Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99), M. Drmota (2000–2007) und J. Wallner (2008–2017).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@oemg.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Redaktion:

C. Fuchs (Univ. Salzburg, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
R. Tichy (TU Graz)
J. Wallner (TU Graz)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung:
IBAN AT83-1200-0229-1038-9200 bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzendruck, 8044 Weinitzen.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 242 (73. Jahrgang) **Dezember 2019**

Inhalt

Die Formel auf der Titelseite entstammt einem Überblicksartikel von Peter Scholze über seine neuen Ergebnisse aus der p-adischen Geometrie anlässlich seines ICM-Vortrags 2018 in Rio de Janeiro (siehe https://arxiv.org/pdf/1712.03708.pdf). Die Formel beantwortet eine Frage von Tate, nämlich, dass eine eindeutige Galois-äquivariante Zerlegung der aufliegenden Filtrierung existiert, die zu einem in der Formel angegebenen Galois-äquivariantem Isomorphismus führt. Dabei ist X der Basiswechsel eines eigentlichen glatten rigiden Raums, definiert über einem diskret bewerteten Raum $K \subset C$. Der angegebene Isomorphismus existiert jedoch nicht in Familien analog zur Hodge-Zerlegung über den komplexen Zahlen, die ebenfalls nicht holomorph in Familien variiert.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 242 (2019), 1–7

Johann Ciglers 80. Geburtstag – ein Nachtrag

Christian Krattenthaler
Universität Wien

Univ.-Prof. Dr. Johann Cigler hat am 18. Mai 2017 seinen 80. Geburtstag gefeiert. Zu diesem Anlass hat in der Sky Lounge im Gebäude der Fakultät für Mathematik der Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien, am 25. Oktober 2017 ein "kombinatorischer Nachmittag" stattgefunden. Vortragende waren seine akademischen Enkel

- Ilse Fischer (Universität Wien) mit dem Thema *Triangular Alternating Sign Arrays*,
- Manuel Kauers (JKU Linz) mit dem Thema *Factorization of C-finite Sequences*,
- Christoph Koutschan (RICAM, Linz) mit dem Thema *Computer Algebra in the q-Calculus*,
- Carsten Schneider (RISC, JKU Linz) mit dem Thema *Symbolic Summation for Combinatorics and Particle Physics*.

Das Programm findet man unter [1]. Wir geben hier die Laudatio von Christian Krattenthaler als Dekan anlässlich dieser Festveranstaltung wieder sowie eine Abschrift (erstellt von Christian Krattenthaler) der Replik von Herrn Cigler.

1 Laudatio anlässlich des 80. Geburtstags von Prof. Johann Cigler (von Christian Krattenthaler)

Ich heiße Sie alle recht herzlich willkommen in der Sky-Lounge über der Fakultät für Mathematik zu dieser Feier anlasslich des runden Geburtstages von Professor

ISSN 0020-7926

Cigler. Ich begrüße natürlich zuallererst den Jubilar selbst. Ich begrüße ebenfalls die zahlreichen ehemaligen Dissertanten und Diplomanden Professor Ciglers, sozusagen seine akademischen “Nachkommen”, die zum Teil von sehr weit weg angereist sind, ich begrüße die akademischen Enkel sowie die akademischen Urenkel. Auch derer gibt es bereits einige. Ich begrüße weiters alle Kolleginnen und Kollegen. Wir haben auch einige internationale Gäste hier, deshalb werde ich nun in Englisch fortfahren. Ich werde mich bemühen, langsam und deutlich zu sprechen.

Johann Cigler [2]

So, welcome everybody to this little colloquium on the occasion of the anniversary of Professor Cigler. To be honest, I don’t see anybody here who looks 80 years old, not even 70. Nevertheless, unbelievable as it sounds, Cigler’s 80th birthday actually took already place in May. I am very pleased that Professor Cigler agreed and allows us to celebrate him also at the Faculty of Mathematics, even if it is somewhat belated.

Those who know him, know that this is not so obvious at all. He is modesty in person. He does not think of himself of any importance, nor does he so much like to be in the centre of attention. I want to use this occasion to try to explain, in particular to our guests, why he *is* important, which role he played in the development of so many (then) young people, what he meant to his students (at least, what he meant to me), and what he represents at the Faculty of Mathematics.

Cigler says about his own research: "I have done and do research mainly as an intellectual recreational sport." ("Ich betreibe Forschung hauptsächlich als geistigen Ausgleichssport."). Obviously, we cannot object this statement. He knows best about it. However, more importantly, and more descriptive of his research activities, is what he said frequently: "I tried to understand".

Cigler has widespread mathematical interests. As a student of the famous and influential number theorist Edmund Hlawka, he started out in number theory – more precisely, in uniform distribution. He worked in category theory, in functional analysis, before in the mid 1970s he got fascinated by papers of Gian-Carlo Rota on umbral calculus which made him move to combinatorics, where he has worked since then. In each case, his motivation was not results by themselves but always the desire "to understand". This is exactly the point which made him – as a teacher – so attractive. He put a lot of emphasis on the preparation of his courses. Whenever there was something new fascinating out there, he would study it, try to understand, and present his own view of it. Thereby he would also develop his own ideas and he would pose questions, and thus these courses would also be full of open problems and conjectures by himself, which gave ample material to work on for students.

Cigler's advising cannot be defined as the classical advising of Ph.D. students, meaning regular meetings, telling "you must do this!", "you must do that!". Instead, as I tried to outline, he gave us students a lot of "food" to "eat"; we were free to sample from it and make something out of it. In this way, he supported and stimulated the ideas and strengths of his students in the best of all ways.

Another important attraction point is Cigler's extraordinary taste in mathematics. As I said, he always tried to understand. Abstract concepts, if they contribute to this understanding, are fine, but not as an end in itself. In this sense, Cigler has always been a very concrete mathematician, with a strong affinity to elegance.

All this together also explains the widespread thesis topics and interests of his students: his students work and worked in number theory, harmonic analysis, functional analysis, complex analysis, dynamical systems, biomathematics, stochastic processes, financial mathematics, category theory, inequalities, . . . , and of course combinatorics and computer algebra. His numerous students, who are now professors, their students, many of them also professors now, and in turn their students, are ample witness of what Professor Cigler created during his service at the Faculty of Mathematics, even if it is not a school in a classical sense.

As those who watch the `arXiv` and `MathOverflow` know, Professor Cigler is active as ever. I would actually say, he is now even more active as ever.

For this colloquium, the idea is that Cigler's academic grandchildren enter the stage. We may phrase this also differently as saying that Professor Cigler's former Ph.D. students agreed that they do not want to work at this occasion, but instead let their former students do the work. May this be as it may be, I hope – I am actually sure that you will enjoy the scientific programme that is now to follow. I believe that it makes a lot of sense since, during the past few years, you communicated particularly with your grandchildren in order to help you understand.

2 Mein mathematischer Werdegang (von Johann Cigler)

Ich bin in einer Gärtnerei aufgewachsen, wo es sowohl Gemüse als auch Blumen gab, also wie es so schön heißt, Nahrung für den Körper und Balsam für die Seele. So ähnlich erging es mir auch mit der Mathematik. Einerseits nahm ich die Lehre, also die Vermittlung etablierter Resultate, sehr ernst und andererseits faszinierte mich die spielerische Suche nach interessanten Verallgemeinerungen oder eleganteren Beweisen schöner Resultate.

In meiner Familie hatte vor mir niemand eine höhere Schule besucht. Auch ich wäre wahrscheinlich bei einem landwirtschaftlichen oder handwerklichen Beruf gelandet. Weil mir das gar nicht gefiel und mir die Volksschule sehr leicht gefallen ist, haben mich meine Eltern auf Anraten des örtlichen Pfarrers in das Knabenseminar nach Hollabrunn geschickt, welches eigentlich zum Priesterberuf vorbereiten sollte. Auch wenn das nicht gerade meine Wunschvorstellung war, konnte ich dort meinen geistigen Interessen nachgehen.

Dort stand zwar Theologie im Mittelpunkt, aber im Laufe der Jahre übte die Mathematik eine immer stärkere Anziehungskraft auf mich aus. Während die Theologie auf Dogmen aufbaute, glaubte ich damals, dass man in der Mathematik alles auf evidente Tatsachen zurückführen könnte. Das gab den Ausschlag, warum ich mich für das Mathematikstudium entschieden habe. Dazu kommt, dass es in der Mathematik mehr auf Verstehen als auf Auswendiglernen ankommt. Denn ich hatte schon immer ein schlechtes Gedächtnis. Leider gilt das auch für mein Personengedächtnis, was mich oft in peinliche Situationen führte. Wie ich erst vor kurzem aus verschiedenen Publikationen entnommen habe, scheint das damit zusammenzuhängen, dass ich zu den geschätzten zwei Prozent der Bevölkerung gehöre, denen jegliches Vorstellungsvermögen fehlt. Glücklicherweise hat das meine Beschäftigung mit der Mathematik nicht behindert, sondern bloß in andere Bahnen gelenkt.

Ich erwarb mir mein Wissen fast ausschließlich aus schriftlichen Quellen. Vorlesungen gaben mir nur Anregungen, mich selbst mit den betreffenden Themen zu beschäftigen. Die meisten Anregungen erhielt ich aus den Vorlesungen von Prof. Hlawka. Er hielt gerade die Differential- und Integralrechnung, als ich zu studieren begann. Das hat mein Interesse an der Analysis und verwandten Themen geweckt. Da das Studium damals noch nicht so verschult war wie heute, konnte ich die meiste Zeit mit der Lektüre einschlägiger Bücher verbringen.

Johann Cigler mit zwei Jahren mit Vater und Lieferwagen, 1939 [3]

Starken Eindruck hat das Buch von Konrad Knopp "*Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*" auf mich gemacht. Im Unterschied zu anderen Büchern hat es sich nicht auf das Schema Definition–Satz–Beweis beschränkt, sondern alles ausführlich motiviert und erklärt und gelegentlich auch die historische Entwicklung der behandelten Themen erwähnt. Das war für mich besonders zu Beginn des Studiums sehr nützlich, da ich außer der Schulmathematik keinerlei Vorkenntnisse hatte. Besonders fasziniert war ich von unendlichen Reihen und Produkten, speziell von Potenzreihenentwicklungen und der Eulerschen Summenformel. Mich erstaunte aber auch die Tatsache, dass man sogar mit divergenten Reihen vernünftig rechnen kann, obwohl Abel sie als eine Erfindung des Teufels bezeichnet hatte, auf der man keinen sinnvollen Beweis aufbauen kann. Später haben mich die "*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*" von Pólya und Szegő fasziniert, weil dort Analogien und Verallgemeinerungen im Mittelpunkt stehen, die mich weit mehr ansprechen als rein logische Deduktionen.

Meine Dissertation über Gleichverteilung führte mich zur Funktionalanalysis und harmonischen Analyse. Mich haben auch immer wieder einige Themen interessiert, die aus mathematischen “Häresien” entstanden sind, wie etwa divergente Reihen, Nichtstandardanalysis und Distributionen. Dazu gehört auch der umbrale Kalkül, der von Gian-Carlo Rota exakt gemacht wurde. Das hat mich zu Themen zurückgeführt, die mich schon zu Beginn meines Studiums fasziniert hatten, wie etwa die Hintergründe der symbolischen Formel für die Bernoullischen Zahlen. Auch hier spielten Potenzreihen eine große Rolle, diesmal jedoch in ihrer Inkarnation als formale Potenzreihen. So gelangte ich von der Funktionalanalysis und damit zusammenhängenden Fragen der Kategorientheorie zur diskreten Mathematik und Kombinatorik und ganz speziell zur Beschäftigung mit sogenannten q-Identitäten. Im Laufe der Zeit freundete ich mich auch mit Computern und experimenteller Mathematik an. Meine mathematischen Versuche der letzten zwei Jahrzehnte wären ohne Computer nicht möglich gewesen.

Johann Cigler, 1943 [3]

Meine ursprüngliche Vorstellung, dass man für Mathematik nur Papier und Bleistift braucht, musste also auch revidiert werden, genauso wie die Vermutung, dass man alles auf evidente Tatsachen zurückführen könnte.

In meiner Lehrtätigkeit war ich vor allem bemüht, komplizierte Resultate auf ihren einfachen und typischen Kern zu reduzieren und alles von Grund auf zu beweisen.

Dabei habe ich oft mehrere verschiedene Beweise gegeben. Während das vom logischen Standpunkt aus überflüssig zu sein scheint, faszinieren mich die sich daraus ergebenden Querverbindungen innerhalb der Mathematik. Ich bin auch immer von konkreten Situationen ausgegangen und habe versucht, zu zeigen, wie man schrittweise zu abstrakteren Theorien gelangt, welche neues Licht auf diese Dinge werfen.

Wie gut mir all das gelungen ist, müssen andere beurteilen. Mich freut aber sehr, dass einige meiner früheren Diplom- bzw. Doktoratsstudenten inzwischen hervorragende Mathematiker bzw. Mathematikerinnen geworden sind.

Natürlich wäre vieles davon nicht möglich gewesen, wenn die äußeren Rahmenbedingungen nicht gestimmt hätten. In dieser Beziehung hatte ich wirklich großes Glück, für das ich sehr dankbar bin.

Referenzen

[1] https://mathematik.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/f_mathematik/Vortraege/2017_18/Kombinatorischer_Nachmittag_Cigler-1.pdf

[2] https://homepage.univie.ac.at/johann.cigler/

[3] Bereitgestellt durch J. Cigler

Adresse des Autors:
Christian Krattenthaler
Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A-1090 Wien
email christian.krattenthaler@univie.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 242 (2019), 9–27

Operatormethoden für q-Identitäten

Johann Cigler
Universität Wien

Dieser Artikel ist erstmals vor 40 Jahren in Monatshefte für Mathematik *("Operatormethoden für q-Identitäten", J. Cigler, Monatsh. Math.* **88** *(1979), 87–105 © Springer-Verlag*[1]*) erschienen und gehört zu einer der ersten kombinatorischen Arbeiten des Autors. Auf die Arbeit folgten zwischen 1980 und 1999 eine Reihe von Folgeartikeln (Teil II ebenfalls in* Monatsh. Math.*, Teil III in* Arch. Math. (Basel)*, Teile IV-VII in* Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II*), die auch in jüngster Zeit nach wie vor zitiert werden. Der Nachdruck erfolgt mit freundlicher Erlaubnis des Autors und des Springer-Verlags.*

Herrn Prof. Dr. L. Schmetterer zum 60. Geburtstag gewidmet

Abstract. Operator Methods for q-Identities. We use some simple operator methods in order to give more insight into q-identities.

