Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Juni 2026 — Nr. 141

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

VERALLGEMEINERUNG DER FAKULTÄT: DIE EULERSCHE GAMMAFUNKTION

Einleitung. Die Frage nach einer reellen Funktion, welche die naturgemäß diskrete Fakultät interpoliert, hat niemand Geringerer als der große schweizer Mathematiker Leonhard EULER (1707–1783) bereits im zarten Alter von 22 Jahren in einem Briefwechsel mit dem aus der Zahlentheorie bekannten Christian GOLDBACH[1] indirekt beantwortet,[2] was in weiterer Folge auch durch Beiträge von Karl WEIERSTRASS (1815–1897)[3], Harald BOHR (1887–1951)[4] und andere noch ergänzt wurde.

Eine Funktionalgleichung als Startpunkt. Für die durch

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 & \text{für } n \in \{1, 2, 3, \dots\} \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

definierte Fakultätsfolge gilt wegen

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 = (n+1) \cdot n!$$

die Funktionalgleichung

$$f(n+1) = (n+1) \cdot f(n), \tag{1}$$

welche durch

$$f(n) = n!$$

gelöst wird. Legt man den Wert $f(0) = 1$ fest, ist die Folge $f(n)$ durch die Gleichung (1) eindeutig bestimmt.

Eine Rekursion für ein Integral. Genau diese Funktionalgleichung ist es, welche wir nun als Ausgangspunkt nehmen, um einen möglichen Weg zur Verallgemeinerung der diskreten Fakultät zu skizzieren. Wir wechseln das Thema und versuchen, das Integral von $x^n e^{-x}$ zu bestimmen. Partielle Integration führt zu

$$\int_a^b x^{n+1} e^{-x}\, dx = (n+1) \cdot \int_a^b x^n e^{-x} dx - \left(x^{n+1} e^{-x} \right)\Big|_a^b .$$

Dies gilt für $n = 0, 1, 2, 3 \dots$. Wegen

$$x^{n+1} e^{-x}\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \to \infty} x^{n+1} e^{-x} = 0$$

---

[1] es sei auf die ausgezeichnete Biographie [3] hingewiesen. [2] wofür bzgl. Details generell auf das äußerst lesenswerte Werk [2] verwiesen sei. [3] siehe die jüngst erschienene Biografie [5] [4] dem jüngeren Bruder des berühmten dänischen Physikers Niels BOHR (1885–1962)

erhalten wir die Gleichung

$$\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}\,dx = (n+1)\cdot\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx. \tag{2}$$

Außerdem können wir den Wert des Integrals von $x^n e^{-x}$ für $n = 0$ bestimmen:

$$\int_0^\infty x^0 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty}(-e^{-t}) - (-1) = 1.$$

Daraus folgt nun direkt, dass

$$f(n) := \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

ebenso die Fakultätsfolge darstellt. Erstens wird die Funktionalgleichung (1) erfüllt, und zweitens gilt $f(0) = 0$.

Die Gammafunktion. Wir erhalten aus der Folge $f(n)$ eine reelle Funktion f, wenn wir für n beliebige positive reelle Zahlen zulassen, was wir symbolisch durch den Übergang von n zu x nach Umbenennung der Integrationsvariable in t durchführen:

$$f(x) := \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$$

Aus Gründen, die den Rahmen dieses Artikels sprengen würden, geht man mittels

$$\Gamma(x) := f(x-1)$$

von f zu Γ über. Das führt zu der Definition

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \qquad 1 < x < \infty, \tag{3}$$

der EULERschen Gammafunktion. Es lässt sich zeigen, dass die Gammafunktion sogar für alle positiven reellen Zahlen definiert ist. Die obige Herleitung von Gleichung (2) ergibt ganz analog auch

$$f(x+1) = (x+1)f(x) \implies f(x) = xf(x-1),$$

d.h. die Gammafunktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x). \tag{4}$$

Zusammen mit

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = e^0 - \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 1 - 0 = 1$$

folgt unter wiederholter Anwendung von (4):

$$\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1\cdot 1 = 1, \quad \Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2\cdot 1, \quad \Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(2) = 3\cdot 2\cdot 1 \text{ usw.}$$
$$\implies \Gamma(x) = (x-1)! \text{ für } x = 1, 2, 3, \ldots$$

Dies zeigt uns, dass die Gammafunktion tatsächlich die diskrete Fakultät interpoliert, also an den positiven ganzzahligen Stellen mit ihr übereinstimmt (abgesehen von der Differenz 1 der Argumente).

