



Studierendenkonferenz 2013

23.-24. September 2013  
Universität Innsbruck

## Organisation und Dank

Prof. Dr. Peter Eichelsbacher,  
Fakultät für Mathematik,  
Ruhr Universität Bochum,  
Peter.Eichelsbacher@ruhr-uni-bochum.de

Dr. Gerhard Kirchner,  
Institut für Mathematik,  
Universität Innsbruck,  
Gerhard.Kirchner@uibk.ac.at

Wir möchten uns ganz herzlich bei allen Gutachtern bedanken.

Auf der Konferenz werden Preise für besonders gute Abschlussarbeiten vergeben. Die Buch-Preise werden vom *Springer-Verlag* gestiftet. Die Gastaufenthalte werden ermöglicht durch

- Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik, Kaiserslautern,
- Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn,
- Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach,
- Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn,
- Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig,
- RWTH Aachen,
- Institut für Mathematik der Universität Innsbruck.

Weiters danken wir der DMV und der ÖMG für Zuschüsse zur Konferenzgebühr für die Teilnehmer/innen der Studierendenkonferenz.

## Einteilung der Vorträge

Alle Vorträge finden im V. F. Hess-Haus, Technikerstraße 25, statt.  
Die Eröffnung findet am Montag, 23. September um 15:15 im SR Zoologie im Erdgeschoß statt.

	SR Zoologie, Erdgeschoß	PR 8/18, 8. Stock
Montag, 23. September		
15:30-16:00	Bauer	Senge
16:00-16:30	Ehrensperger	Eller
16:30-17:00	Kummer	Egert
P A U S E		
17:30-18:00	Reichenbach	Fuchshuber
18:00-18:30	Schwagenscheidt	Keil
19:00	Empfang (ICT-Gebäude)	
Dienstag, 24. September		
11:15-11:45	Beckenbach	Brunnhuber
11:45-12:15	Radda	Tolksdorf
anschließend Preisverleihung		

Für weitere Informationen verweisen wir auf das Programmheft zum ÖMG-DMV-Congress 2013.

## Die Manin-Vermutung für eine del-Pezzo-Fläche (Sabine Bauer – Ludwig-Maximilians-Universität München)

Eine grundlegende Frage in der Zahlentheorie ist es, rationale Lösungen von Systemen von Polynomgleichungen zu untersuchen. In der Sprache der algebraischen Geometrie sind das rationale Punkte auf Varietäten.

In dieser Arbeit wird eine Varietät  $S$  im fünfdimensionalen projektiven Raum, gegeben durch fünf Polynomgleichungen in 6 Variablen, betrachtet. Es handelt sich um eine del-Pezzo-Fläche. Del-Pezzo-Flächen enthalten oft unendlich viele rationale Punkte, und so auch  $S$ . Die Mehrzahl dieser Punkte befindet sich auf einer der sieben in  $S$  enthaltenen Geraden. Interessanter sind aber die Punkte, die nicht auf Geraden liegen.

Für die Verteilung der rationalen Punkte, die eine Höhe kleiner oder gleich einer Konstanten  $B$  haben, macht die Manin-Vermutung eine präzise Vorhersage. Sie liefert eine asymptotische Formel für ihre Anzahl und wird in dieser Arbeit für dieses Beispiel einer singulären del-Pezzo-Fläche von Grad 5 bewiesen.

Die Beweisstrategie orientiert sich an bestehenden Beweisen für ähnliche Flächen, die eine Bijektion zwischen der Menge der rationalen Punkte und den ganzzahligen Punkten auf einer höherdimensionalen affinen Hyperebene  $T$ , dem sogenannten universellen Torsor, konstruieren und anschließend Punkte auf  $T$  mit zahlentheoretischen Mittel zählen.

Genauer gesagt sieht das Vorgehen so aus: Wir geben zunächst eine Abbildung zwischen rationalen Punkten aus  $S$  und ganzzahligen Punkten auf  $T$  zusammen mit ihrer inversen Abbildung an. Durch diese Bijektion gewinnen wir Teilerfremdheitsbedingungen sowie Höhenbedingungen an die resultierenden neuen Koordinaten. Die Anzahl ganzzahliger Punkte, die diese Bedingungen sowie die Torsorgleichung erfüllen, gilt es nun zu ermitteln. Hierzu summieren und integrieren wir über alle Variablen unter Beachtung der Nebenbedingungen und erhalten die Gesamtanzahl als einen Hauptterm, der Produkt einer reellen Dichte,  $p$ -adischer Dichten und Faktoren für jede Primzahl  $p$ , dem Volumen eines reellen Polytops und dem Ausdruck  $B \log(B)^4$  ist, sowie einen Fehlerterm kleinerer Ordnung.

