

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email imn@tuwien.ac.at, <http://www.oemg.ac.at/>

Redaktion:

J. Wallner (TU Graz, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
R. Tichy (TU Graz)
R. Winkler (TU Wien)

Ständige Mitarbeiter der Redaktion:

B. Gittenberger (TU Wien)
G. Eigenthaler (TU Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 25,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger:
Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr.
Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzen-
druck, 8044 Weinitzen.

© 2013 Österreichische Mathematische
Gesellschaft, Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

<http://www.oemg.ac.at/>

email: oemg@oemg.ac.at

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: sekr@oemg.ac.at

Vorstand des Vereinsjahres 2014:

M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Vorsitzender
B. Kaltenbacher (Univ. Klagenfurt): Stellvertretende Vorsitzende
J. Wallner (TU Graz): Herausgeber der IMN
C. Fuchs (Univ. Salzburg): Schriftführer
G. Schranz-Kirlinger (TU Wien): Stellvertretende Schriftführerin
A. Ostermann (Univ. Innsbruck): Kassier
B. Lamel (Univ. Wien): Stellvertretender Kassier
E. Buckwar (Univ. Linz): Beauftragte für Frauenförderung
G. Teschl (Univ. Wien): Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
U. Dieter (TU Graz)
H. Engl (Univ. Wien)
P. M. Gruber (TU Wien)

G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
L. Reich (Univ. Graz)
N. Rozsenich (Wien)
W. Schachermayer (Univ. Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
H. Strasser (WU Wien)
R. Tichy (TU Graz)
W. Wurm (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionvorsitzende gehören statutengemäß dem Beirat an.

Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:

W. Woess (Graz)
G. Kirchner (Innsbruck)
C. Nowak (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
P. Hellekalek (Salzburg)
C. Krattenthaler (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 25,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques
Internationales

Nr. 224 (67. Jahrgang)

Dezember 2013

Inhalt

<i>Wolfgang Woess</i> : What is a horocyclic product, and how is it related to lamplighters?	1
<i>Christian Krattenthaler</i> : Mathematik UND Musik?	29
Buchbesprechungen	61
Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft	75
Ausschreibung der Preise der ÖMG	81
Neue Mitglieder	83

Die Titelseite illustriert ein Fast-Pi aus G. Maze, L. Minder: A new family of almost identities (<http://arxiv.org/abs/math/0409014>).

What is a horocyclic product, and how is it related to lamplighters?

Wolfgang Woess

TU Graz

This is a rather personal introductory outline of an interesting class of geometric, resp. graph- & group-theoretical structures. After an introductive section about their genesis, the general construction of horocyclic products is presented. Three closely related basic structures of this type are explained in more detail: Diestel-Leader graphs, treebolic spaces, and Sol-groups, resp. -manifolds. Emphasis is on their geometry, isometry groups, quasi-isometry classification and boundary at infinity. Subsequently, it is clarified under which parametrisation they admit discrete groups of isometries acting with compact quotient. Finally, further developments are reviewed briefly.

1 A problem on infinite graphs

In the mid-1980ies, in conversations with my colleagues at Leoben, I repeatedly asked the following question:

Are there any vertex-transitive graphs that do not look like Cayley graphs?

The drawback was that I didn't see how to define "look like" rigorously. My eyes were opened when I encountered GROMOV's definition of *quasi-isometry* in [23], resp. (more clearly) [24, 7.2.G].

Before proceeding, we should clarify the involved notions and start a preliminary discussion. A *graph* will be written in terms of its vertex set X , which carries

Supported by FWF (Austrian Science Fund) projects W1230-N13 and P24028-N18

a symmetric neighbourhood relation $\sim$. Thus, the edges are pairs $[x,y] = [y,x]$, where $x \sim y$, so that we allow loops $[x,x]$, but no multiple edges. Usually, our graphs will be *infinite*. The *degree* $\deg(x)$ of $x \in X$ is the number of neighbours. Everybody is familiar with the concept of a *path* $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ in a graph: one has to have $x_k \sim x_{k-1}$, and the length of a path is its number of edges (here: n).

All our graphs will be *connected* (for all $x, y \in X$ there is a path starting at x and ending at y) and *locally finite* ($\deg(x) < \infty$ for every x). Being connected, X becomes a metric space, where the graph distance $d(x, y)$ is the minimal length of a path from x to y .

An *automorphism* X is a self-isometry of (X, d) . We write $\text{Aut}(X)$ for the group of all automorphisms of X . The graph is called *vertex-transitive* if for every $x, y \in X$ there is $g \in \text{Aut}(X)$ such that $gx = y$. A large class of such graphs is provided by groups: given a finitely generated group G (usually written multiplicatively) and a finite, symmetric set S of generators, we can visualise G by its *Cayley graph* $X(G, S)$. Its vertex set is $X = G$, and $x \sim y$ if $y = xs$ for some $s \in S$ (so that $y = xs^{-1}$). The group acts by automorphisms on $X(G, S)$ via $(g, x) \mapsto gx$. The most typical examples are

1. The Cayley graph of the additive group $\mathbb{Z}^2$ with respect to $S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ – this is the square lattice;
2. The Cayley graph of the free group $\mathbb{F}_2$ on two free generators a, b with respect to $S = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ – this is the homogeneous tree with degree 4.

See Figure 1. Furthermore, the homogeneous tree with arbitrary degree $p + 1$ is also the Cayley graph of the group $\langle a_1, \dots, a_{p+1} : a_i^2 = 1_G \rangle$.

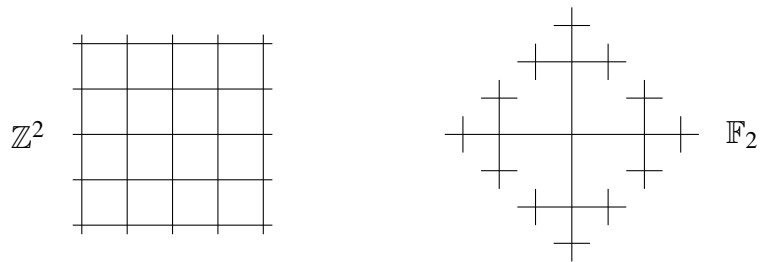


Figure 1

There are vertex-transitive graphs which are not Cayley graphs. A finite example is the well-known Petersen graph. From here one can of course construct infinite examples (e.g. the Cartesian product of the Petersen graph with the bi-infinite line). But there also are intrinsically infinite examples of non-Cayley vertex-transitive graphs. One of them is based on the following way of looking at trees, which will play an important role later on: take the homogeneous tree $\mathbb{T}_p$ with

degree $p + 1$, but draw it differently, such that it “hangs down” from a point ∞ at infinity. See Figure 2, where $p = 2$. That is, the tree is considered as the union of generations (horizontal layers) – called *horocycles* – H_k , $k \in \mathbb{Z}$. Each H_k is infinite, every vertex $x \in H_k$ has a unique neighbour in H_{k-1} , its *predecessor* x^- , and p neighbours in H_{k+1} , its *successors*. Thus, p is the *branching number* of $\mathbb{T}$. For $x \in \mathbb{T}$, we write $\mathfrak{h}(x) = k$ if $x \in H_k$, the *Busemann function*. An ancestor of x is an iterated predecessor. Any pair of vertices x, y has a common ancestor v for which $\mathfrak{h}(v)$ is maximal. We write $v = x \wedge y$. Also, we choose a root vertex o in H_0 .

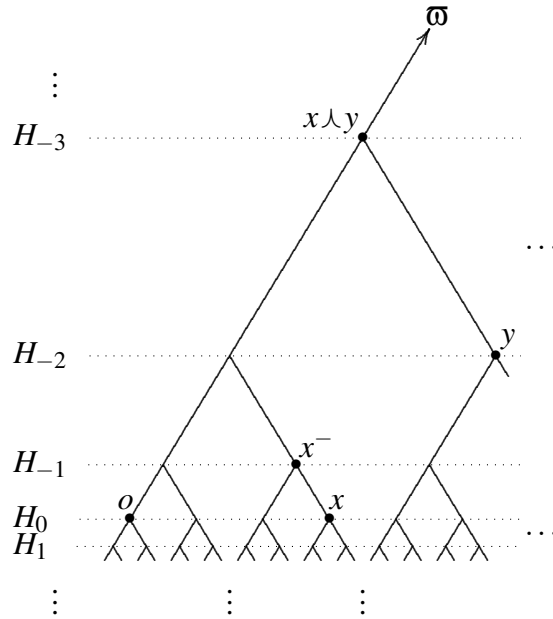


Figure 2

Consider the group $\text{Aff}(\mathbb{T})$ of all automorphisms g of $\mathbb{T}$ which preserve the predecessor relation: $g(x^-) = (gx)^-$ for all x . It acts transitively. It is called the affine group of the tree because it contains the group of all affine mappings $\xi \mapsto \alpha\xi + \beta$ of the ring $\mathbb{Q}_p$ of p -adic numbers (field, if p is prime), where $\xi, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}_p$ and α is invertible, see CARTWRIGHT, KAIMANOVICH AND WOESS [11, §4]. In particular, $\mathbb{Q}_p$ can be identified with the lower boundary $\partial^*\mathbb{T}_p$ that we are going to describe further below.

Next, we introduce the additional edges $[x, (x^-)^-]$ for all x , see Figure 3. The resulting graph is sometimes called the *grandmother graph*, which is suggestive when one thinks of $\mathbb{T}$ as an infinite genealogical tree.

The point is that $\text{Aff}(\mathbb{T})$ now becomes the full automorphism group of the grandmother graph.

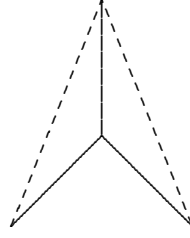


Figure 3

(1.1) Claim. *The grandmother graph is vertex-transitive, but not a Cayley graph of some finitely generated group.*

How does one prove that a given graph is or is not a Cayley graph?

(1.2) Criterion. *Let X be a locally finite, connected graph and G be a subgroup of $\text{Aut}(X)$. Then X is a Cayley graph of G if and only if G acts on X transitively and with trivial vertex-stabilisers.*

Here the stabiliser of $x \in G$ is of course $G_x = \{g \in G : gx = x\}$, and “trivial” means that it consists only of the identity.

Now assume that a group of automorphisms G acts transitively on the grandmother graph. Then $G \leq \text{Aff}(\mathbb{T})$. Let x be a vertex and y, z be two of its successors. Then there must be $g \in G$ such that $gy = z$, so that $g \neq \text{id}$. But we must have $gy^- = z^-$, that is $gx = x$. Thus, G_x is non-trivial, which proves Claim 1.1.

However, everybody will agree that the grandmother graph looks (vaguely) like the tree itself, which is a Cayley graph. So from the point of view of the initial question, this is not yet a satisfactory example. Let us now come to the definition of “look like”.

(1.3) Definition. *Let (X_1, d_1) and (X_2, d_2) be two metric spaces. A mapping $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ is called a quasi-isometry, if there are constants $A > 0$ and $B \geq 0$ such that for all $x_1, y_1 \in X_1$ and $x_2 \in X_2$,*

$$(i) \quad d_2(x_2, \phi x_1) \leq B \quad (\text{quasi-surjective}), \text{ and}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{A} d_2(\phi x_1, \phi x_2) - B \leq d_1(x_1, y_1) \leq A d_2(\phi x_1, \phi x_2) + B \quad (\text{quasi-bi-Lipschitz}).$$

If $B = 0$, the mapping is called bi-Lipschitz.

Every quasi-isometry ϕ has a quasi-inverse $\phi^* : X_2 \rightarrow X_1$, i.e., a quasi-isometry such that $\phi^* \phi$ and $\phi \phi^*$ are bounded perturbations of the identity on X_1 , resp.

X_2 (i.e., the image of any element is at bounded distance). In particular, quasi-isometry is an equivalence relation.

Any two Cayley graphs of a group with respect to different, finite symmetric sets of generators are bi-Lipschitz. After being promoted by Gromov, the study of quasi-isometry invariants of finitely generated groups has become a “big business” which is at the core of what is since then called Geometric Group Theory (in good part replacing the earlier name “Combinatorial Group Theory”).

The identity map on the vertex set is a bi-Lipschitz mapping between the grandmother graph and the tree, so that we have a non-Cayley vertex transitive graph which is quasi-isometric with a Cayley graph. My question now could be formulated rigorously as follows.

Is there a (connected, locally finite, infinite) vertex-transitive graph that is not quasi-isometric with some Cayley graph?

I posed this question explicitly in [30] and [33] (published in 1990, resp. 1991). This appeared to be a difficult problem, and I learnt that there has to be a positive correlation between the difficulty of a mathematical question and the fame of the person who poses it. Initially, geometric group theorists ignored my problem or even made fun of it. However, in the world of Graph Theory, there is an exclusive minority interested in infinite graphs, and in the mid-early 1990ies, DIESTEL AND LEADER came up with a construction of a graph which they believed to provide the answer to the question. This was what I later called the Diestel-Leader graph $DL(2, 3)$, whose construction will be explained in a moment. However, it resisted their and my efforts (as well as the efforts of several visitors of mine who were involved in this discussion) to prove that it was indeed not quasi-isometric with any Cayley graph. At last, in 2001, Diestel and Leader made their construction and conjecture public without a proof [16].

Let us now describe the construction. We take two trees $\mathbb{T}_p$ and $\mathbb{T}_q$ with respective branching numbers p and q (not necessarily distinct). We look at each of them as in Figure 2, but the second tree is upside down. On each of them, we have the respective Busemann function $\mathfrak{h}$. (We omit putting an index.)

(1.4) Definition. *The Diestel-Leader graph $DL(p, q)$ is*

$$DL(p, q) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{T}_p \times \mathbb{T}_q : \mathfrak{h}(x_1) + \mathfrak{h}(x_2) = 0\},$$

and neighbourhood is given by

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff x_1 \sim y_1 \text{ and } x_2 \sim y_2.$$

Thus, either $x_1^- = y_1$ and $y_2^- = x_2$ or vice versa.

To visualize $\text{DL}(p, q)$, draw $\mathbb{T}_p$ in horocyclic layers as in Figure 2, and right to it $\mathbb{T}_q$ in the same way, but upside down, with the respective horocycles $H_k(\mathbb{T}_p)$ and $H_{-k}(\mathbb{T}_q)$ on the same level. Connect the two origins o_1, o_2 by an elastic spring. It is allowed to move along each of the two trees, may expand infinitely, but must always remain in horizontal position. The vertex set of $\text{DL}(p, q)$ consists of all admissible positions of the spring. From a position (x_1, x_2) with $\mathfrak{h}(x_1) + \mathfrak{h}(x_2) = 0$ the spring may move downwards to one of the q successors of x_2 in $\mathbb{T}_q$, and at the same time to the predecessor of x_1 in $\mathbb{T}_p$, or it may move upwards in the analogous way. Such a move corresponds to going to a neighbour of (x_1, x_2) . Figure 2 depicts $\text{DL}(2, 2)$.

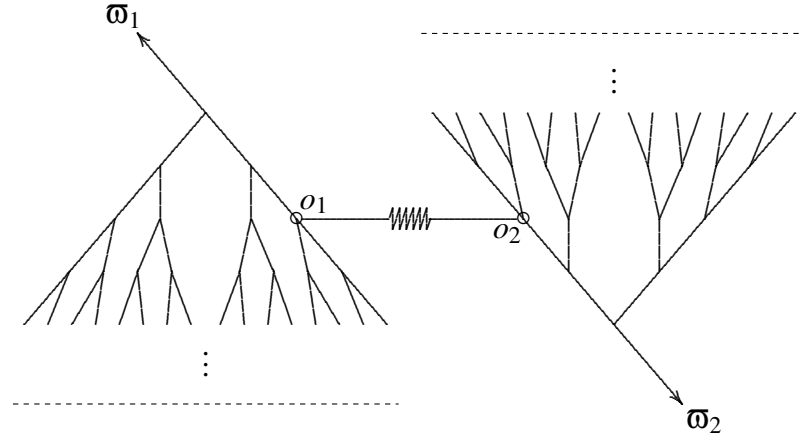


Figure 4

We first explain that $\text{DL}(p, q)$ is vertex-transitive, but when $p \neq q$, it is not a Cayley graph. Recall the group $\text{Aff}(\mathbb{T})$ of all automorphisms that preserve the predecessor relation, where $\mathbb{T} = \mathbb{T}_p$ or $\mathbb{T}_q$. One easily verifies (see CARTWRIGHT, KAIMANOVICH AND WOESS [11]) that the mapping

$$\Phi : \text{Aff}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \Phi(g) = \mathfrak{h}(gx) - \mathfrak{h}(x) \quad (1.5)$$

is independent of $x \in \mathbb{T}$, and thus a homomorphism onto the additive group $\mathbb{Z}$. That is, every $g \in \text{Aff}(\mathbb{T})$ shifts the tree up or down by the vertical amount $\Phi(g)$. Now the following is not hard to prove.

(1.6) Proposition. *The group*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(p, q) = \{(g_1, g_2) \in \text{Aff}(\mathbb{T}_p) \times \text{Aff}(\mathbb{T}_q) : \Phi(g_1) + \Phi(g_2) = 0\}$$

acts transitively on $\text{DL}(p, q)$ by

$$(x_1, x_2) \mapsto (g_1 x_1, g_2 x_2).$$

If $p \neq q$, then this is the full automorphism group of $\text{DL}(p, q)$, while when $p = q$, then it has index 2 in the full automorphism group, which is generated by $\mathcal{A}$ and the “reflection” $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$.

(The vertex set of) $\text{DL}(p, q)$ is the disjoint union of the horoplanes

$$H_{k, -k} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{T}_p \times \mathbb{T}_q : \mathfrak{h}(x_1) = k, \mathfrak{h}(x_2) = -k\}$$

and every $g = (g_1, g_2) \in \mathcal{A}$ maps $H_{k, -k}$ to $H_{m, -m}$, where $m = k + \Phi(g_1)$.

(1.7) Lemma. *If $q \neq p$ then $\text{DL}(p, q)$ is not a Cayley graph of some finitely generated group.*

Proof. Suppose that $q > p$, and that G is any group of automorphisms that acts transitively on $\text{DL}(p, q)$. Consider the sets $A = \{(o_1, x_2) : x_2^- = o_2^-\} \subset H_{0,0}$ and $B = \{(x_1, o_2^-) : x_1^- = o_1\} \subset H_{1,-1}$. Then $|A| = q$, $|B| = p$, and the subgraph of $\text{DL}(p, q)$ induced by $A \cup B$ is the complete bipartite graph over A and B (there is an edge between each element of A and each element of B). The set B consists of all neighbours of A in $H_{1,-1}$.

For each $x = (o_1, x_2) \in A$ there must be $g_x \in G$ such that $g_x o = x$, where $o = (o_1, o_2)$. Since $G \subset \mathcal{A}$, each g_x sends every horoplane to itself, and preserves neighbourhood. We conclude that each g_x sends B onto itself. But since $|B| < |A|$, there must be two distinct $x, x' \in A$ and $y \in B$ such that $g_x y = g_{x'} y$. Then $g_x^{-1} g_{x'}$ stabilises y , although it is different from the identity. In view of Criterion 1.2, $\text{DL}(p, q)$ cannot be a Cayley graph of G . $\square$

The last proof gives a clue why $\text{DL}(p, q)$ should not be quasi-isometric with some Cayley graph, when $p \neq q$: briefly spoken, our graph grows on the order of p^n in one vertical direction, and of order q^n in the opposite direction.

The result was finally announced in 2007 by a group of quasi-isometry experts, ESKIN, FISHER AND WHYTE [17], and the proof is contained in the first of the two papers [18], [19] within a more general framework of quasi-isometry classification of structures whose construction is very similar to DL-graphs. Thus, at last, my question made it to the *Annals*:

(1.8) Theorem. [18]. *If $q \neq p$ then $\text{DL}(p, q)$ is not quasi-isometric with any finitely generated group.*

2 Horocyclic products

We now explain the first of the two notions of the title of this article. Let X be a metric space. A *level function* or *Busemann function* is a continuous surjection $\mathfrak{h} : X \rightarrow \mathbb{L}$, where $\mathbb{L} = \mathbb{R}$, or when X is discrete, resp. totally disconnected, $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$. We write H_l ($l \in \mathbb{L}$) for the associated level sets, i.e., the preimages under $\mathfrak{h}$ of l . We call them *horocycles* or *horospheres*.

Usually, our X will carry additional structure, and then the function $\mathfrak{h}$ should be adapted to that structure. If X is a (connected) graph, then it has to be a graph homomorphism (neighbourhood preserving surjection) onto $\mathbb{Z}$, the latter seen as the bi-infinite line graph. In particular, edges of X are only allowed between successive horocycles.

If $X = G$ is a discrete (or more generally, totally disconnected) group, then we will need $\mathfrak{h}$ to be a group homomorphism onto $\mathbb{Z}$, while if it is a connected locally compact group, it has to be a (continuous) homomorphism onto $\mathbb{R}$. (More general choices of Abelian groups $\mathbb{L}$ also work, but will not be considered here.)

We refer to $(X, \mathfrak{h})$ as a *Busemann pair* over $\mathbb{L}$, although this expression is justified only in specific cases.

(2.1) Definition. Let $(X_1, \mathfrak{h}_1)$ and $(X_2, \mathfrak{h}_2)$ be two Busemann pairs over the same $\mathbb{L}$. We shall commonly use the same symbol $\mathfrak{h}$ for both $\mathfrak{h}_i$. The horocyclic product of X_1 and X_2 is

$$X_1 \times_{\mathfrak{h}} X_2 = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : \mathfrak{h}(x_1) + \mathfrak{h}(x_2) = 0\}$$

(On some occasions it may be more natural to require that $\mathfrak{h}(x_1) - \mathfrak{h}(x_2) = 0$.)

In general, $X_1 \times_{\mathfrak{h}} X_2$ is a topological subspace of the direct product space $X_1 \times X_2$. In the group case, it is a normal subgroup of the direct product. In the graph case, as edges in the X_i may occur only between successive horocycles, $X_1 \times_{\mathfrak{h}} X_2$ is an induced subgraph of the direct product of the two graphs. That is,

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff x_i \sim y_i \ (i = 1, 2), \quad \text{and then} \\ \mathfrak{h}(x_1) - \mathfrak{h}(y_1) = \mathfrak{h}(y_2) - \mathfrak{h}(x_2) = \pm 1.$$

(2.2) Remark. It may also be good to consider graphs as one-dimensional complexes, where each edge is a copy of the unit interval. The graph metric extends naturally to the interior points of the edges. If we have a $\mathbb{Z}$ -valued Busemann function $\mathfrak{h}$ on the vertex set, and $e = [x, y]$ is an edge with $x \in H_k$ and $y \in H_{k+1}$, then we can extend $\mathfrak{h}$ to every interior point $z \in e$: if $d(z, x) = \kappa \in [0, 1)$, then $\mathfrak{h}(z) = k + \kappa$.

In this way, the Busemann function becomes $\mathbb{R}$ -valued, and the topology of the resulting horocyclic product yields just the one-dimensional complex that one gets from the graph construction with edges $\equiv$ intervals.

Three sister structures

We now consider three families of spaces. The fact that they share many common geometric features becomes apparent by realising that they all are horocyclic products:

- A. horocyclic product of two trees $\rightarrow$ Diestel-Leader graphs;
- B. horocyclic product of a hyperbolic half-plane and a tree $\rightarrow$ treebolic spaces;
- C. horocyclic product of two hyperbolic half-planes $\rightarrow$ Sol-groups, resp. manifolds.

Thinking of a graph as a 1-complex as in Remark 2.2, our structures are 1-dimensional in A, 2-dimensional in B, and 3-dimensional in C.

A. More on Diestel-Leader graphs

We start with some general observations. The automorphism group of any locally finite, connected graph X carries the topology of pointwise convergence (on the vertex set), and as such, it is a locally compact, totally disconnected group. See e.g. TROFIMOV [31], or [33]. Let G be any closed subgroup of $\text{Aut}(X)$ that acts transitively. It has a left Haar measure λ_G (unique up to multiplication with a constant), and there is the *modular function* Δ_G defined by $\Delta_G(g) = \lambda_G(Ug)/\lambda_G(U)$, where $U \subset G$ is open with compact closure. $\Delta_G(g)$ is independent of the choice of U , and we may take $U = G_x$, the stabiliser of some vertex x . The group is called unimodular when $\Delta_G \equiv 1$.

(2.3) Lemma. [29], [31]. *If $g \in G$ and $gx = y$ then $\Delta_G(g) = |G_o x|/|G_x o|$.*

A connected graph X with bounded vertex degrees is called *amenable*, if

$$\inf\{|\partial F|/|F| : F \subset X \text{ finite}\} = 0.$$

A non-amenable graph is sometimes called *infinite expander*. A locally compact group is called *amenable*, if it carries a left-invariant mean m , that is, a finitely additive measure that satisfies $m(G) = 1$ and $m(gU) = m(U)$ for any $g \in G$ and Borel set $U \subset G$. The following is due to SOARDI AND WOESS [30].

(2.4) Proposition. *A vertex-transitive graph X is amenable if and only if some ($\Longleftrightarrow$ every) closed subgroup G of $\text{Aut}(X)$ that acts transitively is both amenable and unimodular.*

We also note that a horocyclic product of two amenable groups is amenable, since it is a subgroup of the direct product of the two groups. (Known fact: closed subgroups as well as direct products of amenable groups are amenable.) Now it is easy to see and well-known that $\text{Aff}(\mathbb{T}_p)$ is an amenable group, see e.g. [34, Lemma 12.14], and its modular function is $\Delta_{\text{Aff}(\mathbb{T}_p)}(g) = p^{\Phi(g)}$. The group $\mathcal{A}(p, q)$ of Proposition 1.6 is the horocyclic product of $\text{Aff}(\mathbb{T}_p)$ and $\text{Aff}(\mathbb{T}_q)$ with respect to the respective Busemann functions $\mathfrak{h}(g) = \Phi(g)$, where Φ is given by (1.5).

It is easy to compute the modular function of the group $\mathcal{A}(p, q)$.

(2.5) Corollary. *The modular function of the group $\mathcal{A}(p, q)$ is given by*

$$\Delta_{\mathcal{A}}(g) = (q/r)^{\Phi(g)},$$

where $\Phi(g) = \Phi(g_1) = -\Phi(g_2)$ for $g = g_1 g_2 \in \mathcal{A}(p, q)$.

Thus, the group $\mathcal{A}(p, q)$ is unimodular, and the graph $\text{DL}(p, q)$ is amenable if and only if $p = q$.

This leads to another view on the fact that $\text{DL}(p, q)$ is not a Cayley graph when $p \neq q$. Indeed, more generally, when $p \neq q$, then there cannot be a finitely generated group of automorphisms that acts on $\text{DL}(p, q)$ with finitely many orbits and finite vertex stabilisers: such a group would have to be a co-compact lattice, i.e., a discrete subgroup of $\mathcal{A}(p, q)$ with compact quotient, which cannot occur in a non-unimodular group. Further below, we shall see that when $p = q$, the Diestel-Leader graph is a Cayley graph.

Regarding the quasi-isometry classification, we quote another result of ESKIN, FISHER AND WHYTE.

(2.6) Theorem. [17]+[18]. *$\text{DL}(p, q)$ is quasi-isometric with $\text{DL}(p', q')$ if and only if p and p' are powers of a common integer, q and q' are powers of a common integer, and $\log p' / \log p = \log q' / \log q$.*

Another object whose description may be of interest is the geometric *boundary at infinity* of $\text{DL}(p, q)$.

