



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft  
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — [mathe-brief@oemg.ac.at](mailto:mathe-brief@oemg.ac.at)

## ZUM VOLUMEN VON DURCH SCHRAUBUNG ERZEUGTEN KÖRPERN

Das Volumen von Körpern wird üblicherweise durch die Auswertung von Mehrfachintegralen ermittelt. Für spezielle Körper sind gängige Verfahren bekannt, bei denen die Ermittlung des Volumens vereinfacht werden kann. So sind zB das Prinzip von CAVALIERI (vgl. [1], S. 144) für schichtenweise aufgebaute Körper und besonders für Drehkörper Verfahren bekannt, die mit den Namen PAPPUS und GULDIN verbunden werden (vgl. [1] S. 145 und [3]).

Ein Resultat zur Berechnung des Volumens von durch Schraubung erzeugten Körpern gehört zur „geometrischen Folklore“. Leider ist die Urheberschaft unklar, auch finden sich keine gut zitierbaren Versionen dazu. Daher soll dieses Resultat hier kurz vorgestellt werden, bei dem ebenfalls eine „einfachere“ Volumsberechnung möglich ist.

Wir betrachten Körper, die aus geeigneten einfach geschlossenen, ebenen Meridiankurven  $m$  (stückweise aus  $C^1$ ) durch Schraubung um eine in der Ebene von  $m$  gelegene Schraubachse  $s$  erzeugt werden. Dabei darf  $m$  die Schraubachse  $s$  wohl stückweise enthalten, aber nicht durchsetzen. Wenn  $t \in [0, t_e]$  den Drehwinkel ( $0 < t_e \leq 2\pi$ ) und  $p \in \mathbb{R}$  den konstanten Schraubparameter bezeichnet, gilt dann überraschend das folgende

**Resultat:** *Das Volumen des so entstehenden Körpers ist vom Schraubparameter  $p$  unabhängig, stimmt also mit dem des Drehkörpers überein, der bei Drehung des Meridians  $m$  um die Achse  $s$  und Drehwinkel  $t \in [0, t_e]$  entsteht.*

Im Folgenden geben wir eine Beweisskizze und einen Zugang zu einer Verallgemeinerung dieses Resultats.

**Die Ausgangslage.** Gegeben sei eine kontinuierliche Schraubung um die Achse  $s$ , die wir in die  $z$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems legen. Die Bahnschraublinie eines Punktes mit Koordinaten  $(x, y, z)$  wird dann beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos t - y \sin t \\ x \sin t + y \cos t \\ z + pt \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit Drehwinkel  $t \in [0, t_e]$  und festem Schraubparameter  $p \in \mathbb{R}$ .

Nun wählen wir ein Rechteck mit Ecken 1234 als Meridian  $m$ , wobei die beiden Ecken 1 und 4 auf der Schraubachse  $a$  mit  $z$ -Koordinaten 0 bzw.  $b > 0$  liegen sollen – siehe Abb. 1 links. Für die Seitenlängen des Rechtecks haben wir dann  $a := \overline{12} = \overline{34}$  und  $b = \overline{23} = \overline{41}$ . Wir ermitteln nun das Volumen  $V(a, b)$  des von  $m$  und seinen Schraublagen begrenzten Körpers  $\Phi$ , wobei wir zunächst für den Drehwinkel  $t$  eine volle Umdrehung vorsehen und daher  $t_e = 2\pi$  setzen:

Die Rechtecksseite 12 beschreibt bei der Schraubung einen Teil einer Wendelfläche  $\psi$ . Der zwischen der Basisebene  $z = 0$  und dieser Wendelfläche  $\psi$  gelegene Teil des (vollen) Schraubzylinders, der die Bahnschraublinien der Punkte 2 und 3 enthält, besitze das Volumen  $V_{zyl}$  (vgl. Abb. 1 rechts; der Schraubzylinder unter der Wendelfläche  $\psi$  wurde in grüner Farbe angedeutet).

