



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — mathe-brief@oemg.ac.at

GALILEO GALILEI, KEPLER-ELLIPSEN UND DIE MONDE UNSERER PLANETEN

Anwendungen der Mathematik in den verschiedensten Wissenschaften gibt es zuhauf. Im Unterricht bietet sich etwa an, Anwendungen aus der Astronomie aufzugreifen und dabei auch geschichtliche Zusammenhänge zu erwähnen.

Mathematik/Geometrie und Astronomie. Am 7.1.2010 erschien auf ZEIT ONLINE ¹ ein Artikel zum 400. Jahrestag von Galileos Entdeckung der Jupitermonde, der wie folgt begann: „Vor 400 Jahren hörte die Sonne auf, um die Erde zu kreisen: Galileo hatte einige kleine Lichtpunkte am Jupiter erspäht, die sich anders bewegten, als sie sollten.“ Dazu muss man natürlich bemerken, dass Galileo schon damals vom kopernikanischen Weltbild überzeugt war², sodass er nur wenige Tage brauchte, um das Phänomen zu analysieren: Die vier erkennbaren Himmelskörper bewegten sich scheinbar zyklisch auf einer Geraden durch den Jupiter. Galileo interpretierte diese Gerade als Bahnkreise der Monde in nahezu identischen Trägerebenen, die von der Erde aus gesehen als Strecke erscheinen. Diese Deutung steht natürlich im Widerspruch zum geozentrischen Weltbild.



ABB. 1: Foto des Autors vom Jupiter mit den vier sichtbaren Monden

Schon zwei Monate danach (!) publizierte Galileo seine sensationelle Entdeckung (immerhin waren die Jupitermonde die ersten Himmelskörper, die nach der langen Pause ohne neue Funde seit der Antike in unserem Sonnensystem entdeckt wurden) in seinem berühmten Buch *Sidereus Nuncius*, das zu dieser Zeit offenbar schon knapp vor der Drucklegung stand. Es gab eine Reklamation des Astronomen Simon Marius (Mayr) aus Ansbach in Franken, der die Monde bereits am 29. Dezember 1609 gesehen hatte, also vermeintlich neun Tage vor Galileo. Doch im protestantischen Ansbach

¹Hellmuth Vensky: *Die Entdeckung der Jupitermonde veränderte das Weltbild*,
<https://www.zeit.de/wissen/geschichte/2010-01/galileo-galilei>

²Das heliozentrische Weltbild, das auch nach Kopernikus benannt ist, geht wie so vieles in seinen Anfängen bereits auf die alten Griechen zurück (Aristarchos von Samos und Seleukos von Seleukia), siehe dazu
https://de.wikipedia.org/wiki/Heliozentrisches_Weltbild.

galt damals noch der alte Julianische Kalender. Dadurch war es so, dass Marius die Monde tatsächlich erst einen Tag nach Galileo entdeckt hatte.

Der zeitliche Kontext. Der Philosoph, Ingenieur, Physiker, Mathematiker und Astronom Galileo Galilei wurde 1564 in Pisa geboren, 112 Jahre nach Leonardo da Vinci, 91 Jahre nach Nikolaus Kopernikus, 15 Jahre vor Johannes Kepler und knapp 80 Jahre vor Isaac Newton. Von ihm stammt der Satz „Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen.“ Er brauchte für seine Entdeckung eine ganz neue Erfindung – das Fernrohr. Heutzutage können selbst Laien die Jupitermonde mit digitalen Superzoom-Kameras beobachten und sogar fotografieren (Abbildung 1).

Ein paar Details zu den Jupitermonden. Geordnet nach dem Abstand zum Planeten und auf Keplers Vorschlag benannt nach den Geliebten des Zeus (=Jupiter) haben wir Io, Europa, Ganymed und Kallisto. Auf Fotos kann man die Reihenfolge der vier sichtbaren Monde gar nicht so leicht erkennen. Gelegentlich verschwindet der eine oder andere Mond hinter dem Jupiter bzw. wird auch von dem Planeten überstrahlt (Abbildung 2).