## Special cases of the hypergraph assignment problem (Isabel Beckenbach – TU Berlin)

Das Hyperassignment-Problem, das in der hier behandelten Version von Borndörfer und Heismann eingeführt wurde, kann als eine Verallgemeinerung des perfekten Matching-Problems in Graphen gesehen werden:

Gegeben ist ein Hypergraph  $\mathcal{H} = (V, W, \mathcal{A})$ , wobei  $V$  und  $W$  zwei gleich große, disjunkte Knotenmengen sind und eine Menge an Hyperkanten  $\mathcal{A} \subseteq 2^{V \cup W}$ , sodass  $|a \cap V| = |a \cap W|$  für jede Hyperkante  $a \in \mathcal{A}$  gilt. Zusätzlich sind Kosten  $c_a \in \mathbb{R}$  auf den Hyperkanten  $a \in \mathcal{A}$  gegeben. Gesucht wird nun ein perfektes Matching, das Borndörfer und Heismann ein Hyperassignment nennen, mit minimalem Kosten bezüglich der Funktion  $c$ .

Zunächst werden einige Grundlagen der Theorie der Hypergraphen analog zur Graphentheorie entwickelt. Danach werden balancierte Hypergraphen behandelt, die eine Verallgemeinerung bipartiter Graphen darstellen, sowie normale Hypergraphen, welche genau die Klasse bilden, deren Matching-Polytop ganzzahlig ist. Conforti, Cornuéjols, Kapoor und Vušković haben 1996 eine Hall-Bedingung für die Existenz eines perfekten Matchings in balancierten Hypergraphen gefunden. In dieser Arbeit wird eine Variante vorgestellt, die sogar für normale Hypergraphen gilt.

Anschließend wird das Hyperassignment-Problem in speziellen Hypergraphen, sogenannten partitionierten Hypergraphen, untersucht. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Untersuchung ihres Matching- sowie perfekten Matching-Polytops, insbesondere solcher Hypergraphen mit Parts der Größe zwei. Für einige dieser Hypergraphen kann die Dimension des perfekten Matching-Polytops angegeben werden, was für allgemeine Hypergraphen sehr schwer ist. Außerdem werden gültige Ungleichungen und Facetten der beiden Polytope beschrieben.

## Weyl–Titchmarsh–Kodaira Theorie für Diracoperatoren mit stark singulären Potentialen (Rainer Brunnhuber – Universitäten Wien und Klagenfurt)

Das Ziel meiner Diplomarbeit an der Universität Wien unter Betreuung von G. Teschl war es, Weyl–Titchmarsh–Kodaira Theorie für eindimensionale Diracoperatoren mit stark singulären Potentialen zu entwickeln.

Die Diracgleichung liefert eine Beschreibung von Spin-1/2 Teilchen (wie zum Beispiel Elektronen) und ist sowohl mit der Quantenmechanik als auch mit der speziellen Relativitätstheorie konsistent. Sie kann als relativistische Version der Schrödingergleichung gesehen werden.

Der Differentialausdruck für den eindimensionalen Diracoperator auf dem Intervall  $(a, b)$  ist gegeben durch

$$\tau = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \phi, \quad x \in (a, b),$$

wobei  $\phi$  das Potential darstellt, welches bestimmte äußere Felder enthält. Eine selbstadjungierte Erweiterung erhält man durch Einschränkung der zulässigen Randbedingungen.

Klassische Weyl–Titchmarsh–Kodaira Theorie wurde zunächst für eindimensionale Schrödingeroperatoren mit zumindest einem regulären Endpunkt entwickelt und in Folge auf weitere Operatoren, so auch auf Diracoperatoren, erweitert. A. Kostenko, A. Sakhnovich und G. Teschl haben gezeigt, dass viele Aspekte der klassischen Theorie auch für Schrödingeroperatoren mit zwei singulären Endpunkten gültig bleiben. In meiner Diplomarbeit habe ich einige dieser Resultate auf den Fall von eindimensionalen Diracoperatoren mit zwei singulären Endpunkten verallgemeinert.

Insbesondere werden wir sehen, wie man in diesem Fall eine (singuläre) Weyl Funktion definieren kann. Weiters werden wir eine zugehörige Spektraltransformation angeben, die unseren eindimensionalen Diracoperator auf einen Multiplikationsoperator abbildet und zeigen, wie man die wesentlichen Träger für die Lebesgue Zerlegung des Spektralmaßes aus dem Randverhalten der singulären Weyl Funktion erhalten kann. Darüberhinaus werden wir eine Integraldarstellung für die singuläre Weyl Funktion ableiten und ein Kriterium angeben, wann sie eine verallgemeinerte Nevanlinna Funktion ist. Liegt am Endpunkt  $a$  der Grenzkreisfall vor, so zeigt sich, dass die singuläre Weyl Funktion eine Herglotz–Nevanlinna Funktion ist.

