Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Juni 2022 — Nr. 116

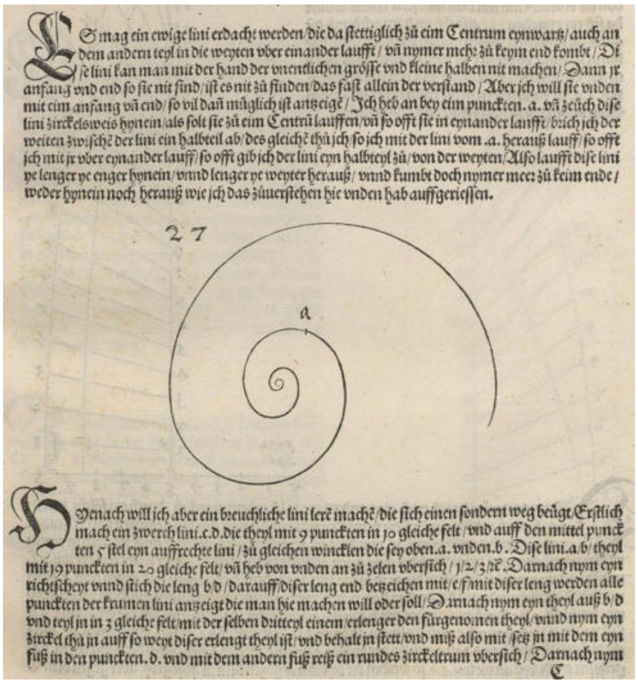
Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

DIE LOGARITHMISCHE SPIRALE – TEIL 1

Unter einer Spirale versteht man gemeinhin eine Kurve, die sich in unendlich vielen Windungen um einen Punkt zusammenzieht oder, von einem solchen Wickelpunkt ausgehend nach unendlich vielen Windungen verschwindet. Mathematiker und Künstler haben immer wieder Gefallen an solchen Kurven gefunden und sie daher eingehender untersucht. Ganz besonders vermochte die *logarithmische Spirale* diese Personengruppe in ihren Bann zu ziehen. Diese Kurve erreicht ihren Wickelpunkt nie (also nur nach unendlich vielen Windungen), und ihr Polarradius wächst exponentiell.

Dürers ewige Linie. Die geometrischen Untersuchungen zu dieser Kurve reichen weit zurück. Hier sind als erste Versuche jene von ALBRECHT DÜRER (1471–1528) zu nennen, der in seiner *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt* (aus dem Jahr 1525) diese Kurve als *ewige lini* bezeichnete. Seine Konstruktionsbeschreibung (transkribiert in für uns lesbares Deutsch) ist in Fig. 1 zu finden. Es lohnt, sie genauer durchzulesen.

Auffällig ist, dass Dürer die Kurve nach innen hin bei jedem Schritt um die Hälfte verkleinert, nach außen hin aber nur um die Hälfte zu vergrößern scheint. Konsequenterweise müsste er ja verdoppeln.



LEs mag ein ewige lini erdacht werden/die da ſtettiglich zů eim Centrum eynwarts/auch an dem andern teyl in die weyten vber einander laufft/ vñ nymer mehr zů keym end kombt/ Diſe lini kan man mit der hand der vnendlichen größſe vnd kleine halben nit machen/ Dann jr anfang vnd end ſo ſie nit ſind/iſt es nit zů finden/das faſt allein der verſtand/ Aber jch will ſie vnden mit eim anfang vñ end/ ſo vil dañ müglich iſt antzeigẽ/ Jch heb an bey eim punckten. a. vñ zeüch diſe lini zirckelsweis hynein/als ſolt ſie zů eim Centrũ lauffen/vñ ſo offt ſie in eynander laufft/brich jch der weiten zwiſchẽ der lini ein halbteil ab/des gleichẽ thů jch/ſo jch mit der lini vom .a. herauß lauff/ſo offt jch mit jr vber eynander lauff/ſo offt gib jch der lini eyn halbteyl zů/von der weyten/Alſo laufft diſe lini ye lenger ye enger hynein/vnnd lenger ye weyter herauß/ vnnd kumbt doch nymer meer zů keim ende/ weder hynein noch herauß wie jch das zůuerſtehen hie vnden hab auffgeriſſen.