For that purpose, we first need to describe the geometric boundary of an arbitrary infinite, locally finite tree T (not necessarily homogenous). For any x, y in T , there is a unique *geodesic path* $\pi(x, y) = [x_0, \dots, x_n]$ such that $d(x_i, x_j) = |i - j|$ for all i, j . Analogously, a *geodesic ray*, resp. (*two-sided*) *geodesic* is an infinite

path $\pi = [x_0, x_1, x_2, \dots]$, resp. $\pi = [\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots]$, such that $d(x_i, x_j) = |i - j|$ for all i, j . We think of a ray as a way of going to a point at infinity. Then two rays describe the same point at infinity, i.e., they are equivalent, if their symmetric difference is finite. This means that they differ only by finite initial pieces. An *end* of T is an equivalence class of rays. The boundary ∂T is the set of all ends. For any $x \in T$ and $\xi \in \partial T$, there is a unique geodesic ray $\pi(x, \xi)$ that starts at x and represents ξ . For any pair of distinct ends ξ, η , there is a unique geodesic $\pi(\xi, \eta) = [\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots]$ such that $[x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots]$ represents ξ and $[x_0, x_1, x_2, \dots]$ represents η .

We choose a reference point $o \in T$ and let $|x| = d(o, x)$ for $x \in T$. For $w, z \in \widehat{T} = T \cup \partial T$, we define their *confluent* $w \wedge z$ with respect to o by

$$\pi(o, w \wedge z) = \pi(o, w) \cap \pi(o, z).$$

This is a vertex, namely the last common element on the geodesics $\pi(o, w)$ and $\pi(o, z)$, unless $w = z \in \partial T$. We equip $\widehat{T}$ with the following ultra-metric.

$$\theta(w, z) = \begin{cases} e^{-|w \wedge z|}, & \text{if } z \neq w, \\ 0, & \text{if } z = w. \end{cases}$$

Then $\widehat{T}$ is compact, and T is open and dense. In the induced topology, a sequence $z_n \in \widehat{T}$ converges to $\xi \in \partial T$ if and only if $|z_n \wedge \xi| \rightarrow \infty$.

Back to $\mathbb{T}_p$, we choose a reference end $\mathfrak{o} \in \partial \mathbb{T}_p$ and let $\partial^* \mathbb{T}_p$ be the remaining punctured boundary. In Figure 2, $\mathfrak{o}$ is at the top and $\partial^* \mathbb{T}_p$ at the bottom. The function $\mathfrak{h}$ is indeed the Busemann function with respect to $\mathfrak{o}$ in the classical sense: for any vertex x ,

$$\mathfrak{h}(x) = \lim_{y \rightarrow \xi} (d(x, y) - d(o, y)) = d(x, x \wedge o) - d(o, x \wedge o),$$

where (recall) $x \wedge o$ is the maximal common ancestor of x and o , see Figure 2. (It is the confluent of x and o with respect to the end $\mathfrak{o}$ instead of the vertex o .)

In taking our two trees, we have two reference ends, $\mathfrak{o}_1 \in \partial \mathbb{T}_p$ and $\mathfrak{o}_2 \in \partial \mathbb{T}_q$, see Figure 4. Now we can describe the natural geometric compactification of $\text{DL}(p, q)$: it is a subgraph of $\mathbb{T}_p \times \mathbb{T}_q$, and the obvious geometric compactification of the latter product space is $\widehat{\mathbb{T}}_p \times \widehat{\mathbb{T}}_q$.

(2.7) Definition. *The geometric compactification $\widehat{\text{DL}}(p, q)$ is the closure of $\text{DL}(p, q)$ in $\widehat{\mathbb{T}}_p \times \widehat{\mathbb{T}}_q$, and the boundary at infinity is*

$$\partial \text{DL}(p, q) = \widehat{\text{DL}}(p, q) \setminus \text{DL}(p, q).$$

We can imagine the boundary as a “filled ultra-metric 8”. It is

$$\partial \text{DL}(p, q) = \left(\widehat{\mathbb{T}}_p \times \{\varpi_2\} \right) \cup \left(\{\varpi_1\} \times \widehat{\mathbb{T}}_q \right).$$

The two pieces meet in the point (ϖ_1, ϖ_2) , see Figure 5.

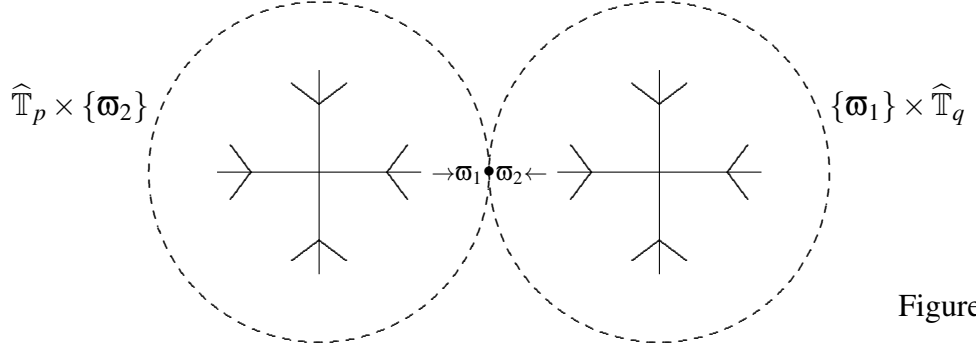


Figure 5

Here, the topology of the boundary dictates disk-like pictures of the two trees with their boundaries, while Figure 2 is an upper-half-plane-like picture.

Let us clarify convergence to the boundary of a sequence $\mathbf{x}_n = (x_{1,n}, x_{2,n}) \in \text{DL}(p, q)$ in the resulting topology. At least one of $x_{1,n}$ and $x_{2,n}$ has to converge to a boundary point of the respective tree. If $x_{1,n} \rightarrow \xi_1 \in \partial^* \mathbb{T}_p$, then necessarily $x_{2,n} \rightarrow \varpi_2$, whence $\mathbf{x}_n \rightarrow (\xi_1, \varpi_2)$. Analogously, if $x_{1,n} = x_1 \in \mathbb{T}_p$ for all $n \geq n_0$, then necessarily $x_{2,n} \rightarrow \varpi_2$, whence $\mathbf{x}_n \rightarrow (x_1, \varpi_2)$. In the same way, when $x_{2,n} \rightarrow \xi_2 \in \partial^* \mathbb{T}_q$, resp. $x_{2,n} = x_2 \in \mathbb{T}_q$ for all $n \geq n_0$, then $\mathbf{x}_n \rightarrow (\varpi_1, \xi_2)$, resp. $\mathbf{x}_n \rightarrow (\varpi_1, x_2)$. Finally, it is possible that $x_{1,n} \rightarrow \varpi_1$ and $x_{2,n} \rightarrow \varpi_2$ (for example by staying on a fixed horizontal level). In this case, $\mathbf{x}_n \rightarrow (\varpi_1, \varpi_2)$.

To conclude this description of the geometry of $\text{DL}(p, q)$, we display the formula for the graph metric, due to BERTACCHI [6].

(2.8) Lemma. *In $\text{DL}(p, q)$,*

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) - |\mathfrak{h}(x_1) - \mathfrak{h}(x_2)|.$$

B. Treebolic spaces

Let $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ be the upper half plane with the hyperbolic metric

$$d(z_1, z_2) = \log \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}.$$

Recall that geodesics (shortest paths) lie on semi-circles orthogonal to the real axis, resp. vertical lines. The standard Busemann function with respect to the upper boundary point ∞ is $z \mapsto \log(\operatorname{Im} z)$. In comparing with the tree, the sign is reversed – it increases when going to ∞ . (This is related with the fact that the real and p -adic absolute values of p^n , $n \in \mathbb{Z}$, have opposite behaviour.) Now we rescale the Busemann function by choosing a *real* parameter $q > 1$ and setting $\mathfrak{h}(z) = \mathfrak{h}_q(z) = \log_q(\operatorname{Im} z)$. Among the resulting horocycles, there are the ones where $\mathfrak{h}_q(z) = k \in \mathbb{Z}$, that is, $\operatorname{Im} z = q^k$. Drawing these in the upper half plane yields to a picture to which we sometimes refer as *sliced hyperbolic plane* $\mathbb{H}_q$, see Figure 6.

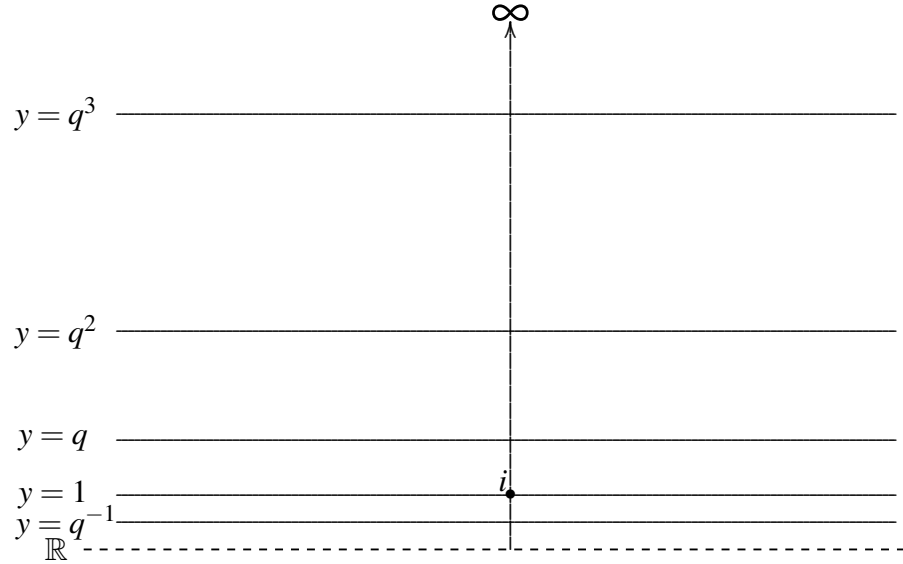


Figure 6

Now we look at the tree $\mathbb{T}_p$ as in Figure 2, but upside down, so that $\mathfrak{o}$ is at the bottom, and the tree branches upwards. As in Remark 2.2, we consider it as a metric tree where edges are intervals of length 1, so that the Busemann function of the tree becomes real-valued. Then we can consider the horocyclic product with sliced hyperbolic plane. This is a situation where we pair points $z \in \mathbb{H}_q$ and $w \in \mathbb{T}_p$ when $\mathfrak{h}_q(z) - \mathfrak{h}(w) = 0$ with “ $-$ ” instead of “ $+$ ” because of the opposite behaviour of the two functions mentioned above.

(2.9) Definition. For integer $p \geq 2$ and real $q > 0$, treebolic space is defined as

$$\mathrm{HT}(p, q) = \{\mathfrak{z} = (w, z) \in \mathbb{T}_p \times \mathbb{H}_q : \mathfrak{h}(w) = \log_q(\operatorname{Im} z)\}.$$

In these terms, treebolic space was introduced – with notation $\mathrm{HT}(q, p)$ and elements (z, w) in the place of (w, z) – by BENDIKOV, SALOFF-COSTE, SALVATORI

AND WOESS [3] and studied in detail in [4]. Previously, $\text{HT}(p, p)$ (with integer $p \geq 2$) appeared in the work of FARB AND MOSHER [20], [21].

To visualise $\text{HT}(p, q)$, Figure 7 shows a compact portion of that space in the case where $p = 2$. To construct our space, we need countably many copies of each of the lines $L_k = \{z \in \mathbb{H} : \text{Im } z = q^k\}$ and strips $S_k = \{z \in \mathbb{H} : q^{k-1} \leq \text{Im } z \leq q^k\}$, where $k \in \mathbb{Z}$. These copies are pasted together in a tree-like fashion. To each vertex v of $\mathbb{T}$, in treebolic space there corresponds the *bifurcation line* $L_v = \{v\} \times L_k$, where $k = \mathfrak{h}(v)$. Attached below to the line L_v , there is the copy

$$S_v = \{(w, z) : w \in [v^-, v], z \in S_k, \mathfrak{h}(w) = \log_q(\text{Im } z)\}$$

of S_k . Attached above L_v , there are the strips S_u , where u ranges over the successor vertices of v (i.e., $u^- = v$).

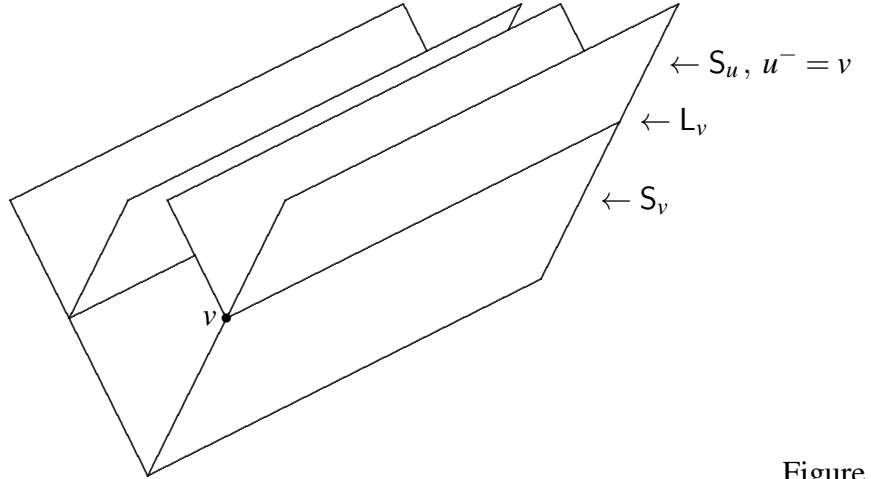


Figure 7

Thus, the sliced hyperbolic plane of Figure 6 is the front view of $\text{HT}(p, q)$, while the upside-down version of the tree of Figure 2 is the side view. In the latter picture, every bi-infinite geodesic $\pi(\mathfrak{w}, \xi)$, where $\xi \in \partial^* \mathbb{T}_p$, is the side view of one copy of $\mathbb{H}_q$. On each of those copies, we have the standard hyperbolic metric. It extends to $\text{HT}(p, q)$ as follows.

Let $(w_1, z_1), (w_2, z_2) \in \text{HT}$, and let $v = w_1 \wedge w_2$ (confluent with respect to $\mathfrak{w}$, see Figure 2). Then

$$d_{\text{HT}}((w_1, z_1), (w_2, z_2)) = \begin{cases} d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2), & \text{if there is } \xi \in \partial^* \mathbb{T} \\ & \text{with } w_1, w_2 \in \pi(\mathfrak{w}, \xi), \\ \min\{d_{\mathbb{H}}(z_1, z) + d_{\mathbb{H}}(z, z_2) : z \in L_{\mathfrak{h}(v)}\}, & \\ \text{otherwise.} & \end{cases} \quad (2.10)$$

Indeed, in the first case, (w_1, z_1) and (w_2, z_2) belong to the common copy of $\mathbb{H}_q$ whose side view is $\pi(\mathfrak{O}, \xi)$. In the second case, v is a vertex, and there are $\xi_1, \xi_2 \in \partial^* \mathbb{T}$ such that $\xi_1 \wedge \xi_2 = v$ and $w_i \in \pi(v, \xi_i)$, so that our points above the line L_v on two distinct hyperbolic planes that are glued together below L_v : it is necessary to pass through some point $(v, z) \in L_v$ on the way from (w_1, z_1) to (w_2, z_2) . See Figure 8.

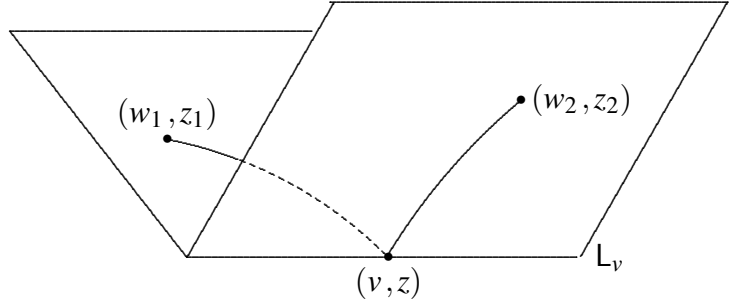


Figure 8

Using this picture, one obtains an approximate analogue of Lemma 2.8.

(2.11) Lemma. [4]. *For all $(z_1, w_1), (z_2, w_2) \in \text{HT}$, with $\delta = \log(1 + \sqrt{2})$,*

$$\begin{aligned} d_{\text{HT}}((w_1, z_1), (w_2, z_2)) &\leq d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) + (\log q) d_{\mathbb{T}}(w_1, w_2) - |\text{Im } z_1 - \text{Im } z_2| \\ &\leq d_{\text{HT}}((w_1, z_1), (w_2, z_2)) + 2\delta. \end{aligned}$$

Let us now describe the isometry group. We already know the group $\text{Aff}(\mathbb{T}_p)$ of all automorphisms of the tree that preserve the predecessor relation. (In terms of the action on the boundary, this is the group of all automorphisms of the tree which fix $\mathfrak{O}$.) On the other hand, consider the group of orientation-preserving isometries of $\mathbb{H}$ which send the collection of all lines L_k to itself:

$$\text{Aff}(\mathbb{H}_q) = \left\{ g = \begin{pmatrix} q^n & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{acting by} \quad gz = q^n z + b, \quad z \in \mathbb{H}.$$

Left Haar measure dg and the modular function $\Delta_{\text{Aff}(\mathbb{H}_q)}$ are given by

$$dg = q^{-n} dn db \quad \text{and} \quad \Delta_{\text{Aff}(\mathbb{H}_q)}(g) = q^{-n}, \quad \text{if} \quad g = \begin{pmatrix} q^n & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Here, dn is counting measure on $\mathbb{Z}$ and db is Lebesgue measure on $\mathbb{R}$. We can now consider the horocyclic product of $\text{Aff}(\mathbb{T}_p)$ and $\text{Aff}(\mathbb{H}_q)$. The following is not hard to prove; see [4], where the group is called $\mathcal{A}(q, p)$.

(2.13) Theorem. *The group*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(p, q) = \{(g_1, g_2) \in \text{Aff}(\mathbb{T}_p) \times \text{Aff}(\mathbb{H}_q) : \log_p \Delta_{\text{Aff}(\mathbb{T}_p)}(g_1) + \log_q \Delta_{\text{Aff}(\mathbb{H}_q)}(g_2) = 0\}$$

acts transitively on $\text{HT}(p, q)$ by

$$(w, z) \mapsto (g_1 w, g_2 z).$$

It is the semi-direct product

$$\mathbb{R} \rtimes \text{Aff}(\mathbb{T}_p)$$

with respect to the action

$$b \mapsto q^{\Phi(g_1)} b, \quad g_1 \in \text{Aff}(\mathbb{T}_p), \quad b \in \mathbb{R},$$

and it acts on $\text{HT}(p, q)$ with compact quotient isometric with the circle of length $\log q$. The full group of isometries of $\text{HT}(p, q)$ is generated by $\mathcal{B}(p, q)$ and the reflection

$$(w, x + iy) \mapsto (w, -x + iy).$$

As a closed subgroup of $\text{Aff}(\mathbb{T}_p) \times \text{Aff}(\mathbb{H}_q)$, the group $\mathcal{B}(p, q)$ is locally compact, compactly generated and amenable, and its modular function is given by

$$\Delta_{\mathcal{B}}(g_1, g_2) = (p/q)^{\Phi(g_1)}.$$

Again, the full isometry group is non-unimodular and cannot have a discrete, co-compact subgroup unless $q = p$.

Regarding the classification up to quasi-isometries, the following available result is not as complete as Theorem 2.6 for DL-graphs.

(2.14) Theorem. [20]. *Let $p, p' \geq 2$ be integers. Then $\text{HT}(p, p)$ is quasi-isometric with $\text{HT}(p', p')$ if and only if p and p' are powers of a common integer.*

For the general case, there is the following working hypothesis, still to be verified:¹

(2.15) Question. *Let $p, p' \geq 2$ be integers and $q, q' > 1$ real.*

Is it true that $\text{HT}(p, q)$ is quasi-isometric with $\text{HT}(p', q')$ if and only if p and p' are powers of a common integer and $\log p' / \log p = \log q' / \log q$?

¹I thank David Fisher for an exchange on this issue.

Again, there is a natural geometric compactification. Recall that the boundary of $\mathbb{H}$ is $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ in the upper half plane model. The compactification $\widehat{\mathbb{H}}$ of $\mathbb{H}$ is easier to visualise when one passes to the Poincaré disk model: it then is simply the closed unit disk. The boundary point ∞ then corresponds to the “North pole” i (the imaginary unit), while $\mathbb{R}$ corresponds to the unit circle without i .

(2.16) Definition. *The geometric compactification $\widehat{\text{HT}}(p, q)$ is the closure of $\text{HT}(p, q)$ in $\widehat{\mathbb{T}}_p \times \widehat{\mathbb{H}}_q$, and the boundary at infinity is*

$$\partial \text{HT}(p, q) = \widehat{\text{HT}}(p, q) \setminus \text{HT}(p, q).$$

Again, we can imagine the boundary as a “filled 8” as in Figure 5, but this time the second of the two disks making up the “8” is a true unit disk: the boundary is

$$\partial \text{HT}(p, q) = \left(\widehat{\mathbb{T}}_p \times \{\infty\} \right) \cup \left(\{\varpi\} \times \widehat{\mathbb{H}}_q \right).$$

The two pieces meet in the point (ϖ, ∞) . Convergence of a sequence $\mathbf{z}_n = (w_n, z_n) \in \text{HT}(p, q)$ to the boundary is analogous to the case of DL (but recall that now the tree is a metric graph, so that convergence of a sequence to a point in $\mathbb{T}$ does not require that the sequence stabilises at that point): When $w_n \rightarrow w \in \mathbb{T} \cup \partial^* \mathbb{T}$ then necessarily $z_n \rightarrow \infty$, whence $\mathbf{z}_n \rightarrow (w, \infty)$. In the same way, when $z_n \rightarrow z \in \mathbb{H} \cup \partial^* \mathbb{H}$, then $\mathbf{z}_n \rightarrow (\varpi, z)$. Finally, it may also occur that $w_n \rightarrow \varpi$ and $z_n \rightarrow \infty$, in which case $\mathbf{z}_n \rightarrow (\varpi, \infty)$.

C. Sol-groups, resp. manifolds

We consider again the hyperbolic upper half plane $\mathbb{H} = \{x + iw : x, w \in \mathbb{R}, w > 0\}$, but use a slightly different parametrisation and notation. The standard length element in the (x, w) -coordinates is $w^{-2}(dx^2 + dw^2)$. We pass to the *logarithmic model* by substituting $z = \log w$, and in the coordinates $(x, z) \in \mathbb{R}^2$, the length element becomes $e^{-2z}dx^2 + dz^2$. Now we also change curvature to $-p^2$ by modifying the length element into

$$ds^2 = d_p s^2 = e^{-2pz} dx^2 + dz^2.$$

We write $\mathbb{H}(p)$ for the hyperbolic plane with this parametrization and metric and $\mathbf{x} = (x, z)$ for elements of $\mathbb{H}(p)$, so that in the upper half plane model, $\mathbf{x}$ corresponds to $x + ie^{pz}$.

The function $\mathfrak{h}(\mathbf{x}) = z$ is then (up to the scaling factor $\log p$) the Busemann function with respect to the boundary point ∞ . Thus, $(\mathbb{H}(p), \mathfrak{h})$ is a Busemann pair.

The affine group $\text{Aff}(\mathbb{H}(p)) = \{g = \begin{pmatrix} e^{pc} & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{R}\}$ acts on $\mathbb{H}(p)$ by $g(x, z) = (e^{pc}x + a, a + z)$ as an isometry group. Its modular function is $\Delta_p(g) = e^{-pa}$.

(2.17) Definition. For $p, q > 0$, the horocyclic product of $\mathbb{H}(p)$ and $\mathbb{H}(q)$ is the manifold

$$\text{Sol}(p, q) = \mathbb{H}(p) \times_{\mathfrak{h}} \mathbb{H}(q).$$

Topologically, it is $\mathbb{R}^3$, but the length element in the 3-dimensional coordinates (x, y, z) is

$$ds^2 = d_{p,q}s^2 = e^{-2pz} dx^2 + e^{2qz} dy^2 + dz^2,$$

with the projections $(x, y, z) \mapsto (x, z) \in \mathbb{H}(p)$ and $(x, y, z) \mapsto (y, -z) \in \mathbb{H}(q)$.

It is harder to draw a reasonable picture than in the case of two trees. One should imagine to replace the two trees in Figure 4 by two hyperbolic (upper half) planes, where the second one is upside down.

Regarding the analogues of lemmas 2.8 and 2.11, so far only the following inequality has been proved, see BROFFERIO, SALVATORI AND WOESS [8].

(2.18) Lemma. [8, Proposition 2.8(iii)]. If $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \text{Sol}(p, q)$, then

$$\begin{aligned} d_{\text{Sol}}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \\ \leq d_{\mathbb{H}(p)}((x_1, z_1), (x_2, z_2)) + d_{\mathbb{H}(q)}((y_1, -z_1), (y_2, -z_2)) - |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

It is an open (probably not too hard) exercise to derive a matching upper bound of the form $d_{\text{Sol}}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) + \text{const.}$

In the case of Sol, the analogue of the isometry groups $\mathcal{A}(p, q)$ for DL, resp. $\mathcal{B}(p, q)$ for HT is Sol itself. But in order to keep this analogy in mind, and also because we want to think of space and isometry group separately, we write $\mathcal{S}(p, q)$ for the corresponding Lie group.

(2.19) Facts. The Lie group

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(p, q) = \left\{ \mathfrak{g} = \begin{pmatrix} e^{pc} & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & e^{-qc} \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

can be identified with $\text{Sol}(p, q)$, such that $\mathfrak{g}$ as above corresponds to (a, b, c) . The (isometric, fixed-point-free) action on $\text{Sol}(p, q)$ (or equivalently, the group product) is given by

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (e^{pc}x + a, e^{-qc}y + b, c + z).$$

The group is the horocyclic product of the two affine groups $\text{Aff}(\mathbb{H}(p))$ and $\text{Aff}(\mathbb{H}(q))$, consisting of all pairs (g_1, g_2) in the product of those two groups which satisfy

$$\log_p \Delta_p(g_1) + \log_q \Delta_q(g_2) = 0.$$

The modular function is

$$\Delta_{\text{Sol}(p,q)}(\mathfrak{g}) = e^{(q-p)c}, \quad \text{when} \quad \mathfrak{g} = \begin{pmatrix} e^{pc} & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & e^{-qc} \end{pmatrix}.$$

Again, there is no co-compact lattice in $\mathcal{S}(p, q)$ unless $p = q$. Regarding the quasi-isometry classification, we have the following analogue of Theorem 2.6.

(2.20) Theorem. [17]+[18]. *Sol(p, q) is quasi-isometric with Sol(p', q') if and only if $p'/p = q'/q$.*

Once more, there is a natural definition of the boundary of $\text{Sol}(p, q)$ when we consider our manifold as a subspace of $\mathbb{H}(p) \times \mathbb{H}(q)$. The boundary of $\mathbb{H}(p)$ is the upper boundary point ∞ together with the real line at the bottom of the upper half plane, while in the logarithmic model, the real line sits at $z = -\infty$. Anyway, it is better to think of the Poincaré disk and its compactification $\widehat{\mathbb{H}}(p)$ as a closed disk (with the proper scaling of the metric in view of the curvature parameters).