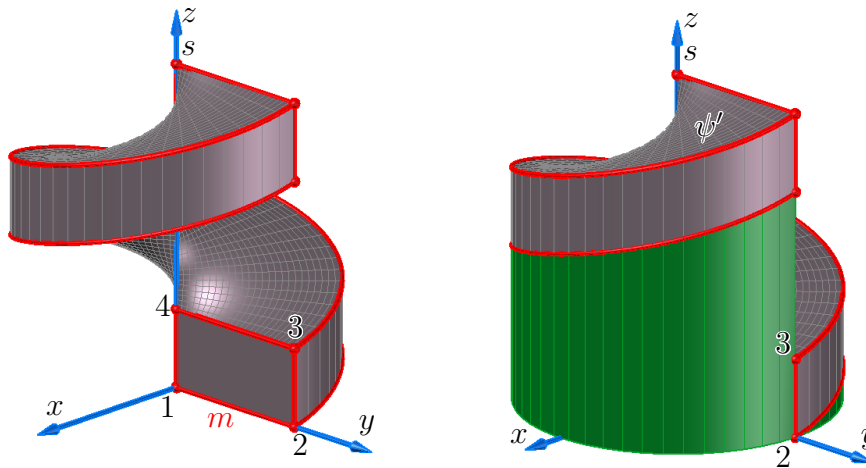


ABB. 1. Zum Volumen des durch Schraubung aus dem Meridianrechteck  $m$  erzeugten Körpers.

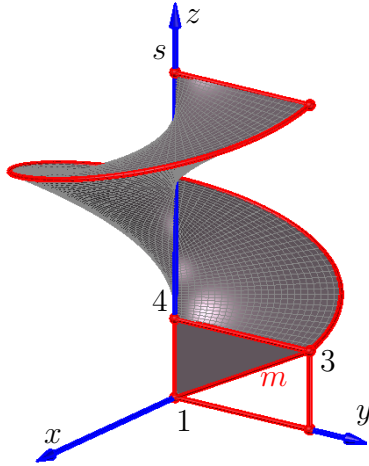
Die Bahnwendelfläche  $\psi'$  der „oberen“ Rechtecksseite 34 entsteht aus  $\psi$  durch Schiebung um die Strecke  $b$  (in  $z$ -Richtung). Der zwischen der Basisebene  $z = 0$  und der Bahnwendelfläche  $\psi'$  gebildete Teil dieses Schraubzylinders unterscheidet sich vom obigen Schraubzylinderteil unter  $\psi$  nur durch eine drehzylindrische Scheibe mit Höhe  $b$ . Er besitzt demnach das Volumen  $V_{zyl} + a^2 b \pi$ . Für das Volumen  $V(a, b)$  des Schraubkörpers  $\Phi$  mit dem Meridianrechteck 1234 erhalten wir so den Wert

$$V(a, b) = V_{zyl} + a^2 b \pi - V_{zyl} = a^2 b \pi, \quad (2)$$

was unser Resultat von oben zumindest für das Meridianrechteck 1234 bestätigt. Wird das Meridianrechteck  $m$  von der Schraubachse weggeschoben, so kann durch Differenzbildung wieder auf das eingangs angegebene Resultat geschlossen werden. Wie sofort zu sehen ist, gilt dieses Ergebnis sinngemäß auch dann, wenn der Enddrehwinkel  $t_e$  nicht mit  $2\pi$  übereinstimmt, solange nur  $0 < t_e \leq 2\pi$  bleibt.

Nun lässt sich jede einfach geschlossene Meridiankurve  $m$ , die stückweise der Klasse  $C^1$  angehört, und auch die Schraubachse  $s$  nicht durchsetzt, durch Vereinigung und Differenz von Rechtecken der eben beschriebenen Art beliebig genau annähern. Das gilt auch beim Grenzübergang, den wir hier für den allgemeinen Fall nicht angeben wollen, womit das erstaunliche Resultat verifiziert ist.

