

MARY WARD PRIVATGMNASIUM UND OBERSTUFENREALGYMNASIUM
VEREINIGUNG VON ORDENSSCHULEN ÖSTERREICHS
SCHNECKGASSE 3
3100 ST. PÖLTEN

Spieltheorie

Bimatrixspiele und deren praktische
Anwendung

Johanna Einsiedler

Schuljahr 2013/14

FACHBEREICH SARBEIT IM FACH MATHEMATIK

EINGEREICHT BEI FRAU MAG. MARIA BURMETLER

MARY WARD PRIVATGYMNASIUM UND OBERSTUFENREALGYMNASIUM ST. PÖLTEN

Schule

JOHANNA EINSIEDLER

Schülerin

8C

Klasse

2013/14

Schuljahr

Thema der Fachbereichsarbeit:

SPIELTHEORIE

BIMATRIXSPIELE UND DEREN PRAKTISCHE ANWENDUNG

Ich erkläre hiermit eidesstattlich, dass ich die vorliegende Fachbereichsarbeit eigenständig und ohne Gebrauch unerlaubter Hilfsmittel oder Hilfen verfasst habe.

Datum

Unterschrift der Schülerin

1. EINLEITUNG	6
2. GRUNDZÜGE DER SPIELTHEORIE	8
2.1 Was ist Spieltheorie?	8
2.2 Darstellungsarten von Spielen	8
2.2.1 Darstellung von Spielen in tabellarischer Form	8
2.2.2 Darstellung von Spielen in Normalform	9
2.2.3 Darstellung von Spielen in extensiver Form	11
2.3 Elimination dominierter Strategien	12
2.3.1 Strikt dominierte Strategien	12
2.3.2 Schwach dominierte Strategien	14
2.4 Das Nash-Gleichgewicht	15
2.5 Gemischte Strategien	18
3. KOORDINATIONSSPIELE	21
3.1 Reine Koordinationsspiele	21
3.2 Das Gefangenendilemma	22
3.3 Win-Win-Spiele	24
3.4 Koordinationsspiele mit Verteilungskonflikt	27
4. DISKOORDINATIONSSPIELE	30
4.1 Das Münzspiel von de Montmort	30
4.1.1 Finden eines Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien	33
4.1.2 Ein gemischtes Nash-Gleichgewicht im Münzspiel von de Montmort	34
4.2 Nullsummenspiele	35
5. BEISPIELE FÜR DIE ANWENDUNG VON BIMATRIXSPIELEN	37
5.1 Anwendungsbereiche von Bimatrixspielen	37
5.1.1 Politik	37
5.1.2 Naturwissenschaften	37
5.1.3 Sport	38
5.1.4 Wirtschaft	38

5.1.5	Soziologie	38
5.2	Der Kalte Krieg	39
5.2.1	Wettrüsten	39
5.2.2	Die Kubakrise	40
5.2.3	Atomkrise	42
5.3	Autokatalytische Prozesse	43
5.3.1	Autokatalyse von chemischen Stoffen	43
5.3.2	Autokatalytische Prozesse in der Biologie	44
5.3.3	Fortpflanzungsspiel	44
5.3.4	Evolutionär stabile Strategien	45
5.3.5	Evolutionär stabile Strategien im Fortpflanzungsspiel	46
5.4	Das Dopingdilemma	47
5.4.1	Vereinfachtes Dopingdilemma	47
5.4.2	Erweitertes Dopingdilemma	48
5.4.3	Spiel mit präferierter Konsumentenstrategie (<i>Gehen, Bleiben</i>)	50
5.4.4	Spiel mit präferierter Konsumentenstrategie (<i>Bleiben, Bleiben</i>) oder (<i>Gehen, Gehen</i>)	52
5.4.5	Lösungsansätze	53
5.5	„Bank Run“	54
5.5.1	Aufbau des „Bank Run“- Spiels	54
5.5.2	Finden eines Gleichgewichts mithilfe von Rückwärtsinduktion	55
5.5.3	Interpretation der Ergebnisse	57
5.6	Vorstellungsgespräche	57
5.6.1	Aufbau des Spiels „Vorstellungsgespräch“	57
5.6.2	Das Spiel „Vorstellungsgespräch“ als Signalisierungsspiel	59
5.6.3	Die Harsanyi-Transformation	60
5.6.4	Regel von Bayes	63
5.6.5	Interpretation der Ergebnisse	64
6.	SCHLUSS	66
7.	ANHANG	67
7.1	Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	67
7.1.1	Abbildungsverzeichnis	67
7.1.2	Tabellenverzeichnis	67
7.2	Quellenverzeichnis	69

1. Einleitung

Die Spieltheorie ist eine der aufstrebenden Wissenschaften des 21. Jahrhunderts. Trotz ihrer zahlreichen mathematischen Komponenten lassen sich mit einfachen Mitteln alltägliche Situationen darstellen und untersuchen.

Diese Fachbereichsarbeit soll einen Einblick in die Spieltheorie geben und einfache Methoden zur Analyse von Situationen, die vielen Menschen bekannt sind, vorstellen.

Das erste Kapitel widmet sich den elementaren theoretischen Begriffen der Spieltheorie. Zuerst wird der Begriff „Spieltheorie“ kurz erläutert, danach werden unterschiedliche Arten der Darstellung von Spielen vorgestellt. Es wird erklärt, um was es sich bei dominierten Strategien handelt, wie man sie erkennen kann und warum man sie eliminieren kann. Danach wird auf das wohl wichtigste „Werkzeug“ der Spieltheorie, das Nash-Gleichgewicht, eingegangen. Abschließend wird noch erklärt, was gemischte Strategien sind und wie man sie berechnet.

Das zweite Kapitel befasst sich mit Bimatrix-Koordinationsspielen, also Entscheidungssituationen, bei denen sich die Entscheidungsträger koordinieren wollen. Zuerst wird das Prinzip der reinen Koordination präsentiert und anhand eines Beispiels erklärt. Danach folgt das wahrscheinlich berühmteste und am besten analysierte Spiel, das Gefangenendilemma. Im Anschluss werden noch zwei Beispiele für Win-Win-Spiele vorgestellt und im Zuge der Analyse dieser Spiele auch das Prinzip der Pareto-Effizienz und das Maximin-Prinzip. Der letzte Unterpunkt des Kapitels beschäftigt sich mit Koordinationsspielen mit Verteilungskonflikt - wie zum Beispiel dem berühmten „Kampf der Geschlechter“.

Das Thema des dritten Kapitels sind Diskoordinationsspiele, Spiele, bei denen sich Entscheidungsträger mit völlig entgegengesetzten Interessen gegenüberstehen. Ein Beispiel ist das Münzspiel von de Montmort, anhand dessen wird auch das Prinzip von gemischten Nash-Gleichgewichten erläutert. Abschließend werden auch Nullsummenspiele kurz vorgestellt und mit Hilfe eines Beispiels erklärt.

Das darauf folgende Kapitel widmet sich den vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten von Bimatrixspielen. Zu Beginn werden die Anwendungsgebiete der Spieltheorie in

verschiedenen Wissenschaften aufgezeigt. Danach werden konkrete Beispiele aus den Bereichen Politik, Naturwissenschaften, Sport, Wirtschaft und Soziologie vorgestellt.

Im letzten Kapitel wird die Hauptaussage der Arbeit noch einmal kurz zusammengefasst und es werden die Grenzen der Spieltheorie aufgezeigt.

2. Grundzüge der Spieltheorie

2.1 Was ist Spieltheorie?

„Spieltheorie ist die Analyse strategischer Entscheidungssituationen, in denen mehrere Spieler miteinander interagieren.“¹

Die Spieltheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, findet jedoch Anwendung in verschiedenen Disziplinen, unter anderem in den Wirtschaftswissenschaften, der Informatik, der Soziologie, den Politikwissenschaften, der Psychologie und der Biologie. Sie stellt Entscheidungssituationen mit mehreren Beteiligten so vereinfacht dar, dass sie mithilfe mathematischer Prinzipien analysiert werden können.²

2.2 Darstellungsarten von Spielen

2.2.1 Darstellung von Spielen in tabellarischer Form

Endliche Spiele, aber vor allem Zweipersonenspiele werden der Einfachheit halber oftmals in tabellarischer Form dargestellt. Diese Form der Darstellung wird auch als Matrixdarstellung bezeichnet. Im Regelfall wird ein sogenannter *Zeilenspieler* und ein *Spaltenspieler* bestimmt.³ In die einzelnen Zellen werden dann die Nutzenwerte beider Spieler für die einzelnen Strategiekombinationen eingetragen, wobei sich der links stehende Wert immer auf den Zeilenspieler und der rechts stehende Wert auf den Spaltenspieler bezieht.⁴

¹ Nebel, Bernhard: Spieltheorie. In: <http://www.informatik.uni-freiburg.de/~ki/teaching/ss09/gametheory/spieltheorie.pdf>, 13.11.2013. S.4

² Vgl.: N.N.: Spieltheorie. In: <http://de.wikipedia.org/wiki/Spieltheorie>, 13.11.2013.

³ Vgl.: Nebel: Spieltheorie. In: <http://www.informatik.uni-freiburg.de/~ki/teaching/ss09/gametheory/spieltheorie.pdf>, S.6

⁴ Vgl.: Amann, Erwin/Helbach, Christoph: Spieltheorie für Dummies. Ein Spiel für praktische Theoretiker. Weinheim 2012. S. 77

		<i>Spieler B</i>	
		s_B^1	s_B^2
<i>Spieler A</i>	s_A^1	$(u_A(s_A^1, s_B^1), u_B(s_A^1, s_B^1))$	$(u_A(s_A^1, s_B^2), u_B(s_A^1, s_B^2))$
	s_A^2	$(u_A(s_A^2, s_B^1), u_B(s_A^2, s_B^1))$	$(u_A(s_A^2, s_B^2), u_B(s_A^2, s_B^2))$

Tabelle 1: Darstellung von Spielen in tabellarischer Form

u bezeichnet hier immer den Nutzen, Strategien werden durch s dargestellt.

A beziehungsweise B gibt an, auf welchen Spieler sich der jeweilige Nutzen oder die jeweilige Strategie bezieht. Die Hochzahl steht für die Nummer einer Strategie in der Menge aller Strategien eines Spielers.

Verfügen die Spieler, wie in diesem Fall, über je zwei Strategien, bezeichnet man eine solche Tabelle auch als Bimatrix.

2.2.2 Darstellung von Spielen in Normalform⁵

Die Problemstellung wird in der Normalform definiert als $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$.

Im Regelfall gibt es bei jeder spieltheoretischen Problemstellung drei Faktoren, die mit einbezogen werden müssen:

- Die Menge der Spieler (set of players)

$$N = \{1, 2, \dots, n\},$$

wobei ein willkürlicher Spieler mit i gekennzeichnet wird.

$$i = 1, 2, \dots, n$$

- Die Strategien der Spieler (strategy sets)

⁵ Es gibt mehrere gängige Bezeichnungen für die einzelnen Komponenten der Normalform. Die Verfasserin hält sich in dieser Fachbereichsarbeit an die Definition, die im „Gabler Wirtschaftslexikon“ unter dem Stichwort „Normalform“ zu finden ist.

Springer Gabler Verlag (Herausgeber), Gabler Wirtschaftslexikon, Stichwort: Normalform. In: <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/56987/normalform-v9.html>, 20.7.2013

Ergänzungen aus:

Amann/Helbach: Spieltheorie für Dummies. S. 72 ff.

Gibbons, Robert: A Primer in Game Theory. London 1992. S. 4 ff.

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$$

S ist die Menge aller Strategiemengen aller Spieler.

Eine beliebige Strategie des Spielers i wird als s_i bezeichnet. Die Strategien werden durchnummeriert und die Nummer der Strategie kommt in die Hochzahl.

S_i bezeichnet die Menge aller Strategien des Spielers i .

$$s_i \in S_i = (s_i^1, s_i^2, s_i^3, \dots)$$

Die Menge der möglichen Strategiekombinationen oder auch Strategievektoren (strategy spaces) wird bezeichnet mit:

$$s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

Wählt man einen beliebigen Spieler i mit der Strategiemenge S_i , so werden die Strategiekombinationen von allen Strategien aller Spieler, außer Spieler i , als

$$s_{-i} = \{s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n\}$$

bezeichnet.

- Die Nutzenwerte, die Strategiekombinationen verursachen (payoff functions)

Jeder Strategiekombination s wird mithilfe einer Auszahlungsfunktion u_i ein Nutzenwert $u_i(s)$ zugeteilt, der widerspiegelt, wie Spieler i die Ereignisse, die durch die Strategiekombination s verursacht wurden, beurteilt.

Hierbei muss aber zwischen ordinalem und kardinalen Nutzen unterschieden werden.

Ordinales Nutzenkonzept: Die Differenz zwischen den Nutzenwerten hat keine Bedeutung, allein die Rangfolge der Nutzenwerte wird durch die Höhe der Nutzenwerte dargestellt. Deshalb werden bei Spielen oft fiktive Zahlenwerte angenommen, die nur dazu dienen, die Präferenzen darzustellen.

Kardinales Nutzenkonzept: In diesem Fall hat auch die Differenz zwischen Nutzenwerten eine Bedeutung. Dieses Konzept wird vor allem bei Spielen benötigt, bei denen Wahrscheinlichkeiten mit einberechnet werden müssen, um die bestmögliche Strategie ausfindig zu machen.⁶

Die Nutzenwerte werden mit Hilfe der Präferenzen eines Spielers festgelegt, welche die Beschreibung und Begründung von Vorlieben eines Spielers umfassen.

Außerdem sollte erwähnt werden, dass Zeit in spieltheoretischen Modellen generell keine Rolle spielt. Es ist zwar möglich, dass eine Strategie verschiedene nacheinander stattfindende Aktionen enthält, aber es wird Spielern keine Zeit „gegeben“, um zum Beispiel ihre Strategie oder ihre Präferenzen zu ändern und somit den Spielverlauf zu beeinflussen.⁷ Es wird außerdem, wenn nicht anders beschrieben, auch davon ausgegangen, dass die einzelnen Spieler nie darüber informiert sind, welche Strategien die anderen Spieler einsetzen werden.⁸

2.2.3 Darstellung von Spielen in extensiver Form

Spiele in extensiver Spielform, oder auch Extensivform, werden in der Regel als Spielbäume dargestellt und haben deshalb gegenüber den anderen Darstellungsformen den Vorteil, dass auch zeitliche Abfolgen veranschaulicht werden können. Die Extensivform wird deshalb vor allem bei Spielen verwendet, bei denen die Spieler ihre Entscheidungen nicht simultan, sondern zeitlich versetzt treffen.

⁶ Vgl.: Amann/ Helbach: Spieltheorie für Dummies. S. 75

⁷ Vgl.: Osborne, Martin J.: An introduction to game theory. New York 2004. S. 14

⁸ Vgl.: Gibbons: A Primer in Game Theory. S.3 f.

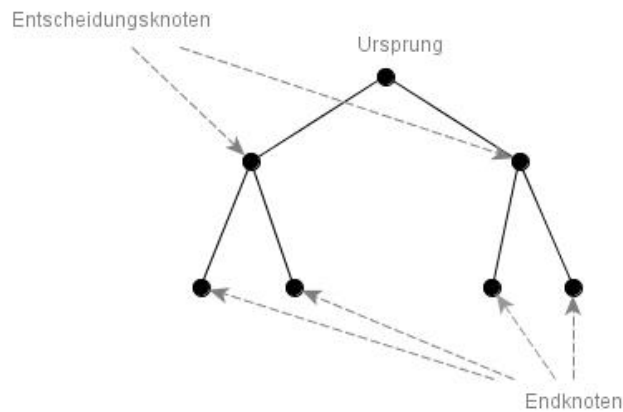


Abbildung 1: Spielbaumdarstellung⁹

Der Ursprung (auch Knoten oder Wurzel genannt) bezeichnet den Anfang eines Spiels. Alle Knoten des Spielbaumes, von denen aus weitere Entscheidungen getroffen werden können, nennt man Entscheidungsknoten, jene, die ein Ende des Spiels kennzeichnen, Endknoten.¹⁰

2.3 Elimination dominierter Strategien

Um die bestmögliche Strategie für ein bestimmtes Spiel zu finden, sollte man damit beginnen, möglichst viele Strategien zu eliminieren.

2.3.1 Strikt dominierte Strategien

→ **Definition:** Eine Strategie des Spielers i , s_i'' dominiert eine andere Strategie s_i' strikt, wenn gilt:

$$u_i(s_i'', s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) \text{ für alle Strategiekombinationen } s_{-i}.^{11}$$

Aufgrund dieser Voraussetzungen können strikt dominierte Strategien immer eliminiert werden, da es immer eine Strategie gibt, die in jedem Fall besser ist als die strikt dominierte Strategie.¹²

Beispiel: Fußballspiel

⁹ Vgl.: Amann/ Helbach: Spieltheorie für Dummies. S. 86

¹⁰ Vgl.: Amann/Helbach: Spieltheorie für Dummies. S.85 f.

¹¹ Vgl.: Osborne: An introduction to game theory. S. 45 f.

¹² Vgl.: Polak, Ben: 1. Introduction: five first lessons. In: <http://www.youtube.com/watch?v=nM3rTU927io&list=PL6EF60E1027E1A10B>, 12.10.2013.

Angangssituation: Die beiden Mannschaften A und B spielen gegeneinander. Sie können beide wählen, ob sie offensiv oder defensiv spielen wollen. Die Wahl der Taktik ist die alleinige Ursache für das spätere Spielergebnis. Wählen beide Mannschaften die gleiche Taktik, gibt es ein Unentschieden. Wählt eine Mannschaft offensiv und eine defensiv, gewinnt die offensiv spielende Mannschaft.

Spieler: Mannschaft A und Mannschaft B $N=\{1,2\}$

Strategien: Jede Mannschaft hat zwei Strategien zur Auswahl $\{defensiv, offensiv\}$

Präferenzen: Jede Mannschaft bevorzugt einen Sieg gegenüber einem Unentschieden, welches wiederum besser ist als eine Niederlage.

$(offensiv, defensiv) > (defensiv, defensiv) = (offensiv, offensiv) > (defensiv, offensiv)$

		Mannschaft B	
		Defensiv	Offensiv
Mannschaft A	Defensiv	(1, 1)	(0, 3)
	Offensiv	(3, 0)	(1, 1)

Tabelle 2: Fußballspiel

Die Auszahlungswerte spiegeln hier die Punkte für die Tabellenwertung wider.