(2.21) Definition. *The geometric compactification $\widehat{\text{Sol}}(p, q)$ is the closure of $\text{Sol}(p, q)$ in $\widehat{\mathbb{H}}(p) \times \widehat{\mathbb{H}}(q)$, and the boundary at infinity is*

$$\partial \text{Sol}(p, q) = \widehat{\text{Sol}}(p, q) \setminus \text{Sol}(p, q).$$

The boundary looks once more like in Figure 5, but this time, both halves of the “8” are true full unit disks. This time, we omit the description of convergence to the boundary, which is completely analogous to DL and HT.

At last, we mention the work of TROYANOV [32], who has given a careful description of various features of the geometry of $\text{Sol}(1, 1)$. This includes, in particular, the *visibility boundary*. Briefly spoken, it consists of those boundary points which can be “seen” from the chosen origin (reference point) in our space as the limit of a geodesic ray that starts at the origin and converges to that boundary point. In case of $\text{Sol}(p, q)$, as a subset of the geometric boundary, the visibility boundary is the “8” without its interior points and without the point where the two circles meet. Note that this is not the same as in the visibility metric (where distance between geodesics is distance in unit sphere between their tangent vectors at 0) referred to in [32].² The visibility boundary is completely analogous for $\text{DL}(p, q)$ and $\text{HT}(p, q)$.

In this section, we have undertaken an effort to underline a variety of common

²I thank Jeremie Brioussel for an exchange on this issue.

geometric (resp. group-theoretic) features of DL, HT and Sol which become clear thanks to visualising these spaces as horocyclic products.

3 Lamplighters and other discrete subgroups

We now come to the second question of the title of this article. So far, we have seen that when $p \neq q$, then none of the groups $\mathcal{A}(p, q)$, $\mathcal{B}(p, q)$ and $\mathcal{S}(p, q)$ can contain co-compact lattices (discrete subgroups with compact quotient), and in particular, $\text{DL}(p, q)$ is far from even resembling a Cayley graph. What happens when $p = q$?

During a visit of Röggi Möller (Reykjavik) to Graz in 2000, we had discussed but not succeeded to prove that $\text{DL}(p, q)$ is not quasi-isometric with a Cayley graph. Shortly later, he sent me a letter (at that time, still on paper & by classical mail!) telling that in discussions with Peter Neumann they had realised that $\text{DL}(p, p)$ is a Cayley graph. Later we realised that this was the *lamplighter group* over $\mathbb{Z}$.

Let us start with an explanation in terms of graphs. Consider a finitely generated group G (resp., for a picture, one of its Cayley graphs). Imagine that at each group element (vertex) there is a lamp. Each lamp can be in p different states (off, or on in different colours or intensities) which are described by the set $\mathbb{Z}_p = \{0, \dots, p-1\}$ – the cyclic group of order p . (We might take any other finite group.) We think of G , resp. its given Cayley graph, as a street network, and imagine a lamplighter walking along. Initially, all lamps are off (state 0), and at each step the lamplighter can choose or combine the following actions: walk from a crossroad (vertex) to a neighbouring one, and/or modify the state of the lamp at the current position. After a finite number of steps, only finitely many lamps will be on. To encode this process, we have to keep track of

- the current position of the lamplighter – an element $g \in G$ (graph vertex), and
- the current configuration of lamps – a function $\eta : G \rightarrow \mathbb{Z}_p$ with finite support $\{x : \eta(x) \neq 0\}$.

Let $\mathfrak{C}$ be the collection of all finitely supported configurations. It is a group with respect to elementwise addition mod p . We have to consider all pairs (η, g) , where $g \in G$ and $\eta \in \mathfrak{C}$. Now every $g \in G$ acts on $\mathfrak{C}$ by $L_g \eta(x) = \eta(g^{-1}x)$. Thus, we have a semi-direct product, called the *wreath product*

$$\mathbb{Z}_p \wr G = \mathfrak{C} \rtimes G, \quad (\eta, g)(\eta', g') = (\eta + L_g \eta', gg').$$

The same works when $\mathbb{Z}_p$ is replaced by any other group H , in which case the above addition mod p should be replaced with elementwise group operation in H . Below, we shall always have $G = \mathbb{Z}$, in which case, for $k \in \mathbb{Z}$, we have of course $L_k \eta(x) = \eta(x - k)$, and $(\eta, k)(\eta', k') = (\eta + L_k \eta', k + k')$. Wreath products are nowadays often called *lamplighter groups*, in particular when the base group is $G = \mathbb{Z}$.

The following figure illustrates an element of $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$: the configuration η is $= 1$ at the $\bullet$ s, and the lamplighter stands at the $\circ$.

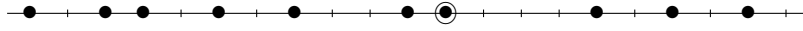


Figure 9

We now explain the correspondence between the lamplighter group $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}$ and the graph $\text{DL}(p, p)$. For this purpose, let us again look at Figure 2. Given any vertex of $\mathbb{T}_p$, we can label the edges to its successors from left to right with the digits $0, \dots, p-1$ ($0, 1$ in Figure 2). We let Σ_p be the collection of all sequences $(\sigma(n))_{n \leq 0}$ with finite support $\{n : \sigma(n) \neq 0\}$. With a vertex x we can then associate the sequence $\sigma_x \in \Sigma_p$ of the labels on the geodesic $\pi(\varpi, x)$ coming down from ϖ . Given $\sigma \in \Sigma_p$ and $k \in \mathbb{Z}$, there is precisely one vertex x on the horocycle H_k such that $\sigma_x = \sigma$. In other words, we have a bijection

$$T \leftrightarrow \Sigma_p \times \mathbb{Z}, \quad \text{where} \quad x \mapsto (\sigma_x, k)$$

For example, the vertex x in Figure 2 corresponds to (σ, k) , where $k = 0$ and $\sigma = (\dots, 0, 0, 0, 1, 1)$. In the above identification, the predecessor vertex of any (σ, k) is $(\sigma', k-1)$, where $\sigma'(n) = \sigma(n-1)$ for all $n \leq 0$.

Now let $(\eta, k) \in \mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}$. We split η at k by defining $\eta_k^- = \eta|_{(-\infty, k]}$ and $\eta_k^+ = \eta|_{[k+1, \infty)}$, both written as sequences over the non-positive integers which belong to Σ_p :

$$\eta_k^- = (\eta(k+n))_{n \leq 0} \quad \text{and} \quad \eta_k^+ = (\eta(k+1-n))_{n \leq 0}.$$

Then $x_1 = (\eta_k^-, k)$ and $x_2 = (\eta_k^+, -k)$ are vertices, one in each of the two copies of $\mathbb{T}_p$ that make up $\text{DL}(p, p)$. This yields the correspondence between (the vertex set of) $\text{DL}(p, p)$ and the lamplighter group $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}$. It is a rather straightforward exercise to work out that under this identification, our group acts transitively and without fixed points on $\text{DL}(p, p)$ and that the action preserves the neighbourhood relation of the graph. See [35], where this is explained in more detail.

For $k \in \mathbb{Z}$ and $\ell \in \mathbb{Z}_p$, let $\delta_k^\ell \in \mathfrak{C}$ be the configuration with value ℓ at k and 0 elsewhere. Then we can subsume the preceding explanations as follows.

(3.1) Proposition. *The lamplighter group $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}$ embeds as a discrete, co-compact subgroup into the group $\mathcal{A}(p, p)$ of Proposition 1.6. The Diestel-Leader graph $\text{DL}(p, p)$ is the Cayley graph of the lamplighter group with respect to the symmetric set of generators*

$$\{(\delta_1^\ell, 1), (\delta_0^\ell, -1) : \ell \in \mathbb{Z}_q\}.$$

This means that the actions of the lamplighter that correspond to crossing an edge in $\text{DL}(p, p)$ are: “either make first a step to the right and then switch the lamp at the arrival point to any of the possible states, or else first switch the lamp at the departure point to any of the possible states and then make a step to the left.”

Regarding treebolic space and the group $\mathcal{B}(p, p)$ of Theorem 2.13, we have the following.

(3.2) Proposition. *For integer $p \geq 2$, the Baumslag-Solitar group*

$$BS(p) = \left\{ \begin{pmatrix} p^m & k/p^l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : k, l, m \in \mathbb{Z} \right\} = \langle a, b \mid ab = b^p a \rangle$$

embeds as a discrete, co-compact subgroup into the group $\mathcal{B}(p, p)$.

We omit the explanation; see [20], and in more detail & closer to the spirit of the present survey, [4, §2].

Finally, we consider the Sol case and exhibit discrete, co-compact subgroups of $\mathcal{S}(p, p)$. We include an explanation because this is so obvious to the specialists that it is not too easy to find in the relevant literature.

Let $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, an integer matrix with determinant 1. We require that it has trace $a + d > 2$. Thus, it has eigenvalues $\lambda = \lambda(A) > 1$ and $1/\lambda$. Then A induces an action of $\mathbb{Z}$ on $\mathbb{Z}^2$, such that $m \in \mathbb{Z}$ acts by

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \mapsto A^m \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}.$$

This gives rise to the semi-direct product group

$$\mathbb{Z}^2 \rtimes_A \mathbb{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} A^m & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : k, l, m \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (3.3)$$

We can find a matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ that diagonalises A , that is,

$$A \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

If we move the lattice $\mathbb{Z}^2$ by that matrix, then we end up in $\mathcal{S}(p, p)$, where $p = \log \lambda$. Indeed, conjugating with the matrix

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

we compute

$$B^{-1} \begin{pmatrix} A^m & k \\ & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} e^{pm} & \delta k - \beta l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma k + \alpha l & e^{-pm} \end{pmatrix}$$

Note that $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ and p cannot be chosen independently. Again, we subsume.

(3.4) Proposition. *For any matrix $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ with trace > 2 , the group $\mathbb{Z}^2 \rtimes_A \mathbb{Z}$ of (3.3) embeds isomorphically into $\mathcal{S}(p, p)$ as a discrete, co-compact subgroup, where $p = \log \lambda$, and λ is the eigenvalue of A with $\lambda > 1$.*

Thus, the group acts on $\text{Sol}(p, p)$ with compact quotient.

4 Further developments

My own interest focusses on issues like random walks on graphs and groups, the associated harmonic functions and the spectral theory of the corresponding transition operators, resp. adjacency matrices. In case of non-discrete structures, it is natural to replace random walks with variants of Brownian motion. What makes me most happy is when I can use a good understanding of the geometry of the given structure to derive results in this direction.

Lamplighter groups have been of increasing interest in the context of random walks since their first appearance in this field of research in the seminal paper by KAIMANOVICH AND VERSHIK [27]. Currently, insertion of the word “lamplighter” in *MathSciNet* yields a response of 44 articles.

Realising the classical lamplighter groups $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}$ in terms of DL graphs enhanced the interest to study random walks on $\text{DL}(p, q)$ for arbitrary integers $p, q \geq 2$. The asymptotics in space and time of random walks on $\text{DL}(p, q)$ were first studied by BERTACCHI [6].

Regarding random walk on $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}$ – corresponding to simple random walk on $\text{DL}(p, p)$ – without using the DL description, GRIGORCHUK AND ŽUK [22] were the first to show that the spectrum is pure point, when $p = 2$, then generalised to

arbitrary p by DICKS AND SCHICK [15]. While pure point spectrum (that is, the given self-adjoint operator admits a complete orthonormal system of – typically finitely supported – eigenfunctions) is familiar in the context of fractals, this was the first example of this type regarding an infinite, finitely generated group. Using the horocyclic product structure, BARTHOLDI AND WOESS [2] provide a direct, explicit construction of the spectrum of $\mathcal{A}$ -invariant nearest neighbour random walk on arbitrary $\text{DL}(p, q)$. It is again pure point, and it can be used to determine the exact asymptotics of return probabilities (see also REVELLE [28] for these asymptotics on the lamplighter group).

The other issue that could be treated in a rather complete way by using the horocyclic product geometry concerns positive harmonic functions and the Martin boundary, see BROFFERIO AND WOESS [35], [9], [10].

A very similar approach, though comprising several different technical details, applies to Brownian motion on the two sister structures, Sol and HT – with increasing level of difficulty. For those two, spectrum as well as Martin boundary are not yet determined rigorously, although the DL case of [9] leads to very clear ideas how the Martin compactification should look like: in the drift-free case it should be the respective geometric compactification, as described in §2, while otherwise it should be its refinement in terms of horo-levels; compare with [9]. One should also mention here the recent work on the harmonic measure of discrete time random walks on $\text{Sol}(1, 1)$ by BRIEUSSEL AND TANAKA [7].

While Sol has a smooth structure, treebolic space has singularities along all the bifurcation lines. This makes the rigorous construction of a Laplace operator (with vertical drift term) and the associated Laplace operator considerably harder, see [3]. Once this is achieved, still with some additional difficulties in view of the spatial singularities, one can proceed in a similar spirit as for random walk on DL-graphs. The results on $\text{HT}(p, q)$ concern once more rate of escape, central limit theorem, convergence to the boundary and positive harmonic functions. See [4], [5].

One common feature in all three cases is that every positive harmonic function f for the respective transition, resp. Laplace operator decomposes as

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2),$$

where x_1 and x_2 are the “coordinates” (with $\mathfrak{h}(x_1) \pm \mathfrak{h}(x_2) = 0$) in the two factors of the horocyclic product, and each f_i is a non-negative harmonic function for the projection of the respective operator on the respective factor in that product.

Of course, there are more general types of horocyclic, resp. horospherical products than the tree sister structures of §2. One is the horocyclic product of more than

two trees,

$$\mathrm{DL}(p_1, \dots, p_d) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}_{p_1} \times \dots \times \mathbb{T}_{p_d} : \mathfrak{h}(x_1) + \dots + \mathfrak{h}(x_d) = 0\},$$

equipped with a suitable neighbourhood relation. Automorphism group, spectrum, Poisson boundary and other issues have been studied by BARTHOLDI, NEUHAUSER AND WOESS [1]. Again, the spectrum is pure point, and again, $\mathrm{DL}(p_1, \dots, p_d)$ is not a Cayley graph when the p_i do not coincide. For three trees, $\mathrm{DL}(p, p, p)$ is a Cayley graph of a finitely presented lamplighter-like group that has also been studied by CLEARY AND RILEY [12]. (The dead-end property studied in that paper and its predecessor by CLEARY AND TABACK [13] becomes immediately clear when one realises these groups in terms of DL graphs.) For $d \geq 4$ factors, in [1] a large number of cases is determined where $\mathrm{DL}(p, \dots, p)$ is a Cayley graph. The smallest case when this is not known is $\mathrm{DL}(2, 2, 2, 2)$, while $\mathrm{DL}(p, p, p, p)$ is shown to be a Cayley graph for all odd $p \geq 3$.

Given a tree with degree $p + q$, where $p, q \geq 2$, one can draw it such that every vertex has p predecessors and q successors. It also has a natural level function $\mathfrak{h}$, which in reality is not the Busemann function with respect to some boundary point. One can then consider the horocyclic product with “sliced” hyperbolic plane $\mathbb{H}_r$ (where $1 < r \in \mathbb{R}$) to obtain a version of treebolic space where the strips ramify in both vertical directions. When p and q are relatively prime and r is chosen appropriately, the *non-amenable Baumslag-Solitar group* $\langle a, b \mid ab^q = b^p a \rangle$ acts on that horocyclic product as a discrete isometry group and with compact quotient. This fact is used by CUNO AND SAVA [14] in order to determine the Poisson boundary of random walks on that group.

Finally, KAIMANOVICH AND SOBIECZKY [25], [26] have constructed horocyclic products of random trees and studied random walks in the resulting random environment.

Many further interesting classes of horocyclic, resp. horospherical products are at hand and waiting for future exploration. In conclusion, let me come back to a new formulation of the question posed at the beginning, apparently still open:

Is there a (connected, locally finite, infinite) vertex-transitive graph with unimodular automorphism group that is not quasi-isometric with some Cayley graph?

References

- [1] L. Bartholdi, M. Neuhauser, and W. Woess, *Horocyclic products of trees*, J. Eur. Math. Soc. **10** (2008), 771–816.
- [2] L. Bartholdi and W. Woess, *Spectral computations on lamplighter groups and Diestel-Leader graphs*, J. Fourier Anal. Appl. **11** (2005), 175–202.
- [3] A. Bendikov, L. Saloff-Coste, M. Salvatori, and W. Woess, *The heat semigroup and Brownian motion on strip complexes*, Adv. Math. **226** (2011), 992–1055.
- [4] ———, *Brownian motion on treebolic space: escape to infinity*, preprint, arXiv: 1212.6151, 2012.
- [5] ———, *Brownian motion on treebolic space: positive harmonic functions*, in preparation, 2013.
- [6] D. Bertacchi, *Random walks on Diestel-Leader graphs*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **71** (2001), 205–224.
- [7] J. Briessell and R. Tanaka, *Discrete random walks on the group Sol*, preprint, arXiv: 1306.6180, 2013.
- [8] S. Brofferio, M. Salvatori, and W. Woess, *Brownian motion and harmonic functions on $Sol(p, q)$* , Int. Math. Res. Not. **22** (2012), 5182–5218.
- [9] S. Brofferio and W. Woess, *Green kernel estimates and the full Martin boundary for random walks on lamplighter groups and Diestel-Leader graphs*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **41** (2005), 1101–1123, erratum: vol. **42** (2006), 773–774.
- [10] ———, *Positive harmonic functions for semi-isotropic random walks on trees, lamplighter groups, and DL-graphs*, Potential Anal. **24** (2006), 245–265.
- [11] D. I. Cartwright, V. A. Kaĭmanovich, and W. Woess, *Random walks on the affine group of local fields and of homogeneous trees*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44** (1994), 1243–1288.
- [12] S. Cleary and T. R. Riley, *A finitely presented group with unbounded dead-end depth*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 343–349, erratum: vol. **136** (2008), 2641–2645.
- [13] S. Cleary and J. Taback, *Dead end words in lamplighter groups and other wreath products*, Q. J. Math. **56** (2005), 165–178.
- [14] J. Cuno and E. Sava, *The Poisson boundary of random walks on nonamenable Baumslag-Solitar groups*, (2013), in preparation.
- [15] W. Dicks and Th. Schick, *The spectral measure of certain elements of the complex group ring of a wreath product*, Geom. Dedicata **93** (2002), 121–137.
- [16] R. Diestel and I. Leader, *A conjecture concerning a limit of non-Cayley graphs*, J. Algebraic Combin. **14** (2001), 17–25.
- [17] A. Eskin, D. Fisher, and K. Whyte, *Quasi-isometries and rigidity of solvable groups*, Pure Appl. Math. Q. **3** (2007), 927–947.
- [18] ———, *Coarse differentiation of quasi-isometries I: Spaces not quasi-isometric to Cayley graphs*, Ann. of Math. **176** (2012), 221–260.
- [19] ———, *Coarse differentiation of quasi-isometries II: Rigidity for Sol and lamplighter groups*, Ann. of Math. **177** (2013), 869–910.
- [20] B. Farb and L. Mosher, *A rigidity theorem for the solvable Baumslag-Solitar groups, with an appendix by Daryl Cooper*, Invent. Math. **131** (1998), 419–451.

- [21] ———, *Quasi-isometric rigidity for the solvable Baumslag-Solitar groups. II*, Invent. Math. **137** (1999), 613–649.
- [22] R. I. Grigorchuk and A. Żuk, *The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton, and its spectrum*, Geom. Dedicata **87** (2001), 209–244.
- [23] M. Gromov, *Infinite groups as geometric objects*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983) (Warsaw), PWN, 1984, pp. 385–392.
- [24] ———, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer, New York, 1987, pp. 75–263.
- [25] V. A. Kaĭmanovich and F. Sobieczky, *Stochastic homogenization of horospheric tree products*, Probabilistic approach to geometry, Adv. Stud. Pure Math., vol. 57, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, pp. 199–229.
- [26] ———, *Random walks on random horospheric products*, Dynamical systems and group actions, Contemp. Math., vol. 567, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 163–183.
- [27] V. A. Kaĭmanovich and A. M. Vershik, *Random walks on discrete groups: boundary and entropy*, Ann. Probab. **11** (1983), 457–490.
- [28] D. Revelle, *Heat kernel asymptotics on the lamplighter group*, Electron. Comm. Probab. **8** (2003), 142–154.
- [29] G. Schlichting, *Polynomidentitäten und Permutationsdarstellungen lokalkompakter Gruppen*, Invent. Math. **55** (1979), 97–106.
- [30] P. M. Soardi and W. Woess, *Amenability, unimodularity, and the spectral radius of random walks on infinite graphs*, Math. Z. **205** (1990), 471–486.
- [31] V. I. Trofimov, *Groups of automorphisms of graphs as topological groups*, Mat. Zametki **38** (1985), 378–385, 476, English translation in: Math. Notes **38** (1985), 717–720.
- [32] M. Troyanov, *L’horizon de SOL*, Exposition. Math. **16** (1998), 441–479.
- [33] W. Woess, *Topological groups and infinite graphs*, Discrete Math. **95** (1991), 373–384.
- [34] ———, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 138, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [35] ———, *Lamplighters, Diestel-Leader graphs, random walks, and harmonic functions*, Combin. Probab. Comput. **14** (2005), 415–433.

*Author’s address: Institut für Mathematische Strukturtheorie (Math C),
Technische Universität Graz, Steyrergasse 30, A-8010 Graz.
email woess@tugraz.at.*

Mathematik UND Musik?

Persönliche Ansichten zu einer schwierigen Beziehung

Christian Krattenthaler

Universität Wien

Dies ist die (etwas erweiterte) Niederschrift eines Vortrags, den der Autor am 16. Mai 2013 im math.space im MuseumsQuartier in Wien gehalten hat. Da die eigenhändig am Klavier ausgeführten Stücke auf bedrucktem Papier nicht wiedergegeben sind, gibt der Autor für jedes dieser Stücke einen Hörhinweis.*

Präambel

⟨Robert SCHUMANN (1810–1856): „Aveu“ aus Carnaval op. 9⟩¹

Mathematik und Musik – Betonung auf *und* – Fragezeichen, das ist unser heutiges Thema. Um hier einen Einstieg zu bieten: Wenn ich in ein Gespräch verwickelt bin, und mein Gesprächspartner herausfindet, dass ich einerseits Professor für Mathematik an der Universität Wien bin und andererseits einmal in einem früheren Leben Konzertpianist war, dann passiert es mir oft, dass mein Gegenüber spontan ausruft:

„Mathematik und Musik, das liegt ja ganz nah beieinander!“

Ich pflege darauf zu antworten:

„Ist das wirklich so?“

*Ich bedanke mich zutiefst bei Theresia Eisenkölbl, die die Computerpräsentation für diesen Vortrag angefertigt hat, von der einige Teile in diesen Artikel Eingang gefunden haben. Großer Dank gilt außerdem Reinhard Winkler für eine sorgfältige Lektüre einer ersten Version und für zahlreiche Korrekturen und einsichtsvolle Anregungen.

¹Ich habe nichts, was mich wirklich überzeugt, auf YouTube gefunden. Tal-Haim Samnons Darstellung (<http://www.youtube.com/watch?v=EN2gUDaHqvo>) trifft den Charakter, ist aber stellenweise doch ein wenig zu gedehnt.

Was will ich damit sagen? Um ehrlich zu sein: Ich hatte immer schon große Schwierigkeiten beim Thema „Mathematik *und* Musik“, nämlich wenn man Mathematik und Musik zusammenbringt, in Verbindung setzt, oder auch nur nach Verbindungen sucht. Ja, es stimmt, Töne und Intervalle gehorchen aufgrund von physikalischen Gesetzen strengen mathematischen Regeln; aber ist das jetzt eine Verbindung zwischen Mathematik und Musik? Ja, es stimmt auch, dass Johann Sebastian Bach häufig Zahlen in seine Kompositionen gewoben hat.² Aber ist das jetzt Mathematik? Es stimmt ebenfalls, dass Kompositionen oft sehr komplex gebaut sind, komplizierte Formen aufweisen. Aber ist das jetzt Mathematik in der Musik? Wenn umgekehrt Mathematik – ich meine hier Struktur – in der Musik das Übergewicht bekommt, wie etwa in der Seriellen Musik, wo ja alle Parameter – also Tonhöhe, Rhythmus, Lautstärke, u.s.w. – strengen Regeln unterworfen werden, ist das dann noch Musik?

Um es ohne Umschweife zu bekennen: Ich kann keine direkten, substantiellen Verbindungen zwischen Mathematik und Musik erkennen. Insbesondere habe ich noch nie verstanden, was Mathematik etwa mit jener berührenden Liebeserklärung³ Robert Schumanns – vermutlich an seine geliebte Clara –, die ich eingangs gespielt habe, zu tun haben soll. Wenn Sie also gekommen sind, um meine Antwort auf die Titelfrage zu hören: Hier ist sie! Sie könnten dann getrost nach Hause gehen. Das wäre natürlich erstens zu billig und zweitens hätten wir dann noch nicht eine zweite Frage beantwortet.

Lassen Sie mich ein wenig ausholen. Vor nicht allzu langer Zeit sprach ein prominenter Besucher zum Dekan der Fakultät für Mathematik der Universität Wien:

“I hear that you are chairing a department of pianists!”

Was wollte der Besucher damit sagen? Wenn man sich die Mitglieder der Fakultät für Mathematik – der ich auch angehöre – ansieht, dann ist es in der Tat bemerkenswert, wie viele davon begeisterte Pianisten sind. (Der Dekan ist im Übrigen einer davon.) Darüber hinaus gibt es andere, die andere Instrumente spielen, es gibt solche, die passionierte Chorsänger sind, und es gibt weitere, die zwar kein Instrument spielen oder singen, aber dafür begeisterte Opern- und Konzertbesucher sind. Kurzum, der Anteil der Mitglieder der Fakultät, die eine große Affinität

²Es ist etwa gut belegt (siehe etwa: Ludwig Prautzsch, *Die verborgene Symbolsprache Johann Sebastian Bachs*, Band 1: Zeichen- und Zahlenalphabet der kirchenmusikalischen Werke. Merseburger, Kassel 2004), dass Bach in seinen Passionen Nummern von Psalmversen an den Stellen, wo diese vorgetragen werden, hineingearbeitet hat. Das bleibt aber einem Hörer verborgen, denn das lässt sich nicht „heraus hören“; das lässt sich nur durch intensives Partiturstudium nachweisen. Dies ist also gewissermaßen eine „Fleißaufgabe“, die Bach sich hier auferlegt hat.

Die Zahl, die in Bachs Werk die größte Rolle spielt, ist die Zahl 14. Sie ist gewissermaßen Bachs Signatur (so wie Maler ihre Bilder signieren). Die Zahl 14 ist nämlich die Summe der Stellen, die die Buchstaben B, A, C und H im Alphabet einnehmen, also $2 + 1 + 3 + 8 = 14$. So ist etwa die Anzahl der Nummern im „Musikalischen Opfer“ gerade 14 (so man richtig zählt: Einer der Kanons lässt sich auf zwei verschiedene Arten ausführen).

