Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

März 2026 — Nr. 139

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Die Formel von Brahmagupta zur Flächenbestimmung

Eine berühmte Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes von Dreiecken geht auf Heron von Alexandria zurück. Unklar ist, wann er genau gewirkt hat — Näheres zu seinem Leben findet sich z.B. auf der Webseite [3]. Herons Formel kann als Spezialfall einer bemerkenswerten Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes konvexer Sehnenvierecke angesehen werden, die auf den indischen Mathematiker Brahmagupta zurückgehen dürfte. Er hat einige Jahrhunderte später als Heron gewirkt und im 7. Jahrhundert nach Christus gelebt — Näheres zu seinem Leben findet sich z.B. in [1]. *Konvexe Sehnenvierecke* besitzen einge interessante Eigenschaften. Wir werden im Folgenden zwei Resultate herleiten, den Satz des Ptolemäus und den Satz des Brahmagupta.

Die Formel von Ptolemäus für konvexe Sehnenvierecke

Ein Viereck $P_0P_1P_2P_3$, dessen Ecken einem Kreis k angehören, wird als *Sehnenviereck* bzw. *Kreisviereck* bezeichnet. Die Kantenlängen seien a, b, c und d, die Längen der Diagonale seien e und f — siehe Abbildung 1. Im Folgenden sei stets ein *konvexes Sehnenviereck* vorausgesetzt, sodass sich keine Seiten überschneiden. Nach einem Ptolemäus (vgl. [5]) zugeschriebenen Ergebnis gilt für das Produkt der Diagonalenlängen e und f die *Formel von* Ptolemäus:

$$e\,f \;=\; a\,c \;+\; b\,d.$$

Beweis: Der Peripheriewinkelsatz über der Diagonale P_0P_2 ergibt mit $\varphi \;:=\; \angle(P_2P_1P_0)$ für $\angle(P_0P_3P_2) = \pi - \varphi$. Nach dem Cosinussatz gelten daher die Beziehungen

(1) $\quad e^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\phi \;\text{ und }\; e^2 = c^2 + d^2 - 2\,a\,b\cos(\pi - \phi) = c^2 + d^2 + 2\,a\,b\cos\phi,$

woraus wir sofort

(2) $\quad e^2(a\,b \,+\, c\,d) \;=\; (c^2 + d^2)\,a\,b \,+\, (a^2 \,+\, b^2)\,c\,d \;=\; (a\,c \,+\, b\,d)\,(a\,d \,+\, b\,c)$

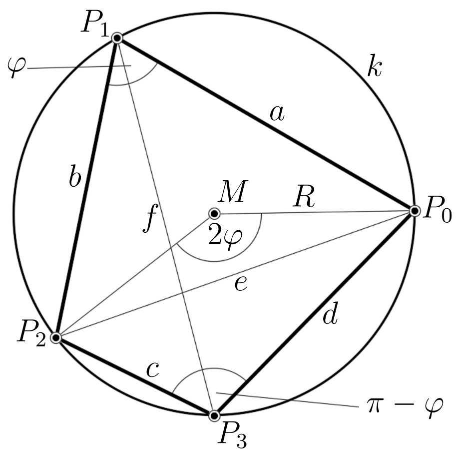

Fig. 1. Sehnenviereck mit Bezeichnungen

gewinnen. Analog erhalten wir

$$f^2(b\,c\,+\,a\,d)\;=\;(a^2+d^2)\,b\,c\,+\,(b^2\,+\,c^2)\,a\,d\;=\;(a\,c\,+\,b\,d)\,(a\,b\,+\,c\,d), \tag{3}$$

womit

$$e^2\,f^2\,(a\,b\,+\,c\,d)\,(b\,c\,+\,a\,d)\;=\;(a\,c\,+\,b\,d)^2\,(a\,d\,+\,b\,c)\,(a\,b\,+\,c\,d)$$

gilt. Da alle Längen $a, \ldots, f$ positive reelle Zahlen sind, kann gekürzt und die Wurzel gezogen werden, was auf das Resultat von PTOLEMÄUS führt.