Die Strategie *offensiv* von Mannschaft A dominiert die Strategie *defensiv* strikt, da sie, unabhängig davon, welche Strategie Mannschaft B wählt, besser ist als *defensiv*.

Die Strategie *offensiv* kann auch als dominante Strategie bezeichnet werden.

Verfügen beide Spieler eines Zwei- Personen- Spiels über eine dominante Strategie, führt dies zu einem Nash-Gleichgewicht. (Erklärung zum Nash-Gleichgewicht erfolgt im Kapitel 2.4)

2.3.2 Schwach dominierte Strategien

→ **Definition:** Eine Strategie des Spielers i , s_i'' dominiert eine andere Strategie s_i' schwach, wenn gilt:

$$u_i(s_i'', s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \text{ für alle Strategiekombinationen } s_{-i}.$$

und

$$u_i(s_i'', s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}) \text{ für zumindest eine Strategiekombination } s_{-i}.^{13}$$

Auch schwach dominierte Strategien können aus einem Entscheidungsprozess ausgeschlossen werden.

Beispiel: Hannibals Angriff auf Rom¹⁴

Ausgangssituation: Hannibal möchte in Rom einfallen, er kann zwischen zwei möglichen Wegen wählen – dem über die Alpen (schwerer Weg) und dem entlang der Küste (leichter Weg). Er verfügt über zwei Bataillonen. Nimmt er den Weg über die Alpen, verliert er eine, und sollte er auf ein römisches Heer stoßen, büßt er ebenfalls eine Bataillon ein. Die Römer hingegen haben nicht genug Soldaten, um beide Wege zu verteidigen, sie müssen sich ebenfalls für einen entscheiden.

Spieler: Hannibal und die Römer $N = \{1, 2\}$

Strategien: Beide Beteiligten verfügen jeweils über zwei Strategien:
 $\{\text{Leichter Weg}, \text{Schwerer Weg}\}$

Präferenzen: Hannibal will möglichst wenige Bataillonen verlieren, wohingegen die Römer Hannibal möglichst große Verluste zufügen möchten.

Hannibal:

$$(\text{Leichter Weg}, \text{Schwerer Weg}) >^{Han} (\text{Leichter Weg}, \text{Leichter Weg}) =$$
$$(\text{Schwerer Weg}, \text{Leichter Weg}) >^{Han} (\text{Schwerer Weg}, \text{Schwerer Weg})$$

Römer:

Die Präferenzen der Römer sind genau gegenteilig zu Hannibals Interessen.

¹³ Vgl.: Osborne: An introduction to game theory. S. 46 f.

¹⁴ Vgl.: Polak, Ben: 2. Putting yourselves into other people's shoes. In: http://www.youtube.com/watch?v=qQ3kFydl_xQ, 14.10.2013.

		<i>Hannibal</i>	
		Leichter Weg	Schwerer Weg
<i>Römer</i>	Leichter Weg	(1, 1)	(1, 1)
	Schwerer Weg	(0, 2)	(2, 0)

Tabelle 3: Hannibals Marsch nach Rom

Es ist gut ersichtlich, dass Hannibal, wenn die Römer den leichten Weg verteidigen, egal welchen Weg er wählt, mit einer Bataillon in Rom ankommen wird. Wenn die Römer den schweren Weg verteidigen, die Strategie *{Leichter Weg}* klar besser ist. Somit dominiert die Strategie *{Leichter Weg}* die Strategie *{Schwerer Weg}* schwach.

Wirklichkeitsbezug: Die Römer gingen aufgrund dieser Strategielage davon aus, dass Hannibal den leichten Weg nehmen würde und verteidigten somit auch diesen. Umso größer war der Überraschungseffekt, als Hannibal sich für die risikoreichere Variante entschied und den Weg über die Alpen wählte.¹⁵

2.4 Das Nash-Gleichgewicht

Um ein Nash-Gleichgewicht zu finden, muss man zuerst die sogenannten *besten Antworten* der einzelnen Spieler auf alle möglichen Strategiekombinationen aller anderen Spieler finden.

¹⁵ Vgl.: N.N.: Hannibal- Der Feldzug gegen Rom. In: <http://www.nexusboard.net/sitemap/7896/hannibal-der-feldzug-gegen-rom-t1156/>, 14.10.2013.

→ **Definition:** Die beste Antwort von Spieler i auf das Strategieprofil s_{-i} ist die Strategie $s_i^* \in S_i$, für die gilt:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

für alle Strategien $s_i \in S_i$.¹⁶

Wenn eine Strategiekombination für alle Spieler eine beste Antwort auf die in der Strategiekombination enthaltenen Strategien der anderen Spieler ist, handelt es sich um ein Nash-Gleichgewicht.

→ **Definition:** Eine Strategiekombination $s^* = (s_1, \dots, s_n)$ ist ein Nash-Gleichgewicht, wenn für jeden Spieler i und jede Strategie s_i von Spieler i , s^* mindestens genauso gut ist, wie die Strategiekombination (s_i, s_{-i}^*) , in welcher Spieler i die Strategie s_i wählt und alle anderen Spieler j die Strategie $s_j^* \in s^*$ wählen. Deshalb gilt:

$$u_i(s_i^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

für alle Strategien s_i von Spieler i .¹⁷

Besteht ein Nash-Gleichgewicht nur aus dominanten Strategien, bezeichnet man es außerdem als striktes Gleichgewicht.¹⁸

Beispiel: Kartellabsprachen¹⁹

Ausgangssituation: Es gibt zwei Firmen, Firma A und Firma B, die beide das gleiche Produkt von gleicher Qualität anbieten. Die beiden Firmen verfügen über ein Duopol, sind also die einzigen Firmen, die dieses Produkt verkaufen. Wenn man davon ausgeht, dass die Konsumenten immer zum billigeren Produkt greifen, resultiert daraus eine stetige Preissenkung.

¹⁶ Vgl: Lopez, Nicolas/Aguirre, Oswaldo/Espiritu, Josef F./Taboada, Heidi A.: Using game theory as a post-pareto analysis for renewable energy integration problems considering multiple objects. In: <http://www.usc.edu/dept/ise/caie/Checked%20Papers%20%5Bruhi%2012th%20sept%5D/word%20format%20papers/REGISTRATION%20PAID%20PAPERS%20FOR%20PROCEEDINGS/pdf/211%204%20USING%20GAME%20THEORY%20AS%20A%20POST-PARETO%20ANALYSIS%20FOR%20RENEWABLE%20ENERGY.pdf>, 12.11.2013

¹⁷ Vgl.: Osborne: An introduction to game theory. S. 25.

¹⁸ Vgl.: Julmi, Christian: Spieltheorie. In: http://www.wiwiwmaster.de/data/Dokumente/269/060120142613_SpieltheorieSkript2.pdf, 16.11.2013. S.9

¹⁹ Vgl.: Leininger, Wolfgang/ Amann, Erwin: Einführung in die Spieltheorie. In: http://www.wiso.tu-dortmund.de/wiso/mik/Medienpool/de/materialien/spieltheorie_1/spiele1_ws07_08_skript.pdf, 13.10.2013.

Ist es für diese Firmen sinnvoll, sich abzusprechen und ein Kartell zu bilden?

Spieler: Firma X und Firma Y $N = \{1,2\}$

Strategien: Firma X und Firma Y haben je zwei Möglichkeiten:
 $\{Hoher\ Preis, Niedriger\ Preis\}$

Präferenzen: Beide Firmen wollen einen möglichst hohen Gewinn erzielen. Die Auszahlungswerte entsprechen in diesem Fall einem ordinalen Nutzenkonzept und dienen nur dazu, die Präferenzen darzustellen.

$(Niedriger\ Preis, Hoher\ Preis) > (Hoher\ Preis, Hoher\ Preis) >$
 $(Niedriger\ Preis, Niedriger\ Preis) > (Hoher\ Preis, Niedriger\ Preis)$ für beide Spieler

		Firma Y	
		Hoher Preis	Niedriger Preis
Firma X	Hoher Preis	(5, 5)	(2, 7)
	Niedriger Preis	(7, 2)	(3, 3)

Tabelle 4: Kartellabsprachen

Um nun ein Nash-Gleichgewicht zu finden, müssen zuerst einmal die besten Antworten gefunden werden.

$BA_X(Hoher\ Preis) = Niedriger\ Preis, BA_X(Niedriger\ Preis) = Niedriger\ Preis$

$BA_Y(Hoher\ Preis) = Niedriger\ Preis, BA_Y(Niedriger\ Preis) = Niedriger\ Preis$

Die besten Antworten sind in der folgenden Tabelle fett gedruckt. Somit ist auch leicht ersichtlich, dass die Strategiekombination $(Niedriger\ Preis, Niedriger\ Preis)$ für beide Spieler eine beste Antwort und somit ein Nash-Gleichgewicht ist.

		<i>Firma Y</i>	
		Hoher Preis	Niedriger Preis
<i>Firma X</i>	Hoher Preis	(5, 5)	(2, 7)
	Niedriger Preis	(7, 2)	(3, 3)

Tabelle 5: Kartellabsprachen - Beste Antwort

Folglich kann die Kartellabsprache nicht funktionieren – beide Beteiligten haben einen Anreiz, vom ausgemachten Preis abzuweichen.

Wirklichkeitsbezug: Da Kartellabsprachen verboten sind, haben diverse staatliche Kontrollämter ein Interesse daran, diese Situation aufrecht zu erhalten. Hingegen versuchen Einzelbetriebe durch Kontrollen und Bestrafungen Kartelle zu stabilisieren. Natürlich gibt es auch Fälle, wo ein Kartell sogar erwünscht ist, zum Beispiel bei wissenschaftlichen Kooperationen. In diesem Fall müssen von staatlicher Seite genügend Anreize geboten werden, um das Funktionieren einer solchen Zusammenarbeit gewährleisten zu können. Außerdem verändert sich die Situation natürlich bei mehrmaligem „Spielen“.

2.5 Gemischte Strategien

Alle Strategien $s_i \in S_i$ können als *reine Strategien* bezeichnet werden. Es gibt aber auch sogenannte *gemischte Strategien*. Bei diesen wählt der Spieler i nicht direkt eine Strategie $s_i \in S_i$, sondern eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über seine Strategiemenge.²⁰

²⁰ Vgl.: Rieck, Christian: Spieltheorie. Eine Einführung. Eschborn, 2012. S. 210.

→ **Definition:** Eine gemischte Strategie q_i entspricht einer Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Strategiemenge S_i eines Spielers i . q_i ordnet jeder reinen Strategie $s_i \in S_i$ einen Wahrscheinlichkeitswert $q_i(s_i)$ zu. Es handelt sich dabei also um einen Vektor:

$$q_i = \{q_i(s_i^1), q_i(s_i^2), \dots\}^{21},$$

wobei die Wahrscheinlichkeit für eine beliebige Strategie s_i^k auch bezeichnet wird mit q_i^k . Somit gilt auch²²:

$$q_i = \{q_i^1, q_i^2, \dots\}$$

Für alle $q_i^k \in q_i$ gilt:

$$q_i^k \in [0; 1]$$

Außerdem muss für jeden Spieler i folgende Bedingung erfüllt sein²³:

$$\sum_{s_i \in S_i} q_i(s_i) = 1$$

Man nimmt nun eine Menge Q_i an, die alle gemischten Strategien von Spieler i enthält, wobei auch reine Strategien als gemischte Strategien angesehen werden können, die die gesamte Wahrscheinlichkeit auf eine einzelne reine Strategie legen. Die Menge S_i muss allerdings endlich sein. Somit wird die Menge der gemischten Strategien aller Strategieräume aller Spieler bezeichnet als:

$$Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$$

Die Menge aller gemischten Strategiekombinationen wird definiert durch:

$$q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$$

Die gemischten Strategien q_i können formal gleich behandelt werden wie die reinen Strategien s_i . Die Auszahlungswerte verändern sich allerdings, da sie bei gemischten

²¹ Vgl.: Etesami, Kousha: Algorithmic Game Theory and Applications. Lecture 2: Mixed Strategies, Expected Payoffs, and Nash Equilibrium. In: <http://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/agta/lec2.pdf>, 17.1.2014. S.3

²² Vgl.: Rieck: Spieltheorie. S.211.

²³ Vgl.: Leininger/Amann: Einführung in die Spieltheorie. In: http://www.wiso.tu-dortmund.de/wiso/mik/Medienpool/de/materialien/spieltheorie_1/spiele1_ws07_08_skript.pdf, 17.1.2014. S. 29

Strategien zufallsabhängig sind. Im Bezug auf gemischte Strategien meint $u_i(q_i)$ meist den Erwartungswert, der mithilfe folgender Formel berechnet werden kann.

$$u_i(q) = E(u_i(q)) = \sum_{s \in S} \prod_{i \in N} q_i(s_i) * u_i(s)$$

Wobei s_i in dieser Gleichung die Strategie des Spielers i im jeweiligen Strategieraum s bezeichnet.²⁴

²⁴ Vgl.: Rieck: Spieltheorie. Eine Einführung. S. 212

3. Koordinationsspiele

„Ein Koordinationsspiel ist ein Spiel mit mehreren strikten Nash-Gleichgewichten, das keine weiteren nicht-strikten Gleichgewichte in reinen Strategien hat.“²⁵

3.1 Reine Koordinationsspiele

Bei Spielen mit reiner Koordination handelt es sich um Spiele, bei denen zwei Nash-Gleichgewichte existieren, die beide, für beide Spieler, gleich gut sind. Es geht den beiden Spielern also nur darum, sich auf eines dieser Gleichgewichte zu koordinieren. Diese Situation ist eigentlich konfliktfrei, kann aber an der Kommunikation scheitern.²⁶

Beispiel: Treffen in der Menge²⁷

Ausgangssituation: Zwei Personen haben beschlossen sich zu treffen, sie haben aber verabsäumt, sich einen genauen Treffpunkt auszumachen. Es kommen aber nur zwei Orte infrage, das Gasthaus Huber und das Café Müller.

Spieler: Zwei Personen, die sich verabredet haben $N = \{1, 2\}$

Strategien: Jede Person hat zwei Strategien: $\{\text{Gasthaus Huber}, \text{Café Müller}\}$

Präferenzen: Beiden Personen ist der Ort des Treffpunkts egal und ein Treffen wird einem „Nicht-Treffen“ gegenüber bevorzugt.

$$\begin{aligned}
 &(\text{Gasthaus Huber}, \text{Gasthaus Huber}) = (\text{Café Müller}, \text{Café Müller}) \\
 &> (\text{Gasthaus Huber}, \text{Café Müller}) = (\text{Café Müller}, \text{Gasthaus Huber})
 \end{aligned}$$

		Person B	
		Gasthaus Huber	Café Müller
Person A	Gasthaus Huber	(1, 1)	(0, 0)
	Café Müller	(0, 0)	(1, 1)

Tabelle 6: Treffen in der Menge

²⁵ Rieck: Spieltheorie. Eine Einführung. S. 58

²⁶ Vgl.: ebd. S.57 f.

²⁷ Vgl.: Amann/Helbach: Spieltheorie für Dummies. S.50 f.

(*Gasthaus Huber, Gasthaus Huber*) und (*Café Müller, Café Müller*) sind beides Nash-Gleichgewichte. Können Person A und Person B miteinander kommunizieren, ist die Situation einfach aufzulösen, besteht keine Kommunikationsmöglichkeit, gibt es eine 50%-Chance, dass die Spieler ein Nash-Gleichgewicht „spielen“.

Wirklichkeitsbezug: Man kann dieses Spiel auch auf andere alltägliche Situationen umlegen, zum Beispiel, wenn es einen Stau gibt. Wenn alle Autofahrer, die eigentlich auf dieser Route fahren wollten, ausweichen, kommt es auf der Ausweichroute abermals zu einem Stau. In diesem Fall müssen sich die Autofahrer also darauf koordinieren, dass möglichst die Hälfte der Fahrer die ursprüngliche Route und die andere Hälfte die Ausweichroute wählt.

3.2 Das Gefangenendilemma

Das Gefangenendilemma ist das wohl berühmteste Dilemma in der ganzen Spieltheorie. Dieser Name wird in der Regel für ein Spiel verwendet, das, sollte es ein Bimatrixspiel sein, nur über ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien verfügt, welches aber für keinen der Spieler den bevorzugten Spielausgang darstellt.²⁸

Beispiel: Gefangenendilemma

Ausgangssituation: Verbrecher A und Verbrecher B begehen zusammen einen Raubüberfall. Beide werden von der Polizei gefasst, in zwei getrennte Zimmer geführt und verhört. Wenn einer von beiden die Tat gesteht und seinen Komplizen belastet, muss er nur ein Jahr hinter Gitter, der Komplize hingegen fünf Jahre. Gestehen beide ihr Verbrechen, muss jeder von ihnen für vier Jahre ins Gefängnis. Plädieren hingegen beide auf unschuldig und die Polizei erhält keine Informationen, kommen sie mit je zwei Jahren Gefängnis davon.²⁹

Spieler: Verbrecher A und Verbrecher B $N=\{1,2\}$

Strategien: Beide verfügen über die gleichen Strategiemöglichkeiten {*Gestehen, Schweigen*}

Präferenzen: Je weniger Haftjahre desto besser.

²⁸ Vgl.: Peukert, Helge: Gefangenendilemma. In: <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/gefangenendilemma.html>, 9.12.2013.

²⁹ Vgl.: N.N. Das Gefangenendilemma. In: <http://www.ruhr-uni-bochum.de/agvwp1/Vwp/gd.pdf>, 4.7.2013.

$(Gestehen, Schweigen) > (Schweigen, Schweigen) > (Gestehen, Gestehen)$
 $> (Schweigen, Gestehen)$

		Verbrecher B	
		Gestehen	Schweigen
Verbrecher A	Gestehen	(-4,-4)	(-1,-5)
	Schweigen	(-5,-1)	(-2,-2)

Tabelle 7: Gefangenendilemma

Ein Nash-Gleichgewicht findet man hier nur in der Strategiekombination $(Gestehen, Gestehen)$, die aber nicht ideal ist, da in diesem Fall sogar beide Spieler ihren Nutzen vergrößern könnten, wenn sie $(Schweigen, Schweigen)$ wählen würden. Außer die Spieler vertrauen einander soweit, dass sie das Risiko eingehen und $Schweigen$ wählen.³⁰

Wirklichkeitsbezug: Ein Beispiel für eine Anwendung des Gefangenendilemmas wurde schon zu Beginn dieser Arbeit aufgeführt (s. Kapitel 2.4).