³„Liebeserklärung“, das ist die Bedeutung des französischen Wortes „aveu“.

zu Musik haben, ist überproportional hoch. Dasselbe gilt, wenn man andere Mathematikinstitute ansieht. Reinhard Winkler etwa, der Organisator dieser Vortragsreihe, arbeitet an der TU Wien und er ist ebenfalls ein passionierter Klavierspieler. Umgekehrt ist es auch überraschend, zu sehen, wie viele Musiker auch eine Affinität zur Mathematik haben. Prominentestes Beispiel dafür ist sicher der blutjunge Pianist und Komponist Kit Armstrong, der bekanntlich Schüler von Alfred Brendel in London war, und der so nebenher auch ein Mathematikstudium an der Université “Pierre et Marie Curie” in Paris absolviert hat. Die Frage, die sich hier also stellt, ist:

„Wieso gibt es so viele Mathematiker, die auch eine starke Affinität zur Musik haben, und wieso gibt es so viele Musiker, die auch eine starke Affinität zur Mathematik haben?“

Auf einer oberflächlichen Ebene können wir diese Frage auch so formulieren:

„Wie stellen wir uns den typischen Mathematiker – also den typischen scharfen Denker, Intellektuellen – vor?“

Ich würde sagen, dass die Portraits in Abbildung 1 das vorzüglich treffen. Sie geben mir doch recht, oder? Wir können die Gegenprobe machen:

„Wie stellen wir uns den typischen Musiker – also den typischen sensiblen Künstler – vor?“

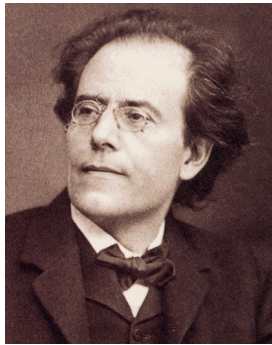
So wie die Portraits in Abbildung 2, nicht wahr?

Für diejenigen, denen die Namen „Wiles“ und „Perelman“ nicht so geläufig sein sollten, sollte ich vielleicht erklären: Andrew Wiles, britischer Mathematiker, ist berühmt dafür, dass er ein 300 Jahre altes Problem, das unter dem Namen „Großer Fermatscher Satz“ bekannt ist, gelöst hat. Wir werden gleich noch mehr darüber hören. Auf der anderen Seite ist Grigori Perelman, russischer – sehr exzentrischer – Mathematiker, berühmt dafür, dass er eine 100 Jahre alte Vermutung von Henri Poincaré über vierdimensionale Geometrie bewiesen hat.

Bevor wir an die Beantwortung der obigen Frage schreiten, sollten wir vielleicht zuerst genau festmachen, worüber wir eigentlich reden. Ich bin ja Mathematiker, und in der Mathematik müssen alle Dinge zuerst genau definiert werden, bevor man darüber reden kann. Was also ist die Definition von Mathematik, was ist die Definition von Musik?

Musik ist ... entsteht ... kommt zustande, wenn Töne erklingen ... wenn Töne und Geräusche – Geräusche darf ich nicht vergessen! – wenn also Töne und Geräusche erklingen, und im Zusammenklang ...

Ich sehe schon, das wird nichts. Machen wir doch etwas Leichteres! Mathematik – das ist doch simpel: Mathematik ist ... Rechenkunst. Mathematik beschäftigt sich mit Zahlen, ... geometrischen Objekten, ... abstrakteren Objekten – wie etwa Verknüpfungsgebilden und dergleichen – und ...



Gustav
Mahler



Dmitri
Schostakowitsch



Arnold
Schönberg

Abbildung 1

Nein, so geht das nicht!

Eigentlich ist es völlig idiotisch, was ich hier tue. Heutzutage zerbricht man sich nicht mehr selbst den Kopf, heutzutage gibt es Wikipedia! Was sagt also Wikipedia zu Musik?⁴

Musik ist eine organisierte Form von Schallereignissen. Zu ihrer Erzeugung wird akustisches Material – Töne und Geräusche innerhalb des für den Menschen hörbaren Bereichs – [...] vom Menschen geordnet.

Na ja. Ich würde sagen: Nicht ganz falsch ... Aber überzeugend ist das nicht. Was meint Wikipedia zu Mathematik?⁵

Mathematik ist das abstrakte Studium von Themen, die Größe, Struktur, Raum, Veränderung und andere Eigenschaften umfassen.

Ist das wirklich Mathematik?

Was will ich mit dieser einigermaßen tolpatschigen Übung beweisen? Es ist selbstverständlich unmöglich, genau zu sagen, genau zu definieren, was Musik ist, und ebenso unmöglich ist es, genau zu definieren, was Mathematik ist (auch wenn das für Mathematiklaien ein wenig komisch anmuten mag). Gut so!

Trotzdem kann ich genau sagen, was ich meine, wenn ich hier von Musik, wenn ich hier von Mathematik spreche. Wenn ich hier von Musik spreche, dann meine ich die *Kunstform* Musik; Kunst will etwas ausdrücken, Musik will durch Töne und Geräusche etwas an den Zuhörer übermitteln, etwas an das Publikum weitergeben. Um das ganz klar festzumachen: Wenn ich ein paar Tasten am Klavier zufällig drücke und vielleicht dann den Klavierdeckel zuknalle, dann waren das ein paar Töne und ein Geräusch. Das war *keine* Musik; das hat nichts ausgesagt, und das wollte auch nichts aussagen.

⁴<http://de.wikipedia.org>, Stand 16. Mai 2013.

⁵<http://en.wikipedia.org>, auf Deutsch übersetzt; Stand 16. Mai 2013.

Wenn ich hier von Mathematik spreche, dann meine ich die *Wissenschaft* Mathematik; es geht also darum, Neues zu entdecken, mathematische Probleme zu lösen, mathematische Phänomene zu untersuchen und die Struktur und Zusammenhänge dahinter zu ergründen. Um auch das ganz klar festzumachen: Was wir in Abbildung 3 sehen, das sind Zahlen und ein paar Symbole, das ist *keine* Mathematik.

Ich kann jetzt genau erklären, was meine Schwierigkeiten beim Thema „Mathematik *und* Musik“ sind. Wenn Bach Zahlen in seine Kompositionen einarbeitet, dann sind das Zahlen, keine Mathematik. Außerdem tun diese Zahlen nichts für die Aussage des Werks, wie sie an das Publikum transportiert wird. Wenn Kompositionen komplexe Formen aufweisen, dann ist das aus der Sicht der Wissenschaft Mathematik entweder banal oder überhaupt uninteressant. Wenn die Mathematik – Struktur – in der Musik Überhand gewinnt – wenn wir also im Extremfall einen Computer programmieren, damit er Töne produziert („komponiert“), und dann gespannt warten, was da herauskommen wird, dann werden *Töne* herauskommen, *keine Musik*. Das wird *nichts aussagen*. Was die Musik für die Mathematik tun soll, ist sowieso vollkommen unklar.⁶ Ich betrachte also nicht die Frage nach Verbindungen zwischen Mathematik und Musik als die interessante Frage, sondern jene zweite Frage:

„Wieso gibt es so viele Mathematiker, die auch eine starke Affinität zur Musik haben, und wieso gibt es so viele Musiker, die auch eine starke Affinität zur Mathematik haben?“

Um es gleich vorwegzunehmen, die These, die ich hier vertreten werde, ist: Beides,

Mathematik UND Musik sind etwas für Herz UND Hirn.

⁶Wenn man davon absieht, dass die Rekonstruktion und Analyse von Tondokumenten sehr interessante und herausfordernde mathematische Probleme stellt, siehe etwa: A. Boggess und F. Narcowich, *A first course in wavelets with Fourier analysis*, zweite Auflage, John Wiley & Sons, Inc., 2009. Aber auch hier handelt es sich um keine echte substantielle Beziehung oder Verbindung zwischen Mathematik und Musik: Die Substanz liegt hier zur Gänze auf der Seite der Mathematik, die Musik *als Kunstform* wird hier nicht tangiert.

Man könnte in diesem Zusammenhang auch daran denken, dass es einige Kolleginnen und Kollegen gibt, die scheinbar bessere Einfälle haben, wenn sie nebenbei Musik laufen lassen. Ich gehöre nicht zu jenen: Schlechte Musik ärgert mich, und gute Musik, die zieht mich in ihren Bann, da muss ich zuhören, da kann ich nicht gleichzeitig über Mathematik nachdenken. In jedem Fall ist das doch ein wenig weit hergeholt ...

Am nächsten zu einer echten Verbindung von Mathematik und Musik kommen die Forschungen Gerhard Widmers (auch wenn seine Arbeit mehr der Künstlichen Intelligenz zuzurechnen ist; siehe <http://www.cp.jku.at/people/widmer/>), der etwa unter Zuhilfenahme von mathematischen Modellen interpretatorische Eigenarten von Pianisten untersucht oder auch versucht, Computern beizubringen, Notentexte agogisch – das heißt: im Ablauf – „richtig“ – auf einem Klavier wiederzugeben. Er ist sich aber selbst der Grenzen solcher Untersuchungen und Experimente bewusst, wenn auch heute nicht klar ist, wo genau diese liegen.



Andrew Wiles



Grigori Perelman

Abbildung 2

Vielleicht ist es ja so, dass es in unserem Hirn eine Region gibt, die besonders resoniert – anspricht –, wenn Emotion und Verstand zusammenkommen, eine Symbiose eingehen. Vielleicht liefert das die Erklärung für das Phänomen, das durch die obige Frage angesprochen wird. Ich werde im Folgenden versuchen, diese These mit Substanz zu füllen.

Herz in der Musik

Sie werden sagen: „Das ist ja wie Eulen nach Athen tragen! Selbstverständlich spielt Emotion eine enorm wichtige Rolle in der Musik.“ Sie haben natürlich Recht. Ich möchte trotzdem einige Worte darüber verlieren, weil das erstens doch sehr viele verschiedene Facetten haben kann, und zweitens gibt mir das die Gelegenheit, ein wenig Klavier zu spielen ...

Sie erinnern sich: Musik will etwas ausdrücken, will etwas an das Publikum übermitteln. Das können sehr viele verschiedene Dinge sein. Musik kann etwa einfach gute Laune verströmen ...

⟨Scott JOPLIN (1867/1868? – 1917): *Maple Leaf Rag* (Beginn)⟩⁷

oder auch schlechte Laune ...

⟨Robert SCHUMANN (1810–1856): *Pantalon et Colombine* (Beginn)
aus *Carnaval* op. 9⟩⁸

Musik kann todtraurig sein ...

⟨Franz SCHUBERT (1797–1828): *Andantino* (Beginn) aus der Sonate

⁷Unbedingt hörensenswert ist die Pianola Roll-Aufnahme, die Scott Joplin selbst eingespielt hat: <http://www.youtube.com/watch?v=pMatL7n-rc>.

⁸Arturo Benedetti Michelangeli weiß ein zankendes Paar (das sich dann auch gleich wieder versöhnt, um gleich wieder zu zanken, usw.) ganz vortrefflich darzustellen: <http://www.youtube.com/watch?v=LgpDYQcmZB4>.

1	$\sqrt{2}$	12	8	$\oint$	
		$5 \sum k^2$	16%	0.123456789...	$\frac{3}{14}$
8		π	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		
	27	175560	$\frac{2}{7}$	52954	
20.5	e	14	99.999...		

Abbildung 3

in A-Dur, D 959)⁹

oder himmelhochjauchzend ...

⟨Franz SCHUBERT (1797–1828): *Impromptu As-Dur, D 899, Nr. 4*
(Schluss)⟩¹⁰

Musik kann Eleganz ausstrahlen, und was kann das besser als ein Walzer von Chopin?

⟨Frédéric CHOPIN (1810–1849): *Grande Valse Brillante Es-Dur, op. 18* (Beginn)⟩¹¹

Wir kommen zu *Humor in der Musik*. Das ist für sich ein abendfüllendes Thema. Der Großmeister des Humors in der Musik war ohne Zweifel Joseph Haydn. Sie kennen alle seinen berühmtesten Scherz: jenen Orchesterschlag in der – wie wir auf Deutsch sagen – „Symphonie mit dem Paukenschlag“, oder – wie die Englischsprachigen ein wenig treffender sagen: der “Surprise Symphony”, der „Überraschungssymphonie“. Da ist es ja so, dass der zweite Satz mit dem banalsten Thema, das man sich überhaupt vorstellen kann, anhebt, und dieses Thema zu allem Überfluss auch noch wiederholt wird! Es ist dann schon verständlich,

⁹Das „Maß aller Dinge“ bei Franz Schuberts Klavierwerken ist ohne Zweifel Alfred Brendel: <http://www.youtube.com/watch?v=I16-1ZYDpqY>.

¹⁰Alfred Brendel: <http://www.youtube.com/watch?v=V0z7mUV5rSc>.

¹¹Unnachahmlich in seinem eleganten, natürlichen Spiel ist Arthur Rubinstein: http://www.youtube.com/watch?v=1aSh3D_77ZM, auch wenn er wohl “brillante” nicht so ganz wörtlich nimmt ...

dass man an dieser Stelle ein wenig einnickt, ehe das Orchester plötzlich für einen Akkord völlig unmotiviert losbrüllt (die Pauke wird dabei auch betätigt ...). Wir sind ja heutzutage einiges gewöhnt, damals war die Wirkung sicher kolossal ... Ich möchte hier auf ein kleines Detail aufmerksam machen, das auf den ersten Blick nicht so offensichtlich ist. Joseph Haydn ist ja im tiefsten Niederösterreich aufgewachsen, war anschließend in Wien und im Burgenland. Bei diesem Scherz handelt es sich aber um typisch *britischen* Humor:¹² Er wird „with a straight face“ – also ohne die Miene zu verziehen – vorgetragen. Nach jenem Orchesterschlag wartet man ja ständig nervös darauf, dass sich dieser im weiteren Verlauf des Satzes irgendwie niederschlägt (etwa in Form weiterer Schockeffekte ...). Aber nein: Nichts dergleichen passiert, die Musik läuft weiter, als wäre nichts geschehen ... Normalerweise ist der Humor in der Musik allerdings von feinerer Natur. In der Regel werden die Erwartungen des Hörers in die Irre geleitet und so humoristische Effekte erzeugt. Ein hübsches Beispiel dafür ist die erste der Humoresken von Max Reger. Diese hat ein durchaus graziöses Hauptthema, das sich aber nicht so recht entwickeln kann. Dieses Hauptthema bestimmt zwei kurze Eckteile, die einen Mittelteil einrahmen, der sich ein bisschen zu wichtig nimmt und so auch wieder komisch wirkt.

〈Max REGER (1873–1916): *Humoreske D-Dur, op. 20/1*〉¹³

Einen letzten Punkt hätte ich noch: *Tour de Force*! Sie verstehen schon: Tastendonner in der Liszt-Sonate etwa ...

〈Franz LISZT (1811–1886): *Sonate h-moll* (Ausschnitt)〉¹⁴

Wenn Sie genau zugehört haben, werden Sie bemerkt haben, dass ich ein Wort klinisch vermieden habe: das Wort „schön“. Das bringt uns zu einer kleinen Abschweifung.

Vor nicht allzu langer Zeit besuchte ich eine Aufführung der Oper „Mathis der Maler“ von Paul Hindemith. Die Oper ist aus, der Applaus ist verklungen, da höre ich, wie eine Person zu ihrem Nachbarn sagt: „Sehr schön war’s!“ Ich war wie vor den Kopf gestoßen. Was war denn das? Dazu muss man wissen, dass „Mathis der Maler“ zur Zeit der deutschen Bauernkriege spielt. Das war eine ziemlich finstere Epoche. Die Bauern erhoben sich gegen ihre Ausbeutung durch die Landesfürsten. Diese bekämpften den Aufstand mit unbarmherziger Härte. Während der Oper wird etwa auf offener Bühne ein Bauernführer grausam von Soldaten hingemetzelt. Im Mittelpunkt der Oper steht der Gewissenskonflikt des

¹²Passend: Jene Symphonie ist eine der Symphonien, die Haydn für London komponiert hat.

¹³Marc-André Hamelin trifft den Ton unter <http://www.youtube.com/watch?v=ba5js057WGM> ganz gut.

¹⁴Mir gefällt eine Aufnahme von den Salzburger Festspielen, die ich auf CD besitze, und in der Emil Gilels spielt, ganz außerordentlich. Auf YouTube gibt es eine nicht ganz so gute Aufnahme in drei Teilen: <http://www.youtube.com/watch?v=7yhGSrn3idI>, <http://www.youtube.com/watch?v=gyQ-MnjRvsE>, <http://www.youtube.com/watch?v=EKUAFRosm48>.

Malers Mathis, wie er sich in diesen Zeiten verhalten soll. Soll er weiterhin an seinen Gemälden und Skulpturen arbeiten, oder soll er sich „politisch betätigen“? Schlussendlich schließt er sich dem Bauernaufstand an und richtet natürlich genau gar nichts aus. Am Ende der Oper verkündet ihm eine Stimme, dass der Künstler bei seiner Kunst bleiben soll, aber wirklich überzeugend ist das nicht. Klarerweise projiziert hier Paul Hindemith seinen eigenen Konflikt, wie er sich als Künstler angesichts des Naziregimes verhalten soll, hinein. Die Musik der Oper spiegelt all das wider. Sie ist aufwühlend, sehr geschickt, aber man kann sie nicht als „schön“ bezeichnen. Profan gesprochen: Es erklingen sehr wenige reine Dur-Akkorde in dieser Oper ...

Ich möchte diesen Punkt noch ein wenig auf die Spitze treiben:

*Musik **will nicht** schön sein!*

Was ich meine, ist: Musik will etwas aussagen, will etwas an den Zuhörer übermitteln. Das *kann* mit Schönheit einhergehen, aber dann ist Schönheit nie *Selbstzweck*, sie ist immer *Mittel zum Zweck*. Und es *muss nicht* mit Schönheit einhergehen. „Sacre de Printemps“ von Igor Strawinsky ist eruptiv, explosiv, aber es ist nicht „schön“. Der Schlusssatz aus der „Großen Sonate für das Hammerklavier“ in B-Dur, op. 106, von Ludwig van Beethoven, der Fugensatz, ist alles Mögliche – gewaltig, kühn, unerhört –, aber er ist sicher nicht „schön“. Im Gegenteil: Man muss hundert Jahre warten, bis wieder ein Werk geschrieben wird, das ähnliche harmonische Härten aufweist. Auch bei Johann Sebastian Bach kann man vieles nicht als „schön“ bezeichnen, da er häufig sein Hauptaugenmerk auf konsequente Stimmführung und ausgewogene Form legt und dabei weniger Rücksicht auf die Harmonien nimmt. Ich denke da etwa an manche Kanons in den „Goldberg-Variationen“, die alle ihren unverwechselbaren Charakter haben, die aber nicht immer wirklich „schön“ sind.

Wenn ich also nach einer Aufführung von „Mathis der Maler“ höre: „Sehr schön war’s!“, dann fühle ich mich unweigerlich an die berühmte Standardphrase des alten Kaisers Franz Joseph erinnert, die dieser immer dann anwandte, wenn er kulturellen Heimsuchungen ausgesetzt war:

„Es war sehr schön, es hat mich sehr gefreut!“

Für jemanden, der für Kultur offenbar nicht sehr viel übrig hatte, war es anscheinend noch das Beste, was er darüber sagen konnte ...

Kehren wir wieder zum eigentlichen Gegenstand der Erörterung zurück.

Herz in der Mathematik

Für Nicht-Mathematiker sieht das wohl nach einem ziemlich schwierigen Thema aus. Schlussendlich haben wir doch alle in der Mittelschule gelernt, dass Mathematik eine staubtrockene, abstrakte Materie ist, in der es darauf ankommt, Rezep-

te, die seit Jahrhunderten bekannt sind, auf mehr oder auch weniger intelligente Aufgaben anzuwenden, und zu hoffen, dass man das richtige Rezept erwischt hat ... (Zur Ehrenrettung meiner Mathematiklehrerin muss ich sagen, dass ich *das* in der Mittelschule nicht gelernt habe.) Wie dem auch sei: Ich denke, wir sollten zum Thema „Herz in der Mathematik“ den vorher schon erwähnten Andrew Wiles zu Wort kommen lassen.

Wie ich schon anführte, ist Wiles dafür berühmt, den „Großen Fermatschen Satz“ bewiesen zu haben. Die Aussage dieses Satzes kann jeder Mittelschüler ohne Probleme verstehen. Ich möchte daher diese Aussage hier präsentieren.

Theorem (WILES, TAYLOR 1995, Großer Fermatscher Satz). *Sei n eine natürliche Zahl größer als oder gleich 3. Dann gibt es keine natürlichen Zahlen*¹⁵ x, y, z , *sodass $x^n + y^n = z^n$.*

Diese Aussage hat Pierre de Fermat vor über 300 Jahren in den Rand eines Exemplars der *Arithmetica* des Diophantos gekritzelt.¹⁶ Um die Sache spannend zu machen, hat er noch hinzugefügt, dass er einen „wahrhaft wunderbaren“ Beweis dafür gefunden habe, aber dass der Rand des Buchs zu schmal sei, diesen zu fassen. Seither haben sich viele kluge Leute darüber den Kopf zerbrochen. Tatsächlich hat sich ein großer Teil der Zahlentheorie an diesem Problem entzündet. Aber über 300 Jahre lang konnte kein Beweis gefunden werden. Man kann also getrost davon ausgehen, dass Fermat keinen Beweis hatte, jedenfalls nicht etwas, was wir heute als Beweis anerkennen würden. Es war eine große Sensation, als Andrew Wiles am Ende einer Vortragsreihe, die er 1993 am Isaac Newton Institute in Cambridge gehalten hat, verkündete, dass er nun einen Beweis gefunden hat. Nun genügt es in der Mathematik nicht, anzukündigen, dass man einen Beweis für ein Theorem gefunden hat (so wie das Fermat getan hat), sondern dieser Beweis muss jetzt aufgeschrieben werden, damit auch andere diesen nachvollziehen können – das tat Wiles; das Resultat war ein Artikel von 200 Seiten, der seinerseits auf unzähligen Vorarbeiten anderer Autoren beruhte, und das Aufgeschriebene muss dann an ein wissenschaftliches Journal zur Veröffentlichung eingereicht werden – auch das tat Wiles –, worauf dann Gutachter diesen Beweis sorgfältig prüfen. Dabei wurde nach einiger Zeit entdeckt, dass der Beweis eine Lücke aufwies, die Wiles nicht beheben konnte. Es dauerte weitere zwei Jahre, bis es Wiles zusammen mit seinem ehemaligen Studenten Richard Taylor gelang,

¹⁵Um Missverständnissen vorzubeugen: Mit „natürlichen“ Zahlen sind hier die Zahlen 1, 2, 3, ... gemeint, was der ursprünglichen Bedeutung des Worts „natürlich“ entspricht. Heutzutage lernt man in der Schule (leider), dass die „natürlichen Zahlen“ aus den Zahlen 0, 1, 2, ... bestehen. Das mag in manchen Zusammenhängen tatsächlich praktischer sein, ist aber eine Pervertierung des Wortes „natürlich“, da die 0 zweifellos keine *natürliche* Zahl ist.

¹⁶Der Hintergrund/Kontext dieser Aussage ist der krasse Gegensatz zur Situation für $n = 2$: Es gibt sogar unendlich viele Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in natürlichen Zahlen x, y, z , die genau charakterisiert werden können und als „Pythagoräische Tripel“ bekannt sind. Zwei davon kennen wir aus der Mittelschule: $3^2 + 4^2 = 5^2$ und $5^2 + 12^2 = 13^2$.

die Lücke zu schließen. In einer BBC-Dokumentation¹⁷ sagt Andrew Wiles über den Moment, als ihm klar wurde, dass er jetzt alle Schwierigkeiten überwunden hat, Folgendes:

[Wiles ist sichtlich zutiefst bewegt, spricht nur stockend und stoßweise] *When I was sitting here, at this desk – it was a Monday morning, September 19 – and I was trying convincing myself that it did not work, seeing exactly what the problem was, when suddenly, totally unexpectedly, I had this incredible revelation. I realised [that] what was holding me up was exactly what would resolve the problem that I had in my Iwasawa theory attempt three years earlier.*

It was ... it was the most ... the most important moment of my working life ... [An dieser Stelle kann Wiles endgültig nicht mehr weitersprechen; die Szene wird ausgeblendet.]

It was so indescribably beautiful, it was so simple and so elegant ... – and I just stared in disbelief for 20 minutes ... – then during the day I walked to our department, I keep coming back to my desk, looking to see, it was still there, it was still there ...

Eindrucksvoll, nicht? Im Gegensatz zur landläufigen Meinung scheint Mathematik eine hochemotionelle Tätigkeit zu sein. Ich habe hier alle möglichen Emotionen gesehen, die alles von „zu Tode betrübt“ – zu dem Zeitpunkt, wo das Beweisgebäude zusammenzubrechen drohte – bis zu „himmelhochjauchzend“ – zu dem Zeitpunkt, als sich Wiles bewusst wurde, dass er nun alle Schwierigkeiten überwunden hatte – miteinschließt. Man mag einwenden, dass Wiles deswegen so bewegt ist, weil er dieses berühmte Problem endlich als Erster gelöst hat. Das ist sicher eine Komponente dabei. Es greift aber zu kurz. Denn Wiles sagt auch: „Das war so unbeschreiblich schön, so elegant!“ Mathematik muss also noch andere Qualitäten haben, als nur „staubtrocken“ und „abstrakt“ zu sein. Wir sollten daher auf einige dieser anderen Qualitäten noch näher eingehen.

Wie ich schon erwähnte: Wenn ein Mathematiker ein tolles Theorem bewiesen hat, dann muss dies aufgeschrieben werden und zur Veröffentlichung eingereicht werden, worauf der entsprechende Artikel dann begutachtet wird. Die Gutachter beurteilen dabei nicht nur die Korrektheit der Beweise, sondern auch die anderen Qualitäten des Artikels. Ein Standardsatz, der ausdrückt, dass dem Gutachter der Artikel gefällt, ist:

“This is a very nice paper!”

Im Lichte unserer vorigen Abschweifung über Schönheit in der Musik: Spaßig, nicht? Den Mathematikern fällt auch nichts Besseres ein, als „schön“ zu sagen ...

¹⁷Die gesamte Dokumentation kann unter <http://www.youtube.com/watch?v=7FnXgprKgSE> angesehen werden. Die zitierte Stelle kommt etwa 5 Minuten vor dem Ende. In diesem Zusammenhang ist auch der unmittelbare Anfang der Dokumentation sehr bemerkenswert ...

Wenn es sich allerdings um ein fundiertes Gutachten handelt, dann würde der Gutachter auch noch spezifischer schreiben, was ihm an diesem Artikel gefällt. Da kann man dann etwa lesen:

„Das ist ein sehr eleganter Beweis!“

Was ist das, ein eleganter Beweis? Also, was ist das, so ein „mathematischer Chopin-Walzer“? In der Regel handelt es sich um die Situation, dass sich – in einem Beweis – vor dem Mathematiker ein scheinbar unüberwindbares Hindernis auftürmt. Es gelingt ihm jedoch, mithilfe eines zwar einfachen, aber gar nicht naheliegenden Einfalls, dieses Hindernis – eben elegant – zu umschiffen. Ich versuche ein Beispiel: den allseits bekannten Satz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Theorem. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

BEWEIS. Wenn man die Aussage des Theorems wörtlich nimmt, dann müsste man jetzt eben unendlich viele Primzahlen irgendwie konstruieren. Am besten wäre es überhaupt, eine Formel zu finden, die uns die Primzahlen (oder zumindest unendlich viele davon) produziert. Das ist ein ziemlich aussichtsloses Unterfangen.¹⁸

Es gibt aber einen – eleganten – Ausweg. Nehmen wir doch an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen. Wenn wir – unter dieser Annahme – auf einen Widerspruch geführt werden, dann muss unsere Annahme falsch gewesen sein und wir haben dann gezeigt, dass es tatsächlich unendlich viele Primzahlen gibt.