DIE FORMEL VON BRAHMAGUPTA FÜR KONVEXE SEHNENVIERECKE

Nun wollen wir für den Flächeninhalt F des konvexen Sehnenvierecks die folgende *Formel von* BRAHMAGUPTA nachweisen:

$$F\;=\;\sqrt{(s\,-\,a)\,(s\,-\,b)\,(s\,-\,c)\,(s\,-\,d)},$$

wobei $s := \frac{a+b+c+d}{2}$ den halben Umfang des Sehnenvierecks bezeichnet.

Beweis: Da dieses Viereck aus den beiden Dreiecken $P_0P_1P_2$ und $P_0P_2P_3$ mit Flächeninhalten $F_1 = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin\varphi$ und $F_2 = \frac{1}{2}\,c\,d\,\sin(\pi-\varphi) = \frac{1}{2}\,c\,d\,\sin\varphi$ zusammengesetzt werden kann, gilt

$$2\,F\;=\;2\,(F_1\,+\,F_2)\;=\;(a\,b\,+\,c\,d)\,\sin\varphi. \tag{4}$$

Aus den beiden Gleichungen (1) können wir e^2 eliminieren. Das ergibt

$$2\,(a\,b\,+\,c\,d)\,\cos\varphi\;=\;a^2\,+\,b^2\,-\,c^2\,-\,d^2. \tag{5}$$

Quadrieren von (4) und (5) liefert nach Elimination von φ sofort $4(ab+cd)^2 = 16F^2 + (a^2+b^2-c^2-d^2)^2$. Nun formen wir um zu

$$\begin{aligned} 16F^2 &= 4\,(a\,b\,+\,c\,d)^2\,-\,(a^2\,+\,b^2\,-\,c^2\,-\,d^2)^2\,= \\ &= [2\,(a\,b\,+\,c\,d)\,+\,a^2\,+\,b^2\,-\,c^2\,-\,d^2]\,[2\,(a\,b\,+\,c\,d)\,-\,a^2\,-\,b^2\,+\,c^2\,+\,d^2]\,= \\ &= [(a\,+\,b)^2\,-\,(c\,-\,d)^2]\,[(c\,+\,d)^2\,-\,(a\,-\,b)^2]\,= \\ &= [a\,+\,b\,+\,c\,-\,d]\,[a\,+\,b\,-\,c\,+\,d]\,[c\,+\,d\,+\,a\,-\,b]\,[c\,+\,d\,-\,a\,+\,b]\,= \\ &= 16\,(s\,-\,d)\,(s\,-\,c)\,(s\,-\,b)\,(s\,-\,a), \end{aligned} \tag{6}$$

wobei $s := \frac{a+b+c+d}{2}$ den halben Umfang des Sehnenvierecks bezeichnet. Wird noch umsortiert, gekürzt und die Wurzel gezogen, ist damit Beweis der Formel von BRAHMAGUPTA erbracht.

Diese Formel bleibt sogar gültig, wenn eine der Kantenlängen zu Null wird, und das Viereck daher zu einem Dreieck wird. So stellt sich etwa für $d = 0$ die bekannte *Formel von* HERON für den Flächeninhalt des Dreiecks mit Kantenlängen a, b und c ein (vgl. [4]):

$$F\;=\;\sqrt{s\,(s\,-\,a)\,(s\,-\,b)\,(s\,-\,c)},$$

wobei $s := \frac{a+b+c}{2}$ hier den halben Umfang des Dreiecks bezeichnet.

O. Röschel (email *roeschel@tugraz.at*)

LITERATUR

Als Quellen dienen die deutsche und englische Wikipedia, konkret die Einträge [1] *Brahmagupta*, [2] *Brahmagupta's Formula*, [3] *Heron von Alexandria*, [4] *Satz des Heron*, [5] *Satz von Ptolemäus*.