HJenach will jch aber ein breuchliche lini lerẽ machẽ/die ſich einen ſondern weg beügt/Erſtlich mach ein zwerch lini.c.d.die theyl mit 9 puncken in 10 gleiche felt/vnd auff den mittel puncten 5 ſtel eyn auffrechte lini/zů gleichen wincklen die ſey oben.a. vnden.b. Diſe lini.a/b/ theyl mit 19 punckten in 20 gleiche felt/ vñ heb von vnden an zů zelen vberſich/1/2/3/ꝛc. Darnach nym eyn richtſcheyt vnnd ſtich die leng b/d/darauff/diſer leng end betzeichen mit/e/f/mit diſer leng werden alle punckten der krumen lini antzeigt die man hie machen will oder ſoll/ Darnach nym eyn theyl auß b/d vnd teyl jn in 3 gleiche felt/mit der ſelben dritteyl einem/erlenger den fürgenomen theyl/vnnd nym eyn zirckel thů jn auff ſo weyt diſer erlengt theyl iſt/vnd behalt jn ſtett/vnd miß alſo mit/ſetz jn mit dem eyn fuß in den puncken. d. vnd mit dem andern fuß reiß ein rundes zirckeltrum vberſich/ Darnach nym
C

Es soll eine unbegrenzte Linie konstruiert werden, die zum einen stetig zu einem Zentrum hinein, zum anderen unendlich weit und oft um sich herumläuft und kein Ende hat. Diese Linie kann man der unendlichen Größe und der unendlichen Kleinheit wegen mit der Hand nicht zeichnen. Denn ihr Anfang und ihr Ende sind nicht zu finden, da sie nicht existieren, was alleine der Verstand fasst. Aber ich will sie unten mit einem Anfang und Ende, so viel halt möglich ist, zeigen. Ich fange bei einem Punkt a an und zeichne diese Linie bogenweise einwärts, so als würde sie zu einem Zentrum laufen, und bei jeder Windung reduziere ich den Radius auf die Hälfte. Ebenso verfahre ich, wenn ich die Linie von a nach außen zeichne, bei jeder Windung vermehre ich den Radius um die Hälfte. Also läuft diese Linie umso enger, je länger sie hineinläuft und um so länger, je weiter sie hinaus läuft und kommt nie zu einem Ende, weder innen noch außen, wie ich, um das zu verstehen, hier unten aufgezeichnet habe.

FIG. 1. Dürers Vorschlag zum Zeichnen einer *ewigen lini* [1]

Eine Kurve mit konstantem Kurswinkel. Die erste mathematische Definition dürfte auf René Descartes (1596–1650) zurückgehen.
Für den Abstand r eines Kurvenpunktes zum (im Koordinatenursprung gedachten) Wickelpunkt gilt

$$r(t) = a^t = \mathrm{e}^{pt} \ (\text{mit } \mathrm{p} = \ln \mathrm{a},\ \mathrm{a} \in \mathbb{R},\ \mathrm{p} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \tag{1}$$

wobei p der *Spiralparameter* ist und der Kurvenparameter t die reellen Zahlen durchläuft (und üblicherweise im Bogenmaß gemessen wird).

Decartes soll auch die Loxodromeneigenschaft der logarithmischen Spiralen entdeckt haben:

Die logarithmische Spirale schneidet die Geraden des Büschels um den Wickelpunkt unter stets konstantem Winkel (vgl. Fig. 2 links).