Das Ziel der folgenden Überlegungen besteht vor allem darin, möglichst einfache und effektive Methoden zur Ableitung von q-Identititäten anzugeben. Die Identitäten selbst sind in den meisten Fällen wohlbekannt und in zahlreichen Arbeiten untersucht worden. Uns geht es vor allem darum, ein wenig Ordnung in das Chaos spezieller Identitäten zu bringen, so wie das für $q = 1$ in letzter Zeit mithilfe des umbralen Kalküls erreicht wurde. (Man vgl. etwa [4], [5], [13], [14].) Rein technisch gesehen geht es darum, Folgerungen aus der Identität $RT - qTR = I$ abzuleiten, wobei R und T lineare Operatoren auf dem Vektorraum P aller Polynome in der Veränderlichen x über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind und I die identische Abbildung bedeutet.

[1]Reprinted by permission from Springer Nature Customer Service Centre GmbH: Springer-Verlag, Monatshefte für Mathematik, "Operatormethoden für q-Identitäten", J. Cigler, Volume 88, Issue 2, pp. 87-105, June 1979, https://doi.org/10.1007/BF01319097.

ISSN 0020-7926 — Österr. Math. Gesellschaft

1 Der q-binomische Lehrsatz

Als einfachstes Beispiel von Operatoren R und T mit $RT - qTR = I$ betrachten wir bei festem $q \neq 0, -1$ den q-Differentiationsoperator $R = D$, definiert durch

$$(Dp)(x) = \frac{p(qx) - p(x)}{(q-1)(x)}$$

und den Multiplikationsoperator $T = x$ mit $Tp(x) = xp(x)$. Es ist dann $Dx^n = \frac{q^n-1}{q-1}x^{n-1} = [n]x^{n-1}$, wenn wir für $\alpha \in \mathbb{R}$ das in der q-Analysis übliche Symbol $[\alpha] = \frac{q^\alpha - 1}{q-1}$ verwenden.

Ebenso führen wir die Abkürzungen $[n]! = [1][2]\dots[n], [0]! = 1$ und $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!]}{[k]![n-k]!}$ ein.

Als weiteren Operator betrachten wir ε, definiert durch $(\varepsilon p)(x) = p(qx)$. Dann sind die 0peratoren D, x und ε durch die folgenden Identitäten miteinander verknüpft:

$$Dx - qxD = I, \tag{1}$$
$$Dx - xD = \varepsilon. \tag{2}$$

Man beweist das am einfachsten dadurch, dass man beide Seiten auf die Basispolynome $x^n, n = 0, 1, 2, \dots,$ anwendet. Dann sind (1) und (2) äquivalent mit den trivialen Identitäten

$$[n+1] - q[n] = 1 \tag{1'}$$

und

$$[n+1] - [n] = q^n. \tag{2'}$$

Etwas allgemeiner zeigt man mit derselben Methode

$$Dx^k - q^k x^k D = [k]x^{k-1} \tag{3}$$

und

$$Dx^k - x^k D = [k]x^{k-1}\varepsilon. \tag{4}$$

Diese Identitäten sind wieder äquivalent mit

$$[n+k] - q^k[n] = [k] \tag{3'}$$

und

$$[n+k] - [n] = [k]q^n. \tag{4'}$$

Etwas interessanter sind die dualen Identitäten

$$D^k x - q^k x D^k = [k]D^{k-1} \tag{5}$$

und

$$D^k x - xD^k = \varepsilon[k]D^{k-1}, \tag{6}$$

welche mit den folgenden Rekursionsrelationen für die q-Binomialkoeffizienten äquivalent sind:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} - q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \tag{5'}$$

und

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}. \tag{6'}$$

Für $q = 1$ erhalten wir den üblichen Differentiationsoperator D und die üblichen Binomialkoeffizienten.

Wir wollen als erstes Resultat eine besonders durchsichtige Form des q-binomischen Lehrsatzes geben.

Satz 1. *Seien A und B lineare Operatoren auf P mit $BA = qAB$. Dann gilt für $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{n-k}. \tag{7}$$

Der *Beweis* ergibt sich sofort mittels Induktion aus (5′).

Beispiel: Wählt man $A = x\varepsilon$ und $B = a\varepsilon$ mit einer Konstanten a, dann sind die Voraussetzungen erfüllt. Es gilt

$$(x\varepsilon)^k 1 = q^{\binom{k}{2}} x^k \quad \text{und}$$
$$(x\varepsilon + a\varepsilon)^k k1 = (x+a)(qx+a)(q^2x+a)\ldots(q^{k-1}x+a).$$

Es ergibt sich somit die bekannte Gleichung

$$(x+a)(qx+a)\ldots(q^{n-1}x+a) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} x^k a^{n-k}. \tag{8}$$

Bemerkung: Die einfache Idee, die zu (7) geführt hat, lässt sich auf eine Reihe weiterer Probleme anwenden. Sind etwa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Elemente einer assoziativen Algebra mit $A_j A_i = qA_i A_j$ für $i < j$, dann ist

$$[n]!A_1 A_2 \ldots A_n = \sum_{\pi} A_{\pi(1)} A_{\pi(2)} \ldots A_{\pi(n)},$$

wobei π alle Permutationen der Indizes durchläuft, wie man durch Induktion sofort verifiziert.

Andererseits gilt

$$A_{\pi(1)} A_{\pi(2)} \ldots A_{\pi(n)} = q^k A_1 A_2 \ldots A_n$$

genau dann, wenn die Permutation π genau k Inversionen, d.h. k Paare (i,j) mit $i<j$ und $\pi(i)>\pi(j)$, enthält.

Bezeichnet man mit $I(n,k)$ die Anzahl der Permutationen von $\{1,2,\dots,n\}$ mit genau k Inversionen, so gilt also die bekannte Formel

$$\sum I(n,k)q^k = [n]! = (1+q)(1+q+q^2)\dots(1+q+\dots+q^{n-1}). \tag{9}$$

Der q-binomische Lehrsatz lässt sich sehr einfach mithilfe der Eulerschen Exponentialfunktion (man vgl. z.B. [6])

$$e(z) = e_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[k]!},$$

die wir als formale Potenzreihe betrachten, formulieren.

Satz 2. *Sind A und B lineare Operatoren auf P mit $BA = qAB$, dann gilt*

$$e(Az)e(Bz) = e((A+B)z). \tag{10}$$

Der *Beweis* ergibt sich sofort durch Koeffizientenvergleich.

Beispiele:

1) Für $A = x, B = -x\varepsilon$ folgt

$$e(x)e(-x\varepsilon) = e(x(1-\varepsilon)).$$

Wendet man beide Seiten auf die konstante Reihe 1 an, so erhält man wegen $(1-\varepsilon)1 = 0$

$$e(-x\varepsilon)1 = \frac{1}{e(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{[n]!}.$$

Das ist wohl der einfachste Beweis für diese wohlbekannte Formel.

2) Für $A = x, B = a\varepsilon$ ergibt sich

$$\sum_0^{\infty} \frac{H_n(x,a)}{[n]!} z^n = e(xz)e(az) \quad \text{mit}$$
$$(A+B)^n 1 = (x+a\varepsilon)^n 1 = H_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k a^{n-k}. \tag{11}$$

3) Wählt man $A = -x\varepsilon, B = a\varepsilon$, so erhalten wir

$$\sum_0^{\infty} \frac{p_n(a,x)}{[n]!} z^n = \frac{e(az)}{e(xz)} \tag{12}$$

mit $p_n(a,x) = (a-x)(a-qx)\dots(a-q^{n-1}x)$.
Wir benötigen noch die charakteristische Eigenschaft der q-Exponentialfunktion, nämlich $De(x) = e(x)$. Daraus ergibt sich

$$\frac{e(qx)-e(x)}{(q-1)x} = e(x)$$

d.h. $e(qx) = (1+(q-1)x)e(x)$. Mit Induktion folgt dann

$$e(q^n x) = p_n(1,(1-q)x)e(x). \tag{13}$$

Satz 3. *Es gilt*

$$e(\varepsilon z)e(xt) = \frac{e(xt)e(z)}{e((1-q)xtz)}. \tag{14}$$

Beweis:

$$e(\varepsilon z)e(xt) = \sum_{k,l} \frac{\varepsilon^l z^l x^k t^k}{[k]![l]!} = \sum_{k,l} \frac{q^{kl} t^k x^k z^l}{[k]![l]!} =$$

$$= \sum \frac{(xt)^k}{[k]!} \sum \frac{(q^k z)^l}{[l]!} = \sum \frac{(xt)^k}{[k]!} e(q^k z) =$$

$$= e(z) \sum \frac{p_k(1,(1-q)z)}{[k]!}(xt)^k = e(z)\frac{e(xt)}{e((1-q)xtz)}.$$

□

Bemerkung: Dieses Ergebnis ist implizit in [3] enthalten und kann dazu verwendet werden, um das dort erzielte Resultat

$$\sum \frac{H_n(x)H_n(y)}{[n]!} z^n = \frac{e(z)e(xz)e(yz)e(xyz)}{e((l-q)xyz^2)}$$

mit $H_n(x) = H_n(x,1)$ besonders einfach abzuleiten:

$$\sum \frac{H_n(x)H_n(y)}{[n]!} z^n = \sum \frac{H_n(y)}{[n]!}((x+\varepsilon)z)^n 1 = e(y(x+\varepsilon)z)e((x+\varepsilon)z)1$$

nach (11). Aus Satz 3 ergibt sich nun die Behauptung.
Nun noch einige Modifikationen bzw. Erweiterungen des q-binomialen Lehrsatzes:
1) Ist B invertierbar auf P, dann gilt

$$p_n(I,-AB^{-1}) = (A+B)^n B^{-n} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{-k}. \tag{15}$$

Zum Beweis braucht man nur zu zeigen, dass die zwei linken Ausdrücke identisch sind, was sich sofort aus $BA = qAB$ ergibt.
2) Unter geeigneten Voraussetzungen über A und B (etwa für $A = D$ und $B = \varepsilon^{-1}$) oder indem man P zum Ring der formalen Potenzreihen erweitert (und etwa $A = x\varepsilon, B = \varepsilon$ wählt), lässt sich sofort zeigen, dass

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} A^k B^{n-k} \tag{16}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, wenn man $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1]\dots[n-k+1]}{[k]!}$ setzt.
3) Wählt man $A = x\varepsilon$ und $B = \varepsilon$ auf dem Vektorraum aller Polynome in x und $1/x$ mit $\varepsilon(x^n) = q^n x^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so ist A invertierbar und

$$A^{-m}(A+B)^{m+n} = \sum \begin{bmatrix} m+n \\ l \end{bmatrix} A^{-m} A^l B^{m+n-l} = \sum_{k=-m}^{n} \begin{bmatrix} m+n \\ k+m \end{bmatrix} A^k B^{n-k}.$$

Wendet man das auf 1 an, so ergibt sich eine Identität von MACMAHON (vgl. [9]):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{q^m}{x}+1\right)\left(\frac{q^{m-1}}{x}+1\right)\left(\frac{q}{x}+1\right)(1+x)(1+qx)\dots(1+q^{n-1}x) = \\ &= \sum_{k=-m}^{n} \begin{bmatrix} m+n \\ k+m \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} x^k. \end{aligned} \tag{17}$$

4) Aus der trivialen Gleichung $(A+B)^{r+s} = (A+B)^r(A+B)^s$ ergibt sich durch Koeffizientenvergleich das q-Analogon der Vandermondeschen Formel:

$$\begin{bmatrix} r+s \\ n \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ n-k \end{bmatrix} q^{(n-k)(r-k)}. \tag{18}$$

2 Verallgemeinerte Sheffer-Folgen

Wir nennen eine Folge $p = \{p_n\}$ von Polynomen eine Hauptfolge, wenn gilt:

1) $p_0 \equiv 1$,

2) p_n ist genau vom Grad n,

3) $p_n(0) = 0$ für $n > 0$.

Bei gegebenem q und fester Hauptfolge $p = \{p_n\}$ betrachten wir lineare Operatoren $T = T(p,q), R = R(p,q)$ und $\varepsilon = \varepsilon(p,q)$, die folgendermaßen definiert sind:

$$
\begin{aligned}
Tp_n &= p_{n+1}, n = 0,1,2,\ldots, \\
Rp_n &= [n]p_{n-1} \,\text{für}\, n \geq 1, Rp_0 = 0, \\
\varepsilon p_n &= q^n p_n.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Für die Hauptfolge $i = \{x^n\}$ und $q = 1$ ist T der Multiplikationsoperator mit x, R der Differentiationsoperator und ε die Identität.

Man rechnet wieder leicht nach, dass (1), (2), (3), (4), (5) und (6) gelten, wenn man D durch R und x durch T ersetzt. Wir verifizieren etwa die Gleichung $RT - TR = \varepsilon$. Dazu wenden wir beide Seiten auf die Basispolynome p_n an und sehen, dass wir wieder die trivialen Gleichungen $[n+1] - [n] = q^n$ erhalten.

Für eine beliebige Folge $\{a_k\}$ reeller Zahlen definieren wir den linearen Operator

$$a(R) = \sum \frac{a_k}{[k]!} R^k$$

durch

$$a(R)p_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k p_{n-k}.$$

Eine ausgezeichnete Rolle spielt der Operator $e(aR) = \sum \frac{a^k}{[k]!} R^k$, der sich für $q = 1, p = i$ und $R = D$ auf den Verschiebungsoperator $E^a = e^{aD}$ reduziert. Es gilt

$$e(aR)p_n = (T + a\varepsilon)^n 1. \tag{20}$$

Denn

$$e(aR)p_n = \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k p_{n-k} = \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k T^{n-k} 1 = (T + a\varepsilon)^n 1,$$

weil $T^k 1 = p_k$ ist und $\varepsilon T = qT\varepsilon$ gilt.

Satz 4. *Sei $Q : P \to P$ linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $RQ = QR$,

b) $e(aR)Q = Qe(aR)$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

c) Q ist von der Gestalt $Q = \sum \frac{a_k}{[k]!} R^k$ für eine gewisse Folge reeller Zahlen $\{a_k\}$.

Erfüllt Q eine dieser Bedingungen, so heißt Q R-invariant.

Beweis: Die einzige nichttriviale Implikation ist b) $\Rightarrow$ c). Sei $Lp = p(0)$. Ein Polynom p ist genau dann identisch 0, wenn $LR^k p = 0$ ist für alle k. Das sieht man etwa, indem man p nach den Basispolynomen p_k entwickelt. Und $LR^k p = 0$ für alle k ist klarerweise äquivalent mit $Le(aR)p = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Sei nun b) erfüllt. Wir behaupten, dass dann

$$Q = \sum \frac{LQp_k}{[k]!} R^k$$

gilt.

Sei nämlich $S = Q - \sum \frac{LQp_k}{[k]!} R^k$. Dann ist $Se(aR) = e(aR)S$ und $LSp_n = 0$ für alle n, d.h. $LS = 0$; $\Rightarrow Le(aR)Sp = LSe(aR)p = 0$ für alle n; $\Rightarrow Sp = 0$, d.h. $S = 0$. $\square$

Satz 5. *Sei $S : P \to P$ linear. Dann gilt $RS = qSR$ genau dann, wenn $S = \varepsilon Q$ ist mit einem R-invarianten Operator Q.*

Beweis: Es gilt $\varepsilon^{-1} R \varepsilon = qR$. Ist $S = \varepsilon Q$ mit $QR = RQ$, dann ist $RS = R\varepsilon Q = q\varepsilon RQ = q\varepsilon QR = qSR$.