Einige dieser Ergebnisse wurden gemeinsam mit J. Eckhardt, A. Kostenko und G. Teschl zur Publikation eingereicht.

## The Riesz transform for elliptic systems (Moritz Egert – TU Darmstadt)

Betrachtet wird ein  $N \times N$ -System elliptischer Differentialgleichungen auf dem Ganzraum  $\mathbb{R}^d$  in Divergenzform

$$\begin{aligned} (Au)_1 &= -\sum_{\alpha,\beta=1}^d \sum_{k=1}^N \partial_\alpha (a_{\alpha,\beta}^{1,k} \partial_\beta u_k) \\ &\vdots \\ (Au)_N &= -\sum_{\alpha,\beta=1}^d \sum_{k=1}^N \partial_\alpha (a_{\alpha,\beta}^{N,k} \partial_\beta u_k) \end{aligned}$$

mit komplexwertigen, wesentlich beschränkten Koeffizientenfunktionen  $a_{\alpha,\beta}^{j,k}$ . Der zugehörige Operator  $A$  wird zunächst als zur Sesquilinearform

$$a : W^{1,2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^N) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^N) \rightarrow \mathbb{C}, \quad a(u, v) = \sum_{\alpha,\beta=1}^d \int a_{\alpha,\beta} \partial_\beta u \cdot \partial_\alpha \bar{v},$$

assoziierter Operator interpretiert. Die Elliptizitätsbedingung an  $A$  wird dabei in Form einer Gårding-Ungleichung realisiert. Auf diese Weise wird  $A$  zu einem maximal-akkretiven Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^N)$ .

In den Jahren 2001 bzw. 2002 konnten Auscher, Hofman, Lacey, McIntosh und Tchamitchian die sogenannte Katosche Vermutung  $D(A^{\frac{1}{2}}) = W^{1,2}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^N)$  beweisen. Infolge dieses Resultats ist die zu  $A$  assoziierte Riesz-Transformation  $\nabla A^{-\frac{1}{2}}$  ein beschränkter Operator auf  $L^2$ .

Im Jahre 2007 gab Auscher im Fall elliptischer Gleichungen, d.h. im Fall  $N = 1$ , mit Hilfe der von  $-A$  erzeugten Halbgruppe eine Charakterisierung derjenigen Exponenten  $p \in (1, \infty)$  an, für die sich die Riesz-Transformation zu einem beschränkten Operator auf  $L^p$  fortsetzen lässt. Es wird gezeigt, dass sich Auschers Charakterisierung auf elliptische Systeme verallgemeinern lässt.

## Schnelle Algorithmen zur Berechnung von Erosion und Dilatation von laußlängenkodierten Bildern (Gregor Ehrensperger – Universität Innsbruck)

Die *Mathematische Morphologie* ist eine Theorie zur Analyse von räumlichen Strukturen, deren Ziel es ist, die Form und Gestalt von Objekten zu untersuchen. Basisoperatoren dazu sind die *Erosion* und *Dilatation*. Darauf aufbauend können weitere Operatoren konstruiert werden. Ein *Binärbild* ist eine Menge von Bildpunkten. Angenommen  $X \subseteq \mathbb{Z}^2$  und das *Strukturelement* (SE)  $B \subseteq \mathbb{Z}^2$  sind Binärbilder, dann sind diese Operatoren wie folgt definiert:

$$\text{Erosion: } \varepsilon_B(X) = \left\{ p \in \mathbb{Z}^2 \mid B_p \subseteq X \right\} \quad (1)$$

$$\text{Dilatation: } \delta_B(X) = \left\{ p \in \mathbb{Z}^2 \mid (B^t)_p \cap X \neq \emptyset \right\}. \quad (2)$$