Allgemein kann jedes Spiel als Gefangenendilemma dargestellt werden, dessen Nutzenmatrix sich mithilfe von Buchstaben anstatt Zahlen folgendermaßen darstellen lässt³¹:

		Spieler B	
		α	B
Spieler A	A	(R, R)	(S, T)
	B	(T, S)	(P, P)

Tabelle 8: Allgemeine Darstellung des Gefangenendilemmas

R ... reward T ... temptation S ... sucker's payoff P ... punishment

Wobei gilt: $T > R > P > S$ sowie $2R > S + T$

³⁰ Vgl.: Rieck: Spieltheorie. Eine Einführung. S. 50

³¹ Vgl.: Kuhn, Steven: Prisoner's Dilemma. In: <http://plato.stanford.edu/entries/prisoner-dilemma/>, 1.12.2013.

3.3 Win-Win-Spiele

Bei einem Win-Win-Spiel im spieltheoretischen Sinn handelt sich um ein Spiel, bei dem zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien existieren, aber eines von beiden von beiden Spielern bevorzugt wird.

Beispiel: Streithähne³²

Ausgangssituation: Zwei Personen können sich gegenseitig nicht ausstehen. An einem Abend gibt es im Heimatort der beiden Personen zwei Veranstaltungen: ein Fußballspiel und eine Kinovorführung. Beide möchten an diesem Abend etwas unternehmen, wobei Person A lieber das Fußballspiel sehen würde und Person B lieber die Kinovorführung. Wichtig ist beiden aber, dass sie sich nicht begegnen.

Spieler: Person A und Person B $N = \{1,2\}$

Strategien: Für beide Spieler gibt es zwei Strategien:
 $\{\text{Fußballspiel}, \text{Kinovorführung}\}$

Präferenzen:

$$(\text{Fußballspiel}, \text{Kinovorführung}) >^A (\text{Kinovorführung}, \text{Fußballspiel}) >^A (\text{Kinovorführung}, \text{Kinovorführung}) = (\text{Fußballspiel}, \text{Fußballspiel})$$

$$(\text{Kinovorführung}, \text{Fußballspiel}) >^B (\text{Fußballspiel}, \text{Kinovorführung}) >^B (\text{Kinovorführung}, \text{Kinovorführung}) = (\text{Fußballspiel}, \text{Fußballspiel})$$

		Person B	
		Fußballspiel	Kinovorführung
Person A	Fußballspiel	(0, 0)	(2, 2)
	Kinovorführung	(1, 1)	(0,0)

Tabelle 9: Streithähne

Auch wenn diese Situation rein logisch betrachtet keinerlei Konfliktpotenzial beinhaltet, existieren aus spieltheoretischer Sicht zwei gleichwertige Nash-Gleichgewichte. Um eine Lösung für dieses Spiel zu finden, bedarf es eines weiteren Kriteriums.

³² Vgl.: Rieck: Spieltheorie. Eine Einführung. S. 58 f.

In diesem Fall ist es das Pareto-Kriterium, das zu einer, für beide Spieler zufriedenstellenden, Lösung führt. Diese Lösung wird dann als *pareto-effizient* bezeichnet.

Ein Spielausgang erfüllt das Pareto-Kriterium und ist somit pareto-effizient, wenn es nicht möglich ist, den Spielausgang zu verbessern, ohne dabei die Situation im Bezug auf eine Eigenschaft oder für einen Spieler zu verschlechtern.³³

→ **Definition:** Eine Strategiekombination $s^* \in S$ ist dann pareto-effizient, wenn es keine andere Strategiekombination $s \in S$ gibt, für die gilt:

$$u_i(s_i) > u_i(s_i^*)$$

für alle $i \in N$.³⁴

Somit ist klar, dass nur das Nash-Gleichgewicht (*Fußballspiel, Kinovorführung*) pareto-effizient ist und somit die optimale Lösung des Spiels ist.

Wirklichkeitsbezug: Solche Win-Win-Situationen spielen in der Wirtschaft eine wichtige

Rolle, es wird z.B. versucht, bei zwei Verhandlungspartnern die Umstände so anzupassen, dass beide Partner von einer bestimmten Lösung profitieren können.³⁵

Das Pareto-Optimum wird hingegen mehr in den theoretischen Wirtschaftswissenschaften verwendet, um z.B. die Wohlfahrt innerhalb eines Staates zu analysieren und zu verbessern.³⁶

Beispiel: Hirschjagd (Stag Hunt)

Ausgangssituation: Zwei Jäger gehen auf Jagd und wollen gemeinsam einen Hirsch erlegen.

Sie haben aber auch jeder die Möglichkeit auf Hasenjagd zu gehen, einen Hasen können beide alleine erlegen, im Gegensatz zu einem Hirschen, den sie nur gemeinsam erfolgreich jagen können.³⁷

³³ Vgl.: N.N.: Pareto efficiency. In:

http://www.princeton.edu/~achaney/tmve/wiki100k/docs/Pareto_efficiency.html, 17.11.2013.

³⁴ Vgl.: Osborne, Marin J.: A course in game theory. In: http://bib.convdocs.org/docs/2/1142/conv_1/file1.pdf, 17.11.2013. S. 23.

³⁵ Vgl.: Borbonus, René: So funktionieren Verhandlungen ohne Verlierer. In: <http://www.businesswissen.de/artikel/win-win-situation-so-funktionieren-verhandlungen-ohne-verlierer/>, 17.11.2013.

³⁶ Vgl.: N.N.: Wohlfahrtsoptimum. In: <http://www.wirtschaftslexikon24.com/d/wohlfahrtsoptimum/wohlfahrtsoptimum.htm>, 17.11.2013.

³⁷ Vgl.: N.N.: Spieltheorie einfach erklärt IV: Jagdpartie (Stag Hunt). In: <http://scienceblogs.de/zoonpolitikon/2008/05/31/spieltheorie-einfach-erklart-iv-jagdpartie-stag-hunt/>, 24.11.2013.

Spieler: Jäger A und Jäger B $N=\{1,2\}$

Strategien: Beide Jäger können sich zwischen Hirsch- und Hasenjagd entscheiden $\{Hirsch, Hase\}$

Präferenzen: Beide bevorzugen einen Hirsch gegenüber einem Hasen, ein Hase ist aber immer noch besser als gar keine Beute.

$$(Hirsch, Hirsch) > (Hase, Hase) = (Hase, Hirsch) > (Hirsch, Hase)$$

		Jäger B	
		Hirsch	Hase
Jäger A	Hirsch	(5,5)	(0, 4)
	Hase	(4, 0)	(4,4)

Tabelle 10: Hirschjagd

Auch in diesem Fall existieren wieder zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien: $(Hirsch, Hirsch)$ und $(Hase, Hase)$. Analysiert man die beiden Gleichgewichte mithilfe des Pareto – Kriteriums, stellt sich heraus, dass nur $(Hirsch, Hirsch)$ auch pareto-effizient ist.

In diesem Fall sollte aber auch ein weiterer Faktor berücksichtigt werden, nämlich die Tatsache, dass es aus Sicht eines einzelnen Spielers riskanter ist, die Strategie *Hirsch* zu wählen als die Strategie *Hase*. Das sogenannte Maximin-Kriterium bietet eine weitere Lösungsmöglichkeit an. Die Maximin-Regel besagt, dass ein Spieler die Strategie wählen sollte, bei der die minimale Auszahlung am größten ist.³⁸ Will man kein Risiko eingehen, da man dem anderen Jäger nicht vertraut, sollte man also nach dem Maximin-Kriterium vorgehen und sich für die Hasenjagd entscheiden. Somit hängt die beste Entscheidung davon ab, wie sehr sich die Jäger untereinander vertrauen. Man bezeichnet in diesem Fall das Gleichgewicht $(Hirsch, Hirsch)$ als *nutzdominant* und $(Hase, Hase)$ als *risikodominant*.³⁹

→ **Definition:** Eine Strategie s_i^* ist eine Maximin-Aktion, wenn gilt:

$$\inf u(s_i^*, s_{-i}) \geq \inf u(s_i, s_{-i})$$

³⁸ Vgl.: Weimann, Joachim: Spieltheorie. In: http://www.uni-magdeburg.de/vwl3/03_education/01_lectures/03_past/documents/SpieltheorieVorlesung06-07.pdf, 24.11.2013. S. 11.

³⁹ Vgl.: Battalio, Raymond/ Samuelson, Larry/ Van Huyck, John: Optimization incentives and coordination failure in laboratory stag hunt games. In: <http://www.ssc.wisc.edu/econ/archive/wp9802r.pdf>, 1.12.2013. S. 2.

Wirklichkeitsbezug: Derartige Situationen ergeben sich oft im Alltag. Jemand soll z. B. eine Präsentation halten und hat die Wahl diese alleine vorzubereiten oder mit einem Partner. Wählt er einen Partner, der ihn unterstützt, sind die Erfolgchancen höher, gibt es keine Unterstützung von Seiten des Partners, wäre er besser dran gewesen, wenn er alleine gearbeitet hätte. Die optimale Strategie hängt also davon ab, wie viel Vertrauen man in den potenziellen Partner hat.

3.4 Koordinationsspiele mit Verteilungskonflikt

Bei Koordinationsspielen mit Verteilungskonflikt handelt es sich um Spiele mit zwei Nash-Gleichgewichten in reinen Strategien, wobei je ein Spieler eines der beiden Nash-Gleichgewichte bevorzugt.⁴¹

Beispiel: Kampf der Geschlechter (Battle of the Sexes)

Ausgangssituation: Ein Paar möchte gemeinsam etwas unternehmen. Sie können entweder ins Kino gehen oder ein Fußballspiel anschauen, wobei die Frau lieber ins Kino gehen würde und der Mann lieber das Fußballspiel sehen würde. Sie müssen sich unabhängig voneinander entscheiden.⁴²

Spieler: Frau und Mann $N=\{1,2\}$

Strategien: Beide haben zwei Strategien $\{\text{Fußball, Kino}\}$

Präferenzen: Beide würden es bevorzugen, mit dem jeweils anderen zur gewünschten Abendveranstaltung zu gehen. Gemeinsam die andere Möglichkeit zu wählen ist aber immer noch besser, als wenn sich beide für unterschiedliche Veranstaltungen entscheiden würden.

⁴⁰ Vgl.: N.N.: 2.1 Minimax/Maximin Aktionen. In: http://www.stat.uni-muenchen.de/~thomas/Lehre/sose11/Entscheidung/ET11_Folien_Kap_2.1_110527.pdf, 25.11.2013. S.2.

⁴¹ Vgl.: N.N.: BWL 4: Organisation und Human Resource Management. In: http://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CC0QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.realwwz.ch%2Fsystem%2Ffiles%2Fdownload_manager%2Fbwl_4__organisation_und_human_resource_management__4a212e310f7ab.docx&ei=FZqTUsCyKKiPyQP084HIBA&usg=AFQjCNFwqMhiTUoRlu1G-eVOsnQ9JlvCog&bvm=bv.56988011,d.bGQ, 25.11.2013. S. 2

⁴² Vgl.: Horst, Ulrich/Kaupilla, Helena: Nicht kooperative Spieltheorie. In: http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/horst_35_48.pdf, 25.11.2013. S. 6 f.

$$(Kino, Kino) >^{Frau} (Fußball, Fußball) >^{Frau} (Fußball, Kino) =^{Frau} (Kino, Fußball)$$

$$(Fußball, Fußball) >^{Mann} (Kino, Kino) >^{Mann} (Fußball, Kino) =^{Mann} (Kino, Fußball)$$

		<i>Mann</i>	
		Fußball	Kino
<i>Frau</i>	Fußball	(1,3)	(0,0)
	Kino	(0,0)	(3,1)

Tabelle 11: Kampf der Geschlechter

Mit spieltheoretischen Methoden ist für ein einmaliges „Spielen“ keine eindeutige Lösung zu finden, es gibt zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien $(Fußball, Fußball)$ und $(Kino, Kino)$, jedoch gibt es keines, das für beide Spieler besser ist.

Wirklichkeitsbezug: Ein Beispiel für eine ähnliche Situation wären in etwa zwei Firmen, die unterschiedliche Textverarbeitungsprogramme verwenden. Wenn diese Firmen viel zusammenarbeiten, wäre es sinnvoll, wenn beide das gleiche Programm verwenden würden. Beide Firmen wollen aber natürlich, dass die jeweils andere zu ihrem Textverarbeitungsprogramm wechselt, da sie sich somit Aufwand ersparen.⁴³

⁴³ Vgl.: Osborne.: An introduction to game theory. S. 19.

Beispiel: Chicken Game

Die Cover Story zu diesem Spiel ist inspiriert durch den Film „Denn sie wissen nicht, was sie tun“, in dem eine ähnliche Szene vorkommt.⁴⁴

Ausgangssituation: Zwei Jugendliche rasen mit zwei Autos aufeinander zu. Derjenige der beiden, der zuerst ausweicht, verliert die zuvor ausgemachte Wette. Somit will keiner von ihnen ausweichen, ein Zusammenstoß wäre jedoch sehr schlecht für beide, wohingegen ein gleichzeitiges Ausweichen von beiden neutral bewertet wird.⁴⁵

Spieler: Die zwei Autofahrer $N = \{1, 2\}$

Strategien: Beide verfügen über dieselben Strategien
 $\{\text{Ausweichen}, \text{Nicht ausweichen}\}$

Präferenzen: Für beide Spieler gilt:

$(\text{Nicht ausweichen}, \text{Ausweichen}) > (\text{Ausweichen}, \text{Ausweichen})$
 $> (\text{Ausweichen}, \text{Nicht Ausweichen})$
 $> (\text{Nicht ausweichen}, \text{Nicht ausweichen})$

		Fahrer 2	
		Ausweichen	Nicht ausweichen
Fahrer 1	Ausweichen	(0, 0)	(-1, 1)
	Nicht ausweichen	(1, -1)	(-10, -10)

Tabelle 12: Chicken Game

Bei diesem Spiel existieren zwei Nash-Gleichgewichte $(\text{Nicht ausweichen}, \text{Ausweichen})$ und $(\text{Ausweichen}, \text{Nicht ausweichen})$.

⁴⁴ Vgl.: Rieck: Spieltheorie. S. 99.

⁴⁵ Vgl.: N.N.: Spieltheorie einfach erklärt II: Feiglingsspiel (Chicken). In: <http://scienceblogs.de/zoopolitikon/2008/04/24/spieltheorie-einfach-erklart-ii-feiglingsspiel-chicken/>, 17.1.2014.

4. Diskoordinationsspiele

„Diskoordinationsspiele sind Spiele ohne Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien.“⁴⁶

4.1 Das Münzspiel von de Montmort

Bei dem Münzspiel von de Montmort, benannt nach dem gleichnamigen französischen Mathematiker, handelt es sich um ein Diskoordinationsspiel mit asymmetrischer Auszahlungsmatrix. Pierre Rémond de Montmort war der Meinung, dass zu diesem Spiel keine Lösung existiert, da nur einer der beiden Spieler an einer Koordination interessiert ist.

Beispiel: Das Münzspiel von de Montmort

Ausgangssituation: Ein Vater spielt mit seinem Sohn ein Spiel. Er versteckt eine Münze in einer Hand und lässt den Sohn raten, in welcher Hand sich die Münze befindet. Tippt der Sohn auf die richtige Hand und handelt es sich dabei um die Linke, so bekommt er die Münze. Sollte er die richtige Hand wählen und diese ist die Rechte, so erhält er sogar zwei Münzen. Tippt er auf die Hand ohne Münze, so geht er leer aus.

Spieler: Vater und Sohn $N = \{1, 2\}$

Strategien: Für beide Spieler gibt es zwei Strategien zur Auswahl: $\{Links, Rechts\}$

Präferenzen: Da es sich um ein asymmetrisches Spiel handelt, sind die Präferenzen der beiden Spieler unterschiedlich.

$$(Rechts, Rechts) \succ^{Sohn} (Links, Links) \succ^{Sohn} (Links, Rechts) = (Rechts, Links)$$

$$(Links, Rechts) = (Rechts, Links) \succ^{Vater} (Links, Links) \succ^{Vater} (Rechts, Rechts)$$

		Vater	
		Links	Rechts
Sohn	Links	(1, -1)	(0, 0)
	Rechts	(0, 0)	(2, -2)

Tabelle 13: Das Münzspiel von de Montmort

⁴⁶ Rieck, Christian: Begriffe der Spieltheorie. In: http://www.spieltheorie.de/Spieltheorie_Grundlagen/begriffe_spieltheorie.htm, 17.1.2014

Markiert man hier die besten Antworten, wird deutlich, dass in diesem Fall kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien existiert.

		Vater	
		Links	Rechts
Sohn	Links	(1, -1)	(0, 0)
	Rechts	(0, 0)	(2, -2)

Tabelle 14: Das Münzspiel von de Montmort - Beste Antworten

Somit kann es nur ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien geben. Um für dieses eine allgemein gültige Formel zu finden, verallgemeinern wir zuerst einmal die Auszahlungen.

		Vater	
		Links	Rechts
Sohn	Links	(a, A)	(b, B)
	Rechts	(c, C)	(d, D)

Tabelle 15: Das Münzspiel von de Montmort - Allgemeine Form

Aus Kapitel 2.4 ist bereits bekannt, dass ein Nash-Gleichgewicht eine Strategiekombination ist, bei der alle Spieler eine beste Antwort spielen. Eine gemischte Strategie kann nur dann eine beste Antwort sein, wenn auch alle reinen Strategien, unter denen sie mischt, selbst beste Antworten auf mindestens eine Strategiekombination sind, da es sich sonst um dominierte Strategien handeln würde, die, wie in Kapitel 2.3 erklärt, eliminiert werden können. Bei Bimatrix- Diskoordinationsspielen sind jedoch immer beide Strategien beste Antworten.⁴⁷

Um also eine gemischte Strategie zu finden, die eine beste Antwort ist, muss man den Erwartungswert $u_i(q)$ maximieren. Definieren wir eine gemischte Strategie, die eine beste Antwort ist für Spieler 1 und Spieler 2 mit $q_1^* = (w, w - 1)$ und $q_2^* = (p, p - 1)$.

⁴⁷ Vgl.: Polak, Ben:9. Mixed strategies in theory and tennis. In: <https://www.youtube.com/watch?v=unvJofvOwl8&list=SP6EF60E1027E1A10B>, 18.1.2014.

Zuerst berechnen wir die Erwartungswerte für die Strategien von Spieler 1, wenn dieser eine reine Strategie spielt, aber davon ausgeht, dass Spieler 2 eine gemischte Strategie spielt, die auch eine beste Antwort ist.