Ist umgekehrt $RS = qSR$, dann ist

$$q(\varepsilon^{-1}S)R = \varepsilon^{-1}RS = \varepsilon^{-1}R\varepsilon\varepsilon^{-1}S = qR(\varepsilon^{-1}S),$$

d.h. $\varepsilon^{-1}S$ ist R-invariant. $\square$

Satz 6. *Ein Operator $S : P \to P$ erfüllt genau dann $RS - qSR = I$, wenn $S = T + \varepsilon Q$ ist mit einem R-invarianten Operator Q.*

Beweis: $RS - qSR = I$ ist gleichbedeutend mit $R(S-T) - q(S-T)R = 0$, d.h. mit $S - T = \varepsilon Q$ nach Satz 5. $\square$

Ist S ein derartiger Operator, dann definiert $S^n I = s_n(x)$ eine Polynomfolge, die wir im Anschluss an die Rotasche Terminologie ([14]) eine R-Shefferfolge nennen wollen.

Satz 7. *Sei Q ein R-invarianter Operator. Dann existiert ein eindeutig bestimmter R-invarianter Operator $s(R)$ mit $s(R)1 = 1$, sodass gilt*

$$T + \varepsilon Q = \frac{1}{s(R)} T s(R).$$

Beweis: Ist $a(R) = \sum \frac{a_k}{[k]!} R^k$ ein R-invarianter Operator, so definieren wir seine q-Ableitung $\frac{\partial}{\partial R} a(R) = a'(R)$ durch $a'(R) = \sum \frac{a_{k+1}}{[k]!} R^k$. Aus $R^n T - T R^n = \varepsilon [n] R^{n-1}$ folgt also

$$a(R)T - Ta(R) = \varepsilon a'(R). \tag{21}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{s(R)}Ts(R) = T - \varepsilon\frac{s'(R)}{s(qR)}.$$

Durch Koeffizientenvergleich stellt man fest, dass es zu jedem Operator $a(R) = \sum \frac{a_k}{[k]!}R^k$ genau einen Operator $s(R)$ mit $s(R)1 = 1$ gibt, welcher $s'(R) = a(R)s(qR)$ erfüllt. □

Für das praktische Rechnen mit R-Shefferfolgen erweist sich eine kleine Modifikation dieser Darstellung als sehr nützlich, die von P. KIRSCHENHOFER [10] stammt.

Satz 8. *Sei $s_n(x) = \frac{1}{s(R)}p_n(x)$ eine R-Shefferfolge. Dann gilt*

$$s_n(x) = (T - q^{n-1}b(R))(T - q^{n-2}b(R))\dots(T - b(R))1, \tag{22}$$

wobei $b(R)$ durch $\frac{s'(R)}{s(R)} = b(qR)$ eindeutig bestimmt ist.

Beweis: Setzt man $\frac{s'(R)}{s(R)} = b(qR)$, dann gilt

$$\frac{1}{s(R)}Ts(R) = T - \frac{b(R)}{s(R)}\varepsilon s(R)$$

und somit

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \left(T - \frac{b(R)}{s(R)}\varepsilon s(R)\right)^n 1 = \left(T - b(R)\frac{1}{s(R)}\varepsilon s(R)\right)s_{n-1}(x) = \\ &= Ts_{n-1} - b(R)q^{n-1}s_{n-1} = (T - q^{n-1}b(R))s_{n-1}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Die R-Shefferfolgen sind deshalb interessant, weil sie bei gegebener Hauptfolge $p = \{p_n\}$ alle Folgen s_n mit $Rs_n = [n]s_{n-1}$ liefern. Von speziellem Interesse sind die Shefferfolgen zur Hauptfolge $\{x^n\}$, die in der Literatur oft untersucht worden sind und auch als q-Appell-Folgen bekannt sind.

Wir wollen hier nur zur Illustration alle q-Appell-Folgen bestimmen, die bezüglich eines linearen Funktionals F auf P orthogonal sind, d.h. $F(s_k s_l) = \lambda_k\delta_{kl}$ erfüllen mit $\lambda_k \neq 0$.

Da s_n ein Polynom vom Grad n ist, ist das lineare Funktional F durch die Werte $F(s_n) = F(s_n s_0) = \delta_{n0}$ bereits eindeutig festgelegt. Wir suchen also jene q-Appellfolgen s_n, welche sogar $F(s_k s_l) = \lambda_k\delta_{kl}$ erfüllen. Da $s_l(x) = ax + b$ ist, muss speziell $F(xs_n) = 0$ sein für alle $n > 1$. Nun gilt nach Satz 8 $s_{n+1} = (x - q^n b(D))s_n$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 = F(xs_n) &= F((x - q^n b(D))s_n + q^n b(D)s_n) = \\ &= F(s_{n+1}) + q^n F(b(D)s_n) = q^n F(b(D)s_n). \end{aligned}$$

Ist nun $b(D) = \sum \frac{b_k}{[k]!} D^k$, so ist $b(D)s_n = \sum b_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} s_{n-k}$ und $F(b(D)s_n) = b_n$. Es ist also $b_n = 0$ für $n > 1$. Somit ergibt sich $b(D) = b_0 + b_1 D$. Die einzigen q-Appell-Folgen, welche bezüglich eines linearen Funktionals F orthogonal sein können, sind also gegeben durch $s_0(x) = 1, s_{n+1}(x) = (x - q^n b)s_n(x) - a[n]q^n s_{n-1}(x)$ mit gewissen reellen Zahlen $a \neq 0$ und b. Von diesen sieht man aber sofort, dass sie wirklich orthogonal sind.

Für $b = 0, a = 1$ ergeben sich die q-Hermitepolynome

$$h_n(x) = (x - q^{n-1}D)(x - q^{n-2}D)\dots(x - D)I,$$

die von P. KIRSCHENHOFER [10] genauer untersucht wurden.

3 Reziprozitätsgesetze für Operatoridentitäten

Wir wollen nun einige Methoden angeben, um Operatoridentitäten in R und T abzuleiten. Dazu führen wir zunächst bei gegebener Hauptfolge p und festem q in P ein inneres Produkt ein durch

$$\langle p_k, p_l \rangle = [k]!\delta_{kl}. \tag{23}$$

Es gilt dann

$$\langle p_k, p_l \rangle = \langle p_l, p_k \rangle \quad \text{und} \quad \langle R p_k, p_l \rangle = \langle p_k, T p_l \rangle. \tag{24}$$

Setzt man $\langle A p_k, p_l \rangle = \langle p_k, A^t p_l \rangle$, dann gilt also $(AB)^t = B^t A^t$ und

$$R^t = T, T^t = R, \varepsilon^t = \varepsilon. \tag{25}$$

Wit erhalten somit den

Satz 9 (1. Reziprozitätsgesetz)**.** *Die Abbildung $A \to A^t$ führt jede Operatoridentität $f(R,T,\varepsilon) = 0$ in eine Operatoridentität*

$$f^t(R,T,\varepsilon) = 0$$

über. Dabei gilt $f^{tt} = f$.

Beispiel: Wendet man auf die Identität

$$RT^k - q^k T^k R = [k]T^{k-1}$$

das erste Reziprozitätsgesetz an, so folgt

$$R^k T - q^k T R^k = [k]R^{k-1}.$$

Geht man von $RT^k - T^kR = [k]T^{k-1}\varepsilon$ aus, so erhält man $R^kT - TR^k = [k]\varepsilon R^{k-1}$. Speziell gehen (3) und (5) sowie (4) und (6) auseinander hervor.

Noch interessanter ist eine Reziprozität, die sich durch Betrachtung der linearen Funktionale auf P ergibt. Bezeichnet man mit L das lineare Funktional, das durch $Lp = p(0)$ definiert ist, so ist klar, dass jedes lineare Funktional F auf P von der Gestalt $F = \sum_0^k b_k LR^k$ ist. Führt man nun die linearen Funktionale

$$L_k = (-1)^k q^{-\binom{k+1}{2}} LR^k \tag{26}$$

ein, so lässt sich also jedes lineare Funktional F auf P eindeutig in der Gestalt

$$F = \sum \frac{a_k}{[k]!} L_k$$

schreiben, d.h. $F(p) = (p,F) = \sum \frac{a_k}{[k]!}(p,L_k)$ mit

$$(p_n, L_k) = (-1)^k q^{-\binom{k+1}{2}} [k]!\delta_{n,k}. \tag{27}$$

Wir übertragen nun die Operatoren R und T, die bisher nur auf P definiert wurden, auf den Vektorraum P' aller linearen Funktionale durch

$$TL_k = -\frac{[k]}{q^k} L_{k-1}, TL_0 = 0, RL_k = L_{k+1}. \tag{28}$$

Dann gilt wieder $RT - qTR = I$, weil

$$(RT - qTR)L_k = \frac{1}{q^k}([k+l] - [k])L_k = L_k$$

ist. Setzt man wieder $\varepsilon = RT - TR$, so ist

$$\varepsilon L_k = \frac{1}{q^{k+1}} L_k \tag{29}$$

wegen

$$(RT - TR)L_k = \frac{1}{q^{k+1}}([k+1] - q[k])L_k = \frac{1}{q^{k+1}} L_k.$$

Weiter ist

$$\varepsilon T = qT\varepsilon \quad \text{und} \quad R\varepsilon = q\varepsilon R. \tag{30}$$

Setzt man $(Ap, F) = (p, A^*F)$, so gilt

Satz 10. *Es gilt* $T^* = T, R^* = -R\varepsilon^{-1}$ *und* $\varepsilon^* = q^{-1}\varepsilon^{-1}$.

Beweis: Sei $\lambda_k = (-1)^k q^{-\binom{k+1}{2}}[k]!$. Dann ist $\lambda_k = -\frac{[k]}{q^k}\lambda_{k-1}$. Daher gilt

$$(Tp_n, L_k) = (p_{n+1}, L_k) = \lambda_k \delta_{n+1,k} = -\frac{[k]}{q^k}\lambda_{k-1}\delta_{n,k-1} =$$
$$= \left(p_n, -\frac{[k]}{q^k}L_{k-1}\right) = (p_n, TL_k).$$

Analog ist

$$(Rp_n, L_k) = [n](p_{n-1}, L_k) = [k+1](p_{n-1}, L_k) = [k+1]\lambda_k\delta_{n-1,k} =$$
$$= -q^{k+1}\lambda_{k+1}\delta_{n,k+1} = (p_n, -q^{k+1}L_{k+1}) = (p_n, -R\varepsilon^{-1}L_k).$$

Schließlich ist

$$(\varepsilon p_n, L_k) = q^n(p_n, L_k) = q^k\lambda_k\delta_{n,k} = (p_n, q^k L_k) = (p_n, q^{-1}\varepsilon^{-1}L_k).$$

□

Satz 11 (2. Reziprozitätsgesetz)**.** *Die Abbildung $A \to A^*$ führt jede Operatoridentität $f(R,T,\varepsilon) = 0$ in eine Operatoridentität*

$$f^*(R,T,\varepsilon) = 0$$

über. Dabei gilt $f^{**} = f$.

Beweis: $f^*(R,T,\varepsilon)$ ist definitionsgemäß eine Identität für Operatoren auf P'. Fassen wir sie jedoch als Identität für Operatoren auf P auf, so können wir f^{**} bilden. Wegen

$$T^{**} = T^* = T, R^{**} = (-R\varepsilon^{-1})^* = -(\varepsilon^*)1{-}1R^* = -q\varepsilon(-R\varepsilon^{-1}) = R$$

und

$$\varepsilon^{**} = (q^{-1}\varepsilon^{-1})^* = q^{-1}(\varepsilon^*)^{-1} = q^{-1}q\varepsilon = \varepsilon$$

gilt also $f^{**} = f$. □

Beispiele: 1) Wenden wir das zweite Reziprozitätsgesetz auf $RT^k - q^kT^kR = [k]T^{k-1}$ an, so erhalten wir

$$(T^*)^kR^* - q^kR^*(T^*)^k = [k](T^*)^{k-1},$$

d.h. $T^k(-R\varepsilon^{-1}) - q^k(-R\varepsilon^{-1})T^k = [k]T^{k-1}$ oder

$$(RT^k - T^kR)\varepsilon^{-1} = [k]T^{k-1}, \quad \text{d.h.} \quad RT^k - T^kR = [k]T^{k-1}\varepsilon.$$

Speziell sind also (3) und (4) dual zueinander. Ebenso (5) und (6).
2) Man zeigt sofort mit Induktion, dass

$$R^nT^n = \prod_{k=0}^{n-1}(q^kRT + [k]) \tag{31}$$

gilt. Dabei kommt es auf die Reihenfolge der rechten Faktoren nicht an, weil $(q^kRT + [k])p_m$ für jedes m ein Vielfaches von p_n ist.
Nun ist

$$\begin{gathered}(R^nT^n)^* = T^n(-R\varepsilon^{-1})^n = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} T^nR^n\varepsilon^{-n} \quad \text{und} \\ (q^kRT + [k])^*\varepsilon = (q^kT(-R\varepsilon^{-1}) + [k])\varepsilon = -q^kTR + [k]\varepsilon.\end{gathered}$$

Da $\varepsilon RT = RT\varepsilon$ ist, erhalten wir

$$q^{\binom{n}{2}}T^nR^n = \prod_{k=0}^{n-1}(q^kTR - [k]\varepsilon).$$

Setzt man nun $\varepsilon = 1 + (q-1)TR$ ein, so ergibt sich als reziproke Formel

$$q^{\binom{n}{2}}T^nR^n = \prod_{k=0}^{n-1}(TR - [k]). \tag{32}$$

Bemerkung: Beide Formeln folgen natürlich auch trivialerweise aus den Gleichungen

$$\begin{gathered}R^nT^np_{m-1} = [m][m+1]\dots[m+n-1]p_{m-1} \\ (q^kRT + [k])p_{m-1} = (q^k[m] + [k])p_{m-1} = [m+k]p_{m-1} \\ T^nR^np_m = [m][m-1]\dots[m-n+1]p_m \quad \text{und} \\ q^{-k}(TR - [k])p_m = q^{-k}([m] - [k])p_m = [m-k]p_m.\end{gathered}$$

3) In [11] wurde für $q = 1$ die Formel

$$x^{2n}D^n = (x^2D - (n-1)x)^n$$

bewiesen. Diese lässt sich sofort verallgemeinern zu

$$q^{n(n-1)}T^{2n}R^n = (T^2R - [n-1]T)^n. \tag{33}$$

Denn wendet man beide Seiten auf p_m an, so ergibt sich

$$\begin{gathered}q^{n(n-1)}[m][m-1]\dots[m-n+1] = \\ = ([m] - [n-1])\dots([m+n-1] - [n-1]).\end{gathered}$$

Das ist aber wegen

$$q^{n-1}[m-i] = [m+n-i-1] - [n-1]$$

richtig. Das erste Reziprozitätsgesetz liefert nun sofort

$$q^{n(n-1)}T^nR^{2n} = (TR^2 - [n-1]R)^n. \tag{34}$$

Wendet man das zweite an, so ergibt sich nach leichter Rechnung

$$R^nT^{2n} = (q^{n-1}RT^2 + [n-1]T)^n.$$

Bemerkung: Erweitert man (23) auf ganze P', so haben dort Ausdrücke wie $\sum_0^\infty \frac{a_k}{[k]!}T^k$ einen Sinn. Man kann dann die zu den Sätzen aus § 2 reziproken Aussagen ableiten, wie das für $q = 1$ zum Teil in [8] gemacht wurde.