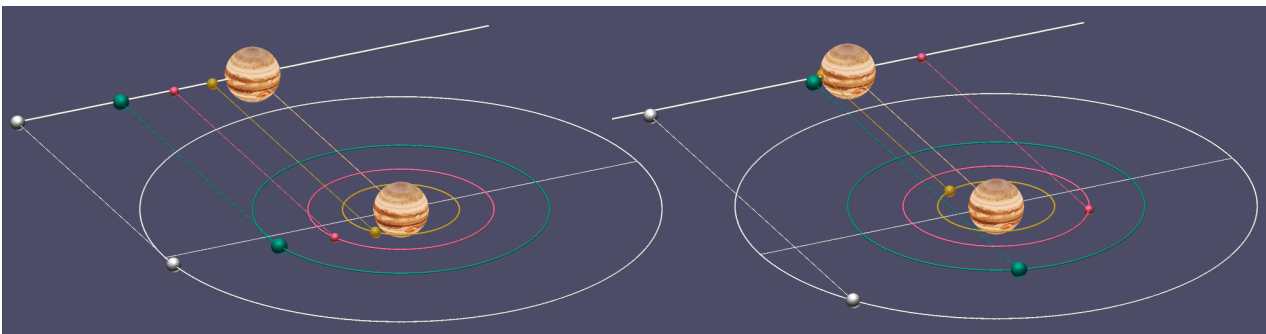


ABB. 2: Simulation der vier Umlaufbahnen

Die Monde bewegen sich auf Bahnen, deren Trägerebenen sich weniger als $0,5^\circ$ unterscheiden ([1]) und auch nur gering von der Bahnebene des Jupiters abweichen. Während unser Mond, was die Größe angeht, durchaus in derselben Liga spielt wie die vier Hauptmonde des Jupiters, sind deren Relativabstände (das 5,9 bis 26,3-fache des Jupiterradius) deutlich geringer als der Relativabstand unseres Trabanten (das 60-fache des Erdradius). Die Umlaufbahnen der vier Monde sind nahezu kreisförmig (die linearen Exzentrizitäten sind deutlich kleiner als bei der Erde oder unserem Mond). Die Verhältnisse der Umlaufzeiten (in Tagen) sind $1,769 : 3,551 : 7,155 : 16,689$. Bei den ersten drei Monden ergibt das einigermäßen genau die Proportion $1 : 2 : 4$, was doch recht außergewöhnlich ist. Dies ist kein Zufall, sondern eine Folge der gravitativen Wechselwirkungen dieser Himmelskörper, die einander immer wieder sehr nahe kommen („Laplace-Resonanz“³). Galileo schlug daher vor, die Monde als universelle Uhr zu nutzen: In einem Intervall von etwas mehr als 7 Tagen käme es immer wieder zu denselben Konstellationen, und die drei „Zeiger“ der 7-Tages-Uhr würden die Zeit genau und weltweit gleich anzeigen.

Kepler-Ellipsen. Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne. Ihre Monde bewegen sich ebenfalls auf Kepler-Ellipsen um den jeweiligen Planeten (Abbildung 3 links). Seine ersten beiden Gesetze formulierte Kepler nur wenige Monate vor Galileos Entdeckung, sein drittes Gesetz („Die Quadrate der Umlaufzeiten aller eine zentrale Masse umkreisenden Körper stehen im selben Verhältnis wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen“) erst Jahre danach. Der

³<https://de.wikipedia.org/wiki/Bahnresonanz>

gar nicht so einfache mathematische Beweis dafür (im Detail in [3] beschrieben) wurde erst ein halbes Jahrhundert später von Newton erbracht.

Verfolgt man kontinuierlich einen Planeten wie z.B. den Jupiter aus großer Entfernung, sind die Kepler-Ellipsen etwaiger Monde gut vorstellbar. Auch ein Beobachter auf dem Jupiter hätte den Eindruck, dass der Erdmond um die Erde oszilliert, weil die Ebene der Kepler-Ellipse nur maximal $5,2^\circ$ von der Ekliptik abweicht.