Spielt Spieler 2 die Strategie *Links* mit einer Wahrscheinlichkeit p , so wird die Auszahlungserwartung von Spieler 1 für seine beiden Strategien folgendermaßen berechnet⁴⁸:

$$u_1(\text{Links}) = p * a + (1 - p) * b$$

$$u_1(\text{Rechts}) = p * c + (1 - p) * d$$

Um nun die Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu berechnen, wenn beide Spieler gemischte Strategien wählen, gibt es zwei Möglichkeiten.

Methode 1⁴⁹:

Dieser Rechenweg berechnet die Wahrscheinlichkeitsverteilung mithilfe der Differentialrechnung.

Da auch Spieler 1 eine gemischte Strategie spielen wird, bezieht man einen weiteren Faktor in die Berechnung mit ein. Nimmt man Spieler 1 spielt *Links* mit der Wahrscheinlichkeit w und *Rechts* somit mit der Gegenwahrscheinlichkeit $(1 - w)$, dann ergibt sich seine Auszahlungserwartung aus:

$$u_1(w, p) = w * u_1(\text{links}) + (1 - w) * u_1(\text{rechts})$$

$$= w * [p * a + (1 - p) * b] + (1 - w) * [p * c + (1 - p) * d]$$

Der einzige Faktor, auf den Spieler 1 Einfluss hat, ist w , um u_1 zu maximieren, muss deshalb $u_1(w, p)$ nach w abgeleitet werden und gleich Null gesetzt werden:

$$u_1 = apw + bw - bpw + cp - cpw + d - dw - dp + dpw$$

$$\frac{\delta u_1}{\delta w} = ap + b - bp - cp - d + dp = 0$$

$$p * (a - b - c + d) = -b + d$$

$$p = \frac{d - b}{a - b + d - c}$$

Methode 2⁵⁰:

⁴⁸ Vgl.: Rieck: Spieltheorie. Eine Einführung. S. 80

⁴⁹ Vgl.: ebd. S. 81 f.

Diese Rechenart beruht auf folgendem Satz:

Wenn p_i^* eine beste Antwort ist, dann muss jede Strategie s_i , für die gilt: $p_i^*(s_i) > 0$, ebenfalls eine beste Antwort sein.

Dieser Satz besagt nichts anderes als dass, da sowohl *Links* also auch *Rechts* beste Antworten sind, sie beide gleich gut sein müssen, da ansonsten eine der Antworten besser wäre und die andere somit keine beste Antwort mehr wäre.

Deshalb können $u_1(\text{Links})$ und $u_1(\text{Rechts})$ gleichgesetzt werden.

$$\begin{aligned}ap + b - bp &= cp + d - dp \\P * (a - b + d - c) &= d - b \\p &= \frac{d - b}{a - b + d - c}\end{aligned}$$

Somit ist bewiesen, dass beide Möglichkeiten das gleiche Ergebnis liefern, wobei beachtet werden muss, dass es sich bei p um die Wahrscheinlichkeit handelt, mit der Spieler 2 *Links* spielt und bei a, b, c und d um die Nutzenwerte von Spieler 1. Geht man auch bei Spieler 2 nach dem gleichen Prinzip vor, erhält man die Wahrscheinlichkeit w , mit der Spieler 1 *Links* wählen wird, mit:

$$w = \frac{C - D}{B - A + C - D}$$

4.1.1 Finden eines Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien

Wir haben in Kapitel 4.1.1 die besten Antworten für Spieler 1 und 2 in gemischten Strategien wie folgt definiert:

$$q_1^* = (w, w - 1) \quad q_2^* = (p, p - 1)$$

Die Definition für ein Nash-Gleichgewicht, die in Kapitel 2.4 vorgestellt wurde, gilt auch für gemischte Nash-Gleichgewichte:

⁵⁰ Vgl.: Polak: 9. Mixed strategies in theory and tennis. In: <https://www.youtube.com/watch?v=unvjofv0wI8&list=SP6EF60E1027E1A10B>, 18.1.2014.

→ **Definition:** Eine gemischte Strategiekombination $q^* = (q_1, \dots, q_n)$ ist ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien, wenn für jeden Spieler i , q^* mindestens genauso gut ist, wie die Strategiekombination (q_i, q_i^*) , in welcher Spieler i die Strategie q_i wählt und alle anderen Spieler j die Strategie $q_j^* \in q^*$ wählen. Deshalb gilt:

$$u_i(q_i^*) \geq u_i(q_i, q)$$

für alle Strategien s_i von Spieler i .⁵¹

Somit muss der erwartete Nutzen berechnet werden, um herausfinden zu können, ob es sich um ein Nash-Gleichgewicht handelt. Um diesen zu errechnen, müssen die berechneten Wahrscheinlichkeitswerte nur in die in Kapitel 2.5 verwendete Formel für die Berechnung der erwarteten Auszahlung eingesetzt werden.

4.1.2 Ein gemischtes Nash-Gleichgewicht im Münzspiel von de Montmort

Setzen wir für die in 4.1.1 definierten Formeln für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten die Werte von 4.1 ein, erhalten wir:

$$p = w = 2/3$$

Somit wird sowohl der Vater als auch der Sohn mit einer 66,7%igen Wahrscheinlichkeit *Links* wählen.

Errechnet man die erwarteten Auszahlungswerte, so erhält man:

$$u_1(q_1^*) = \frac{2}{3}$$

$$u_2(q_2^*) = -\frac{2}{3}$$

Um beweisen zu können, dass keine bessere Strategiekombination existiert, schauen wir zuerst einmal die Auszahlungen an, wenn jeweils einer eine reine Strategie wählt.

$$u_1(\textit{links}) = \frac{2}{3}; u_1(\textit{rechts}) = \frac{2}{3}$$

$$u_2(\textit{links}) = -\frac{2}{3}; u_2(\textit{rechts}) = -\frac{2}{3}$$

⁵¹ Vgl.: Polak: 9. Mixed strategies in theory and tennis. In: <https://www.youtube.com/watch?v=unvJofvOwI8&list=SP6EF60E1027E1A10B>, 18.1.2014.

Somit ist bewiesen, dass keine reine Strategie einen höheren Nutzenwert liefert. Da wir mit q_1^* und q_2^* die gemischten Strategien mit der höchsten erwarteten Auszahlung berechnet haben, ist es auch nicht möglich, dass eine andere gemischte Strategie höhere Auszahlungswerte liefern würde. Somit ist bewiesen, dass $q^* = (q_1^*, q_2^*)$ ein nicht striktes Nash-Gleichgewicht ist.⁵²

4.2 Nullsummenspiele

Als Nullsummenspiele werden Spiele bezeichnet, bei denen die Summe aller Auszahlungen über jeden Spieler für jeden Spielzug null ergibt.⁵³

Beispiel: Elfmeterschießen⁵⁴

Ausgangssituation: Bei einem Fußballspiel kommt es zu einem Elfmeter.

Spieler: Torwart und Schütze $N = \{1, 2\}$

Strategien: Für beide Spieler gibt es die gleichen zwei Strategien: $\{Links, Rechts\}$

Präferenzen:

$$\begin{aligned} (Links, Links) = (Rechts, Rechts) &>^{Torwart} (Links, Rechts) = (Rechts, Links) \\ (Links, Rechts) = (Rechts, Links) &>^{Schütze} (Rechts, Rechts) = (Links, Links) \end{aligned}$$

⁵² Vgl.: Polak, Ben: 10. Mixed Strategies in Baseball, dating and paying your taxes. In: <https://www.youtube.com/watch?v=9b2AMWwMToc&list=SP6EF60E1027E1A10B>, 18.1.2014.

⁵³ Vgl.: Rieck: Spieltheorie. S. 110.

⁵⁴ Vgl.: Amann/Helbach: Spieltheorie für Dummies. S. 78.

		<i>Torwart</i>	
		Links	Rechts
<i>Schütze</i>	Links	(-1, 1)	(1, -1)
	Rechts	(1, -1)	(-1, 1)

Tabelle 16: Elfmeterschießen

Es ist charakteristisch für Nullsummenspiele, dass die Interessen der Spieler völlig gegensätzlich sind, deshalb wird es auch kein Gleichgewicht geben, mit dem beide Spieler zufrieden sind. Man bezeichnet Nullsummenspiele aufgrund dieser Eigenschaft auch als streng kompetitive Spiele.⁵⁵

Es ist möglich, für beide Spieler gemischte Strategien zu berechnen, welche zu einem gemischten Nash-Gleichgewicht führen. Dieses wäre dann gegeben, wenn beide Spieler mit einer 50%igen Wahrscheinlichkeit *Links* beziehungsweise *Rechts* wählen.

⁵⁵ Vgl.: Rieck: Spieltheorie. S. 110.

5. Beispiele für die Anwendung von Bimatrixspielen

5.1 Anwendungsbereiche von Bimatrixspielen

Bimatrixspiele finden, meist in erweiterter Form, Anwendung in verschiedenen Wissenschaften.

5.1.1 Politik

In der Politik wird die Spieltheorie vor allem zur Planung und Analyse von Verhandlungssituationen herangezogen. Man kann aber auch Staaten gegeneinander spielen lassen und internationale Kriegssituationen oder Konflikte darstellen. Ein Beispiel dafür wird in Kapitel 5.2 vorgestellt.⁵⁶

Es ist aber auch ansatzweise möglich, mithilfe von Spieltheorie Wahlergebnisse zu prognostizieren und Wahlverhalten zu analysieren.⁵⁷

5.1.2 Naturwissenschaften

Im Bezug auf die Naturwissenschaften ist besonders die evolutionäre Spieltheorie von Bedeutung. Dieser eigenständige Zweig der Spieltheorie beschäftigt sich mit der Entwicklung von Tierpopulationen und den Auswirkungen von Mutationen und anderen Einflussfaktoren auf Gruppen mit verschiedenen Verhaltensweisen. Ein einfaches Beispiel der evolutionären Spieltheorie wird in Kapitel 5.3 erklärt.⁵⁸

Eine weitere Anwendung findet sich jedoch auch in der Physik. Die sogenannte Quanten-Spieltheorie stellt zum Beispiel subatomare Quantensysteme mithilfe eines erweiterten Gefangenendilemmas dar.⁵⁹

⁵⁶ Vgl.: Wehner, Monika: Gesellschaftliche Aspekte politischer Spieltheorie. In: http://www.strategiespielen.de/wordpress/wp-content/uploads/wehner_gesellschaftliche_aspekte_politischer_spieltheorie.pdf, 29.1.2014.

⁵⁷ Vgl.: Polak, Ben: 3. Iterative deletion and the median-voter theorem. In: <http://www.youtube.com/watch?v=kqDu0RVWYw>, 29.1.2014.

⁵⁸ Rieck: Spieltheorie. S. 275.

⁵⁹ Vgl.: Hanauske, Matthias: Quanten- Spieltheorie und deren mögliche Anwendungen. In: http://wiap.wiwi.uni-frankfurt.de/Publications/001_Quantenspieltheorie.pdf, 29.1.2014. S. 72

5.1.3 Sport

In den Sportwissenschaften findet die Spieltheorie Anwendung beim Finden von, vom Gegner abhängigen, Spielstrategien.⁶⁰ Das in Kapitel 5.4. präsentierte Spiel geht in eine etwas andere Richtung und dient zur Erforschung der Frage „Warum dopen Sportler?“.

5.1.4 Wirtschaft

Die Wirtschaftswissenschaften sind das größte Anwendungsfeld der Spieltheorie und die Spieltheorie wird auch zu einem immer wichtigeren Analyseinstrument für wirtschaftliche Probleme. Beweis dafür ist unter anderem die Verleihung des Nobelpreises für Wirtschaft des Jahres 2012 an die Spieltheoretiker Lloyd Shapley und Alvin Roth. Die beiden Wissenschaftler wurden für ihr Modell zur Beschaffenheit von Märkten ausgezeichnet.⁶¹ Aber auch mit einfachen Bimatrixspielen, beziehungsweise leicht erweiterten Spielen, kann man in den Betriebswirtschaften wichtige Erkenntnisse gewinnen. So kann die Spieltheorie zum Beispiel bei der Bestimmung der idealen Produktionsmenge helfen.⁶² Das Beispiel in Kapitel 5.5 zeigt eine Anwendung von Bimatrixspielen im Finanzsektor.

5.1.5 Soziologie

Auch in der Soziologie bieten sich zahlreiche verschiedene Anwendungsmöglichkeiten für die Spieltheorie. Soziale Dilemmata, der Umgang mit öffentlich zugänglichen Gütern, Kooperation oder das Finden von Freiwilligen sind nur einige Beispiele für Prozesse, die Soziologen mit spieltheoretischen Analysewerkzeugen untersuchen.⁶³ In Kapitel 5.6 wird ein Beispiel vorgestellt, das sich mit Vorstellungsgesprächen beschäftigt.

⁶⁰ Vgl.: Polak, Ben: 9. Mixed strategies in theory and tennis. In: <http://www.youtube.com/watch?v=unvJofv0wl8>, 29.1.2014.

⁶¹ Vgl.: Böcking, David: Nobelpreis für Ökonomen: Sie wollen doch nur spielen. In: <http://www.spiegel.de/wirtschaft/soziales/wirtschaftsnobelpreis-geht-an-us-spieltheoretiker-roth-und-shapley-a-861392.html>, 28.1.2014.

⁶² Vgl.: Polak, Ben: 6. Dating and Cournot. In: <http://www.youtube.com/watch?v=7oASpaBdDMs>, 28.1.2014.

⁶³ Vgl.: Diekmann, Andreas: Einführung in die Spieltheorie. Modelle und experimentelle Studien. In: <http://www.socio.ethz.ch/education/fs09/igt>, 28.1.2014.

5.2 Der Kalte Krieg

Im Zuge der Blockbildung nach dem Zweiten Weltkrieg kam es zu einer massiven Aufrüstung, sowohl auf amerikanischer als auch sowjetischer Seite. Die beiden Staaten führten mehrere Stellvertreterkriege und die Weltbevölkerung musste in ständiger Angst vor atomaren Angriffen leben. Der Konflikt gipfelte schließlich in der Kubakrise. Mitte der 1980er Jahre kam es aber zu einem beidseitigen Abrüsten.⁶⁴

5.2.1 Wettrüsten

Ausgangssituation: Die USA und die Sowjetunion befinden sich in einem Wettrüsten, da jedes Land die Vormachtstellung für sich beansprucht.

Spieler: USA und UdSSR $N = \{1, 2\}$

Strategien: Beide verfügen über zwei Möglichkeiten $\{Aufrüsten, Nicht aufrüsten\}$

Präferenzen: $(Aufrüsten, Nicht aufrüsten) > (Nicht aufrüsten, Nicht aufrüsten) > (Aufrüsten, Aufrüsten) > (Nicht aufrüsten, Aufrüsten)$

		Sowjetunion	
		Aufrüsten	Nicht aufrüsten
USA	Aufrüsten	(-50, -50)	(100, -100)
	Nicht aufrüsten	(-100, 100)	(0, 0)

Tabelle 17: Wettrüsten

Dieses Spiel ist vom Prinzip her gleich dem Gefangenendilemma, welches in Kapitel 3.2 vorgestellt wurde, es gibt somit ein Gleichgewicht in der Strategiekombination $(Aufrüsten, Aufrüsten)$. Es ist also logisch nachvollziehbar, warum die beiden Staaten zu diesem Wettrüsten gelangten.⁶⁵

Was mit Hilfe dieses Spiels allerdings nicht nachvollzogen werden kann, ist, warum es dann 1986 schließlich doch zu einem beidseitigen Abrüsten kam. Dies war möglich durch veränderte Präferenzen. Seit dem Jahr 1985 hatte die Sowjetunion einen neuen Präsidenten,

⁶⁴ Vgl.: N.N.: Wer zuerst schießt, stirbt als zweiter. Seite 2/3: Zuerst lagen die USA im Wettrüsten vorne. In: <http://www.zeit.de/zeit-geschichte/2012/03/Wettruesten-Kalter-Krieg-USA-UdSSR/seite-2>, 25.1.2014.

⁶⁵ Vgl: Osborne: An introduction to game theory. In: http://www.ius.edu.ba/sfadda/An_Introduction_to_Game_Theory.pdf, S. 27.

Michael Gorbatschow, der einsah, dass das für die Rüstung benötigte Geld dringend anderweitig gebraucht würde und auch auf amerikanischer Seite hatte sich ein Wertewandel vollzogen. Präsident Ronald Reagan plädierte nun für eine atomwaffenfreie Welt.⁶⁶

Daraus ergeben sich auch veränderte Präferenzen für das Spiel:

$$(Nicht\ aufrüsten, Nicht\ aufrüsten) > (Aufrüsten, Nicht\ aufrüsten) > (Aufrüsten, Aufrüsten) > (Nicht\ aufrüsten, Aufrüsten)$$

		Sowjetunion	
		Aufrüsten	Nicht aufrüsten
USA	Aufrüsten	(-50, -50)	(-10, -100)
	Nicht aufrüsten	(-100, -10)	(0, 0)

Tabelle 18: Wettrüsten mit veränderten Präferenzen

In diesem Spiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte: $(Aufrüsten, Aufrüsten)$ und $(Nicht\ aufrüsten, Nicht\ aufrüsten)$, wobei $(Nicht\ aufrüsten, Nicht\ aufrüsten)$ pareto-effizient ist. Somit ist nachvollziehbar, warum die USA und die Sowjetunion 1986 ein Abkommen schlossen, das eine Vernichtung nuklearer Waffensysteme auf beiden Seiten vorsah.

5.2.2 Die Kubakrise

Die wohl heikelste Situation im Kalten Krieg war die sogenannte Kubakrise. Die Sowjetunion hatte Raketen auf der Insel Kuba, in nicht einmal 200 Kilometer Entfernung zum amerikanischen Festland, positioniert. Auf dieses Vordringen von sowjetischer Seite antwortete der damalige Präsident John F. Kennedy mit einer Seeblockade.⁶⁷

Das folgende Spiel entspricht von der Struktur her dem in Kapitel 3.4 vorgestellten Chicken-Spiel.

⁶⁶ Vgl.: N.N.: Wer zuerst schießt, stirbt als Zweiter. Seite 3/3: Peace statt Bomben in den Siebzigern. In: <http://www.zeit.de/zeit-geschichte/2012/03/Wettruesten-Kalter-Krieg-USA-UdSSR/seite-3>, 25.1.2014.