4 Allgemeine Entwicklungssätze

Die Identitäten $R^nT - T(qR)^n = [n]R^{n-1}, n = 1,2,3,\dots$ sind äquivalent mit

$$e(Rz)T = Te(qRz) + ze(Rz).$$

Setzt man $\eta z^n = q^nz^n$, so folgt

$$e(Rz)T = (z + T\eta)e(Rz)$$

und schließlich

$$e(Rz)T^n = (z+T\eta)^n e(Rz) = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} z^k (T\eta)^{n-k} e(Rz).$$

Koeffizientenvergleich ergibt daraus

$$R^mT^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{[m]!}{[m-k]!} q^{(n-k)(m-k)} T^{n-k} R^{m-k}. \tag{35}$$

Für $m = n$ ergibt sich speziell

$$R^nT^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} q^{k^2} T^k R^k. \tag{36}$$

Bemerkung: Da $(RTR)^n p_r = R^nT^nR^n p_r$ für alle r ist, erhalten wir

$$(RTR)^n = (R^nT^n)R^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} q^{k^2} T^k R^{k+n}.$$

Diese Formel hat in der Literatur einige Beachtung gefunden. Man vgl. etwa [1] und die dort zitierte Literatur. Geht man von $R^nT - TR^n = \varepsilon[n]R^{n-1}$ aus, so erhält man

$$e(Rz)T^n = (T + \varepsilon z)^n e(Rz) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} T^{n-k}\varepsilon^k z^k e(Rz).$$

Koeffizientenvergleich liefert hier

$$R^mT^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} T^{n-k}\varepsilon^k \left(\frac{\partial}{\partial R}\right)^k R^m = \sum_k \frac{1}{[k]!}\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^k T^n \varepsilon^k \left(\frac{\partial}{\partial R}\right)^k R^m,$$

oder allgemeiner

$$a(R)f(T) = \sum_k \frac{1}{[k]!}\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^k f(T)\varepsilon^k \left(\frac{\partial}{\partial R}\right)^k a(R). \tag{37}$$

Hier wurden mit $\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)$ und $\left(\frac{\partial}{\partial R}\right)$ die q-Ableitungen nach T bzw. R bezeichnet.

In vielen Fällen lässt sich eine Identität $f(R,T) = 0$ am einfachsten dadurch beweisen, dass man $f(R,T)p_r = 0$ für alle $r = 0, 1, 2, \ldots$ nachweist. Da

$$\begin{aligned} T^nR^np_r &= [r][r-1]\ldots[r-n+1]p_r = \\ &= q^{\binom{n}{2}}[r]([r]-[1])\ldots([r]-[n-1])p_r \end{aligned}$$

gilt, wird die Darstellung eines Polynoms p in der Gestalt

$$p(x) = \sum a_k(x)_k \quad \text{mit} \quad (x)_k = x(x-[1])\ldots(x-[k-1])$$

eine große Rolle spielen. Für $q = 1$ sind das einfach die Polynome vom Binomialtyp zum Differenzenoperator

$$(\Delta p)(x) = p(x+1) - p(x).$$

Wir werden daher versuchen, eine Verallgemeinerung des Differenzenoperators auf $q \neq 1$ zu finden, welche $\Delta(x)_n = [n](x)_{n-1}$ erfüllt. Eine naheliegende Definition ist

$$(\Delta p)([n]) = \frac{p([n+1]) - p([n])}{[n+1] - [n]}.$$

Dadurch ist Δ eindeutig festgelegt und erfüllt

$$(\Delta p)(x) = \frac{p(qx+1) - p(x)}{1 + (q-1)x}$$

oder kurz

$$\Delta = \frac{1}{(E-I)x}(E-I), \qquad \text{mit} \quad (Ep)(x) = p(qx+1). \tag{38}$$

Man rechnet sofort nach, dass $\Delta(([r])_n) = [n]([r])_{n-1}$ für alle r und daher

$$\Delta(x)_n = [n](x)_{n-1}$$

erfüllt ist.
Um den Operator T mit $T^n 1 = (x)_n$ zu finden, beachten wir, dass

$$T(1+\Delta)(x)_n = (x)_{n+1} + [n](x)_n = (x-[n])(x)_n + [n](x)_n = x(x)_n$$

gilt. Daher ist $T(1+\Delta) = x$ und somit

$$T = x\frac{1}{1+\Delta}. \tag{39}$$

Ist p ein Polynom, dann gilt

$$p(x) = \sum_k \frac{(\Delta^k p)(0)}{[k]!}(x)_k,$$

weil $\{(x)_n\}$ eine Hauptfolge ist.
Beispiel: Sei $p(x) = (1+(q-1)x)^n$. Dann ist $p([r]) = q^{rn}$ und $\Delta p([r]) = (q-1)[n]q^{r(n-1)}$ und daher

$$(\Delta p)(x) = (q-1)[n](1+(q-1)x)^{n-1}.$$

Somit ist

$$(\Delta^k p)(0) = (q-1)^k [n][n-1]\dots[n-k+1].$$

Daraus folgt

$$(1+(q-1)x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(q-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (q-1)^k (x)_k.$$

Daraus lässt sich sehr einfach eine explizite Formel für Δ^n ableiten:

$$q^{\binom{n}{2}}\Delta^n = \frac{1}{(1+(q-1)x)^n}\prod_{k=0}^{n-1}(E-q^k). \tag{40}$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass für alle r gilt

$$q^{\binom{n}{2}}(1+(q-1)x)^n\Delta^n(1+(q-1)x)^r = \prod_{k=0}^{n-1}(E-q^k)(1+(q-1)x)^r.$$

Das ist aber unmittelbar zu verifizieren. □

Wir definieren nun die q-Stirlingzahlen erster Art $s(n,k)$ und zweiter Art $S(n,k)$ als Koeffizienten in den Identitäten

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$$

und

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k.$$

Diese wurden bereits von L. CARLITZ [2] und GOULD [7] studiert.
Aus der Definition ergeben sich sofort die Rekursionen

$$\begin{aligned} s(n+1,k) &= s(n,k-1) - [n]s(n,k) \quad \text{und} \\ S(n+1,k) &= S(n,k-1) + [k]S(n,k), \end{aligned}$$

sowie die Formel

$$\begin{aligned} S(n,k) = \left.\frac{\Delta^k x^n}{[k]!}\right|_{x=0} &= \frac{1}{[k]!}\frac{q^{-\binom{k}{2}}}{(1+(q-1)x)^k}\prod_{i=0}^{k-1}(E-q^i)x^n\Bigg|_{x=0} = \\ &= ([k]!q^{\binom{k}{2}})^{-1}\sum_{i=0}^{k}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}(-1)^i q^{\binom{i}{2}}[k-i]^n \end{aligned}$$

wegen (40), (8) und $(E^n p)(0) = p([n])$.
Für $q = 1$ ist die umbral-inverse Folge zu $(x)_n$, die Folge der Exponentialpolynome $\varphi_n(x) = \sum S(n,k)x^k$ (vgl. [14], p. 747). Im allgemeinen Fall erweist es sich als zweckmäßiger, die Polynome

$$\varphi_n(x) = \sum S(n,k)q^{\binom{k}{2}}x^k$$

zu betrachten.
Aus der Rekursionsformel für die Stirlingzahlen ergibt sich dann sofort die Rekursionsformel

$$\varphi_{n+1}(x) = x(D+\varepsilon)\varphi_n(x) = x\varphi_n(qx) + x\varphi_n'(x).$$

Beachtet man, dass

$$x(D+\varepsilon) = \frac{1}{e(x)}(xD)e(x)$$

gilt, so ergibt sich schließlich

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{e(x)}(xD)^n e(x) = \frac{1}{e(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[k]^n x^k}{[k]!}.$$

Während der Operator T für die Folge $\{\varphi_n\}$ durch $T = x(\varepsilon + D)$ gegeben ist, konnte ich für den Operator R mit $R\varphi_n = [n]\varphi_{n-1}$ im Falle $q \neq 1$ bisher keine einfache Formel finden.

Aus diesen Ergebnissen folgen sofort die Operatoridentitäten

$$q^{\binom{n}{2}} T^n R^n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(TR)^k \tag{41}$$

und

$$(TR)^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) q^{\binom{k}{2}} T^k R^k. \tag{42}$$

Für $q = 1$ findet man diese Ausdrücke z. B. in [12]. Auch die anderen dort angegebenen Formeln lassen sich auf den Fall $q \neq 1$ verallgemeinern. Da es mir hier aber hauptsächlich um Methoden zu tun ist, möchte ich nur ein weiteres Resultat erwähnen, von dessen Richtigkeit man sich durch Nachrechnen leicht überzeugen kann: Definiert man die q-Laguerrepolynome $L_n^{(\alpha)}(x)$ durch

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &= x^{-\alpha}(D-\varepsilon)^n x^{n+\alpha} = x^{-\alpha}\frac{1}{e(-x)} D^n e(-x) x^{n+\alpha} \\ &= \sum_k \begin{bmatrix} n+\alpha \\ n-k \end{bmatrix} q^{k^2+\alpha k} \frac{[n]!}{[k]!}(-x)^k, \end{aligned}$$

so sieht man, dass (36) eine Darstellung von $R^n T^n$ durch $L_n^{(0)}(x)$ gibt.

Das ist ein Spezialfall der etwas allgemeineren Formel

$$(R^l T^l)^{-1} R^{n+l} T^{n+l} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+l \\ n-k \end{bmatrix} \frac{[n]!}{[k]!} q^{k^2+kl} T^k R^k,$$

in welcher die $L_n^{(l)}(x)$ auftreten. Für $q = 1$ stammt dieses Resultat von H. W. Gould und A. T. Hopper [8].

Literatur

[1] Al-Salam, W.A., und M. E. H. Ismail: Some operational formulas. J. Math. Anal. Appl. 51, 208–218 (1975).

[2] Carlitz, L.: q-Bernoulli numbers and polynomials. Duke Math. J. 15, 987–1000 (1948).

[3] Carlitz, L.: A q-identity. Mh. Math. 67, 305–310 (1963).

[4] Cigler, J.: Some remarks on Rota's umbral calculus. Indag. Math. 40, 27–42 (1978).

[5] FEINSILVER, PH. J.: Special Functions, Probability Semigroups, and Harmonic Flows. Lecture Notes Math. 696. Berlin–Heidelberg–New York: Springer. 1978.

[6] GOLDMAN, J., und G.-C. ROTA: Finite vector spaces and Eulerian generating functions. Studies Appl. Math. 19, 239–258 (1970).

[7] GOULD, H.W.: The q-Stifling numbers of first and second kinds. Duke Math. J. 28, 281–289 (1961).

[8] GOULD, H.W., and A. T. HOPPER: Operational formulas connected with two generalizations of Hermite polynomials. Duke Math. J. 29, 51–63 (1962).

[9] HIRSCHHORN, M. D.: Simple proofs of identities of MacMahon und Jacobi. Discrete Math. 16, 161–162 (1976).

[10] KIRSCHENHOFER, P.: Beiträge zu Rota's Theorie der Sheffer- und Faktorfolgen. Dissertation. Wien. 1979.

[11] KLAMKIN, M.S., und D. J. NEWMAN: On the reducibility of some linear differential operators. Amer. Math. Monthly 66, 293–295 (1959).

[12] RIORDAN, J.: Combinatorial Identities. New York–London: J. Wiley. 1968.

[13] ROMAN, S.M., und G.-C. ROTA: The umbral calculus. Adv. Math. 27, 95–188 (1978).

[14] ROTA, G.-C., D. KAHANER und A. ODLYZKO: Finite operator calculus. J. Math. Anal. Appl. 42, 684–760 (1973).

Adresse des Autors:
Prof. Dr. J. Cigler
Institut für Mathematik
Universität Wien
Strudlhofgasse 4
A-1090 Wien, Österreich
email johann.cigler@univie.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 242 (2019), 29–32

Bericht vom zweiten ÖMG-Studierendentreffen und Early Student Award

Tobias Hell, Reinhard Winkler, Wolfgang Woess
Universität Innsbruck, TU Wien, TU Graz

Von Montag, dem 9., bis Mittwoch, den 11. September 2019, fand im bifeb bei Strobl am Wolfgangsee das zweite "ÖMG-Studierendentreffen" mit der Verleihung des "Early Students Award" statt. Über das erste Treffen vom 17. bis 19.9.2018 haben wir in den IMN ausführlich berichtet (Nr. 239, Dezember 2018, p. 25-34).

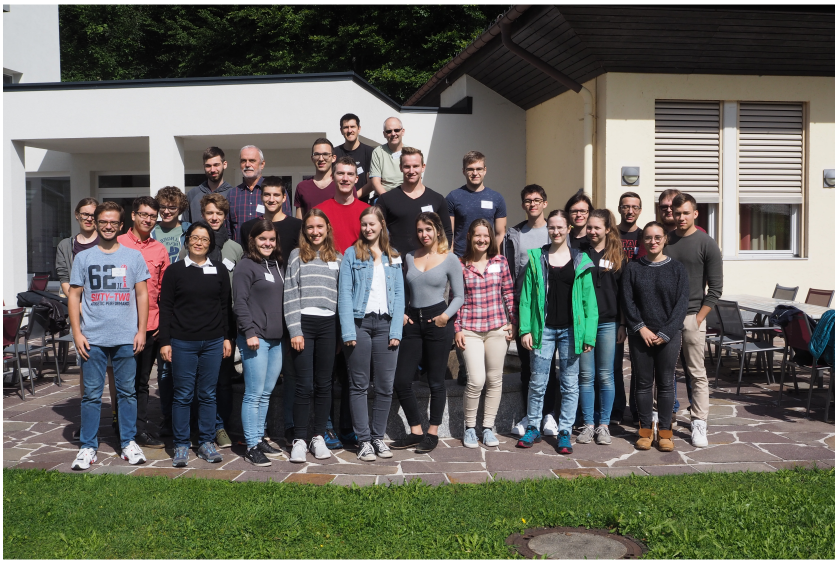

Bild 1: Gruppenfoto vor dem Bürglsaal

Das zweite Treffen folgte den im Großen und Ganzen sehr erfolgreichen Programmideen vom Vorjahr: An den ersten beiden der vier Halbtage, Montagnachmittag

ISSN 0020-7926

und Dienstagvormittag, standen Vorträge auf dem Programm, Dienstagnachmittag ein Ausflug per Schiff auf dem Wolfgangsee mit einer kleinen Wanderung, und Mittwochvormittags gab es zum Abschluss kleinere Diskussionsrunden zu verschiedenen Themen.