Dabei bezeichnet  $B^t$  die Spiegelung um den Ursprung und  $B_p$  die Verschiebung von  $B$  um den Vektor  $p$ . In der vorliegenden Arbeit wurden schnelle Algorithmen zur Berechnung von Erosion und Dilatation auf zweidimensionalen laußlängenkodierten Binärbildern entwickelt. Als *Sequenz*  $R = \langle lx, rx, y \rangle$  wird eine Konkatenation von Bildpunkten in derselben Bildzeile bezeichnet, wobei  $y$  die  $y$ -Koordinate dieser Bildpunkte,  $lx$  die  $x$ -Koordinate des ersten Bildpunktes und  $rx$  die  $x$ -Koordinate des letzten Bildpunktes der Sequenz angibt:

$$R = \langle lx, rx, y \rangle = \{(lx, y), (lx + 1, y), \dots, (rx, y)\}.$$

Dann kann ein Binärbild  $Z$  auch in *Laußlängenkodierung* dargestellt werden:

$$Z = \bigcup_{n=1}^N R_n,$$

wobei  $N$  die Anzahl der Sequenzen und  $R_n$  die  $n$ -te Sequenz von  $Z$  ist. Eine Laußlängenkodierung nennt man *kompakt*, wenn horizontal benachbarte Bildpunkte als einzelne Sequenz gegeben sind und Sequenzen nicht überlappen. Die vorgeschlagenen Algorithmen erhalten Bilder in kompakter Laußlängenkodierung als Input und geben das erodierte bzw. dilatierte Bild in kompakter Laußlängenkodierung zurück. Dabei konnten die Laufzeiten gegenüber in der Computer Vision etablierten Softwarebibliotheken erheblich reduziert werden.

## Rotation Invariance in Exemplar-based Image Inpainting (Martin Eller – Technische Universität München)

In der mathematischen Bildverarbeitung ist die Bildvervollständigung, auch Inpainting genannt, eine bekannte Problemstellung. Ein Teilgebiet eines Bildes, das Loch, muss dabei anhand von den Bildinformationen außerhalb des Loches neu ausgemalt werden. Bei exemplarbasierter Bildvervollständigung werden zusammenhängende Texturen, sogenannte Exemplare, außerhalb des Loches gesucht und im Loch geeignet zusammengesetzt. Über exemplarbasierte Bildvervollständigungsmethoden wurde, wegen ihrer Leistungsstärke in der Anwendung auf Bildern mit Textur, in den letzten Jahren viel geforscht.

In dieser Thesis wird das variationelle Modell für exemplarbasierte Bildvervollständigung um einen zusätzlichen Freiheitsgrad, die Rotationsinvarianz, erweitert und die zugehörige Analysis im Detail ausgearbeitet. Für einen effizienten rotationsinvarianten Vergleich von Bild-Patches stellen wir neue Methoden vor, die auf der Entwicklung in der Basis der diskreten Circular Harmonics aufbaut; insbesondere wird eine Methode für einen gradientenbasierten Vergleich entwickelt, die darauf aufbaut, dass die Basis der Circular Harmonics aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators besteht. Diese Vergleichsmethoden ermöglichen die Implementierung eines schnellen alternierenden Optimierungsschemas für exemplarbasierte Bildvervollständigungsfunktionale. Der beschriebene Algorithmus und seine Leistungen bei der Vervollständigung von Strukturen und Texturen in Bildern wird detailliert beschrieben und wir zeigen die Verbesserungen in der Wiederherstellung glatter Kanten durch die zusätzliche Rotationsinvarianz anhand von numerischen Beispielen auf. Ein Anwendungsbeispiel ist in Abbildung 1 dargestellt.