Nehmen wir also an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen; sagen wir 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., 1031. Wir betrachten nun

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 1031 + 1.$$

Diese (große) Zahl lässt sich in Primfaktoren zerlegen. Jeder dieser Primfaktoren muss einerseits diese Zahl teilen und muss andererseits unter den Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., 1031 vorkommen. (Wir haben ja angenommen, dass das *alle* Primzahlen wären!) Sei p ein solcher Primfaktor. p kann nicht gleich 2 sein, denn die obige Zahl ist offensichtlich ungerade. Aber p kann auch nicht gleich 3 sein, denn 3 teilt die obige Zahl auch nicht, da sie die Gestalt $3X + 1$ hat. Ebenso kann

¹⁸Mathematik hat jede Menge unglaublich Faszinierendes respektive Absurdes – je nachdem, welchen Standpunkt man einnimmt ... – aufzuwarten: Der russische Mathematiker Yuri Matijasevic zeigte, dass es Polynome in mehreren Variablen gibt, deren *positive* Werte – wenn die Variablen zu konkreten natürlichen Zahlen spezialisiert werden – alle Primzahlen durchlaufen; siehe *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **196** (1971), 770–773; *Soviet Math. Dokl.* **12** (1971), 249–254. Solche Polynome wurden seither auch explizit konstruiert. Sie haben nicht nur die „störende“ Eigenschaft, dass sie eben auch (irgendwelche) *negative* Werte annehmen, sondern auch jene, dass sie das *meistens* tun ... Sie sind daher bis heute nichts als eine Kuriosität, da sie, abgesehen von ihrer Existenz, sonst für nichts gut zu sein scheinen.

p nicht gleich 5 sein, ..., und auch nicht gleich 1031. Das können daher *nicht* alle Primzahlen gewesen sein. $\square$

Sie werden nun einwenden: „Das stimmt zwar alles, aber ein rigoroser – allgemeingültiger – mathematischer Beweis war das jetzt nicht.“ Schlussendlich ist 1031 ja nur eine *spezielle* Primzahl. Sie haben recht, aber der rigorose Beweis sieht ganz genauso aus. Man muss nur statt 2, 3, 5, ..., 1031 Symbole schreiben: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

BEWEIS. Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen; sagen wir, $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \dots, p_n$. Wir betrachten nun

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 \cdot \dots \cdot p_n + 1.$$

Diese (große) Zahl lässt sich in Primfaktoren zerlegen. Jeder dieser Primfaktoren muss einerseits diese Zahl teilen und muss andererseits unter den Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$ vorkommen. (Wir haben ja angenommen, dass das *alle* Primzahlen wären!) Sei p ein solcher Primfaktor. p kann nicht gleich p_1 sein, denn p_1 teilt die obige Zahl nicht. Aber p kann auch nicht gleich p_2 sein, denn p_2 teilt die obige Zahl auch nicht. Ebenso kann p nicht gleich p_3 sein, ..., und auch nicht gleich p_n . Das können daher *nicht* alle Primzahlen gewesen sein. $\square$

Wir kommen zu *Humor in der Mathematik*. Ja kann es denn so etwas geben? Das muss es schon geben, denn manchmal kann man in Gutachten lesen:

„Das ist aber ein witziger Beweis!“

Wie kommt Witz in Mathematik zustande? Humor in der Mathematik ist – wie auch der Humor in der Musik – normalerweise von feinerer Natur. Auch hier werden die Erwartungen des Lesers eines Beweises in die Irre geleitet, ehe plötzlich ein kleines Detail sichtbar wird, das man bisher noch gar nicht wahrgenommen hat, und dieses kleine Detail ist dann das letzte (aber entscheidende!) Bausteinchen, das zur Vervollständigung des Arguments noch fehlt. Da muss der Mathematiker schmunzeln (auch über sich selbst: Wie konnte er das nur übersehen?), und das erfreut sein Herz.

Ich versuche wieder ein Beispiel, diesmal aus dem Werk des berühmten indischen Mathematikers Srinivasa Ramanujan (siehe Abbildung 4). Geboren 1887 in der Nähe von Madras (dem heutigen Chennai), stammte Ramanujan aus sehr bescheidenen Verhältnissen. Er hatte nur eine Grundschulausbildung, hatte sich aber immer schon mit Mathematik und mathematischen Problemen beschäftigt. Nach Abschluss der Schule arbeitete er als Beamter in der Hafengesellschaft von Madras, aber in seiner Freizeit unentwegt an mathematischen Problemen. Im Alter von 25 Jahren sandte er seine mathematischen Ergebnisse an berühmte Mathematiker der damaligen Zeit. Einer von ihnen, Godfrey Hardy, Professor an der University



Srinivasa Ramanujan

Godfrey Harold Hardy

Abbildung 4

of Cambridge, sah sich den Brief von Ramanujan tatsächlich genauer an und erkannte das Genie des unbekannten Verfassers. Er lud ihn ein, nach Cambridge zu kommen, um bei ihm zu studieren und zu arbeiten. Förderern Ramanujans gelang es, die Reise zu finanzieren, und so verbrachte Ramanujan einige Jahre an der University of Cambridge. Aus dieser Zeit stammen einige sehr berühmte Artikel Ramanujans, oft in Zusammenarbeit mit Hardy. Ramanujan hat aber leider das englische Klima nicht gut vertragen (und auch die Kost nicht ...) und war meistens sehr kränklich. Er kehrte nach Indien zurück und verstarb ein Jahr danach im Alter von nur 32 Jahren.

Eines der Objekte, für die sich Ramanujan in seiner mathematischen Arbeit mit großer Hingabe interessierte, waren sogenannte (Zahlen-)Partitionen. Eine *Partition* einer Zahl n ist eine Summendarstellung dieser Zahl, wo die Summanden aufsteigend angeordnet sind. Für $n = 1$ gibt es genau eine Summendarstellung, nämlich

$$1$$

selbst, für $n = 2$ gibt es zwei, nämlich

$$2, \quad 1 + 1,$$

für $n = 3$ gibt es drei Partitionen,

$$3, \quad 1 + 2, \quad 1 + 1 + 1,$$

für $n = 4$ schon fünf,

$$4, \quad 1 + 3, \quad 2 + 2, \quad 1 + 1 + 2, \quad 1 + 1 + 1 + 1,$$

und für $n = 5$ sieben:

$$5, \quad 1 + 4, \quad 2 + 3, \quad 1 + 1 + 3, \quad 1 + 2 + 2, \quad 1 + 1 + 1 + 2, \quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Es bezeichne $p(n)$ die Anzahl aller Partitionen von n . Percy Alexander MacMahon, Major in der britischen Armee und ebenfalls bedeutender Mathematiker der

damaligen Zeit, hatte die Anzahlen $p(n)$ bis $n = 200$ ausgerechnet.¹⁹ Die ersten Anzahlen $p(n)$ sind hier wiedergegeben:

$$\begin{array}{llllll} p(1) = 1 & p(2) = 2, & p(3) = 3, & \mathbf{p(4) = 5}, & p(5) = 7, \\ p(6) = 11 & p(7) = 15, & p(8) = 22, & \mathbf{p(9) = 30}, & p(10) = 42, \\ p(11) = 56 & p(12) = 77, & p(13) = 101, & \mathbf{p(14) = 135}, & p(15) = 176, \\ p(16) = 231 & p(17) = 297, & p(18) = 385, & \mathbf{p(19) = 490}, & p(20) = 627. \end{array}$$

Ramanujan studierte MacMahons Tabellen eingehend und machte dabei bemerkenswerte Entdeckungen. Eine davon ist im unten angegebenen Theorem enthalten. Sie besagt, grob gesprochen, dass jede fünfte Partitionsanzahl durch 5 teilbar ist; siehe die fett gedruckten Einträge in der obigen Tabelle.²⁰

Theorem (“Ramanujan’s most beautiful theorem”, 1919).
 $p(5n + 4)$ ist immer durch 5 teilbar.

Den angegebenen Beinamen “Ramanujan’s most beautiful theorem” erhielt dieser Satz deswegen, weil er so simpel und elegant zu formulieren und gleichzeitig so ganz unerwartet ist. Außerdem hat Ramanujan selbst einen Beweis dafür gefunden. Es ist dieser Beweis, den ich nun besprechen möchte. Mir ist bewusst, dass das Kommende nun (mathematisch) anspruchsvoller ist, als das Bisherige. Wenn Sie nicht alles verstehen sollten (oder kaum etwas verstehen sollten ...), dann macht das aber nichts. Es geht mir nur darum, anzudeuten, was „Witz“ in der Mathematik bedeuten kann.

Ramanujans Beweis stützt sich auf ein altes Resultat von Leonhard Euler. Es besagt, dass die Potenzreihe, in der die Anzahlen $p(n)$ als Koeffizienten auftreten, als unendliches Produkt geschrieben werden kann.

Theorem (EULER). *Es gilt*

$$1 + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + p(4)q^4 + \cdots = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots}.$$

BEWEIS. Möglicherweise beschleicht Sie beim Anblick von unendlichen Summen und Produkten ein ungutes Gefühl, und Sie stellen sich etwa die Frage: „Konvergiert denn das?“²¹ Es ist die falsche Frage! Die obigen Ausdrücke sollten als

¹⁹Und das fehlerlos! Auch wenn er das nicht durch Auflisten aller Partitionen aller Zahlen bis 200 bewerkstelligte, sondern sich einer Rekursionsformel Eulers bediente, handelt es sich – zu einer Zeit, die keine Rechenmaschinen außer Papier und Bleistift kannte – trotzdem um eine beachtliche Leistung!

²⁰Ramanujan machte ähnliche Beobachtungen für die Primzahlen 7 und 11. Zusammen mit dem im Text diskutierten Theorem begründen diese die Forschungsrichtung der „Partitionskongruenzen“, in der es gerade in den letzten Jahren bedeutende Durchbrüche gab; siehe Seite 1525 im Überblicksartikel “Srinivasa Ramanujan: Going Strong at 125, Part I”, der in den Notices of the American Mathematical Society, vol. 59, Nr. 11, 2012, von Krishnaswami Alladi herausgegeben wurde und unter <http://www.ams.org/notices/201211/rtx121101522p.pdf> erhältlich ist.

²¹Das tut es für $|q| < 1$.

formale Ausdrücke betrachtet werden, die man ganz naiv addiert, multipliziert, usw.²²

Nehmen wir also den naiven Standpunkt ein. Dann beweist sich Eulers Formel folgendermaßen. Das Produkt auf der rechten Seite besteht aus lauter Faktoren der Gestalt $\frac{1}{1-q^k}$. In der Mittelschule haben wir gelernt, dass sich die unendliche geometrische Reihe aufsummieren lässt:²³

$$1 + Q + Q^2 + Q^3 + Q^4 + \dots = \frac{1}{1-Q}.$$

Wir können diese Summenformel dann auf jeden der Faktoren (sozusagen: verkehrt herum) anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots} &= \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^2} \cdot \frac{1}{1-q^3} \cdot \frac{1}{1-q^4} \dots \\ &= (1 + q^1 + q^{1+1} + q^{1+1+1} + \dots) \\ &\quad \cdot (1 + q^2 + q^{2+2} + q^{2+2+2} + \dots) \\ &\quad \cdot (1 + q^3 + q^{3+3} + q^{3+3+3} + \dots) \dots \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir uns noch vorstellen, was passiert, wenn wir dieses letzte Produkt ausmultiplizieren. Jeder Term im Ergebnis entsteht dadurch, dass wir aus jedem der Faktoren einen Term auswählen und diese Terme dann zusammenmultiplizieren. Wenn wir also etwa aus dem ersten Faktor den Term q^{1+1} wählen, aus dem zweiten Faktor den Term q^{2+2+2} , aus dem dritten Faktor den Term q^3 , und aus allen anderen Faktoren den Term 1, dann erhalten wir beim Zusammenmultiplizieren

$$q^{1+1+2+2+2+3}.$$

Es kostet jetzt noch einige Momente, um sich davon zu überzeugen, dass man im Exponenten der Ausdrücke, die man so erhält, genau alle Partitionen durchläuft. Somit ist das obige Produkt in der Tat gleich der linken Seite im Eulerschen Theorem. $\square$

Wir können nun an Ramanujans Beweis seines “most beautiful theorem” herangehen.

RAMANUJANS BEWEIS SEINES THEOREMS. Um eine kompakte Schreibweise zu haben,²⁴ kürzen wir das Produkt $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots$ durch

²²Das kann alles durch die Theorie der sogenannten *formalen Potenzreihen* rigoros gemacht werden.

²³Die Formel ist auch in der Theorie der formalen Potenzreihen gültig.

²⁴Ramanujan hat diese Schreibweise nicht gekannt und auch keine andere Kurzschreibweise verwendet. Dementsprechend gewöhnungsbedürftig ist dann auch die Lektüre von Aufzeichnungen Ramanujans.

$(q; q)_\infty$ ab. Allgemeiner schreiben wir

$$(\alpha; q)_\infty = (1 - \alpha)(1 - \alpha q)(1 - \alpha q^2)(1 - \alpha q^3) \cdots$$

Ramanujans Beweis beruht auf mehreren Hilfssätzen. Diese Hilfssätze lassen sich durch elementare (aber trickreiche) Manipulationen von Potenzreihen und *Jacobis Tripelproduktformel*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n-1)/2} x^n = (q; q)_\infty (x; q)_\infty (q/x; q)_\infty$$

ableiten. Es würde hier allerdings endgültig den Rahmen sprengen, das im Detail zu erklären.

Lemma. Sei $\omega^5 = 1$, $\omega \neq 1$. Dann gilt

$$(q; q)_\infty (\omega q; \omega q)_\infty (\omega^2 q; \omega^2 q)_\infty (\omega^3 q; \omega^3 q)_\infty (\omega^4 q; \omega^4 q)_\infty = \frac{(q^5; q^5)_\infty^6}{(q^{25}; q^{25})_\infty}.$$

Dieser Hilfssatz zieht zwei weitere nach sich.

Lemma. Es gilt

$$\frac{(q; q)_\infty}{q(q^{25}; q^{25})_\infty} = q^{-1}R - 1 - qR^{-1},$$

wobei R eine Potenzreihe in q^5 ist.²⁵

Lemma. Es gilt $q^{-5}R^5 - 11 - q^5R^{-5} = \frac{(q^5; q^5)_\infty^6}{q^5(q^{25}; q^{25})_\infty^6}$.

Wir können diese Hilfssätze nun kombinieren,²⁶ um den folgenden Ausdruck für die sogenannte „erzeugende Reihe“ der Partitionsanzahlen zu finden:

$$\begin{aligned} & 1 + p(1)q + p(2)q^2 + p(3)q^3 + \mathbf{p(4)q^4} + p(5)q^5 \\ & \quad + p(6)q^6 + p(7)q^7 + p(8)q^8 + \mathbf{p(9)q^9} + p(10)q^{10} \\ & \quad + p(11)q^{11} + p(12)q^{12} + p(13)q^{13} + \mathbf{p(14)q^{14}} + \dots \\ & = q^4 \frac{(q^{25}; q^{25})_\infty^5}{(q^5; q^5)_\infty^6} \cdot (q^{-4}R^4 + q^{-3}R^3 + 2q^{-2}R^2 + 3q^{-1}R + \mathbf{5} \\ & \quad - 3qR^{-1} + 2q^2R^{-2} - q^3R^{-3} + q^4R^{-4}) \end{aligned}$$

²⁵Ramanujan gibt auch eine explizite Formel für die Reihe R an.

²⁶Der Ausdruck aus dem letzten Lemma wird durch jenen im vorherigen dividiert, und dann wird Eulers Theorem eingesetzt.

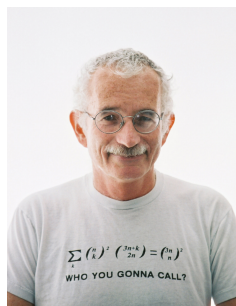


Abbildung 5: Doron Zeilberger

Spätestens an dieser Stelle haben wir den Überblick endgültig verloren. Warum schreiben wir einen dermaßen komplizierten Ausdruck für die erzeugende Reihe der Partitionsanzahlen hin? Was wollten wir eigentlich beweisen? Hier kommt nun die *Pointe* zum Vorschein! Wir interessieren uns doch eigentlich nur für die Partitionszahlen $p(4)$, $p(9)$, $p(14)$, $p(19)$, usw., also für

$$p(4)q^4 + p(9)q^9 + p(14)q^{14} + p(19)q^{19} + \dots$$

Sehen wir uns die rechte Seite im obigen komplizierten Ausdruck an: Da gibt es die Reihe R , die laut Lemma nur aus Potenzen von q^5 besteht. Auch die Produkte $(q^5; q^5)_\infty$ und $(q^{25}; q^{25})_\infty$ bestehen nur aus Potenzen von q^5 . Ganz vorn in diesem Ausdruck steht der Faktor q^4 . Also, was uns dann in der großen Klammer interessiert, sind nur Potenzen von q^5 , alles andere brauchen wir nicht zu beachten. Aber, wenn man da in die Klammer genau hineinsieht (wohlgemerkt: die Reihe R hat nur Potenzen von q^5 !), dann ist der einzige Term, der da infrage kommt, die einsam dastehende 5! In anderen Worten: Aus der obigen horrenden Formel (man beachte die fett gedruckten Terme) lässt sich unmittelbar extrahieren:

$$p(4)q^4 + p(9)q^9 + p(14)q^{14} + \dots = q^4 \frac{(q^{25}; q^{25})_\infty^5}{(q^5; q^5)_\infty^6} \times 5.$$

Der springende Punkt hier ist: Auf der rechten Seite wird alles mit 5 multipliziert! Daher müssen auf der linken Seite alle Koeffizienten – also $p(4)$, $p(9)$, $p(14)$, $p(19)$, usw. – durch 5 teilbar sein. Genau das ist die Aussage, die es zu beweisen galt. $\square$

Ich weiß nicht, wie es Ihnen gegangen ist. Wenn ich diesen Beweis in einer Vorlesung vortrage, dann gibt es immer ein paar Studierende, die, wenn die *Pointe* sichtbar wird, schmunzeln müssen.

Wir kommen zur *Tour de Force*! Selbstverständlich ist das, was Andrew Wiles geleistet hat, eine *Tour de Force*, ein unglaublicher Gewaltakt. Da dieser aber große Teile der modernen Zahlentheorie und Algebra benötigt, kann ich hier in wenigen Minuten genau gar nichts darüber sagen. Ich habe also zur Illustration ein anderes Beispiel gewählt – aus meinem eigenen Fachgebiet –, nämlich Doron Zeilbergers (siehe Abbildung 5) *Theorem über Alternierende-Vorzeichen-Matrizen*. Dazu

müssen wir zunächst wissen, was eine Alternierende-Vorzeichen-Matrix ist. Eine Alternierende-Vorzeichen-Matrix ist eine quadratische Anordnung von 0-en, 1-en und (-1) -en, die folgende Regel befolgt: Wenn man entlang von Zeilen oder entlang von Spalten liest und dabei die 0-en ignoriert, dann liest man alternierend 1, -1 , 1, $\dots$, 1. Wohlgemerkt: Man beginnt und endet mit 1. Hier ist ein Beispiel einer Alternierende-Vorzeichen-Matrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sie werden jetzt fragen, warum sich Mathematiker für Alternierende-Vorzeichen-Matrizen interessieren. Ich kann hier darüber nicht allzu viel sagen. Alternierende-Vorzeichen-Matrizen sind so um das Jahr 1980 in Arbeiten von David Robbins und Howard Rumsey über eine Verallgemeinerung von Determinanten ganz natürlich aufgetreten. Man hat später entdeckt, dass dieselben Objekte in anderer Verkleidung auch in der Theoretischen Physik auftreten, nämlich als Konfigurationen in einem – zugegebenermaßen etwas simplizistischen – Modell für Eisbildung. William Mills, David Robbins und Howard Rumsey haben sich gefragt, wie viele Alternierende-Vorzeichen-Matrizen es gibt. Um genau zu sein:

Wie viele n -zeilige Alternierende-Vorzeichen-Matrizen gibt es?

Offensichtlich gibt es genau eine einzeilige Alternierende-Vorzeichen-Matrix, nämlich

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Es gibt zwei zweizeilige Alternierende-Vorzeichen-Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Und es gibt 7 dreizeilige Alternierende-Vorzeichen-Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wenn wir mit $A(n)$ die Anzahl aller n -zeiligen Alternierende-Vorzeichen-Matrizen bezeichnen, dann sehen wir in der folgenden Tabelle,

n	1	2	3	4	5	6
$A(n)$	1	2	7	42	429	7436

wie die ersten Folgenglieder lauten. Mills, Robbins und Rumsey haben diese Zahlen genau studiert und haben die folgende bemerkenswerte Entdeckung gemacht.

Vermutung (MILLS, ROBBINS, RUMSEY $\sim$ 1980). *Es gilt*

$$A(n) = \frac{1! \cdot 4! \cdot 7! \cdot \dots \cdot (3n-2)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot (n+2)! \cdot \dots \cdot (2n-1)!},$$

wobei $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

Das ist extrem überraschend. Wenn man als Mathematiker die obige Fragestellung hört, würde man nicht glauben, dass es irgendeine vernünftige Formel für die Anzahl aller n -zeiligen Alternierende-Vorzeichen-Matrizen geben würde. Aber nein, es scheint sogar eine elegante, kompakte Produktformel zu geben!

Aber wie das beweisen? Über 10 Jahre lang wussten Mathematiker nicht einmal, wie man diese Vermutung überhaupt angehen könnte. Alle waren daher sehr überrascht, als Doron Zeilberger im Jahr 1993 verkündete, dass er einen Beweis gefunden hatte. Gleichzeitig legte er einen Artikel von 25 Seiten vor, in dem dieser Beweis aufgeschrieben war.

Sie wissen ja, dass es nicht genügt, zu verkünden, etwas bewiesen zu haben. Der Beweis muss zur Veröffentlichung eingereicht werden, um dann begutachtet zu werden. Zeilberger reichte also seinen Artikel zur Veröffentlichung ein und – Sie ahnen es – der Gutachter fand Lücken im Beweis. Der Artikel ging also zurück an Doron Zeilberger mit der Bitte, diese Lücken zu schließen. Zeilberger nahm Reparaturarbeiten vor und reichte die neue Version wieder ein, worauf der Gutachter neue Lücken fand. Der Artikel ging wieder zurück an Zeilberger, dieser nahm wieder einige Veränderungen vor, und so ging es einige Male hin und her, bis dem Gutachter der Geduldsfaden riss. Er ließ Doron Zeilberger vermutlich ungefähr Folgendes ausrichten: „Lieber Doron! Bevor Du das nächste Mal den Artikel einreichst, dann bitte tue etwas! Arbeite den Artikel sorgfältig durch; wenn Du dazu nicht imstande sein solltest, dann gib den Artikel einem Studenten zum Durchlesen; aber bitte: tue etwas!“

Doron Zeilberger tat etwas. Erstens sah er sich den Artikel (endlich) genau durch. Er strukturierte den Beweis vollkommen hierarchisch, sodass der Artikel „lokal“ lesbar wurde; in dem Sinne, dass jeder Teil unabhängig lesbar war, unter der Annahme, dass alles, was in der Hierarchie weiter unten angesiedelt war, korrekt ist. Anschließend bat er etwa 80 Kolleginnen und Kollegen, den Artikel zu prüfen. Jedem von ihnen teilte er 2 bis 3 Seiten zu, und die Aufgabe bestand darin, diese 2 bis 3 Seiten auf Korrektheit zu prüfen unter der Annahme, dass alles, was sich weiter unten in der Beweishierarchie befand, richtig war. So geschah es. Dabei flogen noch ein paar Kleinigkeiten auf, aber nichts Weltbewegendes mehr. Und so ist der Artikel 1995 erschienen. In Abbildung 6 ist die erste Seite des Artikels zu sehen. Nach dem Titel folgt die Liste jener etwa 80 Kolleginnen und Kollegen, der „Checker“. Der Artikel hat jetzt nicht mehr 25 Seiten, sondern 85. Wie

PROOF OF THE ALTERNATING SIGN MATRIX CONJECTURE ¹

Doron ZEILBERGER²

Submitted: May 1, 1995; Accepted: July 25, 1995

Checked by³: David Bressoud and

Gert Almkvist, Noga Alon, George Andrews, Anonymous, Dror Bar-Natan, Francois Bergeron, Nantel Bergeron, Gaurav Bhatnagar, Anders Björner, Jonathan Borwein, Mireille Bousquet-Mélou, Francesco Brenti, E. Rodney Canfield, William Chen, Chu Wenchang, Shaun Cooper, Kequan Ding, Charles Dunkl, Richard Ehrenborg, Leon Ehrenpreis, Shalosh B. Ekhad, Kimmo Eriksson, Dominique Foata, Omar Foda, Aviezri Fraenkel, Jane Friedman, Frank Garvan, George Gasper, Ron Graham, Andrew Granville, Eric Grinberg, Laurent Habsieger, Jim Haglund, Han Guo-Niu, Roger Howe, Warren Johnson, Gil Kalai, Viggo Kann, Marvin Knopp, Don Knuth, Christian Krattenthaler, Gilbert Labelle, Jacques Labelle, Jane Legrange, Pierre Leroux, Ethan Lewis, Daniel Loeb, John Majewicz, Steve Milne, John Noonan, Kathy O'Hara, Soichi Okada, Craig Orr, Sheldon Parnes, Peter Paule, Bob Proctor, Arun Ram, Marge Readdy, Amitai Regev, Jeff Remmel, Christoph Reutenauer, Bruce Reznick, Dave Robbins, Gian-Carlo Rota, Cecil Rousseau, Bruce Sagan, Bruno Salvy, Isabella Sheftel, Rodica Simion, R. Jamie Simpson, Richard Stanley, Dennis Stanton, Volker Strehl, Walt Stromquist, Bob Sulanke, X.Y. Sun, Sheila Sundaram, Raphaële Supper, Nobuki Takayama, Xavier G. Viennot, Michelle Wachs, Michael Werman, Herb Wilf, Celia Zeilberger, Hadas Zeilberger, Tamar Zeilberger, Li Zhang, Paul Zimmermann .

Dedicated to my Friend, Mentor, and Guru, Dominique Foata.

Two stones build two houses. Three build six houses. Four build four and twenty houses. Five build hundred and twenty houses. Six build Seven hundreds and twenty houses. Seven build five thousands and forty houses. From now on, [exit and] ponder what the mouth cannot speak and the ear cannot hear.

(Sepher Yetsira IV,12)

Abstract: The number of $n \times n$ matrices whose entries are either -1 , 0 , or 1 , whose row- and column- sums are all 1 , and such that in every row and every column the non-zero entries alternate in sign, is proved to be $[1!4! \dots (3n-2)!]/[n!(n+1)! \dots (2n-1)!]$, as conjectured by Mills, Robbins, and Rumsey.

¹ original version written December 1992. The Maple package ROBBINS accompanying this paper, can be downloaded from the www address in footnote 2 below.

² Department of Mathematics, Temple University, Philadelphia, PA 19122, USA.

E-mail:zeilberg@math.temple.edu. WWW:http://www.math.temple.edu/~zeilberg. Supported in part by the NSF.

³ See the Exodion for affiliations, attribution, and short bios.

schon gesagt, der Beweis ist vollkommen hierarchisch aufgebaut. Der eigentliche Hauptsatz heißt im Artikel Lemma 1 (siehe Abbildung 7). Dieses beruht auf Sublemma 1.1 und Sublemma 1.2. Diese beruhen wieder auf Subsublemma 1.1.1, Subsublemma 1.1.2, ..., Subsublemma 1.2.1, Subsublemma 1.2.2, ..., welche wiederum auf Subsubsublemma 1.1.1.1, ... beruhen, und das geht so weiter bis Sub⁶, also bis zu Subsubsubsubsubsubsublemma, wovon wir eines in Abb. 8 sehen.