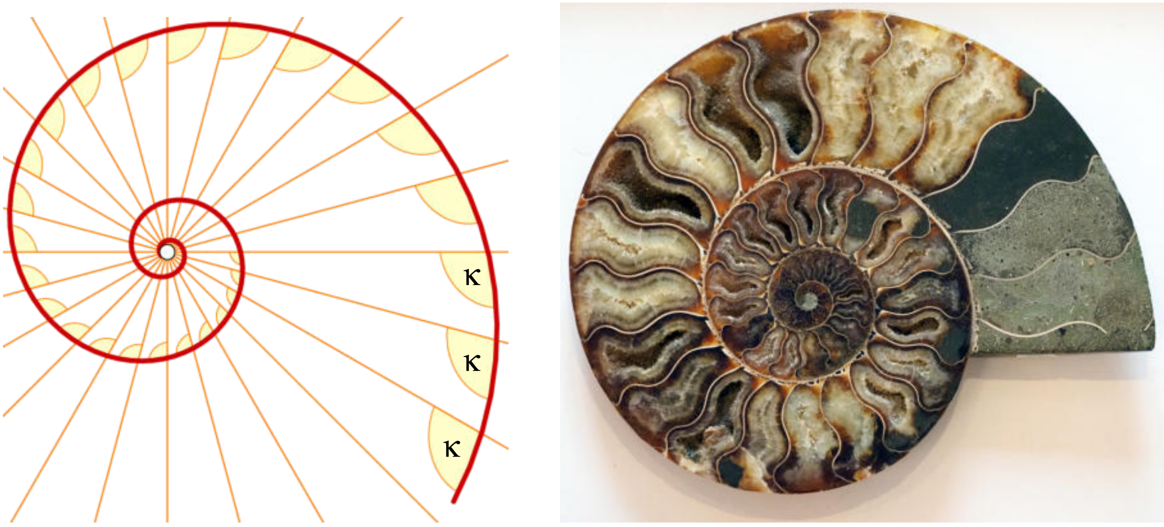


Fig. 2. Links: Die logarithmische Spirale (exponentielle Radiusfunktion) erreicht ihren asymptotischen Punkt nicht. Rechts: Querschnitt eines fossilen Ammoniten. Die frappante Ähnlichkeit mit logarithmischen Spiralen ist kein Zufall und deutet auf exponentielles Wachstum hin (mehr darüber in Teil 2).

Heute beweisen wir das, indem wir die bekannte Formel $\tan\kappa = r(t)/\dot{r}(t)$ verwenden. Dabei ergibt sich der konstante Wert $\kappa = \arctan 1/p$.

Für $\kappa = \frac{\pi}{2}$ erhält man Kreise als *Orthogonaltrajektorien* der Geraden eines Büschels, welche man als Grenzformen der logarithmischen Spiralen ansehen kann.

Punkt- und tangentenweise Konstruktion. Ungefähr zur selben Zeit soll Evangelista Torricelli (1608–1647) eine punktweise Konstruktion der logarithmischen Spirale angegeben haben. Diese Konstruktion setzt das exponentielle Wachstum des Polarradius mittels fortgesetzter Rechtwinkelhaken um und liefert Punkte der Spirale auf einem orthogonalen Strahlenpaar (Fig. 3 links). Grundlage hierfür ist der Umstand, dass die Radien zur Folge ganzzahliger Vielfacher des Polarwinkels $\frac{\pi}{2}$ wegen

$$r_0 = r(0) = 1,\ r_1 = r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{p\pi} = q \cdot r_0,\ r_2 = r(\pi) = \mathrm{e}^{p\pi} = q^2 \cdot r_0,\ r_3 = r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{p\frac{3\pi}{2}} = q^3 \cdot r_0, \ldots$$

eine geometrische Folge mit dem Quotienten $q = \mathrm{e}^{p\frac{\pi}{2}}$ bilden. Insbesondere ergibt sich nach einer vollen Windung die Verkleinerung $\alpha = q^4 = \mathrm{e}^{p2\pi}$.

Für die entsprechenden Tangenten, die ja den konstanten Kurswinkel κ mit den Radialstrahlen bilden, brauchen wir allerdings einen Taschenrechner: Aus α ermitteln wir $p = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln\alpha$ und daraus $\kappa = \arctan 1/p$. Haben wir eine Tangente eingezeichnet, erhalten wir alle weiteren, indem wir wieder eine Serie von Rechtwinkelhaken einzeichnen (Fig. 3 rechts).