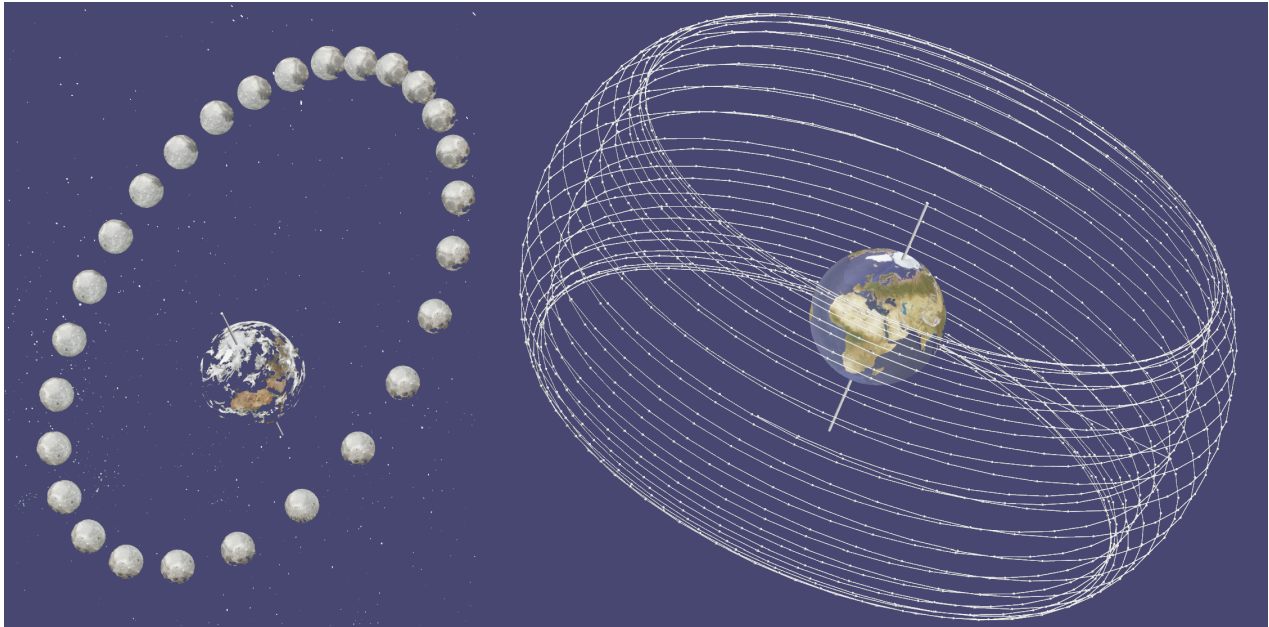


ABB. 3: Die Kepler-Ellipse des Mondes betrachtet aus einem starr mit der Bahnebene des Mondes verbundenen Punkt (links) und relativ zu einem fixen Punkt auf der Erde (rechts).

Andererseits bewegt sich die Erde vergleichsweise rasch um die Sonne. Dadurch ist – bezogen auf die Ekliptik – die Mondbahn eine gestreckte Kurve (Abbildung 4 links).

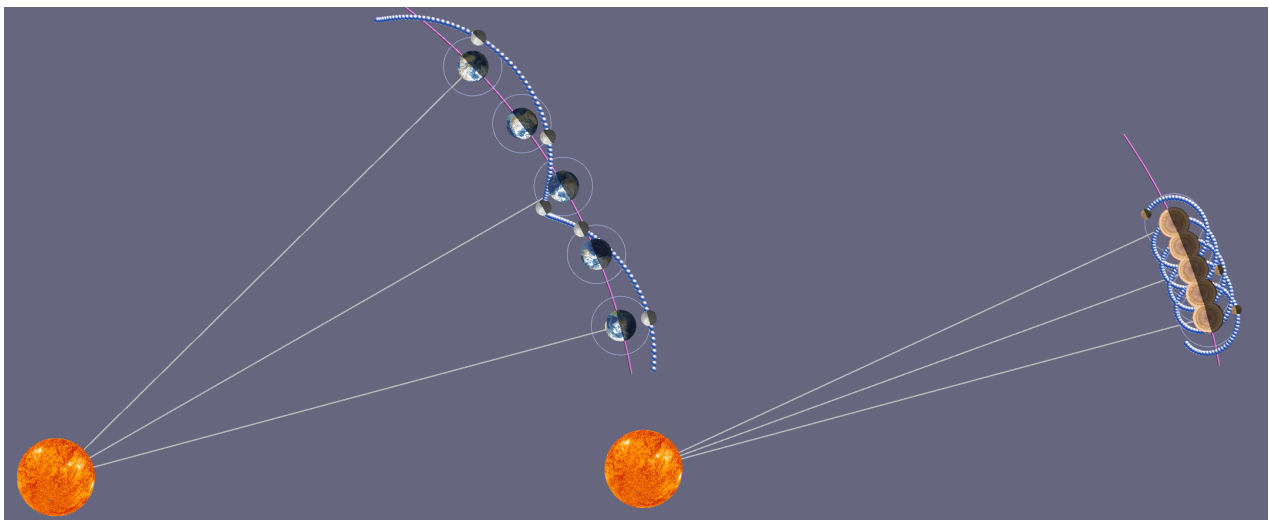


ABB. 4: Die Mondbahnen erscheinen – bezogen auf die Ekliptik – keineswegs als Ellipsen.

Die Bahn der vier Jupitermonde ist hingegen verschlungen (Abbildung 4 rechts), denn erstens bewegt sich Jupiter mit weniger als der halben Bahngeschwindigkeit der Erde und zweitens umrunden

diese Trabanten den Jupiter wesentlich schneller als unser Mond die Erde. Zumindest bei den Jupitermonden mit ihren fast kreisförmigen und in der Ekliptik liegenden Kepler-Ellipsen kommen die Bahnkurven in guter Näherung an sog. Radlinien, also Bahnkurven bei einer Kreisrollung (siehe dazu auch Mathebrief Nr. 108) heran.

Was rotiert nun wirklich im Weltall? Wir formulieren oft etwas ungenau: Die Planeten kreisen um die Sonne, der Mond rotiert um die Erde, etc. Dabei liegt in keinem dieser Fälle eine Drehung um eine Achse vor – auch dann nicht, wenn die zugehörige Kepler-Ellipse exakt ein Kreis wäre.

