzwerke auf dem Gebiet der Brown'schen Bewegung und Fragestellungen, die damit in Zusammenhang stehen, gelten. Der Ruf der Autoren allein bürgt schon dafür, und das Buch selbst besticht durch eine klare und konzise Darstellung, die von klassischen Resultaten im Stil von Paul Lévy zu modernen Betrachtungsweisen führt. Besondere Erwähnung verdienen die eingestreuten Übungsaufgaben, die in idealer Weise die Präsentation der allgemeinen Theorie ergänzen.

Als Voraussetzungen werden zwar nur grundlegende Kenntnisse aus der Maß- und Integrationstheorie gebraucht, aber um das Buch mit Genuss zu lesen, sollte man doch eine gewisse Vertrautheit mit der Theorie der stochastischen Prozesse mitbringen.

K. Grill (Wien)

Einführungen — Introductory — Ouvrages introductoires

K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung. Fünfte, korrigierte Auflage. Mit 450 Abbildungen. (Springer Lehrbuch.) Springer, Berlin u.a., 1999, XVI+529 S. ISBN 3-540-66148-4 P/b DM 59,–.

Seit drei Jahren halte ich Vorlesungen „Mathematik für Physiker II“ (Integration in einer und mehreren Veränderlichen) und „Lineare Algebra“ (für Bauingenieure). Dabei lernte ich die Vorzüge des Bandes 1 von Meyberg-Vachenauer kennen und schätzen. Er bringt das für Naturwissenschaftler Wesentliche aus dem klassischen Stoff der Differential- und Integralrechnung sowie der Linearen Algebra. Großer Wert wird auch auf die Numerik und das Programmieren der Verfahren gelegt. Seinen Erfolg verdankt das Buch (5. Auflage!) neben der Prägnanz und den hervorragend ausgewählten Beispielen auch der übersichtlichen graphischen Gestaltung („Rezepte in Kasten mit 3 bis 10 Merkregeln“, Fettdruck). Eine Besprechung der 3. Auflage ist in IMN 177 (1998), p. 68, zu finden.

N. Ortner (Innsbruck)

K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik 2. Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analysis, Variationsrechnung. Dritte, korrigierte Auflage. Mit 496 Abbildungen. (Springer Lehrbuch.) Springer, Berlin u.a., 1999, XIII+457 S. ISBN 3-540-66150-6 P/b DM 59,–.

3. Auflage der Höheren Mathematik 2: Gewöhnliche Differentialgleichungen (GD), Fourieranalysis, partielle Differentialgleichungen, komplexe Analysis und Variationsrechnung. Neben der hervorragenden Gliederung und ausgezeichneten didaktischen Aufbereitung hebe ich noch hervor, dass bei GD viele praktische Rechenverfahren angegeben werden, dass aber andererseits Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen ausführlicher als in anderen „Ingenieur"-Darstellungen behandelt werden. Über den „klassischen" Stoff hinaus ist auch „Neueres" zu finden, z. B. Stabilität (Routh-Hurwitz-Kriterium) und periodische Lösungen. Neben der „lokalen" Theorie ist auch die „globale" Theorie (Randwertprobleme, Eigenwerte) ausführlich dargestellt.

Ausgezeichnete graphische Darstellungen und Beispiele erhöhen den Wert des Buches.

N. Ortner (Innsbruck)

Internationale Mathematische Nachrichten

Wittgenstein-Preis

Prof. *Peter Markowich* (Univ. Wien) hat den mit 20 Mio. S. dotierten „Wittgenstein-Preis“ zugesprochen bekommen.

Peter Markowich wurde in Wien geboren, studierte von 1975–80 an der TU-Wien „Technische Mathematik“ und habilitierte sich ebendort 1984 für das Fach „Angewandte und numerische Mathematik“. Seine akademische Laufbahn führte ihn zweimal nach Berlin (1989, 1991), dazwischen nach Purdue (1990), nach Linz (1998) und schließlich 1999 zurück nach Wien an das Institut für Mathematik der Universität Wien.

Seine wissenschaftlichen Interessen genören der nichtlinearen Analysis und den partiellen Differentialgleichungen, wie der Boltzmann-Gleichung, der Schrödinger-Gleichung und den Navier-Stokers-Gleichungen. Er arbeitet sowohl an der methodologischen Basis, an konkreten Modellierungsproblemen, als auch an numerischen Verfahren. Seine Beiträge reichen von praktischen Anwendungen zur Konstruktion von hochintegrierten Halbleiterbauelementen zu Entropie-Techniken für kinetische Gleichungen und Diffusionsprozesse und zur Analyse des Übergangs zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik.

Sein erklärtes Ziel ist es, Wien zu einem Zentrum der angewandten Mathematik zu machen.

Preise der AMS

Den „Steele-Preis“ des Jahres 2000 erhielten *John H. Conway, Barry Mazur* und *Isadore M. Singer*.

Der „Cole-Preis“ wurde *Andrei Suslin* und *Aise Johan de Jong* verliehen.

Der „AMS-SIAM-Wiener-Preis“ erging an *Alexandre J. Chorin* und an *Arthur T. Winfree*.

(Notices AMS)

Nemmers-Preis

Edward Witten vom Institute for Advanced Study in Princeton erhielt den mit 100.000 $ dotierten "Frederic Esser Nemmers Prize in Mathematics". Witten ist einer der weltweit führenden theoretischen Physiker.