Die großen, einstündigen Vorträge wurden von unseren Gästen gehalten. Als erster Vortragender berichtete Johannes Morgenbesser, der sich mit Forschungsarbeiten aus der reinen Mathematik habilitiert hat und seit einigen Jahren an der Österreichischen Nationalbank tätig ist, von seiner beruflichen Tätigkeit. Obwohl für viele seiner Aufgaben ein Mathematikstudium keine denknotwendige Voraussetzung ist, erweist ein solches sich dennoch als die beste Voraussetzung. Entsprechend sind unter seiner Kollegenschaft Personen mit universitärem Abschluss in Mathematik deutlich in der Mehrheit.

Den zweiten großen Vortrag hielt Mihyun Kang, Professorin an der TU Graz, über ihr Forschungsgebiet aus der Graphentheorie. Im Zentrum ihrer Ausführungen stand das für dieses Gebiet typische “Schwellenphänomen”: Bei großer Knotenzahl gibt es einen sehr schmalen Schwellenbereich für die Kantenzahl derart, dass darunter die allermeisten Graphen ein bestimmtes qualitatives Verhalten zeigen, welches sich deutlich von dem über diesem Schwellenbereich unterscheidet.

Die übrigen Vorträge waren kürzer und wurden von den Organisatoren des Treffens (= Autoren dieses Berichts) über ausgewählte ihrer Interessensgebiete gehalten.

Zeremonieller Höhepunkt des ÖMG-Studierendentreffens war die Verleihung der Early Students Awards. Es gab 25 Preisträger:

- Konstantin Andritsch, Julius Baumhakel und Erion Morina aus Graz;
- Robin Kaiser, Melanie Schatzer und Christina Strohmenger aus Innsbruck;
- Jessica Hautz, Tobias Lechner und Peter Rescher aus Klagenfurt;
- Simon Breneis, Gabriele Dürnberger und Markus Kirchweger aus Linz;
- Carina Premstaller aus Salzburg;
- Nick Chapman, Aleksandar Dadic, Paula Hilbert, Matthias Pfeifer, Markus Stimpfle und Corina van Dyck von der TU Wien;
- Florian Fürnsinn, Rossen Nenov, Markus Reibnegger, Chiara Schindler, Stephan Schneider und Gunter Wirthumer von der Universität Wien.

Allen wird mit dem Preis auch eine einjährige ÖMG-Mitgliedschaft angeboten.

Bild 2: Gruppenfoto vom Ausflug

Wie im Vorjahr wurden von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern anonyme Rückmeldungen erbeten. Die wenigen kritischen Anmerkungen betreffen untergeordnete Kleinigkeiten, die beim nächsten Mal leicht verbessert werden können. Bei Weitem überwog das Positive, sodass sich die ÖMG ermutigt fühlen darf, die Veranstaltung zu einer dauerhaften Einrichtung werden zu lassen. Kolleginnen und Kollegen, die sich in künftigen Jahren einbringen und für eine gewisse Zeit dem Organisationsteam angehören wollen, sind herzlich eingeladen, dies zu tun. Ein paar Tage in der Gesellschaft hervorragender junger Mathematikerinnen und Mathematiker, wie wir sie nun zum zweiten Mal verbringen durften, wird schwerlich jemand bereuen!

Adresse der Autoren:

Tobias Hell
Universität Innsbruck
Institut für Mathematik
Technikerstr. 13
A-6020 Innsbruck
email tobias.hell@uibk.ac.at

Reinhard Winkler
TU Wien
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Wiedner Hauptstr. 8-10
A-1040 Wien
email reinhard.winkler@tuwien.ac.at

Wolfgang Woess
TU Graz
Institut für Diskrete Mathematik
Steyrergasse 30
A-8010 Graz
email woess@tugraz.at

Buchbesprechungen

A. Escassut: Value Distribution in p-adic Analysis. World Scientific, New Jersey, World Scientific, New Jersey, 2016, xiii+544 S. ISBN 978-981-4730-10-5 H/b £ 137.

Diese Monografie, die von einem führenden Experten verfasst wurde, behandelt die moderne Theorie analytischer Funktionen, die auf einer Teilmenge eines algebraisch abgeschlossenen Körpers definiert sind, der bezüglich eines ultrametrischen Absolutbetrags vollständig ist. Sie enthält einige Resultate, die erst in jüngerer Zeit bewiesen wurden. Etliche davon stammen vom Autor oder wurden in Zusammenarbeit mit ihm erzielt. Die Überschneidungen mit der zuvor publizierten Lehrbuchliteratur über p-adische Analysis sind entsprechend gering.

Das Thema nicht-archimedischer analytischer Funktionen wird wesentlich umfassender behandelt, als der Titel vermuten lässt. So findet man die von M. Krasner und P. Robba stammende Version des Satzes von Mittag-Leffler, die Motzkin-Zerlegung und eine ultrametrische Version des Corona-Theorems. Das Herzstück des Buchs ist die p-adische Nevanlinna-Theorie für ultrametrische Körper der Charakteristik null und ihre Anwendungen.

Auch wenn der Autor sich bemüht hat, die nötigen Vorkenntnisse gering zu halten, wird es kaum möglich sein, den Inhalt ohne vorheriges Wissen über p-adische Analysis zu verstehen. Dieser Band wird für alle, die die behandelte Theorie erlernen, verstehen oder überblicken wollen, ein wichtiges Hilfsmittel sein, an dem man nur schwer vorbeikommt.

C. Baxa (Wien)

M. J. Bowick, D. Kinderlehrer, G. Menon, C. Radin (eds.): Mathematics and Materials. (IAS/Park City Mathematics Series, Vol. 23.) American Mathematical Society, Providence (USA), 2017, 327 S. ISBN 978-1-4704-2919-5 H/b $ 104.

Dieses Buch ist ein Beitrag aus einer Reihe von Lecture Notes zu Summer Schools, die am IAS/Park City stattfinden. In diesem Fall widmet sich die Summer School einer Reihe von mathematischen Problemen im Umfeld der Materialwissenschaften, wobei hier besonderes Augenmerk auf mikroskopische, vor allem stochastische, Modelle sowie den Übergang zu makroskopischen Modellen gelegt wird. Dieser Aspekt hebt den Band signifikant von anderen Beiträgen mit ähnlichem Titel ab, die sich vor allem mit der Analyse von Kontinuumsmodellen beschäftigen. Das Buch beginnt mit einigen grundlegenden Themen der statistischen Mechanik, die sehr formal beschrieben werden, und widmet sich dann in einer zweiten Vorlesung mathematisch genauer energieminimierenden Konfigurationen und optimalen Packings. In weiteren Kapiteln werden noch Aspekte der Entropie, Selbst-Assemblierung und zur Form der mikroskopischen Teilchen beleuchtet. Diese basieren auf formalen mathematischen Argumenten, eher in der Tradition der theoretischen Physik. Die beiden letzten Vorlesungen widmen sich dann dem Übergang zu Kontinuumsmodellen. Eine sehr schöne mathematische

Einführung inklusive historischer Bemerkungen ist der Teil zu statistischer Mechanik und nichtlinearer Elastizität, während das letzte Kapitel deutlich technischer Fehlerabschätzungen in der Homogenisierungstheorie, basierend auf Korrektoren, diskutiert. Insgesamt ist die Sammlung also relativ inhomogen, sie eignet sich aber sicher, um einen Einblick in verschiedene Modelle und Probleme des Gebiets auch ohne zu spezielle Vorkenntnisse zu erhalten. Erhofft man sich Einblicke in die großen mathematischen Fragen, muss man sich auf wenige Kapitel beschränken.

M. Burger (Erlangen)

A. Clay, D. Rolfsen: Ordered Groups and Topology. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 176.) American Mathematical Society, Providence (USA), 2016, 154 S. ISBN 978-1-4704-3106-8 H/b $ 79.

Der Titel dieses etwa 150 Seiten starken und in 10 Kapitel gegliederten Buchs verlangt nach einer Spezifizierung der Rollen, die Topologie darin in Bezug auf geordnete Gruppen spielt. Und zwar geht es nicht um Gruppentopologien auf geordneten Gruppen, sondern vorwiegend (wenn auch nicht nur) um die Frage, ob man gewissen Gruppen topologischer Herkunft (vor allem Fundamentalgruppen), eine Ordnung $\leq$ aufprägen kann, die mit der Gruppenstruktur verträglich ist. Mit Ordnungen sind dabei Totalordnungen (= lineare Ordnungen, Ketten) gemeint, nicht beliebige partielle oder Verbandshalbordnungen. Verträglichkeit wiederum bedeutet (abgesehen von Kapitel (9)) einseitige Ordenbarkeit (linksseitig: $a \leq b$ impliziert $ca \leq cb$; rechtsseitig: $a \leq b$ impliziert $ac \leq bc$) oder Biordenbarkeit, wo beide einseitigen Bedingungen erfüllt sind. Eine zweite Rolle der Topologie, die untersucht wird, ergibt sich aus der Möglichkeit, die Menge aller verträglichen Ordnungen auf einer gegebenen Gruppe mit einer natürlichen Topologie zu versehen.

Die ersten beiden Kapitel stellen eine knappe Einführung in die Theorie der geordneten Gruppen dar, das erste eher elementar, das zweite mit Ergebnissen wie beispielsweise dem klassischen Satz von Hölder, wonach jede archimedisch linksgeordnete Gruppe in die geordnete Gruppe der reellen Zahlen eingebettet werden kann. Die Kapitel 3 bis 8 widmen sich unter dem eingangs beschriebenen Gesichtspunkt der (Links-) Ordenbarkeit unterschiedlichen Klassen von Gruppen: freie Gruppen und Fundamentalgruppen von Flächen (3), Knotengruppen (4), Fundamentalgruppen von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten (5) und von Blätterungen und Faserbündeln (6), Zopfgruppen (7) und gewisse Untergruppen (relativer) Homöomorphismengruppen (8). In Kapitel 9 wird als Verschärfung die Conrad-Linksordenbarkeit von Gruppen untersucht, in Kapitel 10 schließlich geht es um den kompakten Raum $LO(G)$ sämtlicher Linksordnungen auf einer Gruppe G. Die Topologie auf dieser Menge rührt daher, dass jede Gruppenlinksordnung $\leq$ durch die Menge $P_{\leq} \subseteq G$ der positiven Elemente eindeutig bestimmt ist. Diese Menge $P_{\leq}$ wiederum kann mit ihrer charakteristischen Funktion, also einem Element des kompakten Raumes $\{0,1\}^G$, identifiziert werden. Insbesondere ist $LO(G)$ total unzusammenhängend. Typische Ergebnisse machen Aussagen darüber, ob es isolierte Punkte in $LO(G)$ gibt. Ist das nicht der Fall, so folgt für abzählbares G, dass $LO(G)$ homöomorph zur Cantormenge ist.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Buch ein zwar eher spezielles, durchaus aber sehr reizvolles Thema mit interessanten Querverbindungen auf sehr ansprechende Weise darstellt.

R. Winkler (Wien)

J. Buczyński, M. Michałek, E. Postinghel (eds.): Schubert Varieties, Equivariant Cohomology and Characteristic Classes. Impanga 15. (Series of Congress Reports, Vol. 13.) European Mathematical Society, Zürich, 2018, 364 S. 978-3-03719-182-8 H/b € 78.

This book contains the proceedings of a conference that took place in Bedlewo in April 2015. This conference marked the 15th anniversary of a series of activities of the Polish Academy of Sciences on Algebraic Geometry. The conference and the book are dedicated to the memory of Friedrich Hirzebruch, who had a strong influence on the organizers of these activities. Therefore, the volume contains an article collecting reminiscences to him. In addition, it contains twelve articles by various authors on topics related to flag varieties, Schubert calculus, characteristic classes, and representation theory. Finally, there is an introductory text by the editors, which outlines the whole series of activities and puts the articles in the volume into perspective.

A. Cap (Wien)

K. Fujiwara, F. Kato: Foundations of Rigid Geometry 1. (Monographs in Mathematics.) European Mathematical Society, Zürich, 2018, 863 S. ISBN 978-3-03719-135-4 H/b € 108.

Rigid geometry refers to various approaches to a non-Archimedian analog of analytic geometry. This is the first volume of a series of books in which the authors present their approach to this topic. Their basic principle is to obtain rigid geometry from a birational geometry of model geometries. This is influenced by M. Raynaud's approach to rigid geometry via the geometry of formal schemes and on Zariski's approach to birational geometry.

After a detailed introduction, the book splits into three big chapters: The first chapter collects background from a broad range of areas of algebra, topology and geometry. The second chapter discusses the geometry of formal schemes and formal algebraic spaces. The third chapter develops the authors approach to rigid geometry, thus forming the core of the book. The approach is compared to Tate's rigid analytic geometry, Huber's adic geometry, and Berkovich analytic geometry in appendices to the chapter.

The book is encyclopedic in style and largely self contained. It also contains a large number of exercises related to all topics covered in the text.

A. Cap (Wien)

W. König (ed.): Mathematics and Society. European Mathematical Society, Zürich, 2016, 314 S. ISBN 978-3-03719-164-4 H/b € 42.

Dieses Buch ist ein sehr breit angelegter Beitrag, um, wie es der Titel verrät, die Rolle der Mathematik in der Gesellschaft zu beleuchten. Dabei finden sich neben einigen in diesem Zusammenhang erwartbaren Beiträgen, etwa zur Mathematik in der Finanzwelt oder Industrie, einige sehr originelle Themen. So beinhaltet der Band etwa einen Beitrag von George Szpiro zur journalistischen Arbeit über Mathematik oder einen gewohnt unterhaltsam geschriebenen Beitrag von Albrecht Beutelspacher zur Wirkung von interaktiven Mathematik-Experimenten. Darüber hinaus streift das Buch eine Vielzahl von Themen, von hochdimensionaler Statistik, über geometrische Probleme in der Architektur und in der Natur bis zur Kryptologie. Die einzelnen Kapitel sind dabei in sehr unterschiedlichem Stil gehalten, teilweise mit doch gewissem mathematischen Anspruch, teilweise bildreich und eine breite Leserschaft ansprechend. Auch wenn der Band natürlich nicht umfassend zur Rolle der Mathematik in der Gesellschaft sein kann als offensichtliche Auslassungen fallen mir sofort die Medizin und künstliche Intelligenz ein so bietet er doch ein umfangreiches Panoptikum der Mathematik in der modernen Welt. Der Sammelband ist nicht nur eine interessante Lektüre, er kann sicher auch noch jedem Mathematiker neue Beispiele vermitteln, was die Mathematik für die moderne Gesellschaft bedeutet – und damit auch helfen, häufig gestellte Fragen von Schülern oder weniger mathematik-affinen Erwachsenen zu beantworten.