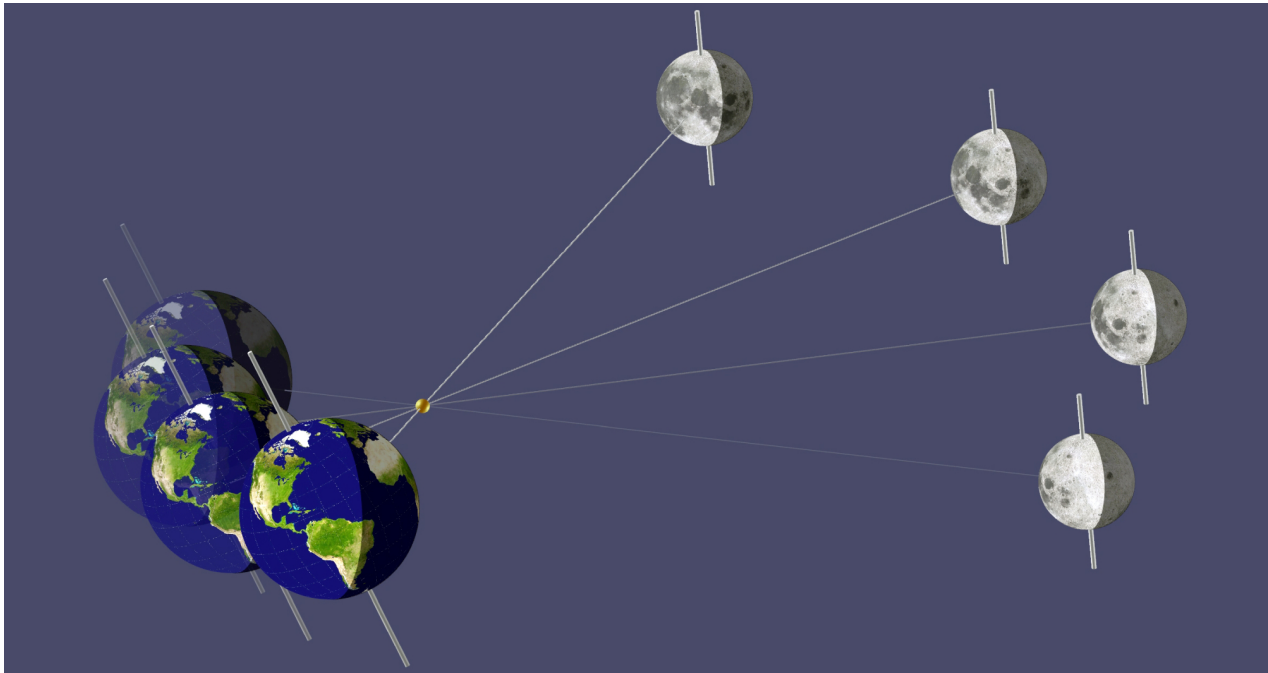


ABB. 5: Erde und Mond bewegen sich um den gemeinsamen Schwerpunkt, wobei keine Rotation im strengeren Sinne stattfindet.

Genau genommen rotieren auch Erde und Mond nicht um den gemeinsamen Schwerpunkt (in Abbildung 5 wurde dieser zum besseren Verständnis außerhalb des Erdmantels gezeichnet), sondern nur deren Massenschwerpunkte. Wenn nämlich für alle Punkte eine Drehung vorläge, dann müsste auch die Achse der Erde, des Mondes, etc., also die Pole, die Drehung mitmachen ([2], [4]). Auf Grund der Präzessionsbewegung bleibt die Richtung der Achse jedoch – zumindest für eine längere Zeit – stets parallel. Die einzige wirklich „klassische“ Drehung im Planetensystem ist die Eigendrehung der Himmelskörper. Im Übrigen wird durch die Bewegung der Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt mit dem Mond die Kepler-Ellipse der Erde verfälscht, sodass die Kurve gar keine ebene Kurve mehr ist.

LITERATUR

- [1] ANDREAS KOPP: Die Welt der Jupitermonde 05/2009
<https://www.pro-physik.de/dossiers/sonnensystem>.
- [2] GEORG GLAESER: Mondsüchtig! Das Wechselspiel der Gestirne in Bildern. De Gruyter, 08/2021.
- [3] GEORG GLAESER, HELLMUTH STACHEL, BORIS ODEHNAL: The Universe of Conics. From the ancient Greeks to 21st century developments. Springer Berlin, 2016.
- [4] ECKART KUPHAL: Den Mond neu entdecken. Spannende Fakten über Entstehung, Gestalt und Umlaufbahn unseres Erdtrabanten. Springer Berlin, 2013.

G. Glaeser