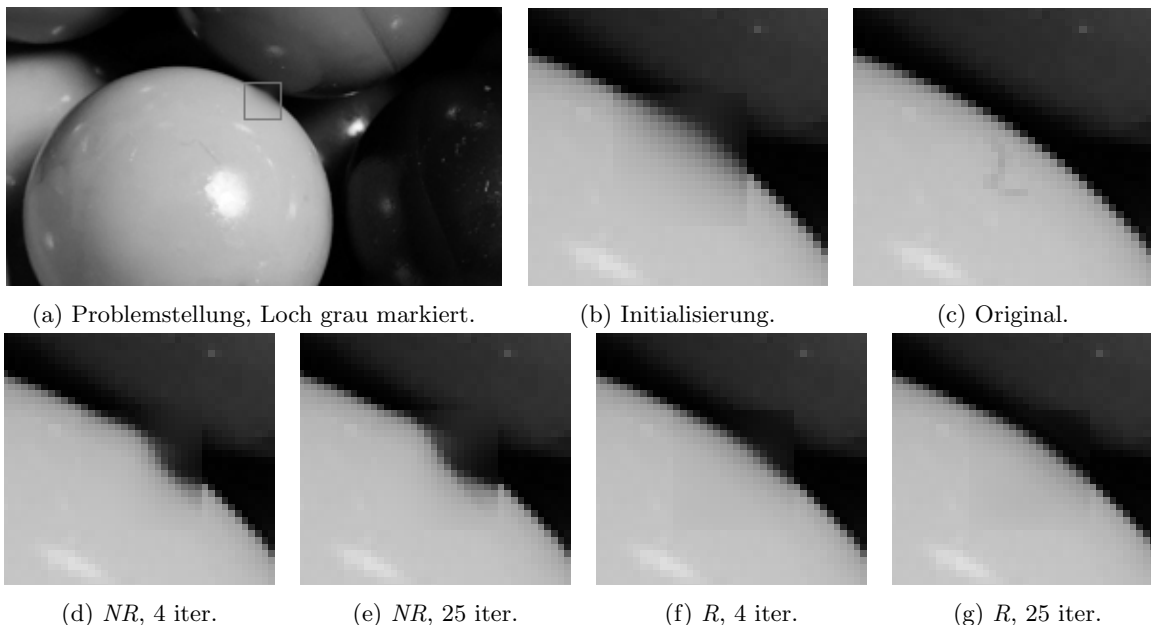


Abbildung 1: Erste Reihe, von links nach rechts: a) Bildwiederherstellungsproblem. b) Vergrößerte Darstellung des Startwerts, der eine relative Ähnlichkeit zu dem Original in c) aufweist. Zweite Reihe: Die Algorithmen ohne Rotationen  $NR$  und mit Rotationen  $R$  werden anhand ihrer Iterierten nach 4 bzw. 25 Iterationen verglichen. d), e) Ohne Rotationen kann die Krümmung der Kugel nicht reproduziert werden. f), g) Mit Rotationen ist die Krümmung mit wenigen Iterationen rekonstruiert.



## **$\eta$ -Formen für Familien mit integrierbarer horizontaler Distribution**

**(Anja Fuchshuber – Universität Freiburg)**

Eta-Invarianten spielen in der Indextheorie in verschiedenen Situationen eine große Rolle. Atiyah, Patodi und Singer konnten 1973 in einer Arbeit den Atiyah-Singer-Indexsatz für Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern. In dieser Situation tritt die Eta-Invariante als Korrekturterm des Randes auf. Die andere Situation ist die von Familien von Mannigfaltigkeiten. Im Familienindexsatz gibt das äußere Differential der Eta-Form gerade die Differenz zwischen kohomologischem und analytischem Index.

In dieser Arbeit wurde ein Faserbündel von Mannigfaltigkeiten betrachtet, bei dem die Krümmung verschwindet, die horizontale Distribution also integrierbar ist. Die Fragestellung der Arbeit ist, ob unter dieser zusätzlichen Voraussetzung die Eta-Form geschlossen ist. Es wurde gezeigt, dass es in diesem Falle einen Korrekturterm gibt, der lokal in Termen der Krümmung berechenbar ist, sodass die Differenz von Eta-Form und Korrekturterm in höheren Graden eine de-Rham-Kohomologiekategorie auf der Basis definiert. Diese Kohomologiekategorie hängt nicht von den gewählten Metriken ab und man erhält eine Invariante auf den Isomorphieklassen flacher Faserbündel von Spin-Mannigfaltigkeiten, bei denen der Spin-Dirac-Operator invertierbar ist.

Als Beispiel für ein Faserbündel mit integrierbarer horizontaler Distribution wurde ein Torusbündel betrachtet. Es wurde gezeigt, dass in diesem Falle die Eta-Form tatsächlich geschlossen ist und der Korrekturterm verschwindet.

**A Smooth Penalty Approach for MPECs with Gradient  
Constrained Lower-Level Problems in Banach Spaces  
(Tobias Keil – Humboldt Universität zu Berlin)**

Im Zentrum der Arbeit stehen Optimierungsprobleme bei denen die zulässige Menge teilweise durch eine Variationsungleichung beschrieben wird. Variationsungleichungen treten unter anderem dort zu Tage wo es gilt Gleichgewichtsbedingungen aus der Physik (z.B. thermische oder energetische Gleichgewichte) oder der Wirtschaft (z.B. Nash-Gleichgewichte) zu modellieren und erfreuen sich auf Grund ihrer vielfältigen Anwendbarkeit eines wachsenden Interesses in der Optimierung. Trotzdem ist die Fachliteratur zu diesen Problemen gerade im unendlich dimensionalen Fall vergleichsweise noch spärlich gesät. Ich befasse mich dabei im Speziellen mit solchen Variationsungleichungen die an eine punktweise Gradientenbedingung der Zustandsvariablen gekoppelt sind. Nach einer kurzen Einführung in das Thema werden neue Optimalitätsbedingungen erster Ordnung hergeleitet, in dem das untergeordnete Problem penalisiert wird und mittels einer Grenzwertbetrachtung die gewonnenen Erkenntnisse für die penalisierten Probleme auf das Ausgangsproblem übertragen werden. Hierbei besteht eine der Hauptschwierigkeiten darin die komplizierten Regularitätsstrukturen zu gewährleisten, die für eine analytische Betrachtung des Systems erforderlich sind, weshalb neben klassischer Optimierungstheorie auch einige Resultate aus der Theorie partieller Differentialgleichungen ihre Anwendung finden.