(Notices AMS)

Rollo-Davidson-Preis

Kurt Johansson des Royal Institute of Technology in Schweden und an *David Wilson* von Microsoft Research verliehen.

(Notices AMS)

2001 — Random Walks (Erwin Schrödinger Institute)

The Erwin Schrödinger Institute (ESI) will host a special semester with the title "2001 — Random Walks" during the period mid-February — mid-July 2001. The organizers are *Vadim A. Kaimanovich* (Rennes, France), *Klaus Schmidt* (Vienna, Austria), and *Wolfgang Woess* (Graz, Austria).

The semester will be dedicated to various problems connected with stochastic processes on geometric and algebraic structures, with an emphasis on their interplay, and also on their interaction with Theoretical Physics. Some of the focal points are: probability on groups; products of random matrices and simplicity of the Lyapunov spectrum; boundary behaviour, harmonic functions and other potential theoretic aspects; Brownian motion on manifolds; combinatorial and spectral properties of random walks on graphs; random walks and diffusion on fractals.

There will be two separate main periods of activity in the first (February/March) and in the second (May/June/July) halves of the semester.

The first period will start with a two-week workshop with the general theme "Random Walks and Statistical Physics" (February 19–March 2, 2001). Towards the end of the second period there will be another two-week workshop with the general theme "Random Walks and Geometry" (June 25–July 6, 2001).

General informations about the ESI can be found at the website

http://www.esi.ac.at.

For a list of the invited guest scientists who will be participate in the programme, etc., please see

http://www.esi.ac.at/Programs/rwalk2001.html.

For participation in the special semester 2001 — Random Walks in Vienna and in particular, participation in one of the workshops — please contact : *rwalk@keen.esi.ac.at*

(W. Woess)

Fractals in Graz 2001

The Technical University of Graz will host a conference with the title *Fractals in Graz 2001, Stochastics — Analysis — Dynamics — Geometry* in the week of June 4–9, 2001.

The organizing committee consists of *Martin Barlow* (University of British Columbia, Vancouver), *Robert Strichartz* (Cornell University, Ithaca), *Peter Grabner* (Technical University of Graz), and *Wolfgang Woess* (Graz), the last two being the local organizers.

The purpose of the conference is to bring together researchers from various mathematical areas who share a common interest in fractal structures, with openmindedness to interaction between different fields in- and outside the fractal world. The subtitle of the conference will explain the range of topics.

There will be one hour plenary lectures by the following persons:

- *Richard Bass* (University of Conneticut, Storrs)
- *Thierry Coulhon* (Université de Cergy-Pontoise)
- *Kenneth Falconer* (University of St. Andrews)
- *Hillel Furstenberg* (Hebrew University, Jerusalem)
- *Ben Hambly* (Universities of Bristol and Oxford)
- *Jun Kigami* (Kyoto University)
- *Takashi Kumagai* (Kyoto University)
- *Michel Lapidus* (University of California, Riverside)
- *Andrzej Lasota* (Silesian University, Katowice)
- *Michel Mendès-France* (Université de Bordeaux)
- *Alexander Teplyaev* (McMaster University, Hamilton)

The conference homepage

http://finanz.math.tu-graz.ac.at/fractal/

will contain the latest informations.

(P. Grabner, W. Woess)

Fifth "International Conference on Technology in Mathematics Teaching" — ICTMT 5 (August, 6–9, 2001 — Klagenfurt, Austria)

The aim of these conferences is to bring together classroom practitioners, curriculum designers, mathematics education researchers, educational software designers, all of them sharing an interest to improve the quality of teaching and learning by effective use of technology.

The big strands of ICTMT in the past were
– the impact of technology on teaching and learning
– access to education through technology
– technology and assessment
– future trends in technology affecting teaching and learning.

The level of education comprises schools, colleges, and universities. Subjects of interests are: mathematics; related subjects using mathematical models; applications of mathematics in industry and commerce.

The programme will consist of
– invited plenary lectures by distinguished speakers
– contributed presentations
– workshops
– discussion groups
– poster presentations.

Particular emphasis will be given to providing opportunities for informal interaction between participants; there will be extra time for discussion after presentations, special discussion groups and daily social events.

All contributions will be refereed by an International Board. Deadline for submission of contributions: January, 31st, 2001.

For more information see

http://www.uni-klu.ac.at/ictmt5/

(M. Borovcnik, H. Kautschitsch)

Geometric Analysis and Index Theory (March 18–24, 2001, Trieste, Italy)

This conference is organized by the European Research Training Network "Geometric Analysis" in collaboration with the International Centre for Theoretical Physics in Trieste, the Universita' di Ancona and the Institut de Mathematiques de Luminy and will take place between March 18 to 24, 2001, at the Abdul Salam International Centre for Theoretical Physics in Trieste.

The conference will be followed by a related workshop on "Quantum Field Theory, Noncommutative Geometry and Quantum Probability" ITCP, Trieste, 25 to 30 March, 2001; see *http://www.sissa.it/∼bruzzo/ncg2001/ncg2001.html.*

The International Centre for Theoretical Physics is located within the Miramare Castle Natural Park, in a pinewood on the seaside at about 8 km from downtown Trieste. Participants will be housed in the Adriatico Guest House of the International Centre for Theoretical Physics or in hotels in downtown Trieste.