[In order to view all of them type ‘GOG(3,5):’ in ROBBINS.]

On the TSSCPP side, it was shown in [MRR3] that TSSCPPs whose 3D Ferrers graphs lie in the cube $[0, 2n]^3$ are in trivial bijection with triangular arrays $c_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n - i + 1$, of integers such that: (i) $1 \leq c_{i,j} \leq j$, (ii) $c_{i,j} \geq c_{i+1,j}$, and (iii) $c_{i,j} \leq c_{i,j+1}$. We will call such triangles *n-Magog triangles*, and the corresponding chopped variety, with exactly the same conditions as above, but $c_{i,j}$ is only defined for $1 \leq i \leq k$ rather than for $1 \leq i \leq n$, *n × k-Magog trapezoids*. For example the following is one of the 429 5-Magog triangles:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & \\ 1 & 2 & 2 & 3 & & \\ 1 & 2 & 2 & & & . \\ 1 & 2 & & & & \\ 1 & & & & & \end{array}$$

[In order to view all of them type ‘MAGOG(5,5):’ in ROBBINS.] Retaining only the first three rows of the above Magog-triangle, yields one of the 387 5 × 3-Magog trapezoids:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & \\ 1 & 2 & 2 & 3 & & . \\ 1 & 2 & 2 & & & \end{array}$$

[In order to view all of them type ‘MAGOG(3,5):’ in ROBBINS.]

Our goal is to prove the following statement, conjectured in [MRR3], and proved there for $k = 2$.

Lemma 1: For $n \geq k \geq 1$, the number of $n \times k$ -Gog trapezoids equals the number of $n \times k$ -Magog trapezoids.

[The number of n by k Magog trapezoids, for specific n and k, is obtained by typing $\mathbf{b(k,n)}$; while the number of n by k Gog trapezoids is given by $\mathbf{m(k,n)}$; . To verify lemma 1, type $\mathbf{S1(k,n):}$]

This would imply, by setting $n = k$, that,

Corollary 1’: For $n \geq 1$, the number of *n*-Gog triangles equals the number of *n*-Magog triangles.

Since *n*-Gog triangles are equi-numerous with $n \times n$ alternating sign matrices, and *n*-Magog triangles are equi-numerous with TSSCPPs bounded in $[0, 2n]^3$, this would imply, together with Andrews’s[A2] affirmative resolution of the TSSCPP conjecture, the following result, that was conjectured in [MRR1].

The Alternating Sign Matrix Theorem: The number of $n \times n$ alternating sign matrices, for $n \geq 1$, is:

$$\frac{1!4! \dots (3n-2)!}{n!(n+1)! \dots (2n-1)!} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!} .$$

Sie bekommen einen Eindruck davon: Es handelt sich um eine wahre Tour de Force. Eines kann man darüber aber nicht sagen: Man kann nicht behaupten, dass das ein schöner Beweis, dass das ein eleganter Beweis wäre. Um das zu verteidigen, hat sich der selbe Doron Zeilberger in einem anderen Zusammenhang einmal zu

We now need the following $(sub)^6$ lemma:

Subsubsubsubsubsublemma 1.2.1.2.1.1.1: Let U_j , $j = 1, \dots, l$, be quantities in an associative algebra, then:

$$1 - \prod_{j=1}^l U_j = \sum_{j=1}^l \left\{ \prod_{h=1}^{j-1} U_h \right\} (1 - U_j) \quad .$$

Proof: The series on the right telescopes to the expression on the left. Alternatively, use increasing induction on l , starting with the tautologous ground case $l = 0$. $\square$

Using $(sub)^6$ lemma 1.2.1.2.1.1.1 with

$$U_j = \prod_{i=r_{j-1}+2}^{r_j} (\bar{x}_{i-1}x_i) \quad ,$$

we get that $(Marvin)$ implies:

$$Jamie(x_1, \dots, x_k) = \left\{ \prod_{m=1}^l \bar{x}_{r_m} \right\} \cdot \sum_{j=1}^l \left\{ \prod_{h=1}^{j-1} \prod_{i=r_{h-1}+2}^{r_h} (\bar{x}_{i-1}x_i) \right\} \cdot \left(1 - \prod_{i=r_{j-1}+2}^{r_j} (\bar{x}_{i-1}x_i) \right) \quad .$$

$(Marvin')$

We can split $(Marvin')$ yet further apart, with the aid of the following $(sub)^6$ lemma:

Subsubsubsubsubsublemma 1.2.1.2.1.1.2: Let U_j , ($j = K, \dots, L$), be quantities in an associative algebra, then:

$$1 - \prod_{i=K}^L U_i = \sum_{p=K}^L (1 - U_p) \left\{ \prod_{h=p+1}^L U_h \right\} \quad .$$

Proof: The sum on the right telescopes to the expression on the left. (Note that it is in the opposite direction to the way in which it happened in 1.2.1.2.1.1.1.) Alternatively, the identity is tautologous when $K = L + 1$, and follows by decreasing induction on K . This completes the proof of $(sub)^6$ lemma 1.2.1.2.1.1.2. $\square$

Going back to $(Marvin')$, we use the last $(sub)^6$ lemma (1.2.1.2.1.1.2), with $K = r_{j-1} + 2$, $L = r_j$, and $U_i := (\bar{x}_{i-1}x_i)$, to rewrite:

$$\begin{aligned} Jamie(x_1, \dots, x_k) &= \left\{ \prod_{j=1}^l \bar{x}_{r_j} \right\} \cdot \sum_{j=1}^l \left\{ \prod_{h=1}^{j-1} \prod_{i=r_{h-1}+2}^{r_h} (\bar{x}_{i-1}x_i) \right\} \cdot \sum_{p=r_{j-1}+2}^{r_j} (1 - \bar{x}_{p-1}x_p) \prod_{i=p+1}^{r_j} (\bar{x}_{i-1}x_i) \\ &= \sum_{j=1}^l \sum_{p=r_{j-1}+2}^{r_j} \left\{ \prod_{m=1}^l \bar{x}_{r_m} \right\} \left\{ \prod_{h=1}^{j-1} \prod_{i=r_{h-1}+2}^{r_h} (\bar{x}_{i-1}x_i) \right\} \cdot (1 - \bar{x}_{p-1}x_p) \left\{ \prod_{i=p+1}^{r_j} (\bar{x}_{i-1}x_i) \right\} \quad . \end{aligned}$$

$(Marvin'')$

folgender Aussage verstiegen:²⁷

“Extreme UGLINESS is new BEAUTY!”

Ich denke, wir lassen das einmal so stehen. Die Sarkasten unter Ihnen werden

²⁷Auszug aus einem Vortrag auf der dritten Internationalen Konferenz über “Formal Power Series and Algebraic Combinatorics”, Bordeaux, 4. Mai 1991.

sagen: „Ja, ich hatte immer schon den Eindruck, dass genau das die Idee vieler moderner Komponisten ist.“ Ich würde darauf entgegnen, dass es zu allen Zeiten bessere und schlechtere Komponisten gab. Wenn die Zeit dann fortschreitet, geraten die schlechteren in Vergessenheit, und nur die herausragenden bleiben übrig. Man kann Letzteres sehr gut überprüfen, wenn man sich fragt, wie viele Komponisten es gab, als Beethoven eine Berühmtheit war. Antwort: unzählige! Wenn man sich allerdings fragt, welche davon man heute noch kennt, welche davon heute noch aufgeführt werden, dann fallen einem Franz Schubert (der „ironischerweise“ zur damaligen Zeit großteils unbekannt war), Carl Maria von Weber und die italienischen Opernkomponisten Gioachino Rossini und Gaetano Donizetti ein. Das ist es! Dasselbe wird in 100 oder 200 Jahren für unsere heutige Zeit gelten. Die meisten Komponisten werden vergessen sein, und nur die herausragenden werden Bestand haben. Wenn ich dazu eine persönliche Bemerkung aus lokalpatriotischer Sicht machen darf: Ich bin überzeugt, dass Friedrich Cerha einer von jenen Komponisten sein wird, die in 100 oder 200 Jahren immer noch zu hören sein werden. Seine kraftvolle, ausdrucksstarke musikalische Sprache ist beeindruckend und auch in jenen Stücken klar vernehmbar, die mir weniger gefallen.

In einem übertragenen Sinne – nicht im wörtlichen Sinn – ist obige Aussage im Wesentlichen das, was Arnold Schönberg und die Komponisten in seinem Umfeld getan haben. Die romantische Tonsprache war, nachdem sie auch ins Expressionistische gegangen ist, ausgereizt. Da konnte es keine weitere Entwicklung mehr geben. Das, was Arnold Schönberg nun tat, als er sich zur Zwölftontechnik wandte, war ein totaler Bruch mit allen herkömmlichen (Hör-)Gewohnheiten und Regeln. Er stellte seine Musik auf eine vollkommen neue Basis, mit vollkommen neuen Regeln. Er glaubte – hoffte –, dadurch eine neue musikalische Ästhetik zu schaffen. Ich persönlich betrachte dieses Experiment als gescheitert. Wie ich an diesem Ort schon einmal gesagt habe: Ich verstehe, dass ein Genie wie Arnold Schönberg diesen Weg versucht hat, aber ich verstehe nicht, warum er aus dieser – so wie ich es sehe – Sackgasse der Musikgeschichte nicht wieder herausgefunden hat. (Dass Schönberg ein musikalisches Genie war, ist allein durch sein Streichsextett „Verklärte Nacht“ bewiesen. Dieses ist ein so unglaublich berührendes und bewegendes und gleichzeitig komplexes Werk, wie es eben nur ein Genie schreiben kann. Es gehört für mich zu den allergrößten Kompositionen überhaupt.)

Hirn in der Mathematik

Da werden Sie einwenden, dass man darüber nicht viel sagen kann. Klarerweise sind Vernunft und Überlegung das Um und Auf in der Mathematik. Sie haben natürlich recht. Wir können daher diesen Punkt als abgehakt betrachten ...

Hirn in der Musik

Das ist für sich wieder ein abendfüllendes Thema. Es gibt die landläufige naive Vorstellung, was etwa Pianisten betrifft, dass ein Pianist fleißig üben muss, und am Abend des Konzerts stürmt er dann auf das Podium, setzt sich ans Klavier und legt los. Ja, das ist eine Möglichkeit. Aber so funktioniert das nicht. Der Zuhörer wird nämlich am Resultat bemerken,²⁸ dass nicht sehr viel Überlegung in diese Interpretation eingeflossen ist. Diese wird nicht wirklich Hand und Fuß haben, sie wird unschlüssig bleiben. Tatsächlich, wenn man sich die großen Pianistinnen und Pianisten ansieht, dann wird man bemerken, dass immer Emotion und Verstand einhergehen – eine Symbiose eingehen –, sicherlich jeweils mit anderer Gewichtung. Das prototypische Beispiel ist Alfred Brendel, wo durch seine Bücher ausreichend belegt ist, wie viel Überlegung und Reflexion in seine Interpretationen eingeflossen sind, und wo es andererseits genügte, ihm beim Spielen bloß zuzusehen, um zu begreifen, was für ein sensibler und emotionaler Künstler er war.

Bei Komponisten gibt es eine ähnliche landläufige Vorstellung, dass es das Wichtigste ist, gute Einfälle zu haben, alles weitere ergibt sich von selbst. Dazu kann ich nur sagen: Zu allen Zeiten gab und gibt es viel mehr Komponisten, die gute Einfälle haben, als es gute Komponisten (nicht zu reden von herausragenden Komponisten) gab und gibt. Die große Kunst ist es, wie man die Einfälle, die Themen zur Geltung bringt, wie man Stücke aufbaut, formt und entwickelt. Auch hier gilt: Wenn man sich die großen Komponisten ansieht, gehen immer Emotion und Verstand Hand in Hand. Bei Komponisten wie Bach, Beethoven oder Brahms ist das sowieso evident. Aber es trifft auch auf Komponisten zu, die nicht gerade im Verdacht stehen, besonders intellektuell an das Komponieren herangegangen zu sein. Zu dieser letzteren Kategorie würden mir spontan Franz Schubert, Anton Bruckner, oder auch Modest Mussorgsky einfallen. Man wird überrascht sein, wie viel Überlegung selbst bei diesen Komponisten in ihre Kompositionen eingeflossen ist. Bei Mussorgsky genügt es dafür, sich die „Bilder einer Ausstellung“ anzusehen; wie etwa die Promenaden das Werk raffiniert zusammenhalten, wie das Thema des letzten Bildes, des „Großen Tors von Kiew“, aus dem Promenadenthema gewonnen ist, welches seinerseits selbstbezüglich geformt ist. Bruckners Partituren sind sowieso hochkomplex. Und auch bei Schubert ist die Rolle des Verstands viel größer, als man gemeinhin glauben würde. Ich möchte hier den Hauch einer Idee davon geben. Das Beispiel, das ich ausgewählt habe, ist die große Sonate in A-Dur, D 959, aus Schuberts letztem Lebensjahr. Diese Sonate hat vier Sätze. Einen ausladenden ersten Satz, dessen stolzes KopftHEMA so lautet:

²⁸Singuläre Ausnahme hier ist vermutlich Martha Argerich, die offenbar nicht sehr viel Überlegung in ihre Interpretationen einfließen lässt, sondern in ihren Konzerten spontan drauflos-musiziert. Ich habe größte Hochachtung vor Martha Argerich. Ihr Musikantentum ist in der Regel hinreißend. Ich habe allerdings auch schon Stücke von ihr gehört, die aufgrund ihres spontanen Zugangs unter ihren Fingern zerbröseln sind ...



Das todtraurige Thema des zweiten Satzes kennen wir schon:



Es folgt ein neckisches Scherzo, das auch Ländler-Elemente enthält:



Das abschließende melodienselige Rondo beginnt folgendermaßen:



Sie werden es nicht bemerkt haben, aber Sie werden es vielleicht gefühlt haben: Diese vier charakterlich sehr verschiedenen Themen werden durch eine verborgene Klammer verbunden: Diese möchte ich nun sichtbar machen.

Sieht man sich das Kopfthema des ersten Satzes näher an, dann erkennt man, dass (in der Oberstimme) zunächst mehrmals die Note *a* wiederholt wird, ehe sie ganz am Schluss zu *gis* aufgelöst wird, das auch noch mit einem *fis* umspielt wird. Wenn man also das Thema auf seinen Kern reduziert, dann wird klar, dass es sich um einen groß aufgeblasenen Vorhalt *a-gis* handelt:



Wie beginnt nun der zweite Satz? Die Antwort lautet: *a-gis*. Wie sieht das im Scherzo aus? Da ist es ein wenig versteckter. Hier muss man die Unterstimme ansehen, um auch wieder *a-gis* zu entdecken! Im Thema des letzten Satzes kommt der Vorhalt *a-gis* sogar zweimal vor (nämlich im zweiten und im vierten Takt, beide Male in der Oberstimme).

Sicherlich, diese Feinheiten nimmt man als Zuhörer nicht *bewusst* wahr. Sie tun

aber *unbewusst* ihre Wirkung. Im konkreten Fall tragen sie zur großen Einheit dieser Sonate bei. Es sind unter anderem diese Details, die den Unterschied zwischen einem Meisterwerk und Durchschnittsware ausmachen.

Unterschiede zwischen Mathematik und Musik

Ich habe bisher sehr viel über Parallelen zwischen Mathematik und Musik gesprochen. Ich sollte dann wohl auch auf die Unterschiede zu sprechen kommen. Da gibt es viele. Ich möchte hier nur den allerwichtigsten herausarbeiten.

Dieser beginnt mit einer weiteren Parallele. Wenn ein Komponist die tolle Eingebung hatte und eine Komposition in seinem Kopf entstanden ist, dann muss er diese jetzt aufschreiben, damit sie auch aufgeführt werden kann. Das kann dann so wie in Abbildung 9 aussehen.

Wenn ein Mathematiker den brillanten Einfall hatte und jetzt ein tolles neues Theorem bewiesen hat, dann muss er das jetzt aufschreiben, damit das andere auch nachvollziehen können. Das kann dann so wie in Abbildung 10 aussehen.

Wenn jemand nicht Noten lesen kann und auch von Mathematik nichts versteht: Ich würde sagen, kein großer Unterschied; eines so unverständlich wie das andere ...

Nehmen wir die Partitur her. Diese muss nun zum Leben erweckt werden. Im Fall der „Appassionata“ brauchen wir dafür einen Pianisten. Dieser muss das Werk einstudieren und dann zur Aufführung bringen. Und diese Aufführung – das ist es! Das ist die *ganze* Komposition! Da ist nichts hinzugefügt, da ist nichts weggelassen (wenn wir davon absehen, dass sich der Pianist vielleicht hin und wieder vertippt ...). Und jeder kann sich dazusetzen und sich das anhören. Man braucht dafür keine Vorbildung. Wenn man einen Draht zur musikalischen Sprache Beethovens hat, dann wird man von der düsteren, spannungsgeladenen Atmosphäre der Appassionata mitgerissen werden.

Betrachten wir nun die aufgeschriebene Mathematik. Auch diese muss zum Leben erweckt werden. Aber: Die *Aufführung* von Mathematik, die gibt es nicht! Man kann Mathematik nicht aufführen. Sie werden vielleicht einwenden: Aber auf der Universität, in den Vorlesungen, da wird doch Mathematik „aufgeführt“. Gewissermaßen, ja. Aber das ist doch anders. Sie können sich nicht einfach dazusetzen und die Qualitäten der dort aufgeführten Mathematik genießen. Abhängig davon, wie fortgeschritten die Vorlesung ist, benötigt der Hörer mehr oder weniger Vorkenntnisse, um überhaupt zu wissen, wovon die Rede ist. (Selbst die Vorlesungen des ersten Semesters benötigen gewisse Vorkenntnisse, ohne die es nicht ratsam ist, sich in die Vorlesung zu setzen. Leider gibt es jedes Jahr mehr erstsemestrige Studierende, als uns lieb ist, denen das scheinbar nicht so ganz klar ist ...) In den Vorlesungen ist es üblich, auf diesem Vorwissen aufzubauen und schon Bekanntes nicht noch einmal zu wiederholen. Außerdem werden dem Hörer oft Schlüsse zur



Abbildung 9: Ludwig van BEETHOVEN (1770–1827): Sonate f-moll, op. 57 („Appassionata“)

32

7. $\sec x = E_1 + \frac{x^2}{1!} E_3 + \frac{x^4}{2!} E_5 + \frac{x^6}{3!} E_7 + \dots$

Con. $\frac{B_{2n}}{2^n} 2^{2n} (2^{2n} - 1) = 2 E_1 E_{2n-1} + 2 E_3 E_{2n-3} \frac{(2n-2)(2n-3)}{2!} + \dots$

the last term being $2 E_n E_{n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-3}{2n-2}$ or $(E_n)^2 \frac{2n-2}{(2n-1)}$ according as n is even or odd.

Sol. $\frac{d \tan x}{dx} = \sec^2 x$. Equate the coeff^s of x^{2n-2} .

$E_1 = 1, E_3 = 1, E_5 = 5, E_7 = 61, E_9 = 1385, E_{11} = 50521,$
 $E_{13} = 2702765, E_{15} = 199360981, \&c.$

8. i. $\frac{\sin x}{x} = (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2})(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2}) \dots \&c$

Sol. The roots of the equation $\frac{\sin x}{x} = 0$ are $\pm \pi, \pm 2\pi, \&c$ and $\frac{\sin x}{x} = 1$ when $x = 0$.

ii. In a similar manner

$\cos x = (1 - \frac{4x^2}{\pi^2})(1 - \frac{4x^2}{3^2 \pi^2})(1 - \frac{4x^2}{5^2 \pi^2})(1 - \frac{4x^2}{7^2 \pi^2}) \&c$

Abbildung 10: Srinivasa RAMANUJAN (1887–1920); Notebook I

genauen Ausführung überlassen, wenn diese so quasi „selbstverständlich“ sind. In diesem Sinne findet auch in Vorlesungen keine (vollständige) Aufführung von Mathematik statt.

Sie werden dann sagen: Ja, aber auf mathematischen Konferenzen, da stellen doch die Mathematiker ihre neuesten Ergebnisse ihren Kolleginnen und Kollegen vor, *da* wird doch Mathematik „aufgeführt“! Ersteres stimmt zwar, aber auch hier kommt es zu keiner „Aufführung“ von Mathematik im selben Sinne, wie Musik aufgeführt wird. Auf Konferenzen hat man vielleicht 30 Minuten, vielleicht eine Stunde Zeit, sein neuestes Resultat zu präsentieren. Was präsentiert wird, darüber haben die Vortragenden wochenlang, monatelang, vielleicht jahrelang nachgedacht. Das lässt sich nicht in 30 Minuten oder einer Stunde zur Gänze in jedem Detail präsentieren. Was man also tut, ist, die Aussage seines neuesten Theorems zu erklären und dann anzudeuten, welche Ideen in den Beweis eingeflossen sind. Wenn ein Hörer einen Beweis vollständig nachvollziehen möchte, beziehungsweise zur Gänze überprüfen möchte, dann muss dieser den Artikel, in dem der Beweis aufgeschrieben ist, studieren. Auch hier kommt es also nicht zur „Aufführung“ von Mathematik.

Das hat eine für Mathematiker sehr leidvolle Folgerung: Ich würde sagen, dass – Daumen mal π – 90 Prozent der Bevölkerung Musik zugänglich sind. Wenn man dann die populäre Musik weglässt, dann bleiben immer noch – vorsichtig geschätzt – mindestens 10 Prozent, die durch – ich sage jetzt – *aussagekräftige*²⁹ Musik ansprechbar sind.

Wie sieht das mit der Mathematik aus? Ich würde das so formulieren. Sie werden sich möglicherweise aus der Mittelschulzeit erinnern, dass Mathematiker ein spezielles Symbol für verschwindend kleine Größen haben: das ϵ ! Ich würde also sagen, dass – grob geschätzt – ϵ Prozent der Bevölkerung durch die vielfältigen Qualitäten der Wissenschaft Mathematik ansprechbar sind.

Das ist sehr schmerzlich für Mathematiker. Mathematikern wird oft vorgeworfen, sie sollten doch aus ihrem Elfenbeinturm heraustreten und einem breiten Publikum erklären, was sie so tun. Und Mathematiker würden genau das liebend gern machen: Sie würden mit großer Begeisterung ihr neuestes Theorem – sozusagen: ihre neueste Komposition – einem breiten Publikum vortragen. Allein, aufgrund der oben beschriebenen Schwierigkeiten: Es ist ein Ding der Unmöglichkeit. Wohl gemerkt: Ich sage nicht, dass man *über* Mathematik nicht reden soll. Ganz im Gegenteil. Was ich hier mache, ist ja in einem gewissen Sinne auch „*über* Mathematik reden“. Und es ist das, was hier im *math.space* – mit großem Erfolg – geschieht. Aber, wenn es zur aktuellen Forschung kommt, dann wird man nur in Bildern sprechen können, dann wird man nur andeuten können, was hier wirklich vor sich geht. Wie gesagt: Die Aufführung von Mathematik gibt es nicht, und so wird ein Mathematiker einem breiten Publikum nie wirklich nahebringen

²⁹Mit den Bezeichnungen „E“ und „U“ weiß ich nämlich wenig anzufangen.

können, was er erlebt, wenn er sich mit mathematischen Problemen und deren Lösung beschäftigt. In diesem Punkt haben Mathematiker gegenüber Musikern, aber auch gegenüber Forschern in anderen Wissenschaftsdisziplinen, immer ein Handicap. Musik spricht den Hörer unmittelbar an, da sind keine „Übersetzung“ oder zusätzliche Erklärung notwendig, ganz im Gegensatz zur Mathematik.³⁰

Persönliches

Was bedeuten mir persönlich Mathematik und Musik? Viel, natürlich. Da ist einmal die unerklärbare, magische Komponente. Wenn ich gefragt werde, warum ich zur Musik oder Mathematik gekommen bin: Ich weiß es nicht. Ich erinnere mich gut, dass ich als 6–7-Jähriger schon leidenschaftlich gern vor mich hingungen habe. Warum? Ich weiß es nicht. Ich erinnere mich auch gut, dass ich mich als 13–14-Jähriger brennend dafür interessiert habe, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass man mit einer gegebenen Anzahl von Würfeln eine gegebene Gesamtaugenzahl würfelt, dass man also etwa mit 10 Würfeln die Augenzahl 36 würfelt. Ich habe mit Hingabe lange Tabellen aufgestellt und diese untersucht. Nach mehrjähriger Arbeit gelang es mir tatsächlich, eine Formel zu finden. Natürlich hatte ich damals nicht die geringste Ahnung, wie man diese auch beweisen könnte.³¹ Warum mich das so fasziniert hat? Ich weiß es nicht.

Was fasziniert mich heute an Mathematik und Musik? Bei der Mathematik ist da einmal die Herausforderung, offene Probleme, wie sie laufend aus der Physik, der Informatik, oder auch der Mathematik selbst kommen, zu „knacken“. Interessanterweise kommt es in meiner Forschungsarbeit sehr häufig vor, dass ich, um ein Problem zu lösen, lange Tabellen studiere (die aber heutzutage mit dem Computer erstellt sind) und ich versuche, eine mathematische Formel für die Zahlen in diesen Tabellen zu erraten (auch das unter Mithilfe des Computers) und dann – im erfolgreichen Fall – die so gefundene Vermutung zu beweisen. Weiters fasziniert es mich natürlich, verborgene Strukturen und Zusammenhänge, die sich hinter den Problemen und deren Lösungen verbergen, aufzudecken. Die ästhetische Komponente der Mathematik spielt für mich klarerweise eine große Rolle.

Auch bei der Musik fasziniert es mich, Neues zu ergründen. Es ist einfach unge-

³⁰Folgerichtig versucht Cédric Villani in seinem bemerkenswerten, aufsehenerregenden Buch *“Théorème vivant”* (in der deutschen Übersetzung: *„Das lebendige Theorem“*) – in dem er beschreibt, wie der Beweis jenes Theorems entstanden ist, das wesentlich zur Verleihung der Fields-medaille an ihn im Jahr 2010 beitrug – gar nicht erst, die Mathematik dahinter zu erklären, sondern bleibt im Gegenteil dazu sogar für ein Fachpublikum, das nicht Experte auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen ist, mit voller Absicht unverständlich, um sich dafür ganz auf die emotionelle Seite der Auseinandersetzung mit Mathematik zu konzentrieren. Dies gelingt Villani ganz hervorragend, aber – nüchtern betrachtet – wird hier *nicht einmal über* Mathematik gesprochen.