## Real Polynomials with Definite Determinantal Representation (Mario Kummer – Universität Konstanz)

Ein homogenes Polynom  $h \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  hat eine definite Determinantendarstellung, falls symmetrische, reelle Matrizen  $A_1, \dots, A_n$  existieren, so dass  $h = \det(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)$  gilt, wobei  $e_1 A_1 + \dots + e_n A_n$  positiv definit ist für ein gewisses  $e \in \mathbb{R}^n$ . Ein solches Polynom ist immer hyperbolisch bezüglich  $e$ , das heißt  $h$  verschwindet nicht in  $e$  und für jedes  $v \in \mathbb{R}^n$  hat das univariate Polynom  $h(te + v) \in \mathbb{R}[t]$  nur reelle Nullstellen. Die Umkehrung dieser Aussage gilt im Fall  $n = 3$ , im Allgemeinen jedoch nicht: Es gibt ein Gegenbeispiel, das aus dem Gebiet der Matroidtheorie stammt. Im ersten Teil meiner Masterarbeit wird der Zusammenhang zwischen hyperbolischen Polynomen und Matroidtheorie diskutiert.

Im zweiten Teil betrachten wir multiaffine Polynome, das sind Polynome, in denen jede Variable höchstens zum Grad eins vorkommt. Wir werden unter anderem ein sehr praktisches Kriterium dafür angeben, zu entscheiden, ob ein multiaffines hyperbolisches Polynom eine definite Determinantendarstellung hat. Indem wir diese Resultate teilweise auf den nicht multiaffinen Fall ausdehnen, werden wir im letzten Abschnitt einen Zusammenhang zwischen Hyperbolizität und Nichtnegativität auf der einen Seite, und Darstellbarkeit durch Determinanten und Quadratsummen auf der anderen Seite andeuten können.

**Einfluss der Mathematik auf die Entdeckungsfahrten der  
Frühen Neuzeit  
(Nicole Radda – Technische Universität Wien)**

Die Entdeckungsfahrten ab dem 15. Jahrhundert reichten hauptsächlich von der Umsegelung Afrikas bis zur Befahrung des Atlantiks. Im Zuge dessen konnte zum Beispiel Eratosthenes' Annahme einer kugelförmigen Erde durch die Umsegelung der Welt durch den portugiesischen Seefahrer Ferdinand Magellan im 16. Jahrhundert bewiesen werden.

Auf den Seereisen gab es mathematische Spezifika bei der Navigation, die im Laufe der Zeit entwickelt wurden: Zuerst war die Berechnung des Breitengrades von zentraler Bedeutung und später auch notwendigerweise die Berechnung des Längengrades auf See. Bei der Umsegelung Afrikas reichte aufgrund der Küstenschiffahrt die Kenntnis des Breitengrades bei der Orientierung auf See aus. Erst nach den ersten Fahrten über den Atlantik wurde die Kenntnis des Längengrades, um Kollisionen mit Küsten und Piraten zu vermeiden, immer entscheidender.

Im Zusammenhang mit der Orientierung auf See stehen auch verschiedene Hilfsmittel zur Verfügung, die sich durch die Messung der Gestirns Höhe weiterentwickelten, wie zum Beispiel der Sextant oder der Jakobsstab. Aber auch die Kartografie entwickelte sich zu jener Zeit weiter. Man wollte nun so genau wie möglich eine Kugeloberfläche auf eine Ebene abbilden, aber auch Navigationskurse so einfach wie möglich in einer Karte darstellen.

## **Fusionssysteme auf 2-Gruppen mit genau drei Involutionen (René Reichenbach – Friedrich-Schiller-Universität Jena)**

Oft schränkt die Struktur einer  $p$ -Sylowgruppe  $P$  einer endlichen Gruppe  $G$  zusammen mit der Operation von  $G$  auf  $P$  bereits die Struktur von  $G$  wesentlich ein. Saturierte Fusionssysteme sind eine moderne Möglichkeit, diese Beziehung zu beschreiben. Fusionssysteme tauchen zudem in der modularen Darstellungstheorie und der Homotopie-Theorie klassifizierender Räume von Gruppen auf. Deshalb ist es interessant, saturierte Fusionssysteme auf gegebenen Gruppen zu klassifizieren.