For more information, please contact N. Teleman (*teleman@popcsi.unian.it*).

(N. Teleman)

Seventh Viennese Workshop on Optimal Control, Dynamic Games and Nonlinear Dynamics

Das "Seventh Viennese Workshop on Optimal Control, Dynamic Games and Nonlinear Dynamics: Theory and Applications in Economics and OR/MS" fand vom 24.-26. Mai 2000 in Wien statt. Dieser Workshop war der mittlerweile siebente seiner Art; er wird seit 1981 in (meist) dreijährigem Abstand in Wien von G. Feichtinger und R.F. Hartl veranstaltet. Das Thema war an der Schnittstelle zwischen Wirtschaftswissenschaften, angewandter Mathematik und Informatik angesiedelt, wobei starke Bezüge zu OR-Methoden und -Modellen bestanden. Die Beiträge lassen sich grob in vier Teilbereiche einteilen:

1. Kontrolltheoretische Modelle: hier werden mathematische Modelle des Firmenverhaltens oder ganzer Volkswirtschaften betrachtet und analysiert, wobei die Untersuchung der zeitlichen Entwicklung (Dynamik) im Vordergrund steht. Typisch für diese Modelle ist meist, daß zu jedem Zeitpunkt eine Investitionsentscheidung getroffen werden muß, d.h. eine Entscheidung, ob Ressourcen zur Investition in die Zukunft oder zur unmittelbaren Gewinnung von Nutzen z.B. durch Konsum oder Dividendenausschüttung verwendet werden sollen.

2. Dynamische Spiele: diese Modellklasse unterscheidet sich von der ersten durch das Vorliegen einer Konkurrenzsituation, d.h. der eigene Nutzen oder Gewinn hängt auch von den Aktionen der Konkurrenten ab. Derartige Modelle sind insbesondere auf Firmenebene für die Ermittlung des Marketing-Mix (z.B. Preisbildung und Werbeeinsatz) relevant. Hier stehen verschiedene Lösungskonzepte zur Auswahl, wobei "open loop"-Gleichgewichte relativ einfach und "feedback"- Lösungen schwieriger zu finden sind.

3. Nichtlineare dynamische Systeme: diese Modellklasse hat in den letzten Jahren große Beachtung gefunden. Ein wesentliches Untersuchungsobjekt ist hier die Möglichkeit, daß einfache dynamische Systeme (ohne zufällige Störungen) Zeitpfade ökonomischer Variablen (z.B. Inflation, Börsenkurse) ergeben, die wie ein Zufallsprozeß aussehen. Man spricht dann von chaotischem Verhalten.

4. Künstliche Intelligenz und Computational Economics: ebenfalls im workshop vertreten waren einige Beiträge über die Anwendung von Methoden der künstlichen Intelligenz (z.B. künstliche neuronale Netze oder genetische Algorithmen) zur Modellierung des Lernverhaltens von ökonomischen Entscheidungsträgern.

Von den diversen Sektionen seien an dieser Stelle stellvertretend jene über Skiba (DNS)-Schwellen erwähnt, bei der es um die Separierung von Einzugsbereichen multipler Gleichgewichtslösungen optimaler Kontrollmodelle ging, sowie eine Sektion über dynamische Kosten-Nutzenanalyse zur Bekämpfung des illegalen Drogenkonsums.

Näheres kann unter

http://www.bwl.univie.ac.at/bwl/prod/EVENTS/ws2000/

nachgelesen werden.

Etwa 130 Teilnehmer kamen zur Tagung und besuchten die knapp 100 Vorträge in den prunkvollen Räumlichkeiten der Industriellenvereinigung am Schwarzenbergplatz. Daneben gab es ein reichhaltiges soziales Programm mit Empfang im Festsaal der TU-Wien, Cocktailempfang in der Industriellenvereinigung, Eintritt und Führung durch das Bank Austria Kunstforum, Empfang im Senatssitzungssaal des Wiener Rathauses sowie ein Abschlußbuffet im Arkadenhof der Wiener Universität.

(R.F. Hartl, G. Feichtinger)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Mitteilungen des ÖMG-Vorsitzenden

Das Jahr 2000 ist von der UNESCO zum Jahr der Mathematik erklärt worden, und weltweit finden Veranstaltungen statt, um einer größeren Öffentlichkeit die Mathematik näher zu bringen. Die ÖMG veranstaltete — gemeinsam mit der Akademie der Wissenschaften und dem Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung — am 13. April 2000 eine Vortragsreihe, die insbesondere dazu diente, interessierte Schüler der letzten zwei Schulstufen und ihre engagierten Lehrer über die neuen Berufsbilder in der Mathematik zu informieren. Die Hauptvortragenden waren Norbert Mauser (Uni Wien), Otmar Scherzer und Barbara Kaltenbacher (Uni Linz), Walter Schachermayer (TU Wien) und Heinz Engl (Uni Linz). Diese vom Stadtschulrat und dem nö. Landesschulrat unterstützte, öffentliche Veranstaltung war nicht nur sehr gut besucht, sondern fand auch in den Medien einigen Widerhall. Im Folgenden meine Eröffnungsworte, die auch im „STANDARD“ abgedruckt wurden:

Obwohl sich das Cliché vom weltfremden Mathematiker weiterhin hält, trifft es weniger zu denn je. So findet man beispielsweise in zunehmendem Ausmaß Mathematiker an der Spitze großer Unternehmen. Steve Ballmer, der (nach dem Rücktritt vonm Bill Gates) die Geschicke von Microsoft leitet, ist von seiner Ausbildung her ein angewandter Mathematiker. Ron Sommer, der Chef der enorm expandierenden Deutschen Telekom, hat sogar „reine“ Mathematik studiert, und — übrigens an der Uni Wien — über Kettenbruchalgorithmen promoviert. Und Boris Bereschowski, der erfolgreichste und geradezu prototypische russische „Businessman“, den viele für den Drahtzieher hinter Jelzins Clan halten, war in früheren Jahren als Mathematiker wissenschaftlich aktiv.

Solche einzigartigen Karrieren beruhen natürlich nicht auf wissenschaftlichen Erfolgen, sondern auf Eigenschaften wie Kommunikationsfähigkeit, Entschlußkraft, und Unternehmergeist, die nicht jedem Mathematiker angeboren sind, und die während des Mathematikstudiums auch nicht besonders gefördert werden. Aber der Bedarf von Industrie und Wirtschaft an ausgebildeten Mathematikern ist in den letzten Jahrzehnten enorm gewachsen, und so ist es nicht erstaunlich, wenn sich aus der Fülle der Neurekrutierungen Talente hocharbeiten.

Vor zwanzig Jahren noch galt die Mathematik als brotlose Kunst. Doch das hat sich geändert. Erst vor wenigen Monaten gab die in Bonn ansässige Zentrale Arbeitsvermittlung bekannt, dass in der Bundesrepublik Mathematiker verzweifelt gesucht werden. Auf jeden Absolventen eines Mathematikstudiums kommen in Berlin vier freie Stellen. Und in England hat eine ausführliche, landesweite Untersuchung ergeben, dass drei Jahre nach Abschluss ihres Studiums jene am besten verdienen, die Mathematik, Informatik und Medizin gewählt hatten — Ingenieure, Wirtschaftler oder Juristen landeten abgeschlagen auf den Plätzen. Auch in Österreich kommen junge Mathematikerinnen und Mathematiker rasch in der Wirtschaft unter. Das bewirkt ernste Nachwuchsprobleme an den Universitäten: denn mit den Gehältern, die beispielsweise Banken bieten, kann man Assistenzprofessoren und Stipendiaten leicht abwerben. Aber wer weiß, vielleicht stiften dankbare Ex-Studenten, die in der Wirtschaft reüssiert haben, in ein paar Jahren einen wohldotierten Fonds zur Förderung der mathematischen Ausbildung. Vorbilder können sie leicht finden: etwa in Finnland, wo der Nokia-Konzern die Mathematik auf das großzügigste unterstützt, oder in Seattle, wo die Bill-Gates-Stiftung einige der renommiertesten Mathematiker der Welt angeworben hat.

Schon vor 90 Jahren konnte Robert Musil — der sich nicht wenig auf seine mathematischen Studien zugutehielt — festhalten, „dass wir praktisch völlig von den Ergebnissen dieser Wissenschaft leben ... Wir erhalten alles unter Einschaltung mathematischer Berechnungen“. Diese Entwicklung führte in den letzten Jahren durch den Einsatz des Computers zu einer veritablen Explosion. Es gibt völlig neue Berufsbilder für Mathematiker. Besonders deutlich ist das in der Finanzmathematik zu sehen: jede größere Bank hält sich eine Schar Mathematiker, die emsig an Modellen für die Kurse von Optionen usw. arbeiten. Vieles am Börsengeschäft ist weitgehend automatisiert. Auch bei Versicherungen ist die Rolle der Mathematik, die von jeher eine wichtige war, gewaltig gewachsen: bei diesen großen Institutionen ist ein mathematisches Wettrüsten im Gang, denn keine kann es sich leisten, hier zurückzufallen. Die Telekommunikation wirbt ebenfalls eifrig um Mathematiker, die den Ausbau des Handy-Netzes oder die Routenplanung der riesigen Datenströme optimieren sollen. Bei der Herstellung von Halbleitern, der Bioinformatik, der Magnetresonanzspektroskopie oder dem Hoch- und Tiefbau, überall in der Technik sind modernste mathematische Verfahren unerlässlich und verlangen einen gigantischen Aufwand an wissenschaftlichem Rechnen. Als 1995 eine Bohrinsel in der Nordsee versank, stellte sich heraus, dass die Konstruktionsfirma, um die Entwicklungskosten einzuschränken, die aufwendigen Berechnungen nicht mit der nötigen Präzision durchgeführt hatte — aus falsch verstandener Sparsamkeit, die einen Milliardenverlust bewirkte. Andere, höchst aktuelle mathematische Probleme stellen sich bei Bildverarbeitung oder Kodierung. Die galoppierende Digitalisierung der Welt führt geradewegs in die Arme der Mathematiker.