³¹Heute weiß ich, dass man diese Formel problemlos mithilfe von erzeugenden Funktionen oder auch mithilfe des Prinzips der Inklusion und Exklusion beweisen kann.

mein interessant, sich ein neues³² Stück vorzunehmen und zu beginnen, daran zu arbeiten. Wie wir schon besprochen haben: Eine Partitur muss zum Leben erweckt werden. Am Anfang weiß man oft gar nicht, was die wichtigen Dinge in einem Stück sind, wie der Aufbau des Stücks zu verstehen ist und wie das Stück ablaufen soll. Ich erinnere mich gut an die Situation, wie ich mit meinen Triopartnern begonnen habe, den dritten Satz aus Mozarts Klaviertrio in C-Dur, KV 548, für eine Zugabe eines Konzertabends einzustudieren. Auch wenn wir – jeder für sich – die eigenen Parts vorher geübt hatten, die „erste Lesung“ des Satzes verkam zu einer veritablen Katastrophe: Nichts ergab auch nur irgendeinen Sinn. Der Geiger plädierte sofort dafür, etwas anderes als Zugabe zu wählen ... Ich bestand jedoch darauf, dem Stück eine Chance zu geben. Wir begannen also, daran zu arbeiten. Und siehe da: Allmählich formte sich das „hässliche Entlein“ zu einem lebhaften, witzigen Stück Musik, das uns allen große Freude bereitete.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist natürlich, dass man, nachdem man eine Interpretation eines Stückes erarbeitet hat, diese – eigene – Sicht der Komposition nun einem Publikum darbieten will. Das ist jedes Mal ein ungeheuer interessantes und aufregendes Erlebnis. Man weiß nie im Vorhinein, wie das ablaufen wird, aber umso spannender ist das und umso bereichernder kann das sein.

In jedem Fall aber waren und sind Mathematik und Musik für mich zwei sehr verschiedene Dinge, die komplementär zueinander sind. Und genau diese Komplementarität habe ich immer als so interessant und reizvoll empfunden. Es ist ja wahrscheinlich sowieso nicht gesund, sich in nur eine Sache zu verbohren. Wenn ich etwa über ein mathematisches Problem nachdenke und an einem toten Punkt anlange, wo ich nicht mehr weiter weiß, dann kann ich mich zum Klavier setzen und mich auf etwas ganz anderes konzentrieren und so das Hirn wieder frei bekommen. Vielleicht, wenn ich mich dann später wieder dem mathematischen Problem zuwende, habe ich dann eine neue, frische Sicht der Dinge, um mit dem Problem wiedervoranzukommen.

Schluss

Ich wäre am Ende meiner Ausführungen über „Mathematik *und* Musik?“ angelangt. Es ist ja so: In einem mathematischen Vortrag ist es durchaus erlaubt, größtenteils unverständlich zu bleiben. Allerdings nur unter einer Bedingung: wie es der einflussreiche italienische Mathematiker Gian-Carlo Rota einmal als Forderung des Publikums an den Vortragenden formuliert hat:³³

³²Gemeint ist „vorher noch nicht studiertes“

³³Das Zitat stammt aus dem Vortrag „*Ten Lessons I wish I had been Taught*“, den Rota am 20. April 1996 bei einer Geburtstagskonferenz ihm zu Ehren am Massachusetts Institute of Technology in Boston gehalten hat. Er ist in den Notices der American Mathematical Society, vol. 44, Nr. 1, 1997, S. 22–25 (siehe <http://www.ams.org/notices/199701/comm-rota.pdf>) nachzulesen.

“Give us something to take home!”

In diesem Sinne hoffe ich, dass ich nicht allzu unverständlich war, und dass etwas für Sie dabei war, um es mit nach Hause zu nehmen. Weil wir beim Mit-nach-Hause-Nehmen sind: Ich hätte da noch etwas anzubieten, ein Musikstück am Schluss. Es muss natürlich zu unserem Motto „Herz und Hirn“ passen. Da gäbe es viele natürliche Kandidaten, bei Johann Sebastian Bach etwa, oder auch bei Ludwig van Beethoven. Das wäre aber zu einfach, zu konventionell. Ich habe stattdessen die Sonate Opus 1 von Alban Berg ausgewählt. Dieser hat sie als 23-Jähriger geschrieben. Sie ist gewissermaßen die Abschlussarbeit der Kompositionsstudien Bergs, die dieser vor allem bei Arnold Schönberg vorgenommen hat. Wenn man so will, ist es die musikalische „Dissertation“ Alban Bergs, um eine weitere Parallele zur Mathematik zu bemühen. Sie passt hervorragend zu unserem Motto „Herz und Hirn“. Ich würde sagen, die musikalische Sprache dieser Sonate ist dem Expressionismus zuzuordnen. Sie ist also hochemotionell. Auf der anderen Seite handelt es sich um eine unglaublich dichte musikalische Konstruktion, in der das *ganze* etwa 10-minütige Stück aus *einer* Keimzelle – nämlich dem Anfangsthema – gewonnen ist. Aber genug der Erklärungen. Ich spiele also jetzt die Sonate Opus 1 von Alban Berg, und ich werde unmittelbar daran ein Gebet von Johannes Brahms anhängen. „Intermezzo“ heißt das bei Brahms, aus den letzten Klavierstücken, die er geschrieben hat. Ich habe das immer schon gerne gemacht, da erstens die beiden Stücke so gut zusammenpassen, und zweitens, wenn man zuhört, begreift man, woher die musikalische Sprache Alban Bergs kommt.

〈Alban BERG (1885–1935): *Sonate op. 1*〉³⁴

〈Johannes BRAHMS (1833–1897): *Intermezzo in h-moll, op. 119/1*〉³⁵

³⁴Auch auf die Gefahr hin, eine gewisse Einseitigkeit an den Tag zu legen: Die wunderbar austarierte Sicht Alfred Brendels ist auf YouTube in zwei Teilen anzuhören: <http://www.youtube.com/watch?v=PlV-ksfS7F8>, <http://www.youtube.com/watch?v=QxBGG74ztVo>.

³⁵Eine alte Konzertaufnahme dieses Stücks mit dem Autor am Klavier findet sich unter <http://www.mat.univie.ac.at/~kratt/klavier/brahms119-1.html>.

Adresse des Autors: Christian Krattenthaler, Fakultät für Mathematik der Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien.

Buchbesprechungen

<i>D. S. Alexander, F. Iavernaro, A. Rosa</i> : Early Days in Complex Dynamics (F. SCHWEIGER)	62
<i>T. Arens, R. Busam, F. Hettlich, C. Karpfinger, H. Stachel</i> : Arbeitsbuch Grundwissen Mathematikstudium (C. ELSHOLTZ)	62
<i>H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin</i> : Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations (K. FELLNER)	63
<i>Th. Bauer</i> : Analysis – Arbeitsbuch (B. KRÖN)	63
<i>T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert</i> : Cellular Automata and Groups (P. GRABNER)	64
<i>O. Deiser</i> : Erste Hilfe in Analysis (C. GEIERSBACH)	65
<i>O. Deiser, C. Lasser, E. Vogt, D. Werner</i> : 12x12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik (C. GEIERSBACH)	65
<i>N. Helder mann</i> : Höhere Mathematik 1 (C. ELSHOLTZ)	66
<i>M. Morishita</i> : Knots and Primes (C. BAXA)	66
<i>M. Oestreich, O. Romberg</i> : Keine Panik vor Statistik! (M. PREDOTA) . .	67
<i>H. Riesel</i> : Prime Numbers and Computer Methods for Factorization (P. HELLEKALEK)	67
<i>M. Scherfner, T. Volland</i> : Mathematik für das erste Semester (C. GEIERSBACH)	68
<i>G. Shimura</i> : Modular Forms: Basics and Beyond (C. BAXA)	69
<i>A. B. Sossinsky</i> : Geometries (F. MANHART)	69
<i>K. Strehmel, R. Weiner, H. Podhaisky</i> : Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (W. AUZINGER)	70
<i>A.-S. Sznitman</i> : Topics in Occupation Times and Gaussian Free Fields (C. TEMMEL)	70
<i>G. G. Szpiro</i> : Die Keplersche Vermutung (M. KRONFELLNER)	71
<i>T. Tao</i> : Higher Order Fourier Analysis (C. ELSHOLTZ)	72
<i>M. Ulbrich, S. Ulbrich</i> : Nichtlineare Optimierung (F. RENDL)	72
<i>J. Ziegenbalg, O. Ziegenbalg, B. Ziegenbalg</i> : Algorithmen (F. PAUER) . .	73

D. S. Alexander, F. Iavernaro, A. Rosa: Early Days in Complex Dynamics. A History of Complex Dynamics in One Variable During 1906–1942. (History of Mathematics, Vol. 38.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, The London Mathematical Society, 2012, xvii+454 S. ISBN 978-0-8218-4464-9 H/b \$ 99,–.

Ein ungewöhnlich reichhaltiges und spannendes Buch liegt vor uns! Es beleuchtet die Geschichte der Erforschung komplexer dynamischer Systeme vor allem zwischen den Jahren 1906 (Fatous Arbeit über Funktionalgleichungen) und 1942 (Siegels Lösung des Zentrumproblems). Es wird aber auch Rückschau gehalten, etwa auf die Arbeiten von Ernst Schröder, und der Bogen bis zur gegenwärtigen Forschung gespannt (schade, dass nicht auf den von Dierk Schleicher 2009 herausgegebenen Sammelband *Complex Dynamics. Families and Friends* verwiesen wird, da dieses die Lebendigkeit dieses Gebietes beweist). Die Arbeiten von Pierre Fatou, Gaston Julia, Samuel Lattès und Salvatore Pincherle rund um den Grand Prix des Sciences Mathématiques werden in zwei Kapiteln ausführlich dargestellt. Biographische Notizen, Anhänge zu verschiedenen Themen und ein umfangreiches Literaturverzeichnis ergänzen das Werk. Das Buch kann wärmstens empfohlen werden. Man bedauert fast, dass es ohne solide mathematische Vorkenntnisse schwer lesbar sein wird.

F. Schweiger (Salzburg)

T. Arens, R. Busam, F. Hettlich, C. Karpfinger, H. Stachel: Arbeitsbuch Grundwissen Mathematikstudium. Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen. Aufgaben, Hinweise, Lösungen und Lösungswege. Mit Beitr. v. K. Lichtenegger (Springer Spektrum) Berlin 2013 viii+243 S. ISBN 978-3-8274-3001-4 S/b EUR 25,69.

Dies Buch ist ein Arbeitsbuch und stellt die Aufgaben des Buchs „Grundwissen Mathematikstudium – Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen“ (1.172 Seiten) der gleichen Autoren zusammen. Die Aufgaben sind unterteilt in Verständnisfragen, Rechenaufgaben und Beweisaufgaben. Dazu gibt es erst Lösungshinweise, dann Lösungen (zum Teil sehr kurz) und darüber hinaus ausführlichere Lösungswege. Die Aufgaben und Lösungen, aber nicht die längeren Lösungswege, sind auch bereits in dem zugrundeliegenden Hauptband abgedruckt.

Dies Arbeitsbuch ist auch auf der vom Verlag und den Autoren unterhaltenen Webseite <http://www.matheweb.de> kostenlos in pdf-Form verfügbar. Dafür sei den Beteiligten herzlich gedankt! Die Existenz dieser *gedruckten* Version ist auf Leserwunsch entstanden, löst aber nach Meinung des Rezensenten noch nicht das Problem der Alltagsauglichkeit des mit 3.125g doch sehr „gewichtigen“ Hauptbands.

C. Elsholtz (Graz)

H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin: Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 343.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, xv+523 S. ISBN 978-3-642-16829-1 H/b € 99,95.

This research-level volume presents a multitude of state-of-the-art results of nonlinear PDE analysis. Well-written in the style of the French school, it features advanced results and critical cases and can be highly recommended as a current addition to the library of any PDE analyst working on related topics.

The book opens by recalling classical results of Fourier analysis, Sobolev spaces, the Littlewood-Paley theory and Besov spaces in a self-consistent way, which is adapted for the study of PDEs.

Next, it develops an extensive theory of transport-diffusion equations and (quasi)-linear symmetric systems presenting both global well-posedness results as well as blow-up criteria.

The following two chapters establish classical results of the incompressible Navier-Stokes equations with critical regularity data and extend these to nonlinear systems with degenerate parabolicity, in particular anisotropic viscosity. This is continued by a chapter on Euler systems of inviscid incompressible fluids.

The next two chapters are concerned with Strichartz estimates, the Schrödinger equation and a quasilinear wave equation toy model of the Einstein equations.

Finally, the last chapter discusses results on the barotropic compressible Navier-Stokes equations including the low Mach number limit.

K. Fellner (Graz)

Th. Bauer: Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen. (Springer Spektrum) Wiesbaden 2013 x+206 S. ISBN 978-3-8348-1914-7 S/b € 20,51.

Das Buch ist eine Sammlung von Beispielen und einzelnen theoriebezogenen Beiträgen zur reellen Analysis in einer Variable, welche folgendermaßen aufgebaut sind: nötiges Vorwissen, didaktische Zielsetzung („Was lerne ich hier?“), Aufgabenstellung und kommentierter Lösungsvorschlag.

Grundvorstellungen zu wichtigen Begriffen der Analysis werden explizit behandelt. Dieses Buch will kein Lehrbuch sein, kann jedoch Studierenden als Lektüreergänzung dienen. Hilfreich ist es vor allem für jene, die Analysis-Vorlesungen halten oder Übungen gestalten. Mir persönlich gefielen insbesondere die Beiträge zur Differenzierbarkeit: Ein Beispiel zum Wasserstand im Edersee zeigt, wie die Kettenregel Anwendung in der Praxis findet. Auch eine geometrische Charakterisierung von Tangenten gab mir einen Denkanstoß: Wenn ein beliebig geringes Drehen einer Geraden nach rechts und nach links um den Schnittpunkt mit dem Funktionsgraphen eine Veränderung der gegenseitigen Lage (d.h. Funktion oder

Gerade oberhalb bzw. unterhalb) links und rechts des Schnittpunkts bewirkt, so ist die Gerade eine Tangente.

Inhaltlich ergänzen könnte man die Konstruktion der reellen Zahlen, denn wäre ihre Vollständigkeit einmal richtig behandelt, würde z.B. die Existenz der n -ten Wurzel sofort folgen, und es müsste nicht der Umweg über Zwischenwertsatz und Exponentialfunktion gegangen werden, zumal diese die Vollständigkeit der reellen Zahlen ohnehin verwenden.

Resümee: Kaufempfehlung für alle, die Analysis-Kurse gestalten, aber auch für Lehrkräfte, die didaktische Anregungen zur Differential- und Integralrechnung suchen.

B. Krön (Wien)

T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert: Cellular Automata and Groups. (Springer Monographs in Mathematics.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, xix+439 S. ISBN 978-3-642-14033-4 H/b € 89,95.

Ausgehend von Conways "Game of Life" hat sich seit den 1970er-Jahren die Theorie der zellulären Automaten entwickelt, die als dynamische Systeme nützliche Modelle für komplexe Systeme in Biologie, Chemie, Physik und Populationsdynamik liefern. Das vorliegende Buch führt dieses attraktive und aktive Forschungsgebiet im Zusammenspiel von geometrischer Gruppentheorie, Automatentheorie, mittelbaren Gruppen und Gruppenwirkungen ein. Besonders hervorzuheben ist, dass für die Lektüre des Buchs nur geringe Vorkenntnisse erforderlich sind, wodurch es bereits Studierenden in den letzten Semestern eines Bachelorstudiums zugänglich ist. In zehn Anhängen werden inhaltliche Voraussetzungen, die auf diesem Niveau allenfalls nicht vorhanden sind, konzise aufbereitet vermittelt. Jedes Kapitel endet mit ausführlichen historischen Anmerkungen und umfangreichen Übungsaufgaben, die das Selbststudium erleichtern.

In vier einleitenden Kapiteln über zelluläre Automaten und die notwendigen Begriffe aus der Gruppentheorie ("residually finite groups", "surjunctive groups" und mittelbare Gruppen) werden die nötigen Vorkenntnisse und vorbereitende Sätze vermittelt. Ein erstes schönes Resultat, das sich schnell erreichen lässt, ist der Satz von Curtis-Hedlund, der zelluläre Automaten über endlichen Alphabeten durch die Stetigkeit und die G -Äquivarianz charakterisiert. Im fünften Kapitel wird die Frage der Surjektivität zellulärer Automaten studiert. Hier gibt das "Garden of Eden Theorem" eine Charakterisierung im Falle mittelbarer Gruppen. Das fünfte Kapitel über endlich erzeugte mittelbare Gruppen führt in die wichtigsten Begriffe der geometrischen Gruppentheorie ein. Den von M. Gromov und B. Weiss eingeführten sofischen Gruppen (in Analogie zu den sofischen Shifts der symbolischen Dynamik) ist das siebte Kapitel gewidmet. Im achten Kapitel werden lineare zelluläre Automaten studiert, also solche, deren Alphabet eine Vektorraumstruktur trägt und deren lokale Transformationsregeln linear sind.

Durch die umsichtige Aufbereitung des Materials und die Anhänge zu ausgewählten Themen ist das Buch sowohl Studierenden ab den letzten Semestern eines Bachelorstudiums als auch dem “working mathematician” als hervorragende Einführung in das Gebiet der zellulären Automaten auf dem derzeitigen Stand der Forschung zu empfehlen.

P. Grabner (Graz)

O. Deiser: Erste Hilfe in Analysis. Überblick und Grundwissen mit vielen Abbildungen und Beispielen. Springer, Spektrum, Heidelberg, 2012, 246 S. ISBN 978-3-8274-2994-0 P/b € 19,95.

For a first-year student of mathematics, the onslaught of new notation and intensified rigor behind concepts already encountered in school can be mystifying. The author attempts in *Erste Hilfe in Analysis* to demonstrate, both through visual and written examples, the subtleties of concepts learned in a first university-level course in Analysis. The book is designed to be a companion to that course, not a replacement for lectures or standard literature. Each of the 12 sections in the eight chapters begins with a definition or theorem, and the rest of the section is devoted to examples, illustrations, related theorems, and a discussion around this theme, including tips on avoiding common pitfalls. Proofs are intentionally only sparingly allowed. The book is best utilized in preparation for an exam or later as a quick reference.

C. Geiersbach (Wien)

O. Deiser, C. Lasser, E. Vogt, D. Werner: 12x12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik. Spektrum, Heidelberg, 2011, x+338 S. ISBN 978-3-8274-2297-2 P/b € 20,50.

The book 12×12 *Schlüsselkonzepte zur Mathematik* reads more or less like a catalog of 144 topics in mathematics. Each section is limited to two to three pages by design, and each contains a short summary of what one is likely to encounter on the subject in the first few years of study. In these summaries, central definitions, concepts and theorems are discussed, often with a historical perspective. The topics are evenly sorted into 12 main chapters: foundations, numbers, number theory, discrete mathematics, linear algebra, algebra, elementary analysis, higher analysis, topology and geometry, numerical mathematics, probability theory, and set theory and logic.

The book, as envisioned by the authors, falls somewhere between a reference work and a textbook. The idea is that a student of mathematics would have a resource – in the form of this book – that could provide a quick summary of a topic, both for topics already mastered and those as yet unexplored. The problem is that, in order to compress a subject into a few pages, much formality must be left to the imagination. A student who has mastered a subject will most likely find the

narrative trivial, and a student who has never seen the topic before will not be the wiser after a careful read. My sense after picking up this book was that the authors got lost in the exercise of categorizing and consolidating, and forgot to write a book that students would actually find useful.

C. Geiersbach (Wien)

N. Heldermann: Höhere Mathematik 1. (Berliner Studienreihe zur Mathematik, Band 21.) Heldermann Verlag, Lemgo, 2012, vii+262 S. ISBN 978-3-88538-121-1 H/b € 32,-.

Das Buch wurde für eine einführende Vorlesung *Mathematik für Studierende der Fächer Produktion und Wirtschaft* an einer Fachhochschule geschrieben. Wie der Autor in seinem Vorwort schreibt, muss man bei den von der Schule vorhandenen Eingangsvoraussetzungen einige Kompromisse machen, und so kommt es, dass dieser Band zum großen Teil einen Inhalt hat, der eigentlich an der Schule gelernt werden sollte.

Das erste Viertel des Buchs behandelt den Aufbau der reellen Zahlen, (inklusive vollständiger Induktion, elementarer Definitionen wie injektive Abbildungen, usw.). Es folgen lineare Gleichungen, Ungleichungen, Polynome usw. Ebenso wird elementare Geometrie (inklusive Ellipsen) und Trigonometrie dargestellt, weiter Ableitungen (inklusive Newtonverfahren), Taylorreihen, Exponentialfunktionen. Das letzte Kapitel behandelt Funktionen in zwei Variablen. (Integralrechnung wird in diesem Band nicht behandelt).

Das Lehrbuch soll kein klassisches Buch der Analysis ersetzen, sondern den vorgenannten Übergang zwischen Schule und Fachhochschule ermöglichen. Es ist schön geschrieben, enthält zahlreiche Abbildungen und Übungsaufgaben. Zu den Übungsaufgaben gibt es einen Lösungsband (Band 22 der Reihe). Auf einen weiterführenden Folgeband wird verwiesen.

Es sei angemerkt, dass das Buch gebunden ist, und der Verlag im deutschsprachigen Raum als Non-Profit-Verlag für ein sehr gutes Preis-Leistungsverhältnis bekannt ist.

C. Elsholtz (Graz)

M. Morishita: Knots and Primes. An Introduction to Arithmetic Topology. (Universitext.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2012, xi+191 S. ISBN 978-1-4471-2157-2 P/b € 49,95.

Diese Monographie ist erstaunlichen Analogien zwischen algebraischer Zahlentheorie und der Topologie von 3-Mannigfaltigkeiten gewidmet, auf die erstmals Barry Mazur in den sechziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts hingewiesen hat.

Ausgangspunkt ist die Analogie zwischen der Fundamentalgruppe in der algebraischen Topologie und der étalen Fundamentalgruppe. Die im Titel angesprochene Beziehung zwischen Knoten und Primzahlen ergibt sich, wenn man die Einbettung $\text{Spec } \mathbb{F}_p \hookrightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ als Analogon des Knotens $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ auffasst. Morishitas Buch zeigt, wie überraschend tragfähig diese Analogie ist. Verschlingungszahlen entsprechen dabei Legendre-Symbolen, ihre Symmetrie dem quadratischen Reziprozitätsgesetz und die Gaußsche Integralformel für die Verschlingungszahl der Möglichkeit, das Legendre-Symbol mittels einer Gaußschen Summe auszudrücken. Im Laufe der Kapitel wird eine Art Wörterbuch präsentiert, das beschreibt, welche Begriffe beider Gebiete einander analog entsprechen. So korrespondieren etwa die erste und zweite Homologiegruppe einer 3-Mannigfaltigkeit mit der Idealklassengruppe und der Einheitengruppe eines algebraischen Zahlkörpers.

Wie aus der bisherigen Beschreibung ersichtlich ist, stellt dieses Buch keine geringen Anforderungen an die Vorkenntnisse aus Topologie, kommutativer Algebra und algebraischer Zahlentheorie. Wer allerdings bereit ist, Zeit in die Lektüre zu investieren, wird dafür mit verblüffenden Einsichten in eine Analogie belohnt, die höchstwahrscheinlich zu weiteren Erkenntnissen auf beiden Gebieten führen wird.

C. Baxa (Wien)

M. Oestreich, O. Romberg: Keine Panik vor Statistik!. Erfolg und Spaß im Horrorfach nichttechnischer Studiengänge. 4., aktualisierte Auflage. Springer, Spektrum, Heidelberg, 2012, xi+326 S. ISBN 978-3-8348-1946-8 P/b € 24,95.

Das vorliegende Buch gibt eine Einführung in die Statistik für nichttechnische Studienrichtungen, wobei bereits die 4. Auflage vorliegt. Es beginnt mit einfachster Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung und führt über Mittelwertberechnungen und Korrelationskoeffizienten bis hin zu einfachen Hypothesentests. Das Buch ist immer wieder mit Comics und Beispielen aus dem Studentenalltag (Tequilla als Notenbooster, Oktoberfest, etc.) aufgelockert. Für Studierende der Mathematik ist das Buch für nicht viel mehr als eine Aufwärmrunde vor dem 1. Semester (um im Fachjargon der Autoren zu bleiben) zu empfehlen.

M. Predota (Wien)

H. Riesel: Prime Numbers and Computer Methods for Factorization. Second Edition. Reprint of the 1994 Edition. (Modern Birkhäuser Classics.) Birkhäuser, Basel, 2012, xviii+464 S. ISBN 978-3-8176-8297-2 P/b € 59,95.

Bei dem vorliegenden Buch handelt es sich um den unveränderten Nachdruck der zweiten Auflage dieses Werks von 1994.

Es werden vier große Themenbereiche behandelt: Verteilungseigenschaften der Primzahlen, die Erkennung von Primzahlen (Primzahltests), die Faktorisierung

großer Zahlen und, in Form einer kurzen Einführung, die Verwendung von Primzahlen in der Kryptographie. Elf Anhänge vermitteln Hintergrundwissen, von der elementaren Zahlentheorie über die Struktur von algebraischen Zahlkörpern bis zum Stieltjes-Integral. Umfangreiche Tabellen zu Primzahlen und zu Faktoren spezieller Zahlen wie jene von Mersenne-Zahlen ergänzen die Theorie.

Dieses Buch zeugt von großer Handwerkskunst und vom umfassende Wissen des Autors, einem renommierten Spezialisten auf diesem Gebiet. Das Werk beeindruckt durch die Genauigkeit der Formulierungen, den Umfang der dargebotenen Informationen, das umfangreiche Literaturverzeichnis und das klare Konzept der Präsentation eines derart umfassenden Stoffgebiets. Die Wertschätzung, die dieser Monographie durch Fachkollegen wie Paulo Ribenboim entgegengebracht wird, unterstreicht ihre Bedeutung in diesem Teilgebiet der Zahlentheorie. Sie ist weiterhin als Referenzwerk unverzichtbar.

P. Hellekalek (Salzburg)

M. Scherfner, T. Volland: Mathematik für das erste Semester. Analysis und Lineare Algebra für Studierende der Ingenieurwissenschaften. Spektrum, Heidelberg, 2012, xiv+364 S. ISBN 978-3-8274-2501-1 P/b € 24,95.

The textbook *Mathematik für das erste Semester* is written with a first-semester engineering student in mind, and as such takes a soft approach to the standard introductory material in analysis and linear algebra. As a rule, the authors kept the text and examples purely mathematical, with the argument that applied engineering examples at this level can be distracting more than anything; that being said, the focus is more on correctly applying mathematical tools rather than the mastery of the theory and proofs.

The book is divided into two main sections: analysis and linear algebra. The section on analysis covers the usual suspects of real and complex numbers, functions, sequences, series, differentiation, power series, Taylor, integration and a short chapter on Fourier series, all limited to the one-dimensional case. The section on linear algebra contains vector spaces, systems of linear equations, determinants, norms and the dot product, change of basis, eigenvalues and eigenvectors, and differential equations.

Students studying for a written exam will find the examples, accompanied by complete solutions, at the end of each chapter helpful. Those examples are followed by a list of theoretical questions that might be encountered in an oral exam, all of which can be answered using the previous pages. The chapter *Vom Umgang mit Prüfungen* gives a panicked student some advice on test-taking strategies, which reads somewhat like a lecture from an older sibling but which also underscores the authors' purpose in writing the book: to help students pass their first university math exam.

C. Geiersbach (Wien)

G. Shimura: Modular Forms: Basics and Beyond. (Springer Monographs in Mathematics.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2012, x+175 S. ISBN 978-1-4614-2124-5 H/b € 79,95.

Der Autor dieser Monographie hat vor über 40 Jahren den Klassiker *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions* verfasst und hat die Theorie der Modulformen im Laufe der Jahre um zahlreiche bedeutende Beiträge bereichert. Im vorliegenden Werk beschäftigt er sich mit einigen fortgeschrittenen Themen aus diesem Gebiet.