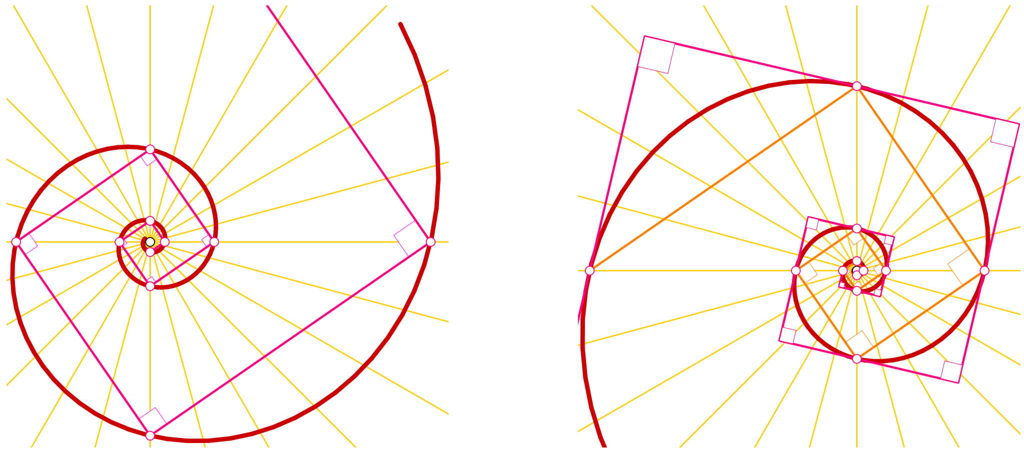


FIG. 3. Punkte auf orthogonalen Geraden des Büschels durch den Wickelpunkt werden durch fortgesetztes Eintragen rechter Winkel konstruiert (links). Die Tangenten in diesen Punkten bilden auch eine Kette von Rechtwinkelhaken. Beide Polygone sind diskrete logarithmische Spiralen.

Bei Dürers Konstruktionsvorschrift (Fig. 1) ist z. B. der Ähnlichkeitsfaktor für eine ganze Windung zumindest nach innen hin $\alpha = \frac{1}{4}$. Daraus ergibt sich $p \approx -0{,}221$ und damit $\kappa \approx 77{,}6^\circ$. Bei der Posthornschnecke (Fig. 4) ist $\alpha = \frac{1}{3}$, $p \approx 0{,}175$ und $\kappa \approx 80{,}1^\circ$.

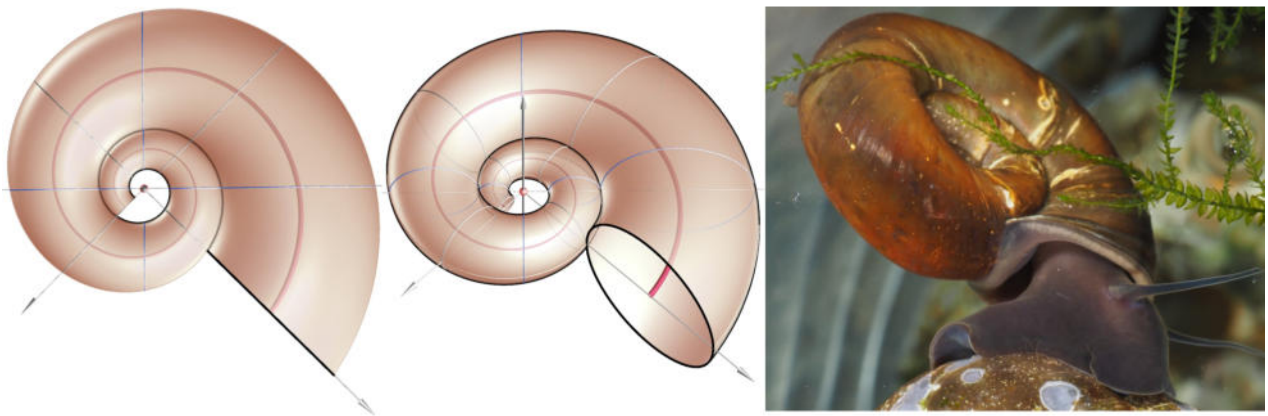


FIG. 4. Bei einer Verkleinerung von $\alpha = 1/3$ bei einer vollen Umdrehung (rote Spirale in der Mitte) lässt sich die nicht-triviale Figur links erstellen, die – räumlich interpretiert (Mitte) – frappant an das Gehäuse einer Posthornschnecke (rechts) erinnert. Hier sei wieder auf Teil 2 dieses Aufsatzes verwiesen.