M. Burger (Erlangen)

A. Grigor'yan: Introduction to Analysis on Graphs. (University Lecture Series.) American Mathematical Society, Providence (USA), 2018, 150. S. ISBN 978-1-4704-4397-9 P/b $ 49.

Der Autor ist ein bekannter Experte für Analysis auf Graphen und mit dem vorliegenden Buch bietet er eine angenehm leserfreundliche Einführung in dieses faszinierende Themengebiet. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Theorie des Laplace-Operators auf endlichen und unendlichen Graphen sowie verwandten Themen wie Irrfahrten (random walks) auf Graphen. Zunächst werden elementare Begriffe der Graphentheorie eingeführt, ehe zum Ende des ersten Kapitels die Hauptthemen des Buchs vorgestellt werden: Irrfahrten, der Laplace-Operator und das Dirichlet-Problem. Die darauffolgenden beiden Kapitel widmen sich dann ausführlich den Eigenwerten des Laplace-Operators, deren Bedeutung sowie zahlreichen Beispielen und Schranken für die Eigenwerte; hier ist insbesondere Cheegers Ungleichung hervorzuheben. In Kapitel 4 wird die Theorie des

Laplace-Operators und seiner Eigenwerte auf unendliche Graphen ausgeweitet. Die letzten beiden Kapitel befassen sich schließlich weiter mit Irrfahrten und dem Wärmeleitungskern; besondere Beachtung findet dabei die Frage nach der Rekurrenz oder Transienz von Irrfahrten. Eine Sammlung von etwas mehr als 50 Übungsaufgaben rundet das Ganze ab. Das Buch kann als Unterlage für eine Spezialvorlesung zum Thema ebenso empfohlen werden wie zum Selbststudium für Studierende, die zumindest Grundkenntnisse von Analysis, linearer Algebra und Wahrscheinlichkeitstheorie besitzen.

S. Wagner (Stellenbosch)

B. W. Kernighan: Millions, Billions, Zillions. Defending Yourself in a World of Too Many Numbers. Princeton University Press, Princeton, 2018, 176 S. ISBN 978-0-691-19013-6 P/b £ 17,99.

Contrary to my expectations based on the title, this book is more than an ode to numbers and their importance in our everyday life. The author's intention is not just to introduce people to the magical world of numbers, but to give them the ability to question every numeric fact that they are confronted with. In 14 short chapters Brian W. Kernighan points out how oftenly newspapers, magazines, etc. publish unrealistic and misleading numbers, units or graphics. The book gives basic tricks on how to deal fearlessly with numbers and detect mistakes or misrepresentations within publications. All in all, I can wholeheartedly recommend reading this book, because of the infectious way the author describes his interaction with numbers.

J. Herret (Wien)

J. Brzezinski: Galois Theory Through Exercises. (Springer Undergraduate Mathematics Series.) Springer International Publishing, Cham, 2018, 293 S. ISBN 978-3-319-72325-9 P/b € 38,49.

This really nice and well-written book gives an introduction to Galois Theory through exercises. Each chapter starts with a quick introduction to the notions and to the most important results and then proceeds with a series of exercises in which the theory is further developed. The exercises also include such where the use of the computer is required. (Maple is recommended, but also PARI or SAGE can be used.) The following chapters are included: Solving Algebraic Equations (as a starter to the subject), Field Extensions, Polynomials and Irreducibility, Algebra Extensions, Splitting Fields, Automorphism Groups of Fields, Normal Extensions, Separable Extensions, Galois Extensions, Cyclotomic Extensions, Galois modules (this is the most abstract chapter included in the book), Solvable Groups (covering the group theory), Solvability of Equations, Geometric Constructions (which could be read already much earlier), Computing Galois Groups. The exercises in each chapter are ordered by increasing difficulty and going from standard to special. An additional chapter contains 108 supplementary problems without hints. In Chapter 17 proofs of the statements in the above 15 chapters are given. Hints and answers to the problems for the above 15 chapters are given in Chapter 18. Finally, in Chapter 19 examples (instead of solutions) and selected solutions to more difficult examples are given. The purpose is much governed by the experience that students have much more problems solving exercises in abstract algebra than in calculus, say, which the author of this nice books tries to overcome in this way. Preliminary knowledge from standard algebra courses (on groups, rings and fields) are added in an appendix (including proofs of many statements). This book is recommendable to anyone who wants to learn Galois Theory through extensively solving exercises.

C. Fuchs (Salzburg)

S. Proß, T. Imkamp: Brückenkurs Mathematik für den Studieneinstieg. Grundlagen, Beispiele, Übungsaufgaben. Springer Spektrum, Berlin, 2018, 369 S. ISBN 978-3-662-56722-7 P/b € 29,99.

Zur Überbrückung einer wachsenden Kluft zwischen Schul- und universitärer Mathematik werden, wie auch an der Uni des Besprechers, Brückenkurse für Studienanfänger angeboten. Das vorliegende Buch richtet sich genau an solche Personen, sowohl an zukünftige Studierende wie auch an Lehrpersonen eines solchen Kurses. Es wird Bekanntes aus der Schule wiederholt und mit vielen Beispielen erläutert, aber auch Neues eingeführt und vorbereitet.

Die im Buch behandelten Themen sind Algebra-Grundwissen, Beweisverfahren (wobei zunächst nur auf das Nachvollziehen von Argumenten und erst später auf das selbstständige Durchführen von einfachen Beweisen Wert gelegt wird), Aussagenlogik und Mengenlehre (mit dem Hinweis, dass diese Themen leider aus den Lehrplänen der Schulen vollständig verschwunden sind), Abbildungen, Gleichungen und Ungleichungen, komplexe Zahlen, Folgen und Grenzwerte, Reihen, Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit, Grundlagen der Differentialrechnung: Differenzierbarkeit und Ableitung, Sätze der Differentialrechnung: Funktionsuntersuchung, Rationale Funktionen, Berechnung spezieller Grenzwerte – die de l'Hospitalschen Regeln, Integralrechnung, gewöhnliche Differentialgleichungen und Taylorreihen sowie Polynomapproximationen.

Teile sind als Extramaterial gedacht (wie auch die letzten beiden Kapitel) und mit einem Stern versehen. Jedes Kapitel endet mit einigen Aufgaben. Vollständige Lösungen zu diesen Aufgaben werden in einem zweiten Teil des Buchs (auf ca. 120 Seiten) ausführlich dargestellt. Es ist sehr klar gegliedert, enthält auch bei kleinen Rechnungen genaue Erklärungen der gemachten Umformungen sowie Arbeitsaufforderungen (in grau hinterlegten Boxen), gewisse Gedankengänge genau zu durchleuchten.

Das Buch erfüllt aus Sicht des Besprechers daher wunderbar den angestrebten

Zweck und kann als Vorlage für einen Brückenkurs, als Ergänzung eines solchen Kurses oder zum Selbststudium empfohlen werden.

C. Fuchs (Salzburg)

H. K. Pathak: An Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory. Springer Singapore, Singapur, 2018 830 S. ISBN 978-981-10-8865-0 H/b € 85,59.

Es handelt sich um ein gutes und umfangreiches Übersichtsswerk über nichtlineare Analysis und Fixpunkttheorie und ist insgesamt gut geschrieben. Besonders positiv sind die umfangreichen theoretischen Grundlagen im Kapitel "Fundamentals" sowie in den folgenden Kapiteln über Banachräume und Differentialrechnung. Das Werk kann daher als in sich geschlossen angesehen werden, man benötigt bzgl. der Grundlagen keine Fremdliteratur. Trotzdem beinhaltet es auch ein umfangreiches Literaturverzeichnis für weiterführende Literatur. Der Leser sollte allerdings bereits einen Master in einer mathematischen Wissenschaft besitzen.

Der Fokus dieses Werks liegt – wie schon im Titel angegeben – auf dem Kapitel über Fixpunkttheorie mit seinen diversen Fixpunktsätzen, welches mehr als 200 Seiten einnimmt. Es folgen Abbildungsgrade und eine Übersicht über Variationsmethoden (z.B. Rayleigh-Ritz, Galerkin, Projection, Variationsungleichungen, Finite Elemente, Trefftz, Kantorovich, ...), wobei jede kurz vorgestellt und auf weiterführende Literatur verwiesen wird. Den Abschluss bilden drei Kapitel über Anwendungen der zuvor beschriebenen Theorie.

Leider wirkt das Werk aber auch hastig geschrieben und lässt etwas Sorgfalt vermissen: So sollte Appendix A vermutlich "Basic Theorems" heißen. und obwohl das Buch unter anderem von Variationsungleichungen handelt, sucht man den Klassiker von Kinderlehrer und Stampacchia vergebens.

Wer sich aber an solchen Details nicht stört, für den bietet es einen exzellenten Überblick über die vorhandenen Methoden sowie entsprechende Verweise auf weiterführende Literatur. Es ist insbesondere interessant für den Praktiker, der sich rasch einen Überblick über die vorhandenen Methoden verschaffen will und entscheiden muss, welche die passende für ein gegebenes Problem ist.

L. Holzleitner (Karlsruhe)

P. J. Olver, C. Shakiban: Applied Linear Algebra. (Undergraduate Texts in Mathematics.) Springer International Publishing, Cham, 2018, 679 S. ISBN 978-3-319-91040-6 H/b € 65,99.

This book gives a thorough introduction to linear algebra and many connections to applications thereof in science, engineering, computing, statistics, data science, etc. It starts with linear algebraic systems (basically linear systems of equations), then gives an introduction to the theory of vector spaces and bases, goes to inner products and norms over orthogonality, minimization and least squares over equilibrium to linearity (meaning linear functions and transformations) and then covers the theory of eigenvalues and singular values. It ends with chapters on iteration and dynamics. Algorithmic schemes include LU, LDV, Cholesky, QR factorization, Forward and Back Substituation, Jacobi, Gauss-Seidel method and SOR, power method and QR algorithm, Krylov subspace methods to mention the most prominent ones. The authors emphasize the fact that linear algebra is most useful in applications. Moreover, they try to introduce the theory in its full abstraction (including infinite-dimensional vector spaces) giving theorems and proofs since, as they emphasize, only this gives the reader the ability, often necessary in applications, to adapt to method to new situations. The text comes with many exercises of different difficulty and also includes projects and/or computer problems and projects. For some parts certain previous knowledge from calculus is necessary that is used without further comments. The book is well written and recommendable for ambitious beginners, as second reading or for graduate students in applied sciences.

C. Fuchs (Salzburg)

S. Kurz, M. Stoll, K. Worthmann: Angewandte Mathematik. Ein Lehrbuch für Lehramtsstudierende. Springer Spektrum, Berlin/Heidelberg, 2018, 211 S. ISBN 978-3-662-56704-3 P/b € 25,69.

Anlässe zu diesem Buch waren der Unmut über die zu kurz kommende Ausbildung im Lehramtsstudium der Mathematik in angewandten Bereichen sowie fehlende Programmierkenntnisse. Aus einem Vorlesungsskript entstanden, richten sich die Autoren vorwiegend an Studierende, bieten aber gleichzeitig auch einen detaillierten und sehr strukturierten Leitfaden für Lehrveranstaltungen. In drei Kapiteln wird ein Einblick in die Numerik, Optimierung und Computeralgebra anhand typischer Fragestellungen des jeweiligen Bereichs gegeben. Jedes Themengebiet beginnt mit einer kurzen Einführung, den wichtigsten Begriffsdefinitionen, und der Autor dringt dann schrittweise, unter ständiger Begleitung von interessanten und ausführlich ausgearbeiteten Beispielen, immer tiefer in die Materie ein. Besonders viel Aufmerksamkeit und ein eigenes Kapitel widmet das Buch der algorithmischen Komponente und dem damit verbundenen Erlangen von Programmierkenntnissen. So wird in einem der beiden Anhänge auf fünf kurzen Seiten eine, sehr beispielreiche, Einführung in die Programmiersprache Matlab für Programmierneulinge gegeben. Obwohl die einzelnen Teile des Buchs jeweils von verschiedenen Experten geschrieben wurden, bleibt der rote Faden durch alle Kapitel hindurch gut erkennbar. Alles in allem haben die Autoren Sascha Kurz, Michael Stoll und Karl Worthmann ein gut strukturiertes und leicht verständliches Lehrbuch geschaffen, das durch eine Fülle an detailliert ausgearbeiteten Beispielen nicht nur Mathematikern die Bereiche und Freude an der angewandten Mathematik näherbringt.

J. Herret (Wien)

M. Ayad: Galois Theory and Applications. Solved Exercises and Problems. World Scientific Publishing Co., Singapur, 2018, 450 S. ISBN 978-981-3238-30-5 H/b £ 104.

In a rather unique way this book gives a collection of 285 exercises and solutions on problems in Galois theory and related topics stemming from lectures and tutorials the author gave in the past. E.g. it starts with "Exercise 1.1. Let p be a prime number and s be a positive integer. Show that for any $i \in \{0, 1, \ldots, p^s - 1\}$, $\binom{p^s-1}{i} \equiv (-1)^i \pmod{p}$." Occasionally, more than one solution is given. Sometimes, remarks, warnings or questions are added in the solutions. The books aims to students, teachers and researchers interested in the subject. It does not include definitions or recall important results as other problem books do. By the way, the factorization $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot (1 + \sqrt{-14}(1 - \sqrt{-14}) = 5(2 - \sqrt{-14})(2 + \sqrt{-14}) = 3(4 + \sqrt{-14})(4 - \sqrt{-14}) = -(4 + \sqrt{-14})(2 + \sqrt{-14})(1 + \sqrt{-14}) = -(4 - \sqrt{-14})(2 - \sqrt{-14})(1 - \sqrt{-14})$ from the book cover is the solution of Exercise 10.24(7). The following chapters are covered: Polynomials, Fields, Generalities (31 exercises), Algebraic extensions, Algebraic closure (31 exercises), Separability, Inseparability (14 exercises), Normal extensions (7 exercises), Galois extensions, Galois groups (32 exercises), Finite fields (21 exercises), Permutation polynomials (19 exercises), Transcendental extensions, Linearly disjoint extensions, Lüroth's theorem (22 exercises), Multivariate polynomials (21 exercises), Integral elements, Algebra number theory (67 exercises) and Derivations (20 exercises).

C. Fuchs (Salzburg)

E. Grigorieva: Methods of Solving Number Theory Problems. Birkhäuser, Basel, 2018, 391 S. ISBN 978-3-319-90914-1 H/b € 46.