⁶⁷ N.N.: Wer zuerst schießt, stirbt als zweiter. Seite 2/3: Zuerst lagen die USA im Wettrüsten vorne. In: <http://www.zeit.de/zeit-geschichte/2012/03/Wettruesten-Kalter-Krieg-USA-UdSSR/seite-2>, 25.1.2014.

Ausgangssituation: Die UdSSR haben Raketen auf Kuba stationiert und wollen auch noch weitere Raketenstützpunkte dort einrichten, die USA wollen dies verhindern.⁶⁸

Spieler: USA und UdSSR $N = \{1, 2\}$

Strategien: Die USA verfügt über die Strategien *Nichts tun* und *Blockade*; der Sowjetunion stehen die Strategien *Zurückziehen* und *Raketen aufstellen* zur Verfügung

Präferenzen: Die Präferenzen sind in diesem Spiel so angenommen, dass ein Konflikt möglichst vermieden wird.

$(\text{Blockade}, \text{Zurückziehen}) >^{USA} (\text{Nichts tun}, \text{Zurückziehen}) >^{USA}$
 $(\text{Nichts tun}, \text{Raketen aufstellen}) >^{USA} (\text{Blockade}, \text{Raketen aufstellen})$

$(\text{Raketen aufstellen}, \text{Nichts tun}) >^{UdSSR} (\text{Zurückziehen}, \text{Nichts tun}) >^{UdSSR}$
 $(\text{Zurückziehen}, \text{Blockade}) >^{UdSSR} (\text{Raketen aufstellen}, \text{Blockade})$

		Sowjetunion	
		Zurückziehen	Raketen aufstellen
USA	Nichts tun	(0, 0)	(-1, 1)
	Blockade	(1, -1)	(-10, -10)

Tabelle 19: Kubakrise

Die Gleichgewichte liegen hier bei $(\text{Blockade}, \text{Zurückziehen})$ und $(\text{Nichts tun}, \text{Raketen aufstellen})$. Versetzt man sich nun in die Rolle des US-amerikanischen Präsidenten, ist allerdings nachvollziehbar, dass er *Blockade* wählt, da dieses Spiel nur gewonnen werden kann, wenn man dem Gegner glaubwürdig versichert aggressiv zu spielen, da dieser dann zurückziehen wird, weil er ebenfalls nicht an einer „Kollision“ interessiert ist.⁶⁹

⁶⁸ Vgl.: Rothert, Jacek: The cold war and game theory. Guest Lecture for principles of economics. In: http://www.econ.umn.edu/~evdok003/ColdWar_GameTheory.pdf, 25.1.2014. S. 24.

⁶⁹ Vgl.: Rothert, Jacek: The cold war and game theory. Guest Lecture for principles of economics. In: http://www.econ.umn.edu/~evdok003/ColdWar_GameTheory.pdf, 25.1.2014. S. 25.

5.2.3 Atomkrise

Auch die ständigen Androhungen von atomaren Anschlägen und warum diese, glücklicherweise, nie wahr gemacht wurden, lassen sich mit Hilfe eines Bimatrixspiels darstellen.

Spieler: USA und Sowjetunion $N = \{1, 2\}$

Strategien: Für beide Parteien gilt $\{\text{Angreifen}, \text{Nicht angreifen}\}$

Präferenzen:

$$\begin{aligned}
 (\text{Angreifen}, \text{Nicht angreifen}) &> (\text{Nicht angreifen}, \text{Nicht angreifen}) \\
 &> (\text{Angreifen}, \text{Angreifen}) = (\text{Nicht angreifen}, \text{Angreifen})
 \end{aligned}$$

		Sowjetunion	
		Angreifen	Nicht angreifen
USA	Angreifen	(-3, -3)	(5, -5)
	Nicht angreifen	(-5, 5)	(0, 0)

Tabelle 20: Atomkrise

Die Strategie *Nicht angreifen* ist dominiert, somit findet sich das Gleichgewicht in $(\text{Angreifen}, \text{Angreifen})$. Der Grund, warum es trotzdem zu keinem globalen Atomkrieg kam, ist der, dass dieses Spiel genau genommen als ein mehrfach wiederholtes Spiel betrachtet werden muss.

Angenommen beide Länder greifen nicht an, dann ergeben ihrer beiden langfristigen Auszahlungswerte null. Entschließt sich aber eines der beiden Länder anzugreifen, kommt also die Strategiekombination $(\text{Angreifen}, \text{Nicht angreifen})$ zu Stande, erhält dieses Land einen Nutzen von 5. Geht man allerdings davon aus, dass, was ziemlich wahrscheinlich gewesen wäre, das andere Land daraufhin ebenfalls angegriffen hätte, würden beide Länder bei der Strategiekombination $(\text{Angreifen}, \text{Angreifen})$ enden. Dies wiederum würde zu wechselnden Angriffen von beiden Seiten führen, es müssten also beide Länder laufend einen Auszahlungswert von -3 hinnehmen, der für das Land, das zuerst angegriffen hat, die

zu Beginn gewonnen 5 bald ins Negative umkehren würde. Langfristig gesehen ist es also sinnvoller nicht anzugreifen.⁷⁰

5.3 Autokatalytische Prozesse

In der evolutionären Spieltheorie versucht man mit Hilfe der analytischen Werkzeuge der Spieltheorie evolutionäre Prozesse zu modellieren. Dies können sowohl Prozesse sein, die Lebewesen betreffen als auch Moleküle. Als autokatalytische Prozesse werden im Allgemeinen Prozesse bezeichnet, bei denen die Endprodukte des Prozesses den Prozess selbst beschleunigen.

5.3.1 Autokatalyse von chemischen Stoffen

Unter dem Begriff Autokatalyse werden chemische Reaktionen zusammengefasst, bei denen das Endprodukt wie ein Katalysator für die Reaktion wirkt.⁷¹

Das folgende Spiel ist nach dem Spielkonzept der reinen Koordination aufgebaut, welches in Kapitel 3.1 bereits erläutert wurde.

In diesem Fall nehmen wir zwei Stoffe an, die wir A und B nennen und die beide Produkte einer Autokatalyse und somit Katalysatoren ihres eigenen Herstellungsprozesses sind. Die Substanzen haben allerdings keinen Einfluss auf die Reaktion, die zur Produktion des jeweils anderen Stoffes führt. Die Menge der Ausgangsstoffe wird der Einfachheit halber zu den Substanzmengen 1 und 2 zusammengefasst.⁷²

Spieler: Substanzmenge 1 und 2 $N = \{1, 2\}$

Strategien: Beide Substanzmengen können entweder den Stoff A oder den Stoff B bilden.
 $\{A, B\}$

⁷⁰ Vgl.: Rothert, Jacek: The cold war and game theory. Guest Lecture for principles of economics. In: http://www.econ.umn.edu/~evdok003/ColdWar_GameTheory.pdf, 25.1.2014. S. 32.

⁷¹ Vgl.: N.N.: Autokatalyse. In: <http://www.wissenschaft-online.de/abo/lexikon/bio/6399>, 23.1.2014.

⁷² Vgl.: Rieck: Spieltheorie. S. 72 f.

Präferenzen: In diesem Fall spiegeln die Präferenzen die autokatalytische Wirkung der Stoffe wider.

$$(A, A) = (B, B) > (A, B) = (B, A)$$

		<i>Substanz 2</i>	
		A	B
<i>Substanz 1</i>	A	(1,1)	(0, 0)
	B	(0, 0)	(1, 1)

Tabelle 21: Autokatalyse

Die beiden Nash-Gleichgewichte liegen hier bei (A, A) und (B, B) , somit lässt sich voraussagen, dass am Ende des Prozesses nur eine der beiden Substanzen vorhanden sein wird.

5.3.2 Autokatalytische Prozesse in der Biologie

Prinzipiell ist eigentlich jeder Prozess, der die Populationsgröße einer Tiergruppe betrifft, ein autokatalytischer Prozess, da mit der Zahl der Tiere auch die Geburtenrate steigt.

In der evolutionären Spieltheorie werden meist keine Spieler bestimmt und Strategien werden häufig als Phänotypen bezeichnet, also Verhaltensweisen, die Tiere annehmen können. Eine weitere Besonderheit sind auch die Auszahlungen, diese erfolgen in „Fitness“, welche als Einheit für den Erfolg eines Phänotyps hergenommen wird.⁷³

5.3.3 Fortpflanzungsspiel

Der Aufbau des Fortpflanzungsspiel entspricht jenem vorgestellt in Kapitel 3.3.

Man könnte im folgenden Beispiel in etwa annehmen, dass, wenn zwei Tiere mit dem Verhaltenstypus T aufeinanderstoßen, die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich fortpflanzen, bei 50% liegt, wenn zwei Tiere mit dem Verhaltenstypus M aufeinanderstoßen, pflanzen sie sich

⁷³ Vgl.: N.N.: Kapitel 13: Evolutionäre Spieltheorie. In: http://wwz.unibas.ch/fileadmin/wwz/redaktion/witheo/personen/aleks/Teaching/HS09/Spieltheorie/KAPITEL13_HS09_6_on_1.pdf, 25.1.2014. S. 2.

jedoch mit 100%iger Wahrscheinlichkeit fort. Und bei ungleichen Phänotypen findet gar keine Fortpflanzung statt.

	T	M
T	(1, 1)	(0, 0)
M	(0, 0)	(2, 2)

Tabelle 22: Evolutionäres Koordinationsspiel

In der evolutionären Spieltheorie sind außerdem nicht Nash-Gleichgewichte die Lösungen, nach denen gesucht wird, sondern *evolutionär stabile Strategien*, obwohl jede evolutionär stabile Strategie zu einem Nash-Gleichgewicht führt.

5.3.4 Evolutionär stabile Strategien

Evolutionär stabile Strategien sind Strategien, die zu einer evolutionär stabilen Population führen. Das soll heißen, wenn man davon ausgeht, dass eine ganze Population nach einer Strategie „spielt“, muss diese bestehen bleiben können, wenn eine andere Population mit einer anderen Strategie in ihr Gebiet eindringt.⁷⁴

→ **Definition:** Eine Strategie $s_i^* \in S_i$ ist evolutionär stabil, wenn für alle Strategien $s_i \in S_i$ mit $s_i \neq s_i^*$, gilt:

$$(1 - \varepsilon) * u(s_i^*, s_i^*) + \varepsilon * u(s_i^*, s_i) > (1 - \varepsilon) * u(s_i, s_i^*) + \varepsilon * u(s_i, s_i)$$

Wobei ε hier den prozentuellen Anteil der eindringenden Population an der Gesamtpopulation angibt.⁷⁵

Da ε in der Regel sehr klein ist, kann man ε auch vernachlässigen und die Formulierung vereinfachen.

→ **Definition:** s_i^* ist eine evolutionär stabile Strategie, wenn gilt:

⁷⁴ Vgl.: N.N.: Kapitel 13: Evolutionäre Spieltheorie. In: http://wwz.unibas.ch/fileadmin/wwz/redaktion/witheo/personen/aleks/Teaching/HS09/Spieltheorie/KAPITEL13_HS09_6_on_1.pdf, 25.1.2014. S. 2f.

⁷⁵ Vgl.: Rieck: Spieltheorie. S. 274.

	$u(s_i^*, s_i^*) \geq u(s_i, s_i^*)$	für alle $s_i \in S_i$
und falls		
	$u(s_i^*, s_i^*) = u(s_i, s_i^*)$	
dann muss gelten:		
	$u(s_i^*, s_i) > u(s_i, s_i)$	

Die Definition ist somit sinngemäß gleich der Definition für ein striktes Nash-Gleichgewicht. Somit ist jedes strikte Nash-Gleichgewicht eine evolutionär stabile Strategie, kurz auch ESS genannt.⁷⁶

5.3.5 Evolutionär stabile Strategien im Fortpflanzungsspiel

Jede evolutionär stabile Strategie ist ein Nash-Gleichgewicht, somit gilt es zuerst einmal die Nash-Gleichgewichte für das in Kapitel 5.3.3 vorgestellte Spiel zu finden.

Es gibt zwei Gleichgewichte in reinen Strategien: (T, T) und (M, M) . Beide sind strikte Nash-Gleichgewichte, somit handelt es sich um evolutionär stabile Strategien. Es gibt ein weiteres Gleichgewicht in gemischten Strategien mit $p = \frac{2}{3}$ für die Strategie M .

Diese gemischte Strategie q_i ist eine ESS, wenn gilt:

$$u(q_i, s_i) > u(s_i, s_i)$$

s_i bezeichnet die beiden reinen Strategien T und M .

Da allerdings $u(q_i, s_i^T) = \frac{2}{3}$ und $u(s_i^T, s_i^T) = 1$ ist q_i keine ESS.

Es lässt sich daraus aber ableiten, dass wenn $p < \frac{2}{3}$, es darauf hinauslaufen wird, dass die gesamte Population nur M spielt und wenn $p > \frac{2}{3}$, die ganze Population die Verhaltensweise

⁷⁶ Vgl.: Luxenberger, Thomas: Evolutionär stabile Strategien. In: http://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=6&ved=0CE8QFjAF&url=http%3A%2F%2Fwww.num.uni-sb.de%2Frsjanow%2Fdokuwiki%2Flib%2Fexe%2Ffetch.php%3Fcache%3Dcache%26media%3Dlehre%253Aseminar%253A10_evolutiona%25CC%2588r_stabile_strategien.pdf&ei=IODjUtDUO--y7Ab19YDwDw&usg=AFQjCNGUwmYBAWrfef7HlyhzS2FQJgEEAA&bvm=bv.59930103,d.ZGU,25.1.2014. S. 22.

T wählt. Deshalb ist auch das Gleichgewicht bei $p = \frac{2}{3}$ instabil, da jede minimale Abweichung zu einem der anderen beiden Gleichgewichte führen würde.⁷⁷

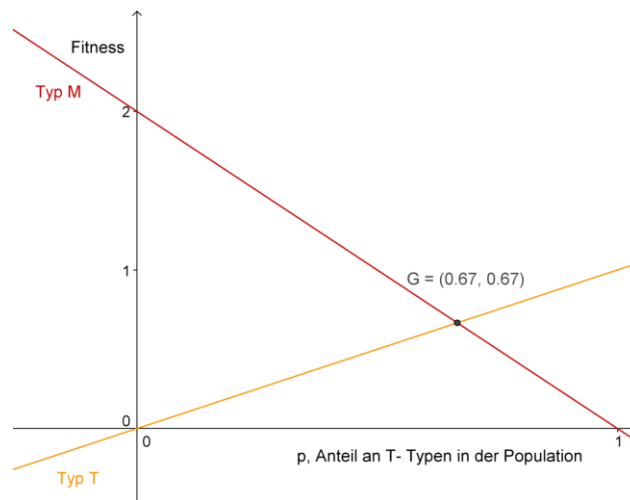


Abbildung 2: Populationsdynamik im Fortpflanzungsspiel⁷⁸

5.4 Das Dopingdilemma

5.4.1 Vereinfachtes Dopingdilemma⁷⁹

Das Dopingdilemma basiert auf dem in Kapitel 3.2 erklärten Prinzip des Gefangenendilemmas. In diesem Modell wird versucht, mithilfe von Spieltheorie zu erklären, warum Profisportler zum Doping neigen und welche Faktoren darauf Einfluss haben.

Spieler: Alle Profis einer Sportart. Um das Ganze etwas zu vereinfachen, wird zuerst einmal auf zwei Spieler reduziert: Athlet A und Athlet B $N = \{1,2\}$

Strategien: Jedem Athleten stehen zwei Möglichkeiten offen: {Dopen, Nicht dopen}

Präferenzen:

$$(Dopen, Nicht dopen) > (Nicht dopen, Nicht dopen) > (Dopen, Dopen) > (Nicht dopen, Dopen)$$

⁷⁷ Vgl.: N.N.: Kapitel 13: Evolutionäre Spieltheorie. In: http://wwz.unibas.ch/fileadmin/wwz/redaktion/witheo/personen/aleks/Teaching/HS09/Spieltheorie/KAPITEL13_HS09_6_on_1.pdf, 25.1.2014. S. 12.

⁷⁸ Vgl.: ebd. S. 12.

⁷⁹ Vgl.: Vöpel, Henning: Doping im Radsport als kollektives Gleichgewicht. In: http://www.hwwi.org/uploads/tx_wilpubdb/HWWI_Research_Paper_1-2.pdf, 8.12.2013. S. 4

Der Spielausgang, bei dem der jeweilige Athlet gedopt hat, während die Konkurrenz zu keinen Dopingmitteln greift, wird aufgrund der dadurch entstehenden Wettbewerbsvorteile gegenüber allen anderen Ausgängen bevorzugt. Wobei (*Nicht dopen, Nicht dopen*) den Sportlern lieber ist als (*Dopen, Dopen*), da die Situation für den Athleten selbst in beiden Fällen gleich ist, der gesundheitsschädigende Effekt bei (*Nicht dopen, Nicht dopen*) aber wegfällt. Außerdem wird klarerweise eine ausgeglichene Ausgangssituation einer benachteiligten vorgezogen.

		<i>Athlet B</i>	
		Dopen	Nicht dopen
<i>Athlet A</i>	Dopen	(2, 2)	(4, 1)
	Nicht dopen	(1, 4)	(3, 3)

Tabelle 23: Vereinfachtes Dopingdilemma

Da sowohl für Athlet A als auch Athlet B *Dopen* die beste Antwort ist, findet sich das Nash-Gleichgewicht in der Strategiekombination (*Dopen, Dopen*). Diese ist allerdings nicht pareto-effizient.

5.4.2 Erweitertes Dopingdilemma⁸⁰

Natürlich gibt es aber auch noch weitere Faktoren, die die Entscheidungen der Sportler beeinflussen: Diverse Anti-Dopingverbände und Organisatoren, die Dopingtests durchführen, und die Zuschauer, Fans und Unterstützer des Sports sowie die Medien, die indirekt Einfluss nehmen. Um auch diese in das Modell mit einbeziehen zu können, müssen zwei weitere Spieler eingeführt werden: die „Organisatoren“ und die „Konsumenten“. Somit handelt es sich nun um ein neues Spiel.

⁸⁰ Vgl.: Buechel, Berno/ Emrich, Eike/ Pohlkamp, Stefanie: Nobody's innocent: the role of costumers in the doping dilemma. In: http://mpr.aub.uni-muenchen.de/44627/1/MPRA_paper_44627.pdf, 8.12.2013. S. 9 ff.