**Ein Spezialfall.** Für einen Spezialfall wollen wir den eben angedeuteten Grenzübergang genauer ausführen. Hier sei die Meridiankurve  $m$  das „halbe Rechteck“ von vorhin: Die Meridiankurve sei das Dreieck 134 mit den Angaben von oben (und wieder betrachten wir den Fall einer vollen Umdrehung, also  $t_e = 2\pi$  – siehe Abb. 2 links). Wir unterteilen die Seite 13 in  $n \in \mathbb{N}$  gleiche Teilstücke und betrachten die beiden Folgen von Rechtecken, die das Dreieck 134 von innen bzw. von außen annähern (vgl. Abb. 2 rechts):



Erklärung zur Näherung:  $a = \overline{34}$ ,  $b = \overline{14}$

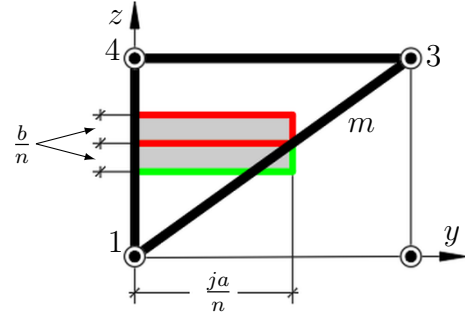


ABB. 2. Links: Körper, der durch Schraubung aus dem vollen Meridiandreieck  $m$  entsteht. Rechts: Erklärungen zur Näherung mit  $n$  Teilen.

Für die Folge der inneren Rechtecke erhalten wir die Längen  $a_j = j a/n$  und  $b_j = b/n$ , für die äußeren ebenfalls  $a_j = j a/n$  und  $b_j = b/n$ , wobei für die inneren  $j = 1, \dots, n-1$  (in der Figur rot umrandet) und für die äußeren (grün umrandet)  $j = 1, \dots, n$  gilt. Der vom Meridiandreieck 134 überstrichenen Schraubkörper wird daher von der Vereinigung der Schraubkörper der äußeren Rechtecke umfasst, während der von der Vereinigung der inneren Rechtecke stammende Schraubkörper im Inneren liegt. Für das Volumen  $V_{innen}(n)$  haben wir unter Verwendung von (2)

$$V_{innen}(n) = \sum_{j=0}^{n-1} V(a_j, b_j) = \frac{a^2 b \pi}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{a^2 b \pi}{n^3} \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 \right],$$

während für außen

$$V_{außen}(n) = \sum_{j=1}^n V(a_j, b_j) = \frac{a^2 b \pi}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{a^2 b \pi}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt. Dabei haben wir die Formel  $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  verwendet (siehe [1], S. 33 bzw. [4]). Für das Volumen  $V$  des vom Meridiandreieck 134 überstrichenen Schraubkörpers haben wir damit

$$V_{innen}(n) \leq V \leq V_{außen}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nun berechnen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{außen}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^2 b \pi \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{a^2 b \pi}{3}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{innen}(n) = \frac{a^2 b \pi}{3},$$

womit wir für das Volumen  $V$  des Schraubkörpers mit Meridiandreieck 134 den Wert  $V = \frac{a^2 b \pi}{3}$  gewinnen. Dieses Volumen ist vom Schraubparameter  $p$  unabhängig und stimmt mit dem jenes Drehkegels überein, der vom Meridiandreieck 134 bei Drehung um die Achse  $s$  bestimmt wird.

**Ein Verallgemeinerung auf durch axiale Bewegung erzeugte Körper.** Eine *axiale Bewegung um die Achse  $s$*  ist die Zusammensetzung einer kontinuierliche Drehung (Drehwinkel  $t \in [0, t_e]$ ) um  $s$  mit einer beliebigen Vorschubfunktion  $f(t) \in C^1$  in Richtung von  $s$ . Axiale Bewegungen enthalten als Spezialfälle auch Drehungen und Schraubungen um  $s$ . Wenn wir wie vorhin die Achse  $s$  in die  $z$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems legen, wird die Bahn eines Punktes mit Koordinaten  $(x, y, z)$  durch

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos t - y \sin t \\ x \sin t + y \cos t \\ z + f(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

erfaßt. Diese Bahnkurven gehören Drehzylindern um die Achse  $s$  an. Punkte  $(x, y, z)$  und  $(x, y, z + b)$  mit  $b \in \mathbb{R}$  beschreiben kongruente Bahnen, die durch Schiebung in Achsenrichtung ineinander übergehen. Sie gehören Drehzylindern mit Achse  $s$  an. Auch für die so aus einem Meridian  $m$  (Schnitt mit einer Ebene durch die Achse  $s$ ) erzeugten Körper gilt der folgende