Bei aller Vielfalt haben die notwendigen mathematischen Hilfsmittel eines gemeinsam: sie sind höchst abstrakt. Diese Abstraktion, die der Mathematik oft als ein Manko vorgehalten wird, ist in Wirklichkeit ihr Erfolgsrezept. Abstraktes Denken ist unerlässlich, um zum Kern einer Sache vorzudringen und die Gemeinsamkeiten scheinbar völlig verschiedener Situationen herauszuschälen. So kommt es immer wieder dazu, dass theoretische Modelle — also Gedankenexperimente — völlig unerwartete Anwendungen finden. Die Brownsche Bewegung und die Schwankungen der Börsenkurse lassen sich mit demselben mathematischen Werkzeug untersuchen; in der Elementarteilchenphysik wird die Knotentheorie verwendet; das Kodieren von Nachrichten ist Geometrie in einem Raum mit nur endlich vielen Punkten, usf.

Die Computertomographie beruht auf einer Untersuchung des österreichischen Mathematikers Radon aus dem Jahr 1917, die ohne jede Absicht und Aussicht auf eine Anwendung durchgeführt wurde. Erst vierzig Jahre später holten die technischen Voraussetzungen Radons Theorie ein. Schon Jahre vor jedem einigermassen brauchbaren Computer studierte Turing die Eigenschaften des universellen Computers. Und heute gibt es großartige Untersuchungen über die mathematischen Möglichkeiten von Quantencomputern, ohne dass im geringsten geklärt ist, ob es je einen solchen geben wird. Mathematiker zeichnen sich — wie Musils Mann ohne Eigenschaften — durch ihren „Möglichkeitssinn“ aus. Das ist keine Weltfremdheit. Das Besondere an unserer heutigen Welt ist ja, dass so viel möglich wird.

Nicht alle Mathematiker sind glücklich über die Nützlichkeit ihrer Wissenschaft. Ein extremer Vertreter der Mathematik als l’art pour l’art war der Brite Hardy. In seinem Büchlein „Apologie eines Mathematikers“, das 1940 herauskam, hielt er mit Befriedigung fest, dass es doch einige Gebiete gab, die niemals von der Reinheit der Theorie in die Niederungen der Anwendbarkeit gezerrt werden könnten. Und er nannte zwei Beispiele: Relativitätstheorie (das war vor der Atombombe) und Zahlentheorie. Die Zerlegung in Primfaktoren hat sich aber als sehr nützlich bei der Verschlüsselung von Nachrichten erwiesen, was nicht nur Geheimdienste interessiert, sondern auch in unserem Zahlungsverkehr heute allgegenwärtig ist. Und die Relativitätstheorie soll ja auch ihre Anwendungen gefunden haben.

Hardy würde sich also im Grab umdrehen. Aber für die meisten seiner Kollegen stellt die unglaubliche Wirksamkeit ihrer Wissenschaft einen großen Reiz dar. Nicht die Hauptattraktion! Diese liegt in einer Schönheit, für die nicht alle Menschen empfänglich sind. Offene Fragen wie die, ob es zwischen je zwei Quadratzahlen eine Primzahl gibt, faszinieren die einen und wirken auf andere wie unsäglich öde Gedankenspielereien. Aber sogar Mathematikmuffel müssen zugeben, dass sich viele dieser Gedankenspielereien als höchst nutzbringend erwiesen haben. Ohne Mathematik läuft wenig. Es wäre allerdings ganz verkehrt, die Mathematik auf ihren wirtschaftlichen Nutzen zu reduzieren und nur diesen Aspekt fördern zu wollen. Die von EU-Bürokraten festgeschriebene Auffassung, dass Wissenschaft bloß durch ihren wirtschaftlichen und gesellschaftlichen Nutzen legitimiert ist, ist extrem kurzsichtig und zeugt von tiefem Unverständnis, wie es übrigens schon vor vierhundert Jahren am Prager Hof Rudolfs II geherrscht hat. Die Wissenschaft sollte nützlich sein, was lag da näher, als im direkten Weg nach dem Stein der Weisen zu suchen und dem Geheimnis des ewigen Lebens? Zwischen dutzenden von Alchemisten hatte es Kepler schwer, Unterstützung zu finden — er bot nichts Nützliches an (nun ja, gelegentlich ein Horoskop). Aber Keplers Werk hat überlebt und jenes der Goldmacher nicht. Heute wie damals lässt sich Wissenschaft nicht auf den Nutzen einschränken, den sie versprechen mag. Der kommt von selbst, ungeplant und rätselhaft.

Die UNESCO hat das Jahr 2000 zum Jahr der Mathematik erklärt. Der beste Dienst, den man der Mathematik erweisen kann, ist zweifellos die Nachwuchswerbung. Viele begabte junge Menschen wissen gar nicht, wieviele Möglichkeiten ihnen ein Mathematikstudium bietet. Es ist zwar anspruchsvoll, aber relativ kurz; und es verspricht für Abenteuerlustige nichts weniger als eine Fahrkarte erster Klasse in die Natur- und Wirtschaftswissenschaften.

Karl Sigmund

15. Kongress der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft in Wien 2001 Hauptversammlung der Deutschen Mathematikervereinigung (1. Aussendung)

Der Vorstand der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft und die örtliche Tagungsleitung laden alle interessierten Kolleginnen und Kollegen herzlich zur Teilnahme am 15. Kongress ein. Die Tagung findet vom 16. September (Anreise) bis zum 22. September 2001 (Abreise) an der Technischen Universität Wien statt.