Spieler:

- Athleten
- Organisatoren - repräsentieren die Instanz, die für die Dopingkontrolle verantwortlich ist
- Konsumenten – haben dadurch einen Einfluss, dass sie sich entscheiden können, ob sie den Sport unterstützen oder nicht (z.B. durch den Kauf von Sportartikeln, eine Mitgliedschaft in einem Verein oder das Verfolgen der Fernsehübertragungen). Außerdem repräsentieren die Konsumenten auch die Medien und Sponsoren, die durch die Entscheidungen der Konsumenten ebenfalls beeinflusst werden (weniger Zuschauer -> weniger Sponsoren -> weniger mediale Aufmerksamkeit -> weniger Zuschauer u.s.w.)

Strategien:

- Athleten: {Dopen, Nicht dopen}
- Organisatoren: {Testen, Nicht testen}
- Konsumenten: {(Bleiben, Gehen), (Gehen, Gehen), (Bleiben, Bleiben), (Gehen, Bleiben)}

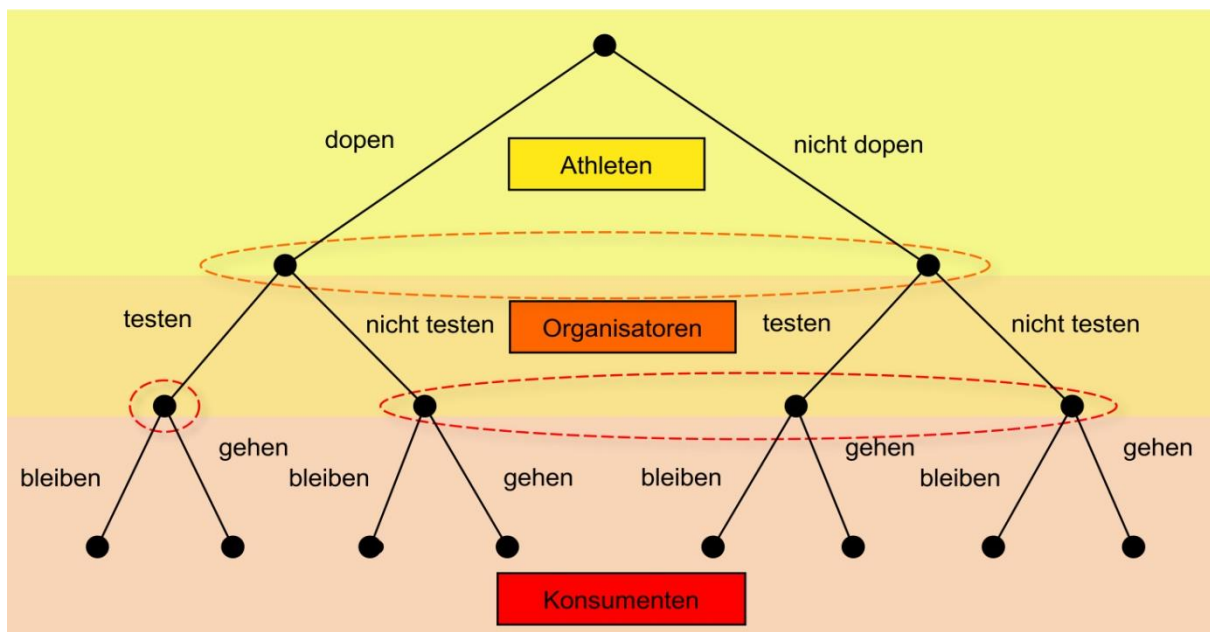


Abbildung 3: Erweitertes Dopingdilemma⁸¹

⁸¹ Vgl.: Buechel/Emrich / Pohlkamp,: Nobody's innocent: the role of costumers in the doping dilemma. In: http://mpr.aub.uni-muenchen.de/44627/1/MPRA_paper_44627.pdf S. 10

Es ist außerdem zu beachten, dass den Konsumenten keine perfekte Information zur Verfügung steht. Sie können nicht unterscheiden zwischen (d, nt) , (nd, t) und (nd, nt) , da in all diesen Fällen die Konsumenten den Eindruck haben, dass es keine Dopingfälle gibt. Daher werden diese drei Möglichkeiten zu einem sogenannten *Informationsbezirk* zusammengefasst. Man spricht in Folge dessen auch von *imperfekter Information*. Deshalb stehen den Konsumenten auch vier Strategien zur Verfügung, die aus zwei Aktionen bestehen, wobei sich erstere auf den ersten Informationsbezirk (d, t) bezieht und die zweite auf den zweiten Informationsbezirk (d, nt) , (nd, t) und (nd, nt) . So steht *(Gehen, Bleiben)* zum Beispiel für die Aktion *Gehen* im Bezug auf den ersten Informationsbezirk und die Aktion *Bleiben* im Bezug auf den zweiten Informationsbezirk.

5.4.3 Spiel mit präferierter Konsumentenstrategie *(Gehen, Bleiben)*⁸²

Präferenzen:

- Konsumenten
 $(d, t, g) >^{Kon} (d, t, b)$ Konsumenten bevorzugen es zu gehen, wenn es einen Skandal gibt.
 $(d, nt, b) >^{Kon} (d, nt, g)$ $(nd, nt, b) >^{Kon} (nd, nt, g)$ $(nd, t, b) >^{Kon} (nd, t, g)$
 Sollte es keinen Skandal geben, bleiben die Konsumenten lieber als zu gehen.
 Daraus ergibt sich die präferierte Strategie *(Gehen, Bleiben)*.
- Athleten
 $(nd, t, b) >^{Ath} (d, t, g)$ Die Athleten bevorzugen es, nicht gedopt zu haben, wenn die Konsumenten bleiben, als gedopt zu haben, wenn die Konsumenten gehen.
 $(d, nt, b) >^{Ath} (nd, nt, b)$ Die Athleten bevorzugen es, gedopt zu haben, wenn sie nicht getestet werden (sh. 1.2 Vereinfachtes Dopingdilemma)
- Organisatoren
 $(d, nt, b) >^{Org} (d, t, g)$ Der Verlust von Konsumenten bei einem Dopingskandal wirkt aus Sicht der Organisatoren schwerer, als nicht zu testen, während die Athleten dopen und die Konsumenten bleiben.

⁸² Vgl.: Buechel/Emrich / Pohlkamp: Nobody's innocent: the role of costumers in the doping dilemma. In: http://mpr.ub.uni-muenchen.de/44627/1/MPRA_paper_44627.pdf S. 10 ff.

$(nd, t, b) >^{Org} (nd, nt, g)$ Diese Präferenz soll darstellen, dass es für Organisatoren billiger ist, Dopingtests zu machen, als Konsumenten zu verlieren.

Behauptung: $s^* = (Dopen, Nicht\ testen, Bleiben)$ ist ein Nash-Gleichgewicht .



Abbildung 4: Spielbaumdarstellung des Teilspiels des Dopingdilemmas

Beweisführung:

Um diese Behauptung beweisen zu können, muss das Spiel in Teilspiele unterteilt werden, wobei es in diesem Fall nur ein wirkliches Teilspiel gibt.

Dieses Teilspiel startet beim Punkt „Skandal“, gleichzusetzen mit der vorausgegangenen Strategiekombination von (Dopen, Testen). Die Lösung und das einzige Nash-Gleichgewicht dieses Spiels ist ganz einfach *Gehen*.

Das zweite Teilspiel ist das eigentliche Spiel selbst. Die Strategie der Konsumenten wird hierbei auf (*Gehen, Bleiben*) festgelegt, da diese Strategie von den Konsumenten gegenüber allen anderen bevorzugt wird. Die dazugehörige Bimatrix sieht dann folgendermaßen aus:

		Organisatoren	
		Testen	Nicht testen
Athlet	Dopen	(d, t, g)	(d, nt, b)
	Nicht dopen	(nd, t, b)	(nd, nt, b)

Tabelle 24: Präferierte Konsumentenstrategie (*Gehen, Bleiben*)

Somit ist klar zu sehen, dass es ein einziges Nash-Gleichgewicht in diesem Spiel gibt: (d, nt, b) . Es lohnt sich weder für die Athleten - $(nd, t, b) >^{Ath} (d, t, g)$ - noch für die Organisatoren - $(d, nt, b) >^{Org} (d, t, g)$ - als einziger von diesem Gleichgewicht abzuweichen.

5.4.4 Spiel mit präferierter Konsumentenstrategie (*Bleiben, Bleiben*) oder (*Gehen, Gehen*)⁸³

Um herausfinden zu können, wie die Konsumenten das Dopingverhalten der Athleten beeinflussen, muss man ein weiteres Spiel aufstellen. In diesem Fall wird davon ausgegangen, dass das Verhalten der Konsumenten konstant bleibt, dass sie also entweder (*Bleiben, Bleiben*) oder (*Gehen, Gehen*) spielen.

Hier wird das Spiel demonstriert am Beispiel (*Bleiben, Bleiben*) – die beiden Strategien sind aber austauschbar.

Spieler und Strategien bleiben auch in diesem Spiel die gleichen wie im vorangegangenen Spiel, nur die Präferenzen der Spieler verändern sich.

Präferenzen:

– Konsumenten

$(d, t, b) >^{Kons} (d, t, g)$, $(d, nt, b) >^{Kons} (d, nt, g)$, $(nd, t, b) >^{Kons} (nd, t, g)$ und $(nd, nt, b) >^{Kons} (nd, nt, g)$. Die Konsumenten bleiben in jedem Fall lieber als zu gehen.

Daraus ergibt sich die präferierte Strategie (*Bleiben, Bleiben*).

– Athleten

$(nd, t, b) >^{Ath} (d, t, b)$ Nicht gedopt zu haben, wird von den Athleten bevorzugt, sollte es Tests geben.

$(d, nt, b) >^{Ath} (nd, nt, b)$ Athleten ist es lieber, gedopt zu haben, wenn nicht getestet wird.

– Organisatoren

$(d, t, b) >^{Org} (d, nt, b)$ Den Organisatoren ist es lieber, die Athleten zu testen, wenn sie gedopt haben.

$(nd, nt, b) >^{Org} (nd, t, b)$ Von den Organisatoren wird es bevorzugt, keine Tests durchzuführen, wenn die Athleten nicht dopen.

Organisatoren

⁸³ Vgl.: Buechel/Emrich / Pohlkamp: Nobody's innocent: the role of costumers in the doping dilemma. In: http://mprapa.ub.uni-muenchen.de/44627/1/MPRA_paper_44627.pdf S. 12 f.

		Testen	Nicht testen
Athlet	Dopen	(d, t, b)	(d, nt, b)
	Nicht dopen	(nd, t, b)	(nd, nt, b)

Tabelle 25: Präferierte Konsumentenstrategie (*Bleiben, Bleiben*)

Für dieses Spiel gibt es keine eindeutige Lösung, vielmehr lösen sich die einzelnen Szenarien in einem unendlichen Zyklus gegenseitig ab.

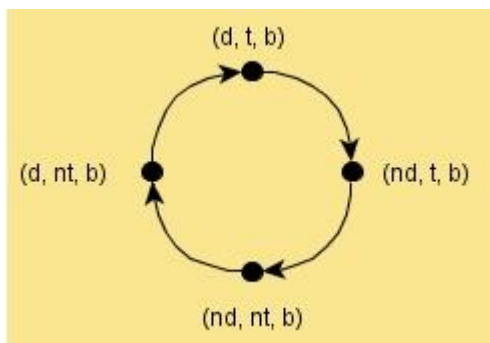


Abbildung 5: Dopingzyklus

Die Athleten dopen und die Organisatoren testen, daraufhin hören die Athleten auf zu dopen, während die Organisatoren weiterhin Tests durchführen. Aufgrund nicht vorhandener Dopingfälle hören die Organisatoren auf zu testen, wobei die Athleten allerdings weiterhin nicht dopen. Da es keine Tests mehr gibt, beginnen die Athleten aber wieder zu dopen, während die Organisatoren nicht testen. Danach beginnt der Zyklus wieder von vorne.

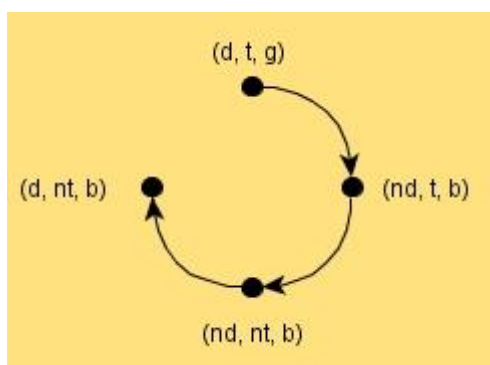


Abbildung 6: Durchbrochener Dopingzyklus

Wenn man nun das Ergebnis (d,t,b) wieder durch (d,t,g) ersetzt und somit die Konsumenten neuerlich (Gehen, Bleiben) spielen lässt, ist deutlich ersichtlich, dass der Lösungszyklus dadurch durchbrochen wird und bei dem Ergebnis (d, nt, b) stehen bleibt, weil $(d, nt, b) >^{org} (d, t, g)$ gilt. Also sind die

Konsumenten rein theoretisch mitverantwortlich für eine florierende Dopingzene, da die Organisatoren Angst haben, aufgrund eines Dopingkandals Unterstützer zu verlieren, und somit weitgehend auf Dopingtests verzichten.

5.4.5 Lösungsansätze⁸⁴

Eine Möglichkeit, um dieses Dilemma überwinden zu können, wäre die lückenlose Berichterstattung im Bezug auf Dopingtests. Nur dann, wenn die Öffentlichkeit nicht nur

⁸⁴ Vgl.: N.N. Athlete's dilemma. Sportsmen who take drugs may be prisoners of a different game. In: The economist, 25/2013, S. 67.

über positive Dopingtests informiert wird, können sich die Konsumenten ein Bild machen und somit dazu beitragen, dass der Druck zum Doping, dem die Athleten unterliegen, kleiner wird.

5.5 „Bank Run“

5.5.1 Aufbau des „Bank Run“- Spiels ⁸⁵

Unter einem sogenannten *Bank Run* versteht man eine Situation, bei der viele Anleger auf einmal Kapital von einer Bank abheben. ⁸⁶

In dieser spielerischen Darstellung werden aber nur zwei Anleger herangezogen, um die Situation darzustellen.

Ausgangssituation: Anleger A und Anleger B haben je ein Guthaben D auf der Bank hinterlegt. Die Bank hat dieses Geld in Projekte investiert. Heben beide Anleger ihr Geld ab, bevor die Bank dieses wieder aus den Projekten abgezogen hat (Zeitpunkt 1), erhalten sie beide eine Summe r , wobei gilt: $D > r > \frac{D}{2}$. Hebt nur ein Anleger sein Geld zum Zeitpunkt 1 ab, erhält dieser D und der andere bekommt $2r - D$. Heben beide ihr Geld erst ab, nachdem die Bank wieder über dieses verfügt (Zeitpunkt 2), erhält jeder Anleger R , wobei gilt: $R > D$. Zieht nur ein Anleger sein Geld ab, erhält er $2R - D$ und der andere bekommt D . Wenn keiner von beiden zum Zeitpunkt 2 seine Einlagen wieder von der Bank abholt, erhalten beide R .

⁸⁵ Vgl.: Gibbons: A Primer in Game Theory. S. 73 f.

⁸⁶ Vgl.: Schöning, Stefan: Bank Run. In: <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/bank-run.html>, 11.12.2013.

Spieler: Eine große Menge an Bankkunden, reduziert auf Anleger A und B

$$N = \{1,2\}$$

Strategien: Jeder Spieler verfügt über die gleichen zwei Strategien
 {abheben, nicht abheben}

Präferenzen: Jeder Spieler möchte eine möglichst große Summe an Geld erhalten.

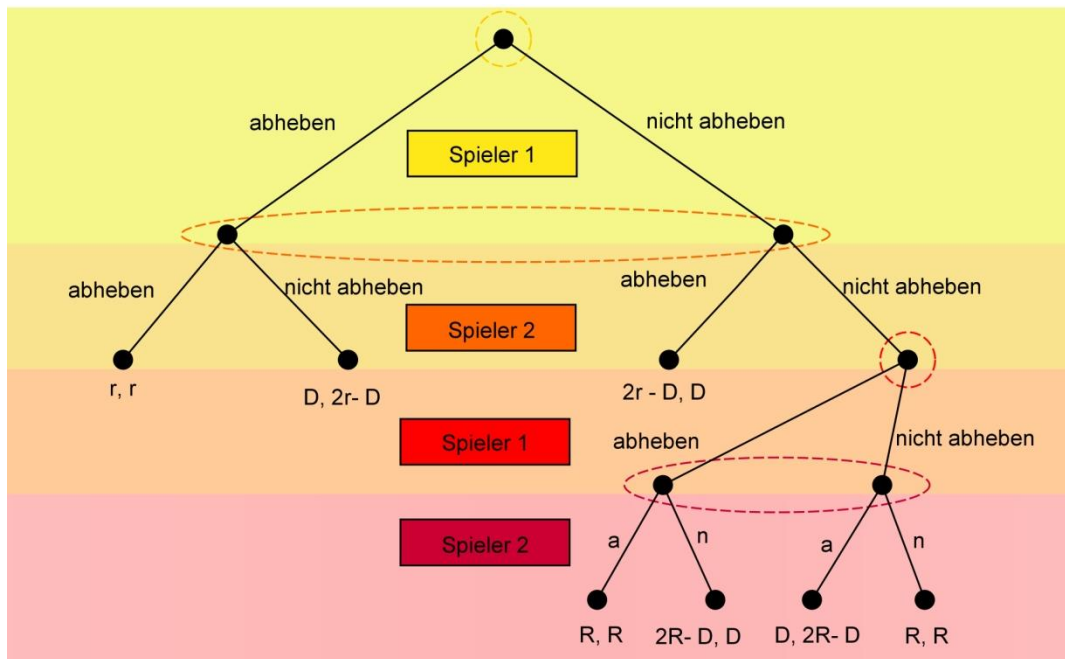


Abbildung 7: Spielbaumdarstellung "Bank Run"

Auch hier muss zur Analyse des Spiels dieses zuerst einmal in Teilspele unterteilt werden, wobei es in diesem Fall ein Teilspele zum Zeitpunkt 1 und ein Teilspele zum Zeitpunkt 2 gibt.

5.5.2 Finden eines Gleichgewichts mithilfe von Rückwärtsinduktion⁸⁷

Zeitpunkt 1

		Anleger B	
		Abheben	Nicht abheben
Anleger A	Abheben	(r, r)	$(D, 2r - D)$
	Nicht abheben	$(2r - D, D)$	Nächste Ebene

Tabelle 26: Bank Run - Zeitpunkt 1

⁸⁷ Vgl.: Gibbons: A Primer in Game Theory. S. 74 f.