Während im ersten Kapitel die Grundlagen der Theorie Siegelscher Modulformen präsentiert werden, beschränkt sich der Autor später darauf, Modulformen zu betrachten, die Funktionen einer komplexen Variable sind. In weiteren Kapiteln werden Thetafunktionen, Dirichletreihen und Eisensteinreihen behandelt. Der Beweis einer starken Version der Shimura-Korrespondenz bildet einen Höhepunkt des Buchs. (Diese setzt Modulformen halbganzen Gewichts in Beziehung zu Modulformen von ganzzahligem Gewicht und wurde vom Autor 1973 publiziert.) Daran anschließend beweist er als Anwendung Resultate, die den von ihm in der Arbeit *The critical values of certain Dirichlet series attached to Hilbert modular forms* 1991 publizierten entsprechen (in der die gleichen Fragen für Hilbertsche Modulformen behandelt wurden). Abschließend weist er darauf hin, dass praktisch alle vorgestellten Ergebnisse auf Hilbertsche Modulformen ausgedehnt werden können.

In diesem Werk demonstriert Shimura auf eindrucksvolle Weise seine schwer zu überbietende Beherrschung der Materie. Dieser Band ist ein großer Gewinn für alle, die sich ernsthaft mit Modulformen auseinandersetzen (oder es sich noch vorgenommen haben).

C. Baxa (Wien)

A. B. Sossinsky: Geometries. (Student Mathematical Library, Vol. 64.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012, xvi+301 S. ISBN 978-0-8218-7571-1 P/b \$ 48,-.

This textbook has come out of lectures for first year students given by the author at the University of Moscow. Pointing out Klein's *Erlangen Program* geometries are discussed as theory of objects invariant by the action of a transformation group. After an introductory chapter devoted to Euclidean Geometry there are five sections on abstract groups and finite transformation groups including finite subgroups of $SO(3)$, crystallographic groups and Coxeter Geometries. After chapter six, devoted to spherical Geometry, there are four sections presenting classical models of hyperbolic Geometry. Chapter 11 presents a short history of Non-Euclidean Geometry. Chapter 12 gives basics on plane projective Geometry (over the reals), while chapter 13, titled (due to Arthur Cayley) "Projective Geometry Is All Geometry" points out Euclidean, hyperbolic and elliptic plane geometry

as subgeometries. Remaining chapters are on finite geometries, the hierarchy of geometries and morphisms of geometries. Two appendices cover excerpts of Euclid's "Elements" and Hilbert's Axioms for Plane Geometry.

The well illustrated book contains many problems with hints for nearly all of them. It can be recommended not only for a first year course but for self-study, too.

F. Manhart (Wien)

K. Strehmel, R. Weiner, H. Podhaisky: Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen. Nichtsteife, steife und differentialalgebraische Gleichungen. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. Springer, Spektrum, Heidelberg, 2012, xi+505 S. ISBN 978-3-8348-1847-8 P/b € 39,95.

Dies ist eine überarbeitete Version des bekannten Buchs von K. Strehmel und R. Weiner über Diskretisierungsverfahren für Anfangswertprobleme. In der Neuauflage sind neuere Entwicklungen berücksichtigt, insbesondere exponentielle Integratoren und sogenannte Peer-Methoden (ein Arbeitsgebiet der Autoren). Differentialalgebraische Gleichungen werden ebenfalls behandelt. Damit liegt wiederum ein ausführliches Standardwerk vor, das für die Lehre und für Anwender gleichermaßen geeignet ist. Insbesondere eignet es sich als begleitender Text zu einer einschlägigen Vorlesung, die nicht so ausführlich gestaltet sein kann wie ein Text mit 500 Seiten.

Zwei Beobachtungen zum Kapitel über steife Anfangswertprobleme: Im Abschnitt über linear-implizite Verfahren werden auch Krylov-Lösungsverfahren beschrieben. Es wird auch auf die (inzwischen „klassische“) Theorie der B-Konvergenz eingegangen; eine kritische Diskussion betreffend deren Geltungsbereich fehlt jedoch.

Das Buch ist sehr übersichtlich gegliedert. Der Schwerpunkt liegt auf der Herleitung, Beschreibung und Analyse der betrachteten Verfahren, es wird jedoch auch deren praktische Implementierung diskutiert, und vieles wird durch numerische Beispiele illustriert.

Leider fehlt ein Kapitel zum Thema geometrische Integratoren.

W. Auzinger (Wien)

A.-S. Sznitman: Topics in Occupation Times and Gaussian Free Fields. (Zurich Lectures in Advanced Mathematics) EMS, Zürich, 2012, vii+114 S. ISBN 978-3-03719-109-5 P/b € 28,-.

The present volume gives an introduction to the fascinating relationship between occupation times of (killed) random walks, Gaussian free fields and loop measures. The main goal are various isomorphism theorems between local times of random walks and the occupation field of Poisson point measures on loops and

the Gaussian free field respectively. It concludes with a short overview about the relation with random interlacements.

The volume contains full and extensive proofs of all the results discussed. This renders it particularly useful to everybody looking to understand the techniques used. Particular highlights for the random walks are the Feynman-Kac formula and the Ray-Knight isomorphism theorems. Ample space is given to the setup of rooted, pointed and unrooted loops and the measure-theoretic and definitional details involved. Measures on loops, including restriction properties, lay the basis for a Poisson point process on unrooted loops. Finally, Symanzik's representation formula relates the occupation field of the resulting loop soup to even moments of the Gaussian free field, including a short introduction to Feynman diagrams.

C. Temmel (Amsterdam)

G. G. Szpiro: Die Keplersche Vermutung. Wie Mathematiker ein 400 Jahre altes Rätsel lösten. Aus dem Englischen von M. Stern. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, xii+323 S. ISBN 978-3-642-12740-3 H/b € 29,95.

Der Autor beginnt mit einer Beschreibung der ursprünglichen historischen Problemstellung, die auf Sir Walter Raleigh zurückgeht (optimale Lagerung von Kanonenkugeln). In der anschließenden detaillierten Behandlung des Problems geht er insbesondere auch auf die Biografien Johannes Keplers und Tycho Brahes ein – mit einigen kritischen, manchmal sogar zynischen Randbemerkungen. Auch in den folgenden Kapiteln werden neben den mathematischen Betrachtungen immer wieder biografische Anmerkungen zu den jeweiligen Akteuren gemacht (Dürer, Newton, Lagrange, Gauß, Hilbert, Fejes Tóth, van der Waerden, Dantzig, v. Neumann, ...). Neben den Lagerungen werden auch ähnliche Problemstellungen (Honigwaben, „Kussproblem“, ...) sowie die duale Frage der Überdeckungen thematisiert. An einigen Stellen versucht der Autor, den Leserinnen und Lesern einen Einblick in die mathematische Forschung zu geben (Preprints, Begutachtungsverfahren, Ansehen einer mathematischen Zeitschrift, ...), wobei er allzu menschliche Schwächen in schonungsloser Offenheit beschreibt. (Etwa Seite 163: „In den akademischen Elfenbeintürmen sind boshafte Gefechte nicht ungewöhnlich.“)

Der Haupttext des Buchs beschreibt die verschiedenen Beweisideen weitgehend nur verbal und anhand anschaulicher Einkleidungen. Passagen, die etwas mehr Mathematik verlangen (aber immer noch ausschließlich auf Schulniveau), sind in einer anderen Schriftart gesetzt und können überblättert werden. Langwierigere Überlegungen und Rechnungen wurden in den Anhang verschoben. Die Lektüre dieses Buchs ist in vielerlei Hinsicht interessant und anregend und kann auch Schülern und mathematischen Laien empfohlen werden. Etwas seltsam mutet allerdings an, dass dieses Buch – die deutschsprachige Erstauflage erschien 2011 – noch in der alten Rechtschreibung verfasst ist.

M. Kronfellner (Wien)

T. Tao: Higher Order Fourier Analysis. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 142.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012, x+187 S. ISBN 978-0-8218-8986-2 H/b \$ 54,–.

Während die normale (lineare) Fourieranalysis auf den Basisfunktionen $e^{2\pi i n \alpha}$ (mit $n \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{R}$) aufbaut, wird in diesem Buch Fourieranalysis, die z.B. auf den quadratischen Basisfunktionen $e^{2\pi i n^2 \alpha}$ beruht, entwickelt.

Die Motivation hierzu kommt aus den Untersuchungen zu dem Satz von Szemerédi über die Existenz beliebig langer arithmetischer Progression in einer dichten Menge ganzer Zahlen. Während für den Fall von arithmetischen Progressionen der Länge 3 (Satz von Roth) die lineare Fourieranalysis ausreicht, liefert die nichtlineare Fourieranalysis für Progressionen der Länge 4 oder größer wichtige Beiträge.

Dieses Buch ist eine sehr gute Vorbereitung zu den zahlreichen Originalarbeiten (wie z.B. von Gowers, Green, Host, Kra und Tao) zu tiefliegenden Ergebnissen, die häufig Methoden aus mehreren Gebieten verknüpfen (wie z.B. Fourieranalysis, Ergodentheorie, analytische Zahlentheorie und Kombinatorik). Der Autor versteht es sehr gut, die Ideen herauszuarbeiten und so den Leser schrittweise zu dem weiter fortgeschrittenen Material zu führen.

Dieser Band ist aus einer Graduiertenvorlesung entstanden und enthält Übungsaufgaben. Zusätzlich hat der Autor die Vorlesungen parallel auf seinen Blog gestellt und hat auf diese Weise bereits zahlreiche Rückmeldungen von Lesern erhalten und in den Text einbauen können.

C. Elsholtz (Graz)

M. Ulbrich, S. Ulbrich: Nichtlineare Optimierung. (Mathematik Kompakt). Birkhäuser, Basel, 2012, viii+148 S. ISBN 978-3-0346-0142-9 P/b € 18,90.

Das vorliegende Buch bietet auf knapp 150 Seiten eine sehr gelungene Einführung in das Gebiet der endlichdimensionalen stetigen Optimierung.

Die Gliederung in unrestringierte und restringierte Optimierung ist naheliegend. Im etwas umfangreicheren ersten Teil werden dabei zunächst Gradientenverfahren und dann Verfahren zweiter Ordnung auf ihre Konvergenzeigenschaften theoretisch analysiert. Dabei ist es auch notwendig, geeignete Schrittweitenregeln zu wählen, um Konvergenz zu gewährleisten. Weiters werden Quasi-Newton-Verfahren und *trust region*-Verfahren, die sich vor allem bei großen Problemen als sehr effizient erweisen, mit ihren wesentlichen Eigenschaften diskutiert. Dieser Aufbau ist Standard und liegt den meisten Texten über unrestringierte Optimierung zugrunde. Die Autoren unterlegen die Theorie mit sorgfältig ausgewählten Beispielen und Aufgaben und verzichten auch nicht auf Beweise, selbst bei komplexeren Resultaten.

Im zweiten Teil (restringierte Optimierung) werden zunächst Optimalitätsbedingungen (Karush-Kuhn-Tucker-Theorie) aus der Lagrangefunktion hergeleitet.

Weiters wird kurz auf starke Dualität und Sattelpunkte der Lagrangefunktion eingegangen. Aus algorithmischer Sicht werden als erstes Strafverfahren, und dann sehr ausführlich das SQP-Verfahren (Sequential Quadratic Programming) erklärt. Innere-Punkte-Verfahren bilden den Abschluss des Buches.

Das Buch ist bestens geeignet als Basis für eine einführende Lehrveranstaltung über nichtlineare Optimierung, wie sie in mathematischen Bachelor-Studien angeboten wird.

F. Rendl (Klagenfurt)

J. Ziegenbalg, O. Ziegenbalg, B. Ziegenbalg: Algorithmen. Von Hammurapi bis Gödel. Mit Beispielen aus den Computeralgebrasystemen Mathematica und Maxima. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2010, 349 S. ISBN 978-3-8171-1864-9 P/b € 22,80.

Die vorliegende dritte Auflage dieses Buchs unterscheidet sich von der ersten (erschienen 1996 bei Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg) vor allem dadurch, dass die Algorithmen durchgängig in der Sprache der Computeralgebrasysteme Mathematica und Maxima dargestellt werden (und nicht mehr in Programmiersprachen wie Pascal). Die Autoren gehen davon aus, dass „Algorithmen im Zentrum unserer Wissenschafts- und Kulturgeschichte stehen“ und heben die Rolle des Computers als „Werkzeug für das algorithmische Arbeiten“ hervor.

Im ersten Kapitel des Buchs wird die Bedeutung von Algorithmen im Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe dargestellt. Damit wird auch der Kreis der Leserinnen und Leser, an die sich das Buch vor allem richtet, deutlich: Mathematiklehrerinnen und -lehrer aller Schulstufen und Lehramtsstudierende. Im zweiten Kapitel werden die Begriffe Algorithmus und Informatik diskutiert. Die Autoren werben für mehr algorithmisches Denken im Schulunterricht. Zum Beispiel wird im Abschnitt über den Euklidischen Algorithmus zu Recht bedauert, dass die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen in den meisten Schulen noch immer mit dem äußerst ineffizienten Verfahren der Primfaktorzerlegung erfolgt. Im dritten Kapitel des Buchs werden historische Bezüge hergestellt. Man erfährt zum Beispiel, dass sich das heute übliche Rechnen mit Zahlen in Zifferndarstellung im 15. und 16. Jahrhundert nur sehr langsam gegen den starken Widerstand der Vertreter des Rechnens am Abakus durchgesetzt hat. Offenbar hat man auch damals schon das Gewohnte nicht gern durch etwas Besseres ersetzen lassen!

Im Kapitel 4 werden Strategien des algorithmischen Problemlösens vorgestellt, im Kapitel 5 die Effizienz von Algorithmen besprochen und im Kapitel 8 die Programmierung. Die kürzeren Kapitel 6 und 7 gehen auf die Korrektheit von Algorithmen und auf die Grenzen der Algorithmisierbarkeit ein. Den Abschluss des Buchs bildet ein Kapitel über evolutionäre Algorithmen und neuronale Netze.

Das Buch spannt thematisch einen sehr weiten Bogen, betrachtet den historischen

Kontext der Themen und spricht auch philosophische Fragen an. Es ist klar, dass das an manchen Stellen auf Kosten der Tiefe gehen muss. Das Buch kann ohne viel Vorwissen gelesen werden und enthält zahlreiche interessante Beispiele sowie ausgearbeitete Programme in Mathematica und Maxima.

F. Pauer (Innsbruck)

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

V. S. Varadarajan (Managing Editor), Paul Balmer, Don Blasius, Vyjayanthi Chari, Daryl Cooper, Robert Finn, Kefeng Liu, Jiang-Hua Lu, Sorin Popa, Jie Qing, Paul Yang.

The Journal is published 12 times a year. The subscription price is \$ 535,00 per year for print and \$ 410,00 for electronic-only.

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
AT THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY, CA 94720-3840

INDIANA UNIVERSITY MATHEMATICS JOURNAL (Formerly the Journal of Mathematics and Mechanics)

Edited by

E. Bedford, H. Bercovici, D. Fisher, C. Judge, M. Larsen, K. Pilgrim, P. Sternberg, V. Turaev, K. Zumbrun.

For institutions, the print and online subscription rates are \$460.00 and \$365.00. Individual subscribers' fees are \$150.00 and \$50.00, respectively. The JOURNAL appears in 6 annual issues averaging more than 500 pages each.

Indiana University, Bloomington, Indiana U.S.A

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Persönliches

Jean-Pierre Bourguignon, the 2nd president of the European Mathematical Society (1995-98), will be the next president of the European Research Council (ERC). Professor Bourguignon was nominated for this position by the EMS to a search committee set up by the European Commission.

Laszlo Lovasz (Eötvös Loránd University Budapest) and Karl Sigmund (University of Vienna) have been appointed members of the Physical, Chemical and Mathematical Sciences Committee of Science Europe, the new association of European Research Funding and Research Performing Organizations. More information can be found at <http://www.scienceeurope.org/>

(EMS)

Heinz Engl (Univ. Wien) wurde in die Academia Europaea gewählt.

(Michael Drmota)

Protokoll der Generalversammlung der ÖMG am 24.9.2013, Univ. Innsbruck

Tagesordnung:

1. Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit
2. Berichte des Vorsitzenden und weiterer Vorstandsmitglieder, insbesondere des Kassiers
3. Berichte aus den Landessektionen
4. Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands
5. Neuwahl des Vorstands
6. Verleihung des Förderungspreises und der Studienpreise
7. Allfälliges

Anwesend: M. Drmota (Vorsitz), P. Hellekalek, H. Humenberger, B. Kaltenbacher, G. Kirchner, P. Kirschenhofer, C. Krattenthaler, G. Larcher, M. Oberguggenberger, A. Ostermann, G. Schranz-Kirlinger, G. Teschl, J. Wallner, W. Woess sowie 25 weitere Mitglieder. Beginn der Sitzung: 18:30 Uhr.

TOP 1: Der Vorsitzende begrüßt die Anwesenden, stellt die Beschlussfähigkeit fest und beantragt folgende Änderungen der Tagesordnung: (a) TOP 5 wird ergänzt zu: „Neuwahl des Vorstands und der Rechnungsprüfer“. (b) TOP 7 wird in TOP 8 umbenannt und die Tagesordnung wird um einen neuen TOP 7 erweitert: „Bestätigung des Vorschlags für die Neubesetzung der Didaktikkommission“. Dem Antrag wird einstimmig zugestimmt.

TOP 2: Bericht des Vorsitzenden M. Drmota:

- Der Vorsitzende dankt den Organisatoren der derzeit laufenden Jahrestagung in Innsbruck für die perfekte Organisation.
- Der Vorsitzende dankt dem Vorstand, den Landesvorsitzenden und den Kommissionen für die sehr erfolgreiche Zusammenarbeit der letzten vier Jahre.
- Die nächste „kleine“ Tagung der ÖMG findet 2015 in Győr (gemeinsam mit ungarischer Beteiligung) statt; die nächste gemeinsame Tagung mit der DMV wird in vier Jahren in Salzburg abgehalten (25.–29. September 2017).
- Im vergangenen Jahr wurden zwei Reziprozitätsabkommen abgeschlossen, und zwar eines mit der Slowenischen Mathematischen Gesellschaft und das zweite mit der Schweizer Mathematischen Gesellschaft. Beide Abkommen sind ab 1.1.2013 in Kraft.
- Der Vorsitzende weist auf den Code of Practice der EMS hin, dem sich die ÖMG auch verpflichtet fühlt. Der Text befindet sich (als pdf-Datei) auf der Homepage der ÖMG.
- Der Vorsitzende berichtet, dass sich die ÖMG aktiv an der *open access*-Diskussion beteiligt und *green open access* favorisiert. In diesem Zusammenhang wird auf den Artikel von Krattenthaler verwiesen, der u.a. vom FWF sehr beachtet wurde (insbesondere gibt es eine Replik). Positiv ist zu vermerken, dass *green open access* sowohl vom ERC als auch vom FWF mit *golden open access* gleichgestellt wird und das *arXiv* ausdrücklich als Repositorium erwähnt wird.
- Die TU Wien hat ihre Abonnements von Austauschzeitschriften der ÖMG storniert, auf Initiative von W. Woess werden in Zukunft einige der Zeitschriften an die Universität Graz verkauft.
- Die Redaktion des Mathe-Briefs hatte einen personellen Abgang und sucht zwei zusätzliche Mitarbeiter und Mitarbeiterinnen.
- Mit Stand 2013 hat die Gesellschaft 592 persönliche, 7 von der Gebühr befreite und 22 institutionelle Mitglieder. Im vergangenen Jahr gab es 16 Neueintritte und 16 Abgänge. Außerdem wurden 32 Mitglieder gestrichen, welche die letzten drei Jahre keinen Mitgliedsbeitrag gezahlt hatten. Der Vorsitzende berichtet von drei Todesfällen im vergangenen Jahr: Egbert Harzheim, verstorben am 6.12.2012; Paul Otto Runck, verstorben am 13.3.2013; Josef Schmid, verstorben am 27.6.2013. Die Anwesenden erheben sich zum Gedenken.

Bericht des Herausgebers der IMN: Die IMN haben einige Artikel in Planung, es gibt seit Längerem erstmals einen kleinen Rückstau.

Bericht des Kassiers: Das Vermögen der ÖMG befindet sich auf einem historischen Höchststand. Die Einnahmen durch Mitgliedsbeiträge sind im vergangenen Jahr stark gestiegen. Das ist einerseits auf die (kleine) Erhöhung des Mitgliedsbeitrags und andererseits auf die erfolgreiche Einmahlung von Ausständen zurückzuführen.

TOP 3: Berichte der Landessektionen: Die Sektion Salzburg berichtet über eine Verjüngung des Instituts (Berufungen und Stellenausschreibungen); die Sektion Steiermark über finanzielle Unterstützung von wissenschaftlichen Veranstaltungen durch die Gesellschaft. In Linz wurde die Projektwoche „Angewandte Mathematik“ finanziell unterstützt; außerdem sind Stellen in Ausschreibung. Die Mathematik der Universität Wien ist übersiedelt; im kommenden Sommersemester wird es einen Schwerpunkt mit dem Institut Français geben (5 Fachvorträge sowie eine Ausstellung von Beutelspacher.)

Berichte aus der Didaktikkommission: Der Vorsitzende berichtet von den Lehrerfortbildungstagen zu Ostern. Bei den Gesprächen zur „Lehrerbildung Neu“ ist wieder von einem einheitlichen Programm für die Sekundarstufe die Rede. Die geplanten Personalwechsel in der Kommission werden unter TOP 5 besprochen.

TOP 4: Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands: Beide anwesenden Rechnungsprüfer haben unabhängig die Finanzen überprüft und bestätigen, dass alles in bester Ordnung ist. H. G. Feichtinger stellt den Antrag auf Entlastung des Kassiers und des Vorstands für das Vereinsjahr 2012. Der Antrag wird einstimmig angenommen.

TOP 5: Neuwahl des Vorstands und der Rechnungsprüfer: Der Vorsitzende berichtet, dass folgender Vorschlag für den neuen Vorstand erarbeitet wurde:

- Vorsitzender: Michael Oberguggenberger (Univ. Innsbruck)
- Stellvertreterin: Barbara Kaltenbacher (Univ. Klagenfurt)
- Herausgeber der IMN: Johannes Wallner (TU Graz)
- Kassier: Alexander Ostermann (Univ. Innsbruck)
- Stellvertreter: Bernhard Lamel (Univ. Wien)
- Schriftführer: Clemens Fuchs (Univ. Salzburg)
- Stellvertreterin: Gabriela Schranz-Kirlinger (TU Wien)
- Beauftragte für Frauenförderung: Evelyn Burkwar (Univ. Linz)
- Beauftragter für Öffentlichkeitsarbeit: Gerald Teschl (Univ. Wien)

Die genannten Personen sind im Falle einer Wahl bereit, das jeweilige Amt zu übernehmen. M. Oberguggenberger und B. Kaltenbacher verlassen den Saal. Die anschließende geheime Wahl ergibt 37 Stimmen für Oberguggenberger (keine Enthaltung, keine Gegenstimme). Damit ist Oberguggenberger einstimmig als Vorsitzender gewählt. Der Wahl des restlichen Vorstands erfolgt per Akklamation ebenfalls einstimmig.

M. Oberguggenberger bedankt sich für das Vertrauen. Gleichzeitig dankt er den

ausscheidenden Vorstandsmitgliedern Drmota, Kirschenhofer und Larcher für deren großen Einsatz für die Gesellschaft. M. Drmota berichtet, dass die bisherigen Kassaprüfer bereit wären, das Amt eine weitere Periode auszuüben. Die Rechnungsprüfer für 2014–2015 (H. G. Feichtinger und P. Szmolyan) werden ebenfalls einstimmig gewählt.

TOP 6: Verleihung des Förderungspreises und der Studienpreise: Der Förderungspreis 2013 der Gesellschaft wird Franz Schuster (TU Wien) zuerkannt. Die Laudatio hält Reinhard Winkler. Die ÖMG vergibt 2013 weiters zwei Studienpreise für Dissertationen. Die Preisträger sind Manuel Weberndorfer (TU Wien) und Daniel Krenn (TU Graz). Die Laudatio hält der Vorsitzende der Preiskommission, Clemens Fuchs.

TOP 7: Bestätigung des Vorschlags für die Neubesetzung der Didaktikkommission. In der Didaktikkommission scheiden Robert Müller und Ingrid Guggenberger aus. Der Vorsitzende Humenberger beantragt, diese beiden Abgänge durch Thomas Müller und Klaudia Singer nachzubersetzen. Dem Antrag wird per Akklamation zugestimmt.

TOP 8. Allfälliges: Keine Wortmeldung. Ende der Sitzung: 20 Uhr

Vorsitzender: M. Drmota

Schriftführung: A. Ostermann

Laudatio für den Gewinner des Förderungspreises (Franz Schuster)

Franz Schuster wurde am 4. August 1978 geboren und wuchs in St. Margarethen im Burgenland auf. Er besuchte das Realgymnasium und danach die Handelsakademie in Eisenstadt. Nach seinem Wehrdienst studierte er von 1998 bis 2003 Technische Mathematik an der TU Wien. Während seiner Dissertationszeit 2003 bis 2005 war er in meinem FWF-Projekt *Affin-assoziierte Körper* Projektassistent und im Rahmen des EU Marie Curie Research and Training Networks *Phenomena in High Dimensions* ein halbes Jahr Gastwissenschaftler an der Universität Florenz.

Seine Dissertation mit dem Titel *Convolutions and multiplier transformations of convex bodies* schloss Franz Schuster 2005 ab. Danach arbeitete Franz Schuster im Rahmen von *Phenomena in High Dimensions* ein halbes Jahr als Gastwissenschaftler an der Universität Freiburg. Wieder nach Wien zurückgekehrt, war er Projektassistent im Rahmen meines FWF-Projekts *Bewertungen auf konvexen Körpern* und von 2009 bis 2012 Universitätsassistent am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der TU Wien.

Franz Schuster habilitierte sich 2010 an der TU Wien und wurde im gleichen Jahr mit dem Hlawka-Preis der Österreichischen Akademie der Wissenschaften ausgezeichnet. Von 2010 bis 2013 leitete Franz Schuster das FWF-Projekt *Minkowski-Bewertungen und geometrische Ungleichungen*. Im Rahmen dieses Projekts

betreute er die Dissertationen von Thomas Wannerer und Manuel Weberndorfer. Das Sommersemester 2012 verbrachte Franz Schuster als Gastprofessor am Polytechnic Institute of New York University. Im Jahr 2012 erhielt er einen ERC Starting Grant für sein Projekt *Isoperimetric inequalities and integral geometry*. Diesem Projekt wurde auch der START-Preis des FWF zuerkannt. Seit April 2013 ist Franz Schuster Professor für Geometrische Analysis an der TU Wien.

Franz Schuster hat in den letzten Jahren bedeutende Beiträge zur Konvexgeometrie und geometrischen Analysis geleistet. Dabei ist ein Schwerpunkt seiner Arbeit die Theorie der Bewertungen oder additiven Funktionen auf konvexen Körpern, also von Funktionen Φ , die auf $\mathcal{K}^n$, dem Raum der kompakten, konvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$, definiert sind und für die gilt

$$\Phi(K \cup L) + \Phi(K \cap L) = \Phi(K) + \Phi(L),$$

wenn $K, L, K \cup L \in \mathcal{K}^n$.

Bewertungen sind seit Max Dehns Lösung des dritten Hilbertschen Problems im Jahr 1901 ein wichtiges Thema in der Geometrie. Ein Meilenstein war hier Hadwigers berühmter Funktionalatz