Das wissenschaftliche Programm beginnt am 17. September und endet am Nachmittag des 21. September 2001. Vormittags werden Plenarsitzungen mit den Hauptvorträgen abgehalten. Nachmittags finden kurze Vorträge zu je 20 Minuten in folgenden Sektionen statt:

- Algebra
- Zahlentheorie
- Diskrete Mathematik, Algorithmen
- Mathematische Logik, theoretische Informatik
- Geometrie
- Topologie, Differentialgeometrie
- Funktionalanalysis, Harmonische Analysis
- Funktionentheorie
- Reelle Analysis, Funktionalgleichungen
- Angewandte Mathematik, Industrie- und Finanzmathematik
- Numerische Mathematik, wissenschaftliches Rechnen
- Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik
- Dynamische Systeme, Kontrolltheorie
- Partielle Differentialgleichungen, Variationsmethoden
- Geschichte und Philosophie der Mathematik
- Mathematik im Unterricht und in der Öffentlichkeit.

Ausserdem finden öffentlich zugängliche Abendveranstaltungen statt, sowie 3 Minisymposien zu den Themen:

- Zahlentheoretische Algorithmen
- Finanzmathematik
- Mathematik und Emigration.

Folgende Hauptvortragende haben zugesagt:

V. Capasso (Milano)
M.H.A. Davis (London)
I. Ekeland (Paris)

W.T. Gowers (Cambridge)
M. Kreck (Heidelberg)
N.J. Mauser (Wien)
V.L. Popov (Moskau)
T. Ratiu (California)
D. Salamon (Zürich)
G. Teschl (Wien)
J.-C. Yoccoz (Paris)
D. Zagier (Bonn)
G.M. Ziegler (Berlin)

Während des Kongresses werden die ordentliche Generalversammlung der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft und auch Sitzungen des Beirats stattfinden. Die DMV hält 2001 keine eigene Jahrestagung ab: ihre Hauptversammlung findet während des Kongresses statt. Am Freitag, dem 21. September wird ein Lehrerfortbildungstag abgehalten.

Allen Teilnehmern und Begleitpersonen wird ein vielfältiges Rahmenprogramm angeboten.

Die Tagungsgebühren bitten wir der folgenden Aufstellung zu entnehmen:

Mitglieder der ÖMG/DMV	980,- ATS	140,- DM
Nichtmitglieder	1.400,- ATS	200,- DM
Studenten	210,- ATS	30,- DM
Begleitpersonen	350,- ATS	50,- DM

Nach dem 1. Juli 2001 kommt ein Verspätungszuschlag von 70,- ATS (10,- DM) dazu.

Nichtmitglieder können ein Formblatt für die Beitrittserklärung bei der Geschäftsstelle der DMV, Mohrengasse 39, D-10117 Berlin, oder im Sekretariat der ÖMG, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10 , 1040 Wien, anfordern, bzw. direkt von der Hompage der ÖMG und DMV herunterladen.

Bitte geben Sie diese Tagungsankündigung auch an interessierte Kolleginnen und Kollegen weiter. Im Internet finden Sie alle jeweils aktuellen Informationen. Ab sofort ist die Anmeldung über e-mail und Internet möglich:

URL: *http://www.mat.univie.ac.at/oemg/Tagungen/2001/*
e-mail *:oemg@mat.univie.ac.at*
Telefon: ++43 1 4277 50602 / Fax: ++43 1 4277 9506

Wien, im Juli 2000

Vorträge im Rahmen der ÖMG

10./11. März 2000: Kolloquium aus Analysis anläß lich des 60. Geburtstages von Roman Schnabl und Fritz Vogl.

Gregory Derfel (Beer Sheva): Asymptotic analysis of binomial recurrences.

Wolfgang Müller (Wien): Über die Asymptotik rekursiv definierter Folgen.

Helmut Prodinger (Witwatersrand): Die kombinatorische Bedeutung einiger Funktionalgleichungen.

Robert Tichy (TU Graz): Funktionaldifferentialgleichungen in der Ruintheorie und hochdimensionale numerische Integration.

Johann Cigler (U Wien): q-Catalanzahlen und damit verknüpfte Polynome.

Ludwig Reich (U Graz): Stabilität der homogenen und Lösungsdarstellungen der inhomogenen Cauchyschen Funktionalgleichung.

Wolfgang Woess (TU Graz): Graphen und nicht-unimodulare Gruppen.

Martin Blümlinger (TU Wien): Maße und Faltungsoperatoren auf Gruppen.

Francesco Altomare (Bari): Lototsky-Schnabl operators and Feller semigroups.

12. Mai 2000: *Vladimir A. Vatutin* (Steklov Inst. Moskau): Reduced braching processes or how long ago our common mother was born.

12. Mai 2000: *Götz Kersting* (U Frankfurt): Die Überlebenswahrscheinlichkeit von Verzweigungsprozessen in einer zufälligen Umgebung.

15. Mai 2000: *Ferenc Gecseg* (Szegedin): Three methods for minimizing deterministic root-to-frontier tree recognizers.

25./26. Mai 2000: Minikolloquium.

Viaceslav V. Nikulin (Steklov Inst. Moskau): Lorentzian Kac-Moody algebras.