Zeitpunkt 2

		<i>Anleger B</i>	
		Abheben	Nicht abheben
<i>Anleger A</i>	Abheben	(R, R)	(2R-D, D)
	Nicht abheben	(D, 2R-D)	(R, R)

Tabelle 27: Bank Run - Zeitpunkt 2

Um nun ein Gleichgewicht für das gesamte Spiel zu finden, muss man erst einmal ein Gleichgewicht für das Spiel zum Zeitpunkt 2 finden, diese Lösung kann dann in das Spiel zum Zeitpunkt 1 eingefügt werden. Man nennt diese Vorgangsweise *Rückwärtsinduktion*.

Betrachtet man nun das Spiel zum Zeitpunkt 2, so lässt sich feststellen, dass die Strategie *Abheben* die Strategie *Nicht abheben* strikt dominiert. Somit kann *Nicht abheben* eliminiert werden und *(Abheben, Abheben)* ist das einzige Nash-Gleichgewicht. In weiterer Folge kann nun dieses Ergebnis in das Spiel zum Zeitpunkt 1 eingefügt werden.

		<i>Anleger B</i>	
		Abheben	Nicht abheben
<i>Anleger A</i>	Abheben	(r,r)	(D, 2r-D)
	Nicht abheben	(2r-D, D)	(R, R)

Tabelle 28: Bank Run – Rückwärtsinduktion

In diesem Spiel gibt es nun zwei Gleichgewichte: *(Abheben, Abheben)* und *(Nicht abheben, Nicht abheben)*. Für das gesamte Spiel bedeutet das, dass es ein Gleichgewicht gibt, bei dem beide Einleger zum Zeitpunkt 1 abheben und ein zweites, bei dem beide zum Zeitpunkt 2 abheben.

5.5.3 Interpretation der Ergebnisse⁸⁸

Das Gleichgewicht, bei dem beide Einleger zum Zeitpunkt 1 ihr Geld abheben, kann mit einem Bank Run verglichen werden. Das Modell zeigt also, dass, wenn ein Einleger davon ausgeht, dass die anderen Einleger abheben werden, er dies auch tun wird, obwohl ein gemeinschaftliches Warten zu einer höheren Auszahlung für alle Beteiligten führen würde. Somit lässt sich auch das Zustandekommen eines Bank Runs logisch erklären.

5.6 Vorstellungsgespräche

5.6.1 Aufbau des Spiels „Vorstellungsgespräch“⁸⁹

Ausgangssituation: Ein Unternehmer möchte einen geeigneten neuen Mitarbeiter einstellen, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewerber geeignet ist, bei 50% liegt. Er gibt ein Stellenangebot aus und lädt Bewerber zu einem Vorstellungsgespräch ein, wobei jeder Bewerber die Möglichkeit hat, sich vor diesem Gespräch freiwillig einem Test zu unterziehen, der jedoch nicht aussagekräftig ist im Bezug auf die Qualifikation des Bewerbers, da sich auch ein ungeeigneter Bewerber durch Lernen darauf vorbereiten kann. Für einen unqualifizierten Bewerber ist die Vorbereitung auf den Test sehr zeitraubend, ein Qualifizierter hingegen sieht den Test als eine spannende Herausforderung und hat auch keinen Mehraufwand durch das Schreiben des Tests. Nur eine Person hat sich für die Anstellung beworben.

Spieler: Bewerber und Unternehmer $N = \{1, 2\}$

Strategien: Bewerber: $\{Test, Kein Test\}$; Unternehmer: $\{Einstellen, Nicht einstellen\}$

Präferenzen: Zu Beginn teilen wir dieses Spiel in zwei Bimatrix-Spiele auf: Das Spiel Q, wo der Unternehmer einem qualifizierten Bewerber gegenüber steht, und das Spiel U, in dem er es mit einem unqualifizierten Bewerber zu tun hat.

Spiel Q: $(Test, Einstellen) = (Kein Test, Einstellen) >^{Unt} (Test, Nicht einstellen) = (Kein Test, Nicht einstellen)$
 $(Test, Einstellen) >^Q (Kein Test, Einstellen) >^Q (Test, Nicht einstellen) >^Q$

⁸⁸ Vgl.: Gibbons: A Primer in Game Theory. S. 75.

⁸⁹ Vgl.: Amann/Helbach: Spieltheorie für Dummies. S.193 ff.

(Kein Test, Nicht einstellen)

		Spiel Q	
		<i>Unternehmer</i>	
		Einstellen	Nicht einstellen
<i>Bewerber</i>	Test	(3, 1)	(1, 0)
	Kein Test	(2, 1)	(0, 0)

Tabelle 29: Vorstellungsgespräch - Spiel Q

Dieses Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht in der Strategiekombination *(Test, Einstellen)*.

Spiel U:

$(\text{Test, Nicht einstellen}) = (\text{Kein Test, Nicht einstellen}) >^{Unt} (\text{Test, Einstellen}) =$
 $(\text{Kein Test, Einstellen})$
 $(\text{Kein Test, Einstellen}) >^U (\text{Test, Einstellen}) >^U (\text{Kein Test, Nicht einstellen}) >^U$
 $(\text{Test, Nichteinstellen})$

		Spiel U	
		<i>Unternehmer</i>	
		Einstellen	Nicht einstellen
<i>Bewerber</i>	Test	(1, -2)	(-1, 0)
	Kein Test	(2, -2)	(0, 0)

Tabelle 30: Vorstellungsgespräch - Spiel U

Auch hier existiert ein Nash-Gleichgewicht in der Kombination *(Kein Test, Nicht einstellen)*.

Die Gleichgewichte beider Spiele sind auch teilspielperfekt.

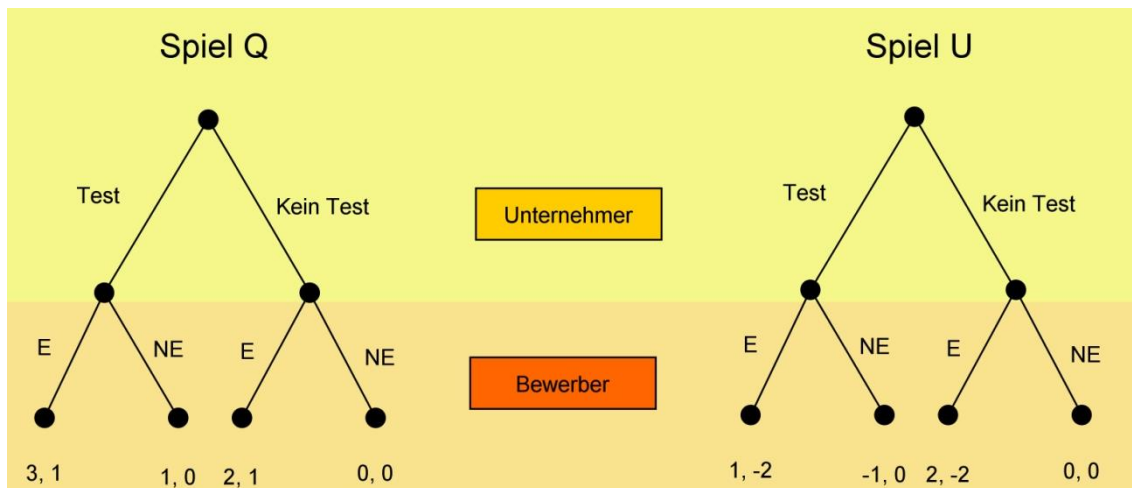


Abbildung 8: Vorstellungsgespräch- Extensivform⁹⁰

Die Lösung für dieses Spiel wäre eigentlich leicht gefunden: Der Unternehmer sollte jemanden einstellen, wenn dieser den Test gemacht hat, da es sich dann mit hoher Wahrscheinlichkeit um einen qualifizierten Bewerber handelt, da diese den Test gerne machen. Weiß dies allerdings der unqualifizierte Bewerber, wird auch er den Test machen, um den Job zu bekommen. Insofern wäre es für den Unternehmer am sichersten, niemanden einzustellen, was aber wiederum seinen Wünschen widerspricht. Somit handelt es sich bei diesem Spiel um ein Dilemma.⁹¹

5.6.2 Das Spiel „Vorstellungsgespräch“ als Signalisierungsspiel

Bei Signalisierungsspielen handelt es sich im Allgemeinen um Spiele, bei denen es einen Spieler gibt, der über eine gewisse Eigenschaft verfügt, über deren Existenz nur er selbst Bescheid weiß. Der Gegenspieler hat in der Regel eine Erwartungshaltung gegenüber dieser Eigenschaft. Dem erstgenannten Spieler ist es möglich, ein Signal „auszusenden“, welches der Gegenspieler „empfangen“ und interpretieren kann. Der Gegenspieler wird nun aufgrund der erhaltenen Botschaft dem Spieler eine Eigenschaft zuordnen und eine Handlung wählen, mit der er aufgrund der vermuteten Eigenschaft maximalen Nutzen erhält. Auch der erste Spieler ist sich dessen bewusst und wird sein Signal so wählen, dass er seinen Nutzen maximiert.⁹²

⁹⁰ Vgl.: Amann/Helbach: Spieltheorie für Dummies. S. 194 f.

⁹¹ Vgl.: ebd. S.195

⁹² Vgl.: Schäffler, Christine/Eberwein, Benjamin/Lauschke, Dirk: Signalisierungsspiele in der Standardform. In: <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/artikel/Signalspiele.pdf>, 20.1.2014. S.3.

Umgelegt auf das „Vorstellungsgespräch“- Spiel, lässt sich sagen, dass der qualifizierte Bewerber wohl den Test machen wird, um dem Unternehmer zu signalisieren, dass er für den Job geeignet ist. Ist dies dem unqualifizierten Anwärter allerdings auch bewusst, wird er auch den Test wählen, um als qualifizierter Bewerber durchzugehen, und der Unternehmer steht wieder vor einem Dilemma.⁹³

5.6.3 Die Harsanyi-Transformation

Um eine Lösung für die Situation des Unternehmers zu finden, müssen die zwei Spiele, Spiel Q und Spiel U, zu einem Spiel zusammengefügt werden. Dies ist möglich mit Hilfe der *Harsanyi-Transformation*.

Die Harsanyi-Transformation kann bei Spielen angewendet werden, wo der analysierte Spieler zwar über die Anzahl seiner Mitspieler und deren Strategieräume im Bilde ist, jedoch über keine genauen Informationen im Bezug auf die Präferenzen verfügt. Somit handelt es sich um ein Spiel mit *unvollständiger* Information, mithilfe der Harsanyi-Transformation kann dieses in ein Spiel mit *vollständiger*, aber *unvollkommener* Information umgewandelt werden. Dabei muss beachtet werden, dass mit unvollständiger Information eine Situation beschrieben wird, in der der Spieler nicht über die „Identität“ seines Gegenübers Bescheid weiß und „unvollkommene Information“ als Beschreibung für Spiele verwendet wird, in denen der Spieler nicht über die bereits getätigten Züge seiner Mitspieler informiert ist. Das Grundprinzip der Harsanyi-Transformation stellt die Einführung eines zusätzlichen Spielers dar, dieser Spieler wird oftmals als „Natur“ bezeichnet. Dieser Spieler ist zuerst am Zug und „wählt“ den Typ von Spieler aus, der dann den zweiten Zug tätigt.⁹⁴

Umgelegt auf das aktuelle Beispiel, bedeutet dies, dass nach der vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung von $p = 0,5$, eine Zufallsinstanz den Bewerbertypen auswählt.

Dargestellt in einer zentralistisch ausgerichteten Extensivform, sieht das „Vorstellungsgespräch“ nach der Harsanyi-Transformation wie in Abbildung 9 aus. Die Bewerber werden hier allerdings als ein einziger Spieler dargestellt, der über vier Strategien

⁹³ Vgl.: Amann/Helbach: Spieltheorie für Dummies. S. 196.

⁹⁴ Vgl.: Leininger /Amann: Einführung in die Spieltheorie. In: http://www.wiso.tu-dortmund.de/wiso/mik/Medienpool/de/materialien/spieltheorie_1/spiele1_ws07_08_skript.pdf, 21.1.2014. S. 95ff.

verfügt, die seine geplanten Reaktionen auf das Ergebnis der durch die Natur getätigten Zufallswahl sind. Genauso verfügt auch der Unternehmer über vier mögliche Strategien.

S_{Bewerber}

$= \{(Test^Q, Test^U), (Test^Q, Kein Test^U), (Kein Test^Q, Test^U), (Kein Test^Q, Kein Test^U)\}$

$S_{\text{Unternehmer}}$

$= \{(Einstellen^T, Einstellen^K), (Einstellen^T, Nicht einstellen^K), (Einstellen^T, Nicht einstellen^K), (Nicht einstellen^T, Nicht einstellen^K)\}$

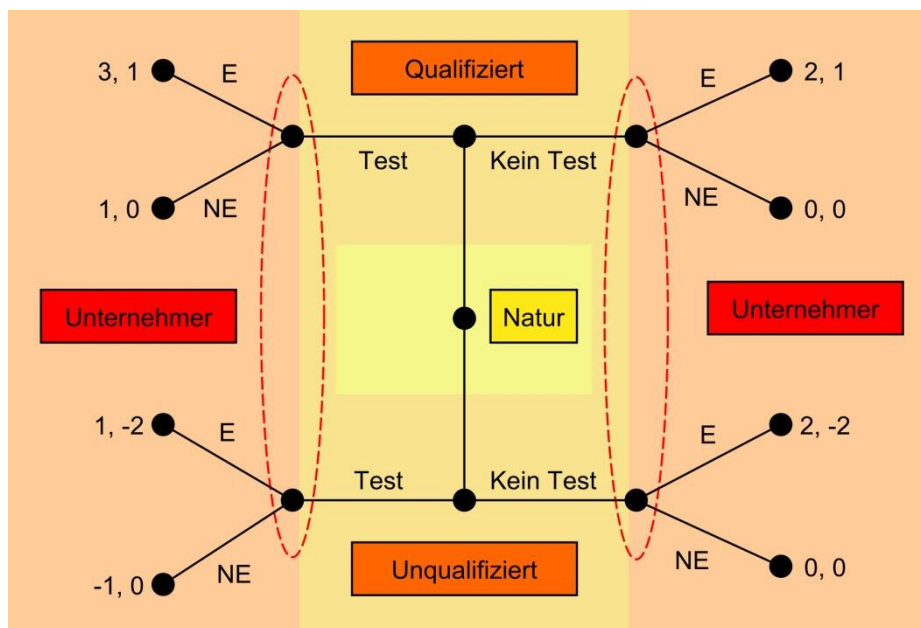


Abbildung 9: Vorstellungsgespräch - Harsanyi-Transformation⁹⁵

Die in Tabelle 31 eingetragenen Daten geben jeweils den erwarteten Nutzen für den Bewerber und den Unternehmer an. Die erwartete Auszahlung für z.B. die Strategie T^Q, K^U des Bewerbers unter der Voraussetzung, dass der Unternehmer E^T, NE^K spielt, errechnet man folgendermaßen⁹⁶:

$$3 * \frac{1}{2} + 0 * \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Der Unternehmer erhält eine Auszahlung von 3, wenn er einen qualifizierten Bewerber einstellt und einen Auszahlungswert von 0, wenn er einen ungeeigneten Bewerber einstellt. Die Wahrscheinlichkeit für beide Bewerbungstypen ist 50%.

Die besten Antworten sind in der Tabelle fett gedruckt.

⁹⁵ Vgl.: Amann/Helbach: Spieltheorie für Dummies. S. 197.

⁹⁶ Vgl.: ebd. S. 198.

		Unternehmer			
		E^T, E^K	E^T, NE^K	NE^T, E^K	NE^T, NE^K
Bewerber	T^Q, T^U	$(2, -\frac{1}{2})$	$(2, -\frac{1}{2})$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
	T^Q, K^U	$(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{3}{2}, -1)$	$(\frac{1}{2}, 0)$
	K^Q, T^U	$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -1)$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(-\frac{1}{2}, 0)$
	K^Q, K^U	$(2, -\frac{1}{2})$	$(0, 0)$	$(2, -\frac{1}{2})$	$(0, 0)$

Tabelle 31: Vorstellungsgespräch - 4 Strategien

Anhand der Matrix kann man erkennen, dass die Strategie T^Q, K^U strikt dominant ist gegenüber der Strategie K^Q, T^U , da T^Q, K^U -egal wie der Unternehmer entscheidet- in jedem Fall besser ist. Sieht man sich die Auszahlungen des Unternehmers an, lässt sich feststellen, dass E^T, E^K strikt dominiert wird durch NE^T, NE^K .

Eliminiert man die dominierten Strategien nun, lässt sich beobachten, dass NE^T, E^K durch NE^T, NE^K dominiert wird. In weiterer Folge kann man feststellen, dass K^Q, K^U schwach dominiert ist von T^Q, T^U und E^T, E^K strikt dominiert ist durch A^T, A^K . Somit lässt sich das Spiel wieder auf ein Bimatrixspiel reduzieren.⁹⁷

		Unternehmer	
		E^T, NE^K	NE^T, NE^K
Bewerber	T^Q, T^U	$(2, -\frac{1}{2})$	$(0, 0)$
	T^Q, K^U	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 0)$

Tabelle 32: Vorstellungsgespräch - Reduziertes Spiel

Als Nächstes rechnet man die Wahrscheinlichkeiten aus, mit denen der Bewerber und der Unternehmer ihre jeweiligen Strategien wählen werden.

w bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, mit der der Bewerber (T^Q, T^U) wählen wird, und p die Wahrscheinlichkeit, mit der der Unternehmer (E^T, NE^K) wählen wird.

⁹⁷ Vgl.: Amann/Helbach: Spieltheorie für Dummies. S. 198.

$$u_B(T^Q, T^U) = u_B(T^Q, K^U)$$

$$p * 2 + (1 - p) * 0 = p * \frac{3}{2} + (1 - p) * \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$u_U(E^T, NE^K) = u_U(NE^T, NE^K)$$

$$w * \left(-\frac{1}{2}\right) + (1 - w) * \frac{1}{2} = 0$$

$$w = \frac{1}{2}$$

5.6.4 Regel von Bayes

Jede Ausprägung mit unbekanntem Eigenschaften eines Spielers i ist definiert als Typ t_i dieses Spielers i . Die verschiedenen Ausprägungen sind allgemein bekannt und nach der Wahrscheinlichkeit $p(t_1, \dots, t_n)$ verteilt.⁹⁸ Seien nun e_1, e_2, \dots, e_n Signale für die, die Wahrscheinlichkeiten $p(e_j \setminus t_j)$ für jedes Signal e_j und jeden Typen t_j gegeben sind. Somit kann man sich die Wahrscheinlichkeit, dass t_j zutrifft, unter der Voraussetzung, dass e_j eintritt, folgendermaßen berechnen:⁹⁹

$$p(t_j \setminus e_j) = \frac{p(e_j \setminus t_j) * p(t_j)}{p(e_j)}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewerber, der den Test absolviert hat, qualifiziert ist, lässt sich mit Hilfe der Regel von Bayes berechnen. Betrachtet man noch einmal Tabelle 32 und bedenkt dabei, dass der Bewerber jede Strategie mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wählen wird, kann man feststellen, dass ein unqualifizierter Bewerber in 50% der Fälle den Test absolvieren wird.