Schon beim ersten Durchblättern des vorliegenden Bands erkennt man, dass die Autorin einen starken Hintergrund in der Auseinandersetzung mit mathematischen Olympiadeaufgaben besitzt. Der Hauptinhalt besteht dementsprechend aus einer Aufarbeitung von olympiadeartigen Zahlentheoreieaufgaben und der zugrundliegenden theoretischen Ansätze, die deren Lösung ermöglichen. Der logische Aufbau ist ihr allerdings besonders gut gelungen, und das selbstständige Erlernen von Problemlösefähigkeiten in diesem Bereich kann interessierten Schülerinnen und Schülern mit diesen Buch sicher ebenso gut gelingen wie Studierenden der Mathematik, die einen geschickten Zugang zur elementaren Zahlentheorie suchen, oder einfach auch Leserinnen und Lesern, die sich für Zahlenrätsel anspruchsvollerer Art interessieren. In vier Abschnitten mit den Titeln "Numbers: Problems Involving Integers", "Further Study of Integers", "Diophantine Equations and More" und "Pythagorean Triples, Additive Problems and More" wird ein sehr übersichtlicher und motivierender Aufbau geboten. Schließlich finden sich auch noch eine knappe Zusammenfassung über die Geschichte der Zahlentheorie und aktuelle Forschungsthemen aus diesem Bereich. Alles in allem ist dieses

Buch sicher allen zu empfehlen, die sich für einen tiefen Einstieg in die Problemlösungsmethoden der elementaren Zahlentheorie interessieren.

R. Geretschläger (Graz)

P. Ording: 99 Variations on a Proof. Princeton University Press, Princeton, 2019, 272 S. ISBN 978-069-1158-83-9 H/b $ 24,95.

In this fascinating book it is proved in 99 (or actually 100) different ways that $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 2x - 2$ has only the solutions $x = 1$ and $x = 4$ in the reals. Each proof takes a book page followed by a page containing comments, references and further explanations to this proof. The proofs "include styles inspired by history (antiquity, medieval, modern), subject area (geometry, probability, topology), tools (computer, calculator, slide rule), and a broad range of sources" and is aimed "to reach math-interested general reader" (see p. 116 for these quotes). Despite the simplicity of the statement the book is rather entertaining and amusing. E.g. to see the proof presented as an exam, typeset in tex code, as a patent, an arxiv preprint, a newsprint, a screenplay, a research seminar, a blog, a referee report, etc. Basically, the book is centered around the question what mathematical style actually is and how differently a proof can be viewed. The book can be recommended as light reading and, in particular, for everyone who wants to become more aware of the different styles used in mathematical writing.

C. Fuchs (Salzburg)

S. Rubinstein-Salzedo: Cryptography. (Springer Undergraduate Mathematics Series.) Springer International Publishing, Cham, 2018, 259 S. ISBN 978-3-319-94817-1 P/b € 37,44.

Schon vor und während des zweiten Weltkriegs ging es im Schreiben und Entschlüsseln von Nachrichten nicht mehr einfach nur um gute Sprachkenntnisse, sondern vielmehr um das Beherrschen von mathematischen und grundsätzlich nicht linguistischen Analysemethoden. Aus diesem Grund spielen Mathematikern eine wichtige Rolle in der Entwicklung der modernen Kryptographie. Das zugrundeliegende Buch gibt einen Einblick in die mathematische Herangehensweise an diese Materie. Angefangen bei klassischen Chiffren und deren Analyse bis hin zu modernen Kryptoverfahren, wie z.B. Diffie-Hellman, werden die Konzepte und Schwachstellen der über die Jahrzehnte entwickelten Codierungen erklärt. In den ersten Kapiteln ist es besonders spannend zu lesen, wie der Autor einerseits die Codierung und deren Funktionsweise an sich erklärt, andererseits aber über mehrere Seiten analysiert, wie der Entschlüsselungsprozess einfachster Chiffren aussehen könnte. In den späteren Kapiteln dringt der Autor immer tiefer in die Zahlentheorie, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und abstrakte Algebra ein und erklärt deren beeindruckende Bedeutung und Verwendung in der Kryptographie. Nicht nur weil, das Buch aus einem Vortrag für Jugendliche entstanden ist, sondern auch wegen der Fülle an Beispielen, ist das Buch in allererster

Linie an all jene gerichtet, die sich in die Thematik der Kryptographie einarbeiten wollen, auch ohne tiefgehende Mathematikkenntnisse.

J. Herret (Wien)

M. Ram Murty, B. Fodden: Hilbert's Tenth Problem. An Introduction to Logic, Number Theory, and Computability. (Student Mathematical Library, Vol. 88.) American Mathematical Society, Providence (USA), 2019, 239 S. ISBN 978-1-4704-4399-3 P/b $ 55.

Hilbert's tenth problem (HTP) is (taken from D. Hilbert, "Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationelen Mathematiker-Congress zu Paris 1900", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Heft 3, 1900, S. 253-297): "Eine Diophantische Gleichung mit irgend welchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlencoefficienten sei vorgelegt: man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittelst einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist." In this book the proof of this famous theorem is given in a self-contained way. The authors try to incorporate historical notes and give some additional material with the aim to invite the reader to explore further the subject. They emphasize, that, in principle, the proof of HTP is rather easy to understand compared to solutions to other big problems. After a short introduction the book starts with some set theory (Cantor and Infinity) and then goes on to ZFC (Axiomatic Set Theory). In Chapter 3 some elementary number theory including the Brahmagupta-Pell equations is covered. Chapter 4 introduces the notion of computable functions and discusses Gödel's famous results without giving all proofs. Chapter 5 is the core of the book: The proof of HTP attributed to Davis, Putnam, Robinson and Matiyasevich is given and an overview of the history of the proof is discussed. Chapter 6 gives some applications of HTP e.g. to prime representing polynomials, Goldbach's conjecture, to the Riemann hypothesis and to the consistency of axiomatized theories. The last chapter goes way beyond and outlines the status of current research on HTP over number fields. In a short appendix some background material on very basic notions from set theory is added in order to make the book even more self-contained. Each chapter is followed by references for further reading and by a number of exercises. This book is very well-written, entertaining to read and can be recommend to anyone interested in the fascinating story and consequences of HTP.

C. Fuchs (Salzburg)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Johann Richard Pfanzagl 1928–2019

Am 4. Juni 2019 ist Johann Richard Pfanzagl, em.o.Univ.Prof. der Universität Köln, im 91. Lebensjahr verstorben. Herr Pfanzagl hat 1951 an der Universität Wien bei Edmund Hlawka mit dem Thema "Hermitesche Formen in imaginärquadratischen Zahlkörpern" promoviert. 1959 hat er sich an der Universität Wien für Statistik habilitiert. Seit 1960 bis zu seiner Emeritierung 1995 war Herr Pfanzagl Lehrstuhlinhaber an der Universität Köln, zuerst für Wirtschafts- und Sozialstatistik und dann für mathematische Statistik. Zu seinen akademischen Nachkommen zählt zum Beispiel der derzeitige Präsident der DMV, Friedrich Götze. Herr Pfanzagl war seit 1960 Mitglied der ÖMG. Ab 1993 war er korrespondierendes Mitglied der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse im Ausland der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Zudem hat der 1993 ein Ehrendoktorat der WU Wien erhalten. Er war Ehrenmitglied der Österreichischen Statistischen Gesellschaft, die er 1951 mitbegründete, sowie des Institute of Mathematical Statistics in den USA.

Roman Liedl 1940–2019

Am 1. August 2019 ist Roman Liedl, em.o.Univ.-Prof. der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck, im 80. Lebensjahr verstorben. Zu seinen vielseitigen Interessen gehörte das Studium der Walsh-Funktionen, von Funktionalgleichungen, der Iterationstheorie bis hin zum Studium der Theorie der Farblehre. Er war seit 1990 Mitglied der ÖMG.

Protokoll der Generalversammlung der ÖMG am 22.11.2019, TU Graz

Zeit: Freitag, 22. November 2019, 16:30 – 17:00 Uhr
Ort: Technische Universität Graz, Steyrergasse 30, BE01

Tagesordnung:

1. Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit

2. Berichte der Vorsitzenden, des Kassiers und weiterer Vorstandsmitglieder
3. Bericht der Rechnungsprüfer und ggf. Entlastung des Vorstands
4. Berichte aus den Landessektionen und den Kommissionen
5. Veranstaltungen und Fördermaßnahmen der ÖMG
6. Wahlen: Vorstandsmitglieder 2020-2021, ggf. Nachnominierung Didaktikkommission
7. Allfälliges

TOP 1.

Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit

Die Vorsitzende Barbara Kaltenbacher begrüßt die Anwesenden und stellt die Beschlussfähigkeit fest. Sie schlägt in Abänderung der Tagesordnung das Vorziehen von TOP 6 vor. Dies wird beschlossen.

TOP 6.

Wahlen: Vorstandsmitglieder 2020-2021, ggf. Nachnominierung Didaktikkommission

Die Vorsitzende berichtet, dass sie bei allen Vorstandsmitgliedern nachgefragt hat, ob sie weiterhin bereit sind, im Vorstand mitzuarbeiten. Evelyn Buckwar möchte aus dem Vorstand ausscheiden. Die Vorsitzende schlägt Elena Resmerita als Nachfolgerin vor. Alle anderen Vorstandsmitglieder haben zugestimmt.

Michael Oberguggenberger schlägt die Wiederwahl der Vorsitzenden Barbara Kaltenbacher vor. Dieser Wahlvorschlag wird einstimmig angenommen. Die Vorsitzende schlägt die Wiederwahl des Vorstands mit der oben erwähnten Abänderung vor. Auch dieser Vorschlag wird einstimmig angenommen.

Die Vorsitzende schlägt vor, Hans Georg Feichtinger und Peter Szmolyan weiterhin als Rechnungsprüfer zu bestellen. Diesem Vorschlag wird zugestimmt.

TOP 2.

Berichte der Vorsitzenden, des Kassiers und weiterer Vorstandsmitglieder

Die Vorsitzende berichtet, dass Hofrat Helmut Heugl aus dem Beirat ausgeschieden ist. Über eine Nachnominierung muss noch entschieden werden. Dabei wäre ein Vertreter des Bundesministeriums oder eines Landesschulrats wünschenswert.

Zur Didaktikkommission wird berichtet, dass Helmut Heugl, Martin Dangl und Christian Dorninger ausgeschieden sind. Ein neuer Vertreter des Ministeriums wird für die Mitarbeit gesucht.

Zur Jobbörse der ÖMG wird berichtet, dass versucht wird, die Institute zu motivieren, alle akademischen Stellen dort auszuschreiben. Dazu wird es ein Schreiben an alle Institute geben.

Für den EMS Council 2020 werden Bernhard Lamel und Monika Ludwig nominiert.

Für die Zentralmatura wurden für eine Arbeitsgruppe Clemens Heuberger und Hans Humenberger von der ÖMG nominiert. Die Mitarbeit der ÖMG an der Begutachtung von Zentralmatura-Aufgaben wird vom Ministerium sehr positiv bewertet. Diese wurde von Michael Oberguggenberger angeregt.

Für den Kassier berichtet die Vorsitzende, dass sich das ÖMG-Vermögen stabil entwickelt. Als neue Förderung gibt es den Early Student Award und das ÖMG-Fellowship für Mathematiker_innen aus Entwicklungsländern. Beides sollte langfristig finanzierbar sein. Sie berichtet über die Einnahmen und Ausgaben der ÖMG und den Vermögensstand.

Clemens Fuchs dankt dem Redaktionsteam der IMN für die gute Zusammenarbeit und allen Personen, die Beiträge bzw. Rezensionen geschrieben haben. Er lädt ein, weiterhin Berichte an die IMN zu schicken. Speziell soll weiterhin über Preise und Preisträger_innen und die Arbeit der ÖMG berichtet werden und auch Nachrufe sollen weiterhin veröffentlicht werden.

Die Vorsitzende berichtet über den neuen Mitgliederstand. Es gibt derzeit 395 Mitglieder, davon sind 20 in diesem Jahr beigetreten. Für die verstorbenen Mitglieder gibt es eine Trauerminute. Emer.o.Univ.-Prof. Dr. Gilbert Helmberg ist am 18. Februar 2019 verstorben, Univ.-Prof.i.R. Dr. Gerd Baron am 30. Mai 2019 und Emer.Univ.-Prof. Dr. Roland Fischer am 7. November 2019.

TOP 3.

Bericht der Rechnungsprüfer und ggf. Entlastung des Vorstands

Hans Georg Feichtinger berichtet, dass er mit Peter Szmolyan die Aufzeichnungen der ÖMG geprüft und alles für in Ordnung befunden hat. Er beantragt die Entlastung des Kassiers und die Entlastung des Vorstandes. Die Generalversammlung stimmt diesen Entlastungen zu.

TOP 4.

Berichte aus den Landessektionen und den Kommissionen

Aus Linz berichtet Friedrich Pillichshammer, dass die Landessektion den Naboj-Schüler_innenwettbewerb unterstützte. Die Nachfolge für Ulrich Langer ist ausgeschrieben. Im Bereich der Versicherungsmathematik wurde eine Tenure Track Stelle besetzt.

Aus Salzburg berichtet Simon Blatt, dass im April der Mathe-Cup stattfinden wird. Das ist ein Gruppenwettbewerb für Schüler_innen. Die Postdoc-Stelle für Diskrete Mathematik wurde mit Daniel Krenn besetzt, die für Statistik mit Sebastian Fuchs. Es wurde eine Senior Scientists Stelle für Analysis ausgeschrieben. Es gibt eine neue Möglichkeit das Masterstudium Mathematik berufsbegleitend mit Schwerpunkt Aktuarwissenschaften zu absolvieren.

Aus der Steiermark berichtet Wolfgang Woess, dass es für die Nachfolge Karl Kunisch einen Zweiervorschlag gibt und eine Liste für die Laufbahnstelle für Angewandte Geometrie.

Aus Tirol berichtet Hans-Peter Schröcker, dass die Verfahren für die Stellen Optimierung sowie Variationsrechnung und PDE derzeit laufen. Als Nachfolge von Manfred Husty wurde die Stelle von Hans-Peter Schröcker aufgewertet. Am Institut für Statistik hat Janette Walde eine § 99.4 Professur bekommen. Es gibt eine Laufbahnstelle im Bereich Algebraische Geometrie. Die Landessektion hat den Early Student Award finanziell unterstützt. Im Rahmen der 350-Jahr-Feier der Universität Innsbruck hielt Martin Hairer einen öffentlichen Vortrag.

Aus Klagenfurt wird berichtet, dass ein Ruf für die Statistik-Stelle erteilt wurde.