Thomas Cusick (Buffalo, ESI): View obstruction and lonely runners.

Martin Henk (Berlin-Magdeburg, ESI): Densest lattice packing of 3-polytopes.

Rajinder Hans-Gill (Chandigarh, ESI): Non-homogeneous indefinite quadratic forms.

Aljosa Volvic (Triest): On the covariogram problem.

Richard Gardner (Bellingham, Triest): A discrete Brunn-Minkowski inequality.

Daniel Hug (Freiburg i.Br., Wien): Support measures in Minkowski spaces and applications.

Dusan Repovs (Ljubljana): Geometry of Banach-Mazur compacta.

30. Mai 2000: Festkolloquium; aus Anlaß des 60. Geburtstages von Prof. DDr. Curt Christian.

H.-D.Ebbinghaus (Freiburg i.Br.): Mengenlehre vor achtzig Jahren: Aufbruch und Abschied.

Georg Gottlob (TU Wien): Logik und Automaten.

Druckfehlerberichtigung

In den IMN 181, p. 45, lautet der Name des Verfassers des Buches „Histoire universelle des chiffres“ *Georges Ifrah*.

Persönliches

Prof. *Heinz Engl* wurde zum korrespondierenden Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften gewählt. Außerdem wurde er Mitglied des “Committee on Programs” der SIAM.

Prof. *Bruno Buchberger* erhält am 6. Oktober 2000 das Ehrendoktorat der Universität Timisoara.

31. Österreichische Mathematik Olympiade.

Landeswettbewerb für Anfänger, 15. Juni 2000.

1. Es sei a eine reelle Zahl. Man bestimme in Abhängigkeit von a alle Paare (x,y) reeller Zahlen, die die Gleichung $(x-y^2)(y-x^2)+x^3+y^3=a$ erfüllen.

2. Es seien a und b positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung
$$\frac{(a+b)^3}{a^2b} \geq \frac{27}{4}.$$
Wann gilt Gleichheit?

3. Ein *nette* zweistellige Zahl ist sowohl Vielfaches des Produkts ihrer Ziffern als auch Vielfaches der Summe ihrer Ziffern.
Wie viele solche zweistellige Zahlen gibt es?
Wie groß ist jeweils der Quotient aus Zahl und Ziffernsumme?

4. Sei $ABCDEFG$ die Hälfte eines regelmäßigen Zwölfecks. Sei P der Schnittpunkt der Geraden AB und GF und Q der Schnittpunkt der Geraden AC und GE.
Man zeige: Q ist Umkreismittelpunkt des Dreiecks AGP.

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene, 13. April 2000.

1. Für welche natürlichen Zahlen n gilt $2^n > 10n^2-60n+80$?

2. Für jede reelle Zahl a bestimme man alle reellen Zahlen x, die die folgende Gleichung erfüllen:
$$(2x+1)^4+ax(x+1)-\frac{a}{2}=0.$$

3. Wir betrachten zwei Kreise $k_1(M_1;r_1)$ und $k_2(M_2;r_2)$ mit $z=M_1M_2>r_1+r_2$ und eine gemeinsame äußere Tangente mit den Berührungspunkten P_1 und P_2. Wir verändern nun die Radien so, daß ihre Summe $r_1+r_2=c$ konstant bleibt. Welche Menge von Punkten durchläuft der Mittelpunkt der Tangentenstrecke P_1P_2, wenn r_1 von 0 bis c variiert?

4. Wir betrachten die durch die Rekursion $u_{n+1}=u_n(u_n+1)/n$ für $n\geq 1$ definierte Folge $\langle u_n\rangle$ rationaler Zahlen.

   (a) Man bestimme die Folgenglieder für $u_1=1$.

(b) Man zeige: Ist ein Folgenglied nicht ganzzahlig, so sind auch alle nachfolgenden Folgenglieder nicht ganzzahlig.

(c) Man zeige: Für jede natürliche Zahl K gibt es ein $u_1 > 1$, sodaß die ersten K Glieder der Folge natürliche Zahlen sind.

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, 7.–8. Juni 2000.

1. Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_0 = 4$ und $a_1 = 1$ erfüllt für $n \geq 1$ die Rekursion $a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}$ und definiert die Folge
$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$
Man bestimme die Koeffizienten α und β so, daß b_n die Rekursion $b_{n+1} = \alpha b_n + \beta b_{n-1}$ erfüllt. Man bestimme auch den expliziten Term für b_n.

2. Einem Kreis k ist das Trapez $ABCD$ (Reihenfolge $ABCD$ gegen den Uhrzeigersinn, $AB \| CD$) eingeschrieben. Auf dem Bogen AB werden zwei Punkte P und Q ($P \neq Q$) ausgewählt (Reihenfolge $APQB$ entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn).
Sei X der Schnittpunkt der Geraden CP und AQ und Y der Schnittpunkt der Geraden BP und DQ.
Man zeige, daß P, Q, X und Y auf einem Kreis liegen.

3. Man bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung
$$||||||x^2 - x - 1| - 3| - 5| - 7| - 9| - 11| - 13| = x^2 - 2x - 48.$$

4. Im spitzwinkeligen, nicht gleichseitigen Dreieck ABC mit dem Winkel $\gamma = 60^\circ$ seien U der Umkreismittelpunkt, H der Höhenschnittpunkt und D der Schnittpunkt der Geraden AH und BC (Höhenfußpunkt der Höhe durch A).
Man zeige, daß die Eulersche Gerade HU Winkelsymmetrale des Winkels BHD ist.