Wir nehmen zur Berechnung zwei Spieler-Typen an: Den Typen $t_{U,T}$, der unqualifizierte Bewerber, der den Test absolviert hat, und $t_{Q,T}$, der qualifizierte Bewerber, der den Test gemacht hat. Diese beiden Typen sind für den Unternehmer nicht unterscheidbar.

$p(t_{U,T})$ erhält man somit, wenn man $\frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeit, dass der Bewerber unqualifiziert ist, mit $\frac{1}{2}$ multipliziert, der Wahrscheinlichkeit, dass ein unqualifizierter Bewerber den Test macht.

⁹⁸ Vgl.: Leininger, Amann: Einführung in die Spieltheorie. In: http://www.wiso.tu-dortmund.de/wiso/mik/Medienpool/de/materialien/spieltheorie_1/spiele1_ws07_08_skript.pdf, 22.1.2014. S. 100.

⁹⁹ Vgl.: N.N.: Bayes'sche Regel. In: http://wikiludia.mathematik.uni-muenchen.de/wiki/index.php?title=Bayes%27sche_Regel, 22.1.2014.

$$p(t_{U,T}) = \frac{1}{4}$$

Genauso geht man auch für den Typen $t_{Q,T}$ vor, somit erhält man:

$$p(t_{Q,T}) = \frac{1}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis Test eintritt $p(e_T) = \frac{3}{4}$, da beide Strategien des Bewerbers gleich oft gewählt werden, unqualifizierte und qualifizierte Bewerber gleich häufig vorkommen und in drei von vier Fällen *Test* gewählt wird. Somit wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewerber, der den Test absolviert hat, auch qualifiziert ist berechnet durch:

$$p(t_{Q,T}/e_T) = \frac{\frac{1}{2} * 1}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Dabei wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewerber qualifiziert ist und den Test gemacht hat (50%), mit der Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewerber den Test macht, wenn er qualifiziert ist (100% - da nur mehr die Strategien T^Q, T^U und T^Q, K^U übrig sind und ein qualifizierter Bewerber, egal welche dieser Strategien gespielt wird, den Test macht) multipliziert. Das Ergebnis wird dividiert durch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bewerber den Test macht.

5.6.5 Interpretation der Ergebnisse

Nun ist bekannt, dass ein Bewerber, der den Test absolviert hat, mit einer Wahrscheinlichkeit von 66,7% auch qualifiziert ist. Diese Einsicht kann einem Unternehmer in der zu Beginn dargestellten Situation zeigen, wie groß seine Chance ist, eine geeignete Person einzustellen. Das Dilemma, das entsteht, wenn der Unternehmer alle getesteten Bewerber einstellt, bleibt leider trotzdem bestehen, aber der Unternehmer kann seine Chancen nun besser einschätzen.

Würde man dieses Spiel in einer realen Situation anwenden, gäbe es natürlich einige Probleme und Einflussfaktoren, die das Spiel verändern würden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jobanwärter qualifiziert ist, wird im realen Leben voraussichtlich nicht genau bei 50% liegen. Außerdem spielen auch eine Vielzahl von Einflüssen, wie zum Beispiel,

Sympathie, Bewerbungsunterlagen und Auftreten der Bewerber, eine große Rolle bei Vorstellungsgesprächen.

6. Schluss

All diese Beispiele für die Verwendung von Bimatrixspielen sollen zeigen, dass die Spieltheorie ein vielfältig einsetzbares Werkzeug zur Analyse von Entscheidungssituationen ist, und dass es kein Studium braucht, um einen Einblick in diese Wissenschaft zu erlangen. Es muss an dieser Stelle natürlich erwähnt werden, dass all die in dieser Arbeit vorgestellten Spiele theoretische Modelle sind, die auf sehr vielen Annahmen beruhen und bei der Anwendung im realen Leben bald an ihre Grenzen stoßen werden. Die Spieltheorie versucht zwar, menschliches Verhalten in Zahlen umzuwandeln und kann uns mit dieser Methode sicher auch helfen, alltägliche Probleme zu analysieren, trotzdem gibt es zahlreiche Umwelteinflüsse und Vorlieben, die sich oft nicht korrekt in die Modelle mit einbeziehen lassen. Im Endeffekt arbeitet auch die Spieltheorie nur mit Wahrscheinlichkeiten und kann keine wirklich zuverlässigen Aussagen über menschliches Verhalten treffen.

„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“¹⁰⁰ (Albert Einstein)

¹⁰⁰ N.N.: Zitate zur Mathematik u.a.. In: <http://www.mathematik.ch/zitate/>, 30.1.2014.

7. Anhang

7.1 Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

7.1.1 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Spielbaumdarstellung	12
Abbildung 2: Populationsdynamik im Fortpflanzungsspiel.....	47
Abbildung 3: Erweitertes Dopingdilemma	49
Abbildung 4: Spielbaumdarstellung des Teilspiels des Dopingdilemmas	51
Abbildung 5: Dopingzyklus	53
Abbildung 6: Durchbrochener Dopingzyklus.....	53
Abbildung 7: Spielbaumdarstellung "Bank Run"	55
Abbildung 8: Vorstellungsgespräch- Extensivform	59
Abbildung 9: Vorstellungsgespräch - Harsanyi-Transformation	61

7.1.2 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Darstellung von Spielen in tabellarischer Form.....	9
Tabelle 2: Fußballspiel.....	13
Tabelle 3: Hannibals Marsch nach Rom	15
Tabelle 4: Kartellabsprachen	17
Tabelle 5: Kartellabsprachen - Beste Antwort	18
Tabelle 6: Treffen in der Menge.....	21
Tabelle 7: Gefangenendilemma	23
Tabelle 8: Allgemeine Darstellung des Gefangenendilemmas	23
Tabelle 9: Streithähne	24
Tabelle 10: Hirschjagd	26
Tabelle 11: Kampf der Geschlechter	28
Tabelle 12: Chicken Game	29
Tabelle 13: Das Münzspiel von de Montmort.....	30
Tabelle 14: Das Münzspiel von de Montmort - Beste Antworten	31

Tabelle 15: Das Münzspiel von de Montmort - Allgemeine Form	31
Tabelle 16: Elfmeterschießen.....	36
Tabelle 17: Wettrüsten	39
Tabelle 18: Wettrüsten mit veränderten Präferenzen	40
Tabelle 19: Kubakrise	41
Tabelle 20: Atomkrise.....	42
Tabelle 21: Autokatalyse	44
Tabelle 22: Evolutionäres Koordinationsspiel	45
Tabelle 23: Vereinfachtes Dopingdilemma	48
Tabelle 24: Präferierte Konsumentenstrategie (<i>Gehen, Bleiben</i>)	51
Tabelle 25: Präferierte Konsumentenstrategie (<i>Bleiben, Bleiben</i>).....	53
Tabelle 26: Bank Run - Zeitpunkt 1	55
Tabelle 27: Bank Run - Zeitpunkt 2	56
Tabelle 28: Bank Run – Rückwärtsinduktion.....	56
Tabelle 29: Vorstellungsgespräch - Spiel Q.....	58
Tabelle 30: Vorstellungsgespräch - Spiel U	58
Tabelle 31: Vorstellungsgespräch - 4 Strategien.....	62
Tabelle 32: Vorstellungsgespräch - Reduziertes Spiel.....	62

7.2 Quellenverzeichnis

Amann, Erwin/Helbach, Christoph: Spieltheorie für Dummies. Ein Spiel für praktische Theoretiker. Weinheim 2012.

Battalio, Raymond/ Samuelson, Larry/ Van Huyck, John: Optimization incentives and coordination failure in laboratory stag hunt games. In:
<http://www.ssc.wisc.edu/econ/archive/wp9802r.pdf>, 1.12.2013.

Böcking, David: Nobelpreis für Ökonomen: Sie wollen doch nur spielen. In:
<http://www.spiegel.de/wirtschaft/soziales/wirtschaftsnobelpreis-geht-an-us-spieltheoretiker-roth-und-shapley-a-861392.html>, 28.1.2014.

Borbonus, René: So funktionieren Verhandlungen ohne Verlierer. In: <http://www.businesswissen.de/artikel/win-win-situation-so-funktionieren-verhandlungen-ohne-verlierer/>, 17.11.2013.

Buechel, Berno/ Emrich, Eike/ Pohlkamp, Stefanie: Nobody's innocent: the role of costumers in the doping dilemma. In: http://mpra.ub.uni-muenchen.de/44627/1/MPRA_paper_44627.pdf, 8.12.2013.

Diekmann, Andreas: Einführung in die Spieltheorie. Modelle und experimentelle Studien. In: <http://www.socio.ethz.ch/education/fs09/igt>, 28.1.2014.

Etessami, Kousha: Algorithmic Game Theory and Applications. Lecture 2: Mixed Strategies, Expected Payoffs, and Nash Equilibrium. In:
<http://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/agta/lec2.pdf>, 17.1.2014.

Gibbons, Robert: A Primer in Game Theory. London 1992.

Hanuske, Matthias: Quanten- Spieltheorie und deren mögliche Anwendungen. In:
http://wiap.wiwi.uni-frankfurt.de/Publications/001_Quantenspieltheorie.pdf, 29.1.2014.

Horst, Ulrich/Kaupila, Helena: Nicht kooperative Spieltheorie. In:
http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/horst_35_48.pdf, 25.11.2013.

J. McKenzie, Alexander: Evolutionary Game Theory. In:
<http://plato.stanford.edu/entries/game-evolutionary/>, 17.1.2014.

Julmi, Christian: Spieltheorie. In:

http://www.wiwimaster.de/data/Dokumente/269/060120142613_SpieltheorieSkript2.pdf,
16.11.2013.

Kuhn, Steven: Prisoner's Dilemma. In: <http://plato.stanford.edu/entries/prisoner-dilemma/>,
1.12.2013.

Leininger, Wolfgang/ Amann, Erwin: Einführung in die Spieltheorie. In: http://www.wiso.tu-dortmund.de/wiso/mik/Medienpool/de/materialien/spieltheorie_1/spiele1_ws07_08_skript.pdf, 13.10.2013.

Lopez, Nicolas/Aguirre, Oswaldo/Espiritu, Josef F./Taboada, Heidi A.: Using game theory as a post-pareto analysis for renewable energy integration problems considering multiple objects. In:

<http://www.usc.edu/dept/ise/caie/Checked%20Papers%20%5Bruhi%2012th%20sept%5D/word%20format%20papers/REGISTRATION%20PAID%20PAPERS%20FOR%20PROCEEDINGS/pdf/211%204%20USING%20GAME%20THEORY%20AS%20A%20POST-PARETO%20ANALYSIS%20FOR%20RENEWABLE%20ENERGY.pdf>, 12..11.2013

Luxenberger, Thomas: Evolutionär stabile Strategien. In:

http://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=6&ved=0CE8QFjAF&url=http%3A%2F%2Fwww.num.uni-sb.de%2Frjasanow%2Fdokuwiki%2Flib%2Fexe%2Ffetch.php%3Fcache%3Dcache%26media%3Dlehre%253Aseminar%253A10_evolutiona%25CC%2588r_stabile_strategien.pdf&ei=IODjUtDUO--y7Ab19YDwDw&usg=AFQjCNGUwmYBAWrsef7HlyhzS2FQJgEEAA&bvm=bv.59930103,d.ZGU,
25.1.2014.

N.N. Das Gefangenens- Dilemma. In: <http://www.ruhr-uni-bochum.de/agvwp1/Vwp/gd.pdf>,
4.7.2013.

N.N.: Kapitel 13: Evolutionäre Spieltheorie. In:

http://wwz.unibas.ch/fileadmin/wwz/redaktion/witheo/personen/aleks/Teaching/HS09/Spieltheorie/KAPITEL13_HS09_6_on_1.pdf, 25.1.2014.

N.N.: 2.1 Minimax/Maximin Aktionen. In: http://www.stat.uni-muenchen.de/~thomas/Lehre/sose11/Entscheidung/ET11_Folien_Kap_2.1_110527.pdf, 25.11.2013.

N.N.: Autokatalyse. In: <http://www.wissenschaft-online.de/abo/lexikon/bio/6399>, 23.1.2014.

N.N.: Bayes'sche Regel. In: http://wikiludia.mathematik.uni-muenchen.de/wiki/index.php?title=Bayes%27sche_Regel, 22.1.2014.

N.N.: BWL 4: Organisation und Human Resource Management. In: http://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CC0QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.realwwz.ch%2Fsystem%2Ffiles%2Fdownload_manager%2Fbwl_4__organisation_und_human_resource_management__4a212e310f7ab.docx&ei=FZqTUsCyKKiPyQP084HIBA&usg=AFQjCNFwqMhiTUoRlu1G-eVOsnQ9JlvCog&bvm=bv.56988011,d.bGQ, 25.11.2013.

N.N.: Hannibal-Der Feldzug gegen Rom. In: <http://www.nexusboard.net/sitemap/7896/hannibal-der-feldzug-gegen-rom-t1156/>, 14.10.2013.

N.N.: Pareto efficiency. In: http://www.princeton.edu/~achaney/tmve/wiki100k/docs/Pareto_efficiency.html, 17.11.2013.

N.N.: Spieltheorie einfach erklärt II: Feiglingsspiel (Chicken). In: <http://scienceblogs.de/zoonpolitikon/2008/04/24/spieltheorie-einfach-erklart-ii-feiglingsspiel-chicken/>, 17.1.2014.

N.N.: Spieltheorie einfach erklärt IV: Jagdpartie (Stag Hunt). In: <http://scienceblogs.de/zoonpolitikon/2008/05/31/spieltheorie-einfach-erklart-iv-jagdpartie-stag-hunt/>, 24.11.2013.

N.N.: Spieltheorie. In: <http://de.wikipedia.org/wiki/Spieltheorie>, 13.11.2013.

N.N.: Wer zuerst schießt, stirbt als zweiter. Seite 2/3: Zuerst lagen die USA im Wettrüsten vorne. In: <http://www.zeit.de/zeit-geschichte/2012/03/Wettruesten-Kalter-Krieg-USA-UdSSR/seite-2>, 25.1.2014.

N.N.: Wer zuerst schießt, stirbt als Zweiter. Seite 3/3: Peace statt Bomben in den Siebzigern. In: <http://www.zeit.de/zeit-geschichte/2012/03/Wettruesten-Kalter-Krieg-USA-UdSSR/seite-3>, 25.1.2014.

N.N.: Wohlfahrtsoptimum. In: <http://www.wirtschaftslexikon24.com/d/wohlfahrtsoptimum/wohlfahrtsoptimum.htm>, 17.11.2013.

N.N.: Zitate zur Mathematik u.a.. In: <http://www.mathematik.ch/zitate/>, 30.1.2014.

Nebel, Bernhard: Spieltheorie. In: <http://www.informatik.uni-freiburg.de/~ki/teaching/ss09/gametheory/spieltheorie.pdf>, 13.11.2013.

Osborne, Marin J.: A course in game theory. In: http://bib.convdocs.org/docs/2/1142/conv_1/file1.pdf, 17.11.2013.

Osborne, Martin J.: An introduction to game theory. New York 2004.

Peukert, Helge: Gefangenendilemma. In: <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/gefangenendilemma.html>, 9.12.2013.

Polak, Ben: 1. Introduction: five first lessons. In: <http://www.youtube.com/watch?v=nM3rTU927io&list=PL6EF60E1027E1A10B>, 12.10.2013.

Polak, Ben: 2. Putting yourselves into other people's shoes. In: http://www.youtube.com/watch?v=qQ3kFydl_xQ, 14.10.2013.

Polak, Ben: 3. Iterative deletion and the median-voter theorem. In: <http://www.youtube.com/watch?v=kqDuORVWTYw>, 29.1.2014.

Polak, Ben: 6. Dating and Cournot. In: <http://www.youtube.com/watch?v=7oASpaBdDMs>, 28.1.2014.

Polak, Ben: 9. Mixed strategies in theory and tennis. In: <http://www.youtube.com/watch?v=unvJofvOwl8>, 29.1.2014.

Richter, Fabian: Auswahlkriterien bei mehrfachen Nash-Gleichgewichten. In: http://www.wiwi.europa-uni.de/de/lehrstuhl/fine/mikro/bilder_und_pdf-dateien/WS0809/spieltheorie/Auswahlkriterien.pdf, 25.11.2013.

Rieck, Christian: Spieltheorie. Eine Einführung. Eschborn, 2012.

Rothert, Jacek: The cold war and game theory. Guest Lecture for principles of economics. In: http://www.econ.umn.edu/~evdok003/ColdWar_GameTheory.pdf, 25.1.2014.

Schäffler, Christine/Eberwein, Benjamin/Lauschke, Dirk: Signalisierungsspiele in der Standardform. In: <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/artikel/Signalspiele.pdf>, 20.1.2014.

Schöning, Stefan: Bank Run. In: <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/bank-run.html>, 11.12.2013.

Springer Gabler Verlag (Herausgeber), Gabler Wirtschaftslexikon, Stichwort: Normalform. In: <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/56987/normalform-v9.html>, 20.7.2013.

Vöpel, Henning: Doping im Radsport als kollektives Gleichgewicht. In: http://www.hwwi.org/uploads/tx_wilpubdb/HWWI_Research_Paper_1-2.pdf, 8.12.2013.

Wehner, Monika: Gesellschaftliche Aspekte politischer Spieltheorie. In: http://www.strategiespielen.de/wordpress/wp-content/uploads/wehner_gesellschaftliche_aspekte_politischer_spieltheorie.pdf, 29.1.2014.

Weimann, Joachim: Spieltheorie. In: http://www.uni-magdeburg.de/vwl3/03_education/01_lectures/03_past/documents/SpieltheorieVorlesung06-07.pdf, 24.11.2013.