Dies ist einfacher, falls die Gruppe  $P$  keine großen elementarabelschen Untergruppen enthält. Um diese zu vermeiden, schränkt man sich bei der Untersuchung auf Gruppen von kleinem  $p$ -Rang ein. Hierbei ist der  $p$ -Rang einer  $p$ -Gruppe der Rang einer maximalen elementarabelschen Untergruppe. Gruppen vom  $p$ -Rang 1 sind zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppen und die saturierten Fusionssysteme auf diesen Gruppen sind bekannt. Für ungerades  $p$  haben Díaz, Ruiz und Viruel alle saturierten Fusionssysteme auf  $p$ -Gruppen vom  $p$ -Rang 2 bestimmt. Der Fall  $p = 2$  ist noch offen. Eine 2-Gruppe vom 2-Rang 2 enthält eine maximale Untergruppe mit genau drei Involutionen. Deshalb ist die Untersuchung von Fusionssystemen auf diesen Gruppen vielversprechend.

In dieser Arbeit untersuchen wir saturierte Fusionssysteme auf 2-Gruppen mit genau drei Involutionen und orientieren uns dafür an Jankos Klassifikation dieser Gruppen. Um diese Klassifikation für unsere Zwecke nutzbar zu machen, haben wir einige der Resultate präzisiert und vervollständigt. Damit gelingt es uns, alle saturierten Fusionssysteme auf  $P$  für viele 2-Gruppen  $P$  mit genau drei Involutionen zu bestimmen. In den übrigen Fällen hat jeder maximal metazyklische Normalteiler  $M$  von  $P$  Index 4 mit  $P/M \cong C_2 \times C_2$ . Gegebenenfalls zeigen wir, dass die Struktur einer wesentlichen Untergruppe in einem saturierten Fusionssystem auf  $P$  stark eingeschränkt ist.

In einem weiteren Teil der Arbeit ermitteln wir alle saturierten Fusionssysteme auf 2-Gruppen mit genau drei Involutionen und einem nichttrivialen  $2'$ -Automorphismus. Dies vervollständigt ein Resultat von Craven und Glesser.

Die Diplomarbeit ist Inhalt zweier Publikationen, die sich momentan im Peer-Review Prozess befinden.

**Automorphe Produkte singulären Gewichts zu einfachen  
Gittern von Primzahlstufe  
(Markus Schwagenscheidt – Technische Universität  
Darmstadt)**

Als höherdimensionale Verallgemeinerungen elliptischer Modulformen kann man Modulformen zu orthogonalen Gruppen betrachten. Borchers' singuläre Theta-Korrespondenz erlaubt es, orthogonale Modulformen aus vektorwertigen Modulformen zur Weil-Darstellung zu konstruieren. Die orthogonalen Modulformen, die so entstehen, haben unendliche Produkt-Entwicklungen analog zur Dedekindschen Eta-Funktion und heißen daher auch automorphe Produkte.

In der Masterarbeit klassifizieren wir automorphe Produkte singulären Gewichts, die von vektorwertigen Modulformen zu sogenannten einfachen Gittern von Primzahlstufe kommen. Die Motivation, einfache Gitter zu betrachten, liegt in der Tatsache begründet, dass für einfache Gitter jeder Hauptteil als vektorwertige Modulform realisiert werden kann. Dies erlaubt es, einen vektorwertigen Input für die Theta-Korrespondenz allein durch seinen Hauptteil zu definieren, welcher wiederum das Gewicht des entstehenden automorphen Produkts festlegt. Mithilfe expliziter Formeln für das Gewicht können alle Hauptteile, die auf singuläres Gewicht führen, bestimmt werden. Die zugehörigen vektorwertigen Inputs konstruieren wir als Anhebungen skalarwertiger Modulformen.

Mithilfe der nun bekannten Fourier-Koeffizienten der vektorwertigen Inputs bestimmen wir Produkt- und Fourier-Entwicklungen der gefundenen automorphen Produkte in verschiedenen Spitzen. Da die automorphen Produkte singuläres Gewicht haben, ist die Berechnung ihrer Fourier-Koeffizienten auf kombinatorische Weise möglich.

## **Persistent Homology** (Jan Felix Senge – Universität Bremen)

Die persistente Homologie ist eine Methode zur Datenanalyse im Gebiet der algorithmischen Topologie. Die Hauptidee liegt darin, dass Daten nicht nur zu einem bestimmten Zeitpunkt betrachtet werden, sondern dass Veränderungen von homologischen Eigenschaften zwischen verschiedenen Zeitpunkten miteinbezogen werden. Eigenschaften, welche bei dieser Multiskalenbetrachtung eine „lange“ Zeit bestehen, das heißt persistieren, werden als relevant betrachtet.