5. Man bestimme alle Paare ganzer Zahlen (m, n), sodaß
$$|(m^2 + 2000m + 999999) - (3n^3 + 9n^2 + 27n)| = 1.$$

6. Man bestimme alle Funktionen f von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen, für die für alle reellen Zahlen x, y, z die Beziehung $f(x + f(y + z)) + f(f(x + y) + z) = 2y$ gilt.

Neue Mitglieder

Anton Arnold, Prof. — geb. 1963. 1990 Dr. techn. Wiss, TU Wien, 1996 Habilitation in Mathematik, TU Berlin, 1989–93 wiss. Mitarbeiter FB Mathematik TU Berlin, 1990–92 Research Ass. Prof. Dept. of Math. Purdue Univ., USA, 1993–97 wiss. Ass. TU Berlin, 1994/95 visiting Ass. Prof. Purdue, 1997–99 Oberass. TU Berlin, seit 1999 Univ. Prof. für Angewandte Mathematik, FB Mathematik, Universität des Saarlandes, Postfach 151150, D-66041 Saarbrücken. e-mail *arnold@num.uni-sb.de*.

Immanuel M. Bomze, a.o. Univ. Prof. — geb. 1958. Institut für Statistik & Decision Support Systems, Univ. Wien, Universitätsstr. 5, A-1010 Wien. e-mail *immanuel.bomze@univie.ac.at*.

Michael Hintermüller, Dipl.Ing, Dr. — geb. 1970. 1994 Sponsion Techn. Math. Univ. Linz, 1997 Promotion Univ. Linz. 1997–99 Forschungsass. am SFB *Optimierung und Kontrolle*, seit 2000 Univ.Ass. Institut für Mathematik, Karl Franzens Universität Graz, Heinrichstr. 36, A-8010 Graz. e-mail *michael.hintermueller@kfunigraz.ac.at*.

Christoph Krischanitz, Mag. — Anton Schallg. 1/6/7, A-1210 Wien.. geb. 1969. 1987–92 Studium Math. Univ. Wien, 1993/94 Forschungsass. *Mathematische Modelle in den Finanzwissenschaften*, seit 1996 Konzernaktuariat UNIQA, Versicherungen AG. und seit 1999 Lehrbeauftragter am Inst. f. Versicherungsmathematik der TU Wien. e-mail *christoph.krischanitz@uniqa.at*.

Manfred Kühleitner, a.o. Univ. Prof. — geb. 1967. 1985–90 Diplomstudium Mathematik Univ. Wien, 1992 Doktorat Univ. Wien, 1999 Habilitation, seit 1993 Ass. Univ. für Bodenkultur, Institut für Mathematik, Gregor Mendel Str. 33, A-1180 Wien. e-mail *Kleitner@edv1.boku.ac.at*.

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

Sekretariat:

TU Wien, Wiedner Hauptstr. 8–10, Inst. 1182, A-1040 Wien.
Tel. (+43)1-58801-11823

Vorstand des Vereinsjahres 2000:

K. Sigmund (Univ. Wien): Vorsitzender.
H. Engl (Univ. Linz): Stellvertretender Vorsitzender.
M. Drmota (TU Wien): Herausgeber der IMN.
W. Woess (TU Graz): Schriftführer.
P. Michor (Univ. Wien): Stellvertretender Schriftführer.
I. Troch (TU Wien): Kassierin.
W. Schachermayer (TU Wien): Stellvertretender Kassier.

Vorsitzende der Landessektionen:

L. Reich (Univ. Graz)
O. Loos (Univ. Innsbruck)
H. Kautschitsch (Univ. Klagenfurt)
J. B. Cooper (Univ. Linz)
P. Zinterhof (Univ. Salzburg)
H. Kaiser (TU Wien)

Beirat:

H. Bürger (Univ. Wien)
C. Christian (Univ. Wien)
U. Dieter (TU Graz)
P. M. Gruber (TU Wien)
H. Heugl (Wien)
E. Hlawka (TU Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
R. Mlitz (TU Wien)
W. G. Nowak (U Bodenkultur Wien)
A. Plessl (Wien)
B. Rossboth (Wien)
N. Rozsenich (BMBWK Wien)
H.-C. Reichel (Univ. Wien): Vorsitzender der Didaktikkommission.
H. Stachel (TU Wien)
H. Strasser (WU Wien)
R. F. Tichy (TU Graz)
H. Troger (TU Wien)
H. K. Wolff (TU Wien)

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: 250,– ATS.

Bankverbindung: Kto. Nr. 229-103-892 der Bank Austria AG, Zweigstelle Wieden, oder PSK Kto. Nr. 7823-950, Wien.

Wir bitten unsere ausländischen Mitglieder, bei Überweisungen die Zweckbestimmung „Mitgliedsbeitrag“ anzugeben und den Betrag so zu bemessen, daß nach Abzug der Bankspesen der Mitgliedsbeitrag der ÖMG in voller Höhe zufließt.

http://www.mat.univie.ac.at/∼oemg/