Bernoullis wunderbare Spirale. Es war wohl der Schweizer JAKOB I BERNOULLI (1655–1705), der von der logarithmischen Spirale so fasziniert war, dass er sie als *spira mirabilis* bezeichnete. Den Namen *logarithmische Spirale* dürfte die „Wunderspirale“ dem französischen Physiker PIERRE DE VARIGNON (1654–1722) verdanken.

BERNOULLIs Begeisterung für die Spirale ging so weit, das er sich auf seinem Grabstein (im Basler Münster) den Sinnspruch *eadem mutata resurgo* (Verwandelt kehre ich als dieselbe zurück.) – was also die Selbstähnlichkeit der Kurve (mehr dazu im zweiten Teil) und die Hoffnung auf ein Wiederauferstehen in Relation setzen soll – wünschte. Zudem sollte eine eingravierte logarithmische Spirale den Grabstein zieren. Leider war der Steinmetz sich des Unterschiedes nicht bewusst und versah den Stein mit einer *Archimedischen Spirale* [2].

Bogenlänge. Seit dem 17. und 18. Jahrhundert hat sich die Mathematik enorm weiter entwickelt, und unzählige Erkenntnisse, auch und ganz besonders die logarithmische Spirale betreffend, sind hinzugekommen. LEIBNIZ und NEWTON ist es zu verdanken, dass wir die Bogenlängen, Tangenten usw. beliebiger Kurven (zumindest theoretisch) berechnen können. Bemerkenswerterweise ist die logarithmische Spirale eines der wenigen nicht an den Haaren herbeigezogenen Beispiele, wo die Bogenlänge $\left(\text{also eine Stammfunktion von } \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\right)$ durch elementare Funktionen berechnet werden kann. (Für Interessierte: Andere Beispiele sind die gewöhnliche Parabel, die Neilsche Parabel, die Tschirnhausenkubik, die gespitzten Trochoiden und die Lemniskate von GERONO.)

Mit Hilfe kartesischer Koordinaten können wir eine logarithmische Spirale als

$$c(t) = \mathrm{e}^{pt} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \tag{2}$$

parametrisieren (mit denselben Bedingungen an p und t wie oben). Bezeichnet $\dot{c}$ die Ableitung des Ortsvektors nach dem Kurvenparameter t und ist $\|\dot{c}\|$ die euklidische Länge des Ableitungsvektors, dann erhält man für die Bogenlänge der Spirale zwischen zwei Kurswinkeln $\tau_1 < \tau_2$

$$L(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\dot{c}\| \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p} \mathrm{e}^{p(\tau_2-\tau_1)}.$$

Wir können annehmen, dass $p > 0$ gilt. (Für den Fall $p < 0$ können wir einen Parameterwechsel $t \to -t$ durchführen, was dieselbe Kurve beschreibt, diese aber in der umgekehrten Richtung durchläuft.) Dann wird der Polarradius mit wachsendem Polarwinkel t auch größer. Wenn wir nun die Bogenlänge vom Kurvenpunkt $c(0)$ aus messen, dann erhalten wir bis zum Wickelpunkt (nach unendlich vielen Windungen)

$$L_0 := L(-\infty, 0) = \frac{1}{p}\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\cos\kappa},$$

also *trotzdem einen endlichen Wert*.

LITERATUR

[1] ALBRECHT DÜRER: *Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebnen und gantzen corporen.* Nürnberg 1525. S. 29: *https://de.wikisource.org/wiki/Seite:Duerer_Underweysung_der_Messung_029.jpg*

[2] GIORGIO FIGLIOLINI, HELLMUTH STACHEL, JORGE ANGELES: The Logarithmic Spiral and its Spherical Counterpart. *J. Industrial Design and Engineering Graphics* 14/1 (2019), 91–98. *http://sorging.ro/jideg/index.php/jideg/article/view/27/28*

G. Glaeser und B. Odehnal