Auswerten der Gammafunktion bei halbzahligen Argumenten. Was bei der diskreten Fakultät nicht möglich war, eröffnet uns jetzt bei der Gammafunktion spannende neue Möglichkeiten, wie etwa die Berechnung von $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\, dt$$

Unter Verwendung der Substitution

$$t = \frac{z^2}{2}$$

folgt wegen

$$\frac{dt}{dz} = z \implies dt = z \cdot dz$$

also

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{z} e^{-z^2/2} z\, dz = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2/2}\, dz.$$

Nun beschreibt der Integrand $e^{-z^2/2}$ bis auf den fehlenden Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ gerade die Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung, mit der bekannten GAUSSschen Glockenkurve als Funktionsgraph. Setzten wir deren Integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz = 1$$

als bekannt voraus,[5] führt dies wegen

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2/2}\, dz = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2\pi}$$

zum Resultat

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{5}$$

Ausblicke.

- Durch wiederholte Anwendung von (4) auf (5) kann man recht einfach auf

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{2}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) = \tfrac{5}{2}\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

und so weiter schließen, woraus sich

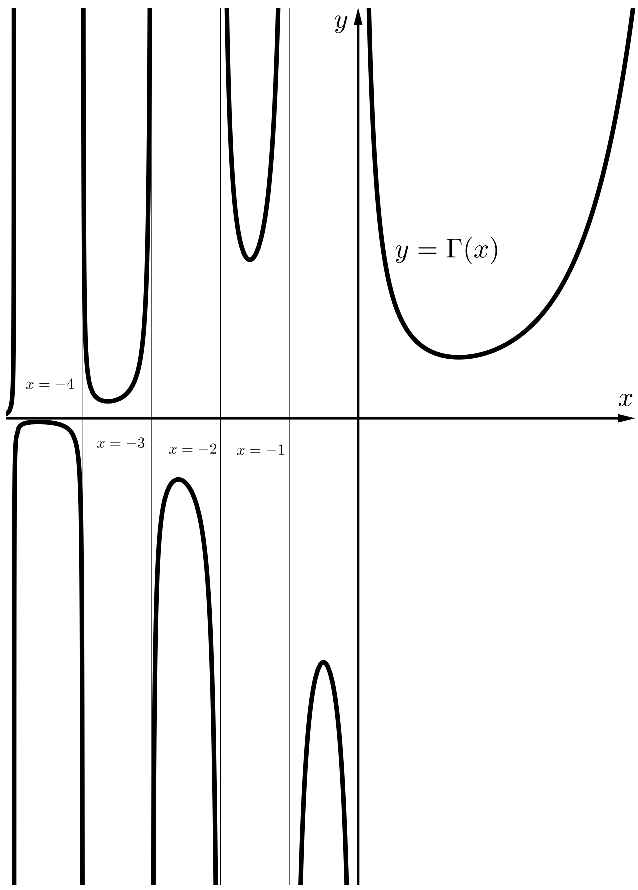
$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi}$$

ergibt, siehe etwa [6, S. 199]. Das ermöglicht es, dass bei der Berechnung der n-dimensionalen Volumina V_n von Sphären mit dem Radius r im $\mathbb{R}^n$ die separaten Formeln

$$V_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} \cdot r^{2n} \text{ sowie } V_{2n+1} = \frac{\pi^n \cdot 2^{2n+1} \cdot n!}{(2n+1)!} \cdot r^{2n+1},$$

---

[5] Für einen Beweis siehe [6, S. 17f].