**Satz:** Wir betrachten Körper, die aus einem geeigneten einfach geschlossenen Meridian  $m$ , der stückweise der Klasse  $C^1$  angehört, durch axiale Bewegung um eine Achse  $s$  mit Drehwinkel  $t \in [0, t_e]$  ( $0 < t_e \leq 2\pi$ ) und Vorschubfunktion  $f(t) \in C^1$  entstehen. Das Volumen dieser Körper ist von der Vorschubfunktion  $f(t)$  unabhängig, stimmt also mit dem des Drehkörpers überein, der bei Drehung des Meridians  $m$  um die Achse  $s$  und Drehwinkel  $t \in [0, t_e]$  entsteht, solange nur  $m$  die Achse  $s$  nicht durchsetzt.

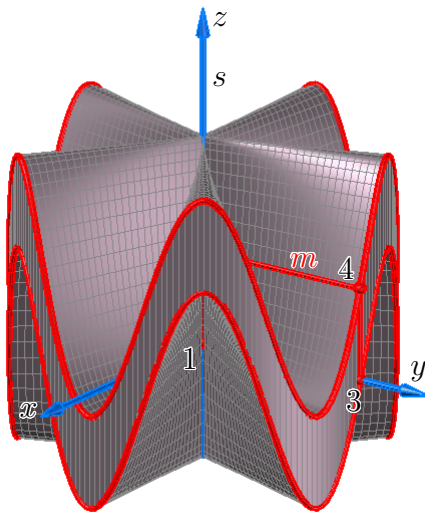


ABB. 3. Körper, der durch axiale Bewegung aus dem vollen Meridianrechteck  $m$  entsteht.

*Beweisskizze:* Wir betrachten wie im Fall der Schraubung Meridianrechtecke 1234 mit zwei Ecken auf der Achse  $s$ . Die Bahnflächen der Rechtecksseiten 12 und 34 sind kongruente Teile von geraden Konoiden<sup>1</sup> mit Leitgerade  $s$  und Leitkurve in der Bahn der Punkte 2 bzw. 3 (vgl. Abb. 3 mit  $f(t) = 2.5 \sin 5t$ ). Für den durch axiale Bewegung aus diesem Meridianrechteck  $m$  erzeugten Körper stimmt dann das Volumen wieder mit dem des aus  $m$  erzeugten Drehzylinders überein. Damit läßt sich auch die restliche Argumentation des Falles einer Schraubung um  $s$  völlig analog auf axiale Bewegungen übertragen, womit letztlich der Satz bewiesen werden kann.

<sup>1</sup>Gerade Konoide sind Regelflächen, deren Erzeugende eine Achse  $s$  orthogonal schneiden.

### Bemerkungen:

- Wieder darf  $m$  die Achse  $s$  wohl stückweise enthalten, aber nicht durchsetzen.
- Aber Achtung: Die Startkurve  $m$  muss bei diesen Überlegungen auf jeden Fall eine Meridiankurve sein!
- Nach dem Satz lassen sich für alle so erzeugten Körper nach der Formel von PAPPUS-GULDIN aus der Kenntnis des Flächeninhaltes von  $m$  und der Länge der Bahnkurve des Schwerpunktes von  $m$  bei der Drehung um  $s$  berechnen (vgl. [1], S. 145 und [3]).

O. Röschel

### LITERATUR

- [1] Hans-Jochen BARTSCH: Mathematische Formeln. 12. Auflage, VeB, Leipzig 1972.
- [2] Wikipedia-Artikel zu Paul GULDIN: [https://de.wikipedia.org/wiki/Paul\\_Guldin](https://de.wikipedia.org/wiki/Paul_Guldin) [22.1.2022].
- [3] Wikipedia-Artikel zu PAPPUS-GULDIN: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus%27s\\_centroid\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus%27s_centroid_theorem) [1.2.2022].
- [4] Benedikt FEGERL und Robert RESEL: Wege zu einer geschlossenen Formel für Quadratsummen. Mathe-Brief Nr. 102 / Oktober 2020. <http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/mbrief102.pdf>