Diese Grundidee wurde auf unterschiedliche Fragestellungen angewendet und ein Ziel dieser Arbeit ist es, die verschiedenen Ansätze miteinander zu vergleichen und zu erweitern. Die Rahmenbedingungen für die Verwendung von persistenter Homologie sind dabei filtrierte Räume und die Darstellung der reellen Zahlen mit Hilfe der unteren Niveaumenge spezieller Funktionen.

Nach einer Einführung in das Thema und in die mathematischen Grundlagen wird mit Hilfe der Morsetheorie der Zusammenhang zwischen topologischen und geometrischen Veränderungen von Mannigfaltigkeiten erörtert. In den darauffolgenden Hauptkapiteln der Arbeit wird die persistente Homologie in verschiedenen Situationen definiert und relevante, damit einhergehende Aussagen bewiesen.

So werden - neben der formalen Definition - wichtige Punkte wie die Darstellung der zeitlichen Beziehungen, deren Berechnung, die Stabilität, und die Erweiterung mittels relativer Homologie behandelt. Daraufhin wird eine Aussage über die Existenz einer einfachen Klassifikation der persistenten Homologie bei gewähltem Koeffizientenring mittels Modul-Theorie bewiesen, und darauffolgend wird die Vorgehensweise im Rahmen der Zig-Zag-Homologie erweitert.

Anschließend werden Teile der Theorie der persistenten Homologie in die Kategorientheorie übertragen, um eine abstrakte Darstellung zu erlangen. Damit wird die Stabilitätsaussage aus der vorherigen Darstellung verallgemeinert. Schlußendlich werden kurz einige der zugrundeliegenden Anwendungen, die als Motivation für die Benutzung der persistenten Homologie dienten, sowie die vielseitigen Forschungsansätze dieser Theorie erläutert.

## The Kato Square Root Problem for Mixed Boundary Conditions

(Patrick Tolksdorf – TU Darmstadt)

Diese Arbeit befasst sich mit einem  $m \times m$ -System von elliptischen Differentialgleichungen in Divergenzform auf einem beschränkten Gebiet  $\Omega$ , welches formal durch

$$\begin{aligned} (Lu)_1 &= -\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha,\beta=1}^d \partial_\alpha (a_{\alpha\beta}^{1j} \partial_\beta u_j) \\ &\vdots \\ (Lu)_m &= -\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha,\beta=1}^d \partial_\alpha (a_{\alpha\beta}^{mj} \partial_\beta u_j) \end{aligned}$$

gegeben ist. Hier betrachten wir komplexwertige  $L^\infty$ -Koeffizienten  $a_{\alpha\beta}^{lj}$ . Die assoziierte Sesquilinearform ist durch

$$a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto \sum_{l,j=1}^m \sum_{\alpha,\beta=1}^d \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}^{lj}(x) \partial_\beta u_j(x) \overline{\partial_\alpha v_l(x)} \, dx$$

gegeben. Dabei stellt der Definitionsbereich  $\mathcal{V}$  der Sesquilinearform  $a$  die gemischten Randbedingungen ein. Dies geschieht, indem man  $\mathcal{V}$  definiert durch

$$\mathcal{V} := \overline{C_D^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}} \quad \text{mit} \quad C_D^\infty(\Omega) := \{ u|_\Omega : u \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m) \text{ und } \text{supp}(u) \cap D = \emptyset \},$$

wobei  $D$  eine abgeschlossene Teilmenge des Randes von  $\Omega$  ist. Fordert man, dass  $a$  eine Gårding'sche Ungleichung erfüllt, so wird der zu  $a$  assoziierte Operator  $L$  zu einem maximal-akkretiven Operator auf  $L^2(\Omega; \mathbb{C}^m)$ . Dieser Operator besitzt eine eindeutige maximal-akkretive Wurzel  $\sqrt{L}$ . Dass  $\mathcal{D}(\sqrt{L})$  mit  $\mathcal{V}$  übereinstimmt, ist als die *Kato'sche* Vermutung bekannt.

Im Jahre 2006 haben Axelsson, Keith und McIntosh dieses Problem für bi-Lipschitz Bilder von glatten Mengen gelöst. In dieser Thesis wird untersucht, welche minimalen Bedingungen an den Rand gestellt werden müssen, um den Beweisgedanken der obigen Autoren auf diese Randkonfiguration zu übertragen.