Aus Wien berichtet Christian Krattenthaler, dass vier Tenure Track Stellen besetzt wurden: Algebraische Topologie, Applied PDE, Machine Learning, Data-driven PDE. Weiter laufen die Verfahren für fünf Professuren. Die Nachfolge für Josef Hofbauer ist vorgezogen ausgeschrieben. Es gibt Tenure Track Stellen im Bereich Harmonischer Analysis, Finanzmathematik und Mathematische Tomographie. An der TU Wien hat Fabio Toninelli den Ruf auf die Stochastik-Stelle angenommen. Derzeit läuft ein Verfahren einer Tenure Track Stelle im Bereich Diskrete Mathematik und eine Tenure Track Stelle für Geometrie ist ausgeschrieben. Die Vienna School of Mathematics ist mit einer Veranstaltung am 16. Oktober an der Universität Wien eröffnet worden. Es gab Vorträge von Günter Ziegler und Irene Fonseca.

TOP 5.

Veranstaltungen und Fördermaßnahmen der ÖMG

Wolfgang Woess berichtet vom Studierendentreffen und dem Early Student Award 2019. Es gab 25 Teilnehmer_innen, Vorträge von Johannes Morgenbesser von der Nationalbank, Tobias Hell, Reinhard Winkler und Wolfgang Woess. Weiter gab es Diskussionsrunden, eine Wanderung sowie die Verleihung der Urkunden. Die Veranstaltung ist sehr erfolgreich verlaufen. In Zukunft wird Tim Netzer statt Wolfgang Woess an dieser Veranstaltung mitarbeiten. Die Vorsitzende dankt Wolfgang Woess für die Anregung, den Early Student Award zu etablieren und die Mitarbeit in den letzten zwei Jahren.

Am heutigen Tag der Mathematik wurden zwei Schüler_innenpreise sowie der Studienpreis für seine Dissertation an Dr. Gregor Gantner (TU Wien) verliehen, wobei die Preisträger leider nicht anreisen konnten, sowie der Studienpreis für seine Masterarbeit an Christian Lindorfer (TU Graz). Der Förderungspreis ging an Dr. Christopher Frei (University of Manchester). Die Österreichische Akademie der Wissenschaften wird Karlheinz Gröchenig den Erwin-Schrödinger-Preis verleihen.

Bei der ÖMG-Tagung in Dornbirn 2019 gab es 120 Vorträge, 6 Minisymposien, 12 Sektionen, 8 Plenarvorträge und einen öffentlichen Vortrag. Der ÖMG-Preisträger 2019, Christopher Frei, hat einen Plenarvortrag gehalten.

Der EMC findet 2020 in Portorož statt. 2021 wird der ÖMG-DMV-Kongress in Passau stattfinden.

TOP 7.

Allfälliges

Die Vorsitzende dankt den Organisatoren des Tages der Mathematik in Graz für ihre gute Arbeit.

Vorsitzende: Barbara Kaltenbacher *Schriftführerin:* Monika Ludwig

Laudatio aus Anlass der Verleihung des Förderungspreises 2019

Liebe Vorsitzende, lieber Christopher, sehr geehrte Damen und Herren!

Christopher Frei wurde am 22. Juli 1985 in Graz geboren. Nach der Matura und dem Zivildienst inskribierte er an der TU Graz Technische Mathematik und erwarb 2008 den Bachelor-Abschluss. Im Jahre 2009 graduierte er zum Master in "Mathematical Computer Sciences", eine der Spezialisierungen unseres damaligen Masterstudiums mit einer Arbeit über diophantische Gleichungen und Zerlegbarkeit von Polynomen. Herr Frei war sicherlich einer der besten Studenten an der TU Graz in den letzten 20 Jahren. So wurde bereits seine Bachelor-Arbeit publiziert: ein bemerkenswerter Beitrag zur Faktorisierung von Polynomen, Comm. Algebra (2011), gemeinsam mit Sophie Frisch. Nach seiner Masterarbeit konnte ich Herrn Frei für ein spannendes Dissertations-Thema aus der algebraischen Zahlentheorie gewinnen. Er konnte dabei zeigen, dass sich die ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers in einer geeigneten Erweiterung stets als Summe von Einheiten darstellen lassen [Bull. London Math. Soc. 2012]. Dies war die vollständige Lösung eines offenen Problems von Narkiewicz. Am 12. Juli 2012 promovierte Christopher Frei an der TU Graz sub auspiciis praesidentis rei publicae. Er erhielt für seine Dissertation und die damit zusammenhängenden Arbeiten den Studienpreis der ÖMG, den Award of Excellence des Bundesministeriums für Wissenschaft und Forschung und den Preis unserer Doktorratsschule in Graz.

Nach seiner Promotion war Christopher Frei kurz in meiner Arbeitsgruppe als Assistent tätig. Er erhielt aber bald ein Humboldt-Stipendium, das ihn an die LMU München und an die Univ. Hannover (zu Ulrich Derenthal) führte. Dort arbeitete er sich in die arithmetische Geometrie ein und er konnte sehr rasch bedeutende Ergebnisse erzielen. Es geht dabei vor allem um quantitative analytische Methoden und ihre Anwendung auf die Manin-Vermutung, auf "lattice point counting" und auf Probleme im Umfeld des Hasse-Prinzips. Dieses Prinzip hat seinen Ursprung im berühmten Satz von Minkowski-Hasse, der besagt, dass eine quadratische Form genau dann über den rationalen Zahlen verschwindet, wenn dies im Reellen und allen p-adischen Erweiterungen von Q der Fall ist. Für Formen höheren Grades ist dies nicht mehr allgemein richtig und deren Untersuchung führt zu spannenden Fragestellungen und das ist gegenwärtig aktueller Forschungsgegenstand.

Die Arbeitsweise von Herrn Frei ist methodisch sehr breit aufgestellt: Es werden analytische Werkzeuge genauso wie Algebra und geometrische Methoden sowie die Resultate von Green und Tao aus der additiven Kombinatorik eingesetzt und weiterentwickelt. Insbesondere möchte ich auf Anwendungen der Modelltheorie hinweisen. Dabei handelt es sich um ein mächtiges Werkzeug, sogenannte O-minimale Strukturen, die aus der reell-algebraischen Geometrie bekannt sind und von Herrn Frei zur Lösung arithmetischer Probleme eingesetzt wurden. Selbstverständlich benutzt Christopher Frei auch klassische analytische Hilfsmittel wie etwa die Hardy-Littlewoodsche Circle Method.

Alle Arbeiten von Christopher Frei sind in sehr renommierten Zeitschriften publiziert. Das Schriftenverzeichnis umfasst 23 Arbeiten, einige sind alleine publiziert, die Mehrzahl mit unterschiedlichen Koautoren. Seine Arbeitsweise ist originell und präzise zugleich. So gelang es etwa, bei einer klassischen Arbeit von Skinner eine Unstimmigkeit aufzuklären und deutlich zu verallgemeinern und zu verbessern. (Nur zur Information: Skinner ist ein ehemaliger Schüler von Andrew Wiles in Princeton.) Im Fokus steht dabei die Anzahl von Darstellungen durch Formen unterschiedlicher Grade und asymptotische Resultate mittels der Hardy-Littlewood Methode. Wesentlicher Punkt ist, die absolute Konvergenz des singulären Integrals rigoros nachzuweisen. Darüber hinaus ergibt sich ein interessantes Hasse-Prinzip.

Besonders erwähnen möchte ich eine Arbeit, die in Ann. Sci. École Norm. Supér. 49 (2016), 757-811 erschienen ist, und das ist ein wichtiger Beitrag zur Manin-Vermutung. An dieser Stelle möchte ich mit Freude festhalten, dass in den letzten Jahren in unserer Arbeitsgruppe durch Martin Widmer, Fabrizio Barroero und eben durch Christopher Frei bedeutende Fortschritte in der Anwendung analytischer, diophantischer und modell-theoretischer Methoden in der arithmetischen Geometrie erzielt wurden. Mittlerweile ist Martin Widmer “tenured reader” an der Royal Holloway Univ. London, Fabrizio Barroero “tenured professor” in Rom und Christopher Frei seit September 2017 “tenured lecturer” in Manchester. Die meisten seiner wichtigsten Resultate hat Herr Frei während seiner Tätigkeit in Graz erzielt, im WS 2017/18 hat er sich an der TU Graz habilitiert und er ist als Privatdozent dem Institut für Analysis und Zahlentheorie zugeordnet. Christopher Frei ist inzwischen ein Aushängeschild der jungen Generation österreichischer Zahlentheoretiker und arithmetischer Geometer, der bereits eine sehr große internationale Sichtbarkeit erreicht hat.

Persönlich hoffe ich, dass es gelingen wird, ihn in absehbarer Zeit nach Österreich zurückzuholen. Jedenfalls wünsche ich ihm alles Gute und weitere Erfolge und viel Freude an der Forschung und an der Lösung schwieriger mathematischer Probleme, wohin ihn auch sein beruflicher Lebensweg führt.

(Robert Tichy)

Neue Mitglieder

Haunschmid Levi Anton, BSc – Rokitanskygasse 26/30, 1170 Wien. geb. 1996. Derzeit Student der Mathematik an der Universität Wien. email *levi.haunschmid@gmail.com*

Greilhuber Josef Eberhard, BSc – Rechte Bahngasse 30-32/15, 1020 Wien. geb. 1997. Teilnahme an der IMO 2014 und 2015 mit Ehrenwerter Erwähnung im ersten Jahr und der Bronzemedaille bei der zweiten Teilnahme. Derzeit Studium der Mathematik an der Universität Wien. email *josef.eberhard.greilhuber@univie.ac.at*

Legat Elias – c/o Universität Salzburg, Hellbrunnerstraße 34, 5020 Salzburg. geb. 1999. Derzeit Lehramtsstudium Mathematik in Salzburg. email *legat.elias@yahoo.de*

Morina Erion – Krottendorferstraße 4, 8605 Kapfenberg. geb. 2001. Derzeit Studium der Mathematik mit Spezialisierung in Angewandter Mathematik in Graz. email *morina.erion@hotmail.com*

Andritsch Konstantin – Franckstraße 35, 8010 Graz. geb. 1999. Derzeit Studium der Mathematik in Graz. email *kandritsch@gmail.com*

Schatzer Melanie – Raas, Weg zur Platte 21, 39040 Natz-Schabs (BZ), Italien. geb. 1998. Derzeit Studium der Mathematik in Innsbruck. email *melanie@schatzer.info*

Fürnsinn Florian – Obkirchergasse 7/19, 1190 Wien. geb. 1998. Derzeit Studium der Mathematik an der Universität Wien. email *florian.fuernsinn@live.at*

Kirchweger Markus – Feuerbachstraße 2, 4594 Grünburg. geb. 1997. Derzeit Studium der Mathematik an der JKU Linz. email *markus.kirchweger@gmail.com*

Lechner Tobias Mathias – Theodorkörnerstraße 7, 9065 Gradnitz. geb. 1997. Derzeit Studium der Mathematik in Klagenfurt. email *toblechner@edu.aau.at*

Schindler Chiara – c/o Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien. geb. 2001. Derzeit Studium der Mathematik an der Universität Wien. email *a11778010@unet.univie.ac.at*

van Dyck Corina Valentina – Bellinigasse 15, 1220 Wien. geb. 1999. Derzeit Studium der Mathematik in Wien. email *cvd99@gmx.at*

Strohmenger Christina – Ferdinandweg 9, 6068 Mils. geb. 1999. Derzeit Studium der Mathematik an der Universität Innsbruck. email *christina.strohmenger@student.uibk.ac.at*

Premstaller Carina – c/o Universität Salzburg, Hellbrunnerstraße 34, 5020 Salzburg. geb. 2001. Derzeit Studium der Mathematik an der Universität Salzburg. email *carina.premstaller@stud.sbg.ac.at*

Haider Thomas – Reitschachersiedlung 6/1, 7100 Neusiedl am See. geb. 1988. Lehrer für Mathematik sowie Bewegung und Sport am Gymnasium Neusiedl am See. email *thomashaider@yahoo.de*

Ausschreibung der Preise der ÖMG

Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2020

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2020 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematikerinnen oder Mathematiker, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind und welche einen wesentlichen Teil ihrer Arbeiten in Österreich erbracht haben. Dabei soll die Promotion mindestens zwei bis maximal zehn Jahre zurückliegen. (Überschreitungen sind möglich bei Kindererziehungszeiten und bei nachweislichen Präsenz- oder Zivildienstzeiten.)

Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten habilitierten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen. Der Vorschlag muss in elektronischer Form **bis spätestens 14. März 2020** bei der Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung; 2. Publikationsliste; 3. Wissenschaftlicher Lebenslauf.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine Begutachtungskommission den Preisträger oder die Preisträgerin aus. Der Preis ist mit 1.000 € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird der Preisträger oder die Preisträgerin eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er oder sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Barbara Kaltenbacher, Universität Klagenfurt. email *barbara.kaltenbacher@uni-klu.ac.at*.

Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2020

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2020 wieder zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2018 oder 2019 eine Diplom- oder Masterarbeit (im Folgenden als Masterarbeit bezeichnet) bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Masterarbeiten ist ein Abschluss eines Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Doktoratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlossenen Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss in elektronischer Form **bis spätestens 14. März 2020** bei der Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Ein Exemplar der als besonders hochqualifiziert bewerteten mathematischen Masterarbeit bzw. Dissertation; 2. Zwei begründete Bewertungen dieser Arbeit; 3. Einen Lebenslauf des Kandidaten bzw. der Kandidatin einschließlich einer kurzen Beschreibung des Studienablaufs.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachtungskommission die Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500 € dotiert. Jeder Preisträger erhält eine Urkunde. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er bzw. sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Barbara Kaltenbacher, Universität Klagenfurt. email *barbara.kaltenbacher@uni-klu.ac.at*.

Ausschreibung der Schülerinnen- und Schülerpreise der ÖMG 2020

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft zeichnet herausragende vorwissenschaftliche Arbeiten, die 2018 oder 2019 an österreichischen Schulen entstanden sind und die einen starken Bezug zu Mathematik oder Darstellender Geometrie aufweisen, mit Preisen aus. Diese Arbeiten müssen in elektronischer Form, als PDF-Datei, **bis 10. Juli 2020** bei der ÖMG einlangen und werden von einer Jury begutachtet.

Die Verfasserinnen und Verfasser jener Arbeiten, die im Zuge dieser Begutachtung durch die Jury ausgewählt werden, werden zu einem Kurzvortrag eingeladen, in dem sie ihre Arbeit präsentieren können. Anschließend erfolgt die Preisverleihung. Die Präsentationen und die Preisverleihung der prämierten Arbeiten finden im Herbst 2020 zu einem noch festzusetzenden Termin statt.

Die ÖMG bittet alle ihre Mitglieder sowie die Leserinnen und Leser der *IMN*, potenziell Interessierte von dieser Einladung zu informieren und Schulen zur Teilnahme zu ermuntern.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Barbara Kaltenbacher, Universität Klagenfurt. email *barbara.kaltenbacher@uni-klu.ac.at*.