Umformen der Funktionalgleichung (4) zu

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

liefert ein Rezept, um die Gammafunktion, die vorerst nur für $x > 0$ definiert war, auf negative Werte zu erweitern. Außerdem sieht man aus dieser Gleichung direkt, dass der Wert $\Gamma(x)$ für $x \to 0$ divergiert. Die analytische Fortsetzung der Gammafunktion für negative Werte hat in Folge bei $0, -1, -2, \ldots$ Polstellen. Der Funktionsgraph ist links abgebildet.

vgl. etwa [6, S. 194ff], zur Formel

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot r^n \quad\Longrightarrow\quad V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\cdot r^n$$

vereinheitlicht werden können, siehe z.B. [6, S.197ff]. Die Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt aus (4).

• Wie sich zeigen lässt (hier aber den Rahmen sprengen würde), kann man Γ auch für $x = \frac{1}{4}$ auswerten [4, S. 49], was auf

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 4\sqrt{2\pi}\cdot\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

führt. Für weitere Werte aus dem Einheitsintervall ist zumindest eine numerische Auswertung möglich. Die Abbildung oben beschreibt, wie man daraus den gesamten Funktionsgraphen der Gammafunktion erhält.

• In der analytischen Zahlentheorie spielt die Gammafunktion eine Rolle, da sie mit der durch

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}, \quad x\in(1;\infty)$$

definierten RIEMANNschen Zetafunktion ζ im Zuge der beeindruckenden Identität

$$\Gamma(x) \cdot \zeta(x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \cdot dt \tag{6}$$

zusammenhängt. Diese ist in der analytischen Zahlentheorie von großer Bedeutung und tritt zum Beispiel in der bis heute ungelösten RIEMANNschen Vermutung auf. Für Freunde ästhetischer Formeln sei an dieser Stelle die aus (6) herleitbare Funktionalgleichung

$$\pi^{-x/2} \cdot \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \zeta(x) = \pi^{(x-1)/2} \cdot \Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) \cdot \zeta(1-x) \tag{7}$$

angeführt, welche wiederum für die analytische Fortsetzung von ζ über den ursprünglichen Definitionsbereich $(1; \infty)$ hinaus relevant ist.[6]

Wer noch mehr in die faszinierende Welt der Gammafunktion eintauchen möchte, findet dazu neben dem titelgebenden Buch [2] auch in [7, S. 16ff] zahlreiche Anregungen. Ein gänzlich anderer unkonventioneller (also von der Standardliteratur zur Analysis verschiedener) Zugang zur Gammafunktion, der zudem mit der Faltung sowie der LAPLACE-Transformation zwei sehr interessante Konzepte in sich vereinigt, ist in [1, S. 246ff] zu finden.

LITERATUR

[1] Johann Cigler: *Grundideen der Mathematik*. BI-Verlag 1992.

[2] Julian Havil: *Gamma* (Eulers Konstante, Primzahlstrände und die Riemannsche Vermutung). Springer 2007.

[3] Adolf A. Juskevic und Judith K. Kopelevic: *Christian Goldbach 1690–1764*. Vita Mathematica 8, Birkhäuser 1994.

[4] Max Koecher und Aloys Krieg: *Elliptische Funktionen und Modfulformen*. Springer 1998.

[5] Wolfgang König und Jürgen Sprekels (Hrsg.): *Karl Weierstraß (1815–1897)*. Springer Spektrum 2016.

[6] Robert Resel: *In 101 Abschnitten um die mathematische Welt*. Logos 2014.

[7] Robert Resel: *Mathematik(er) von A bis Z*. Logos 2020.

Robert Resel, Wien

[6] Analytische Funktionen sind solche, die durch Potenzreihen der Form $\sum a_k(x-x_0)^k$ dargestellt werden können, von denen jede einzelne aber nicht für alle x, sondern nur für x nahe beim jeweiligen Entwicklungspunkt x_0 konvergieren muss. Man benötigt mehrere oder möglicherweise unendlich viele solcher individuellen Reihen, um die ganze Funktion zu erfassen, und es tritt typischerweise der Fall auf, dass eine anaytische Funktion vorerst nur in einem kleineren Definitionsgebiet bekannt ist. Unter analytischer Fortsetzung versteht man die Aufgabe, die Funktion auch im Rest des Definitionsgebiets zu beschreiben. Dabei können Funktionalgleichungen wie (4) oder oder (7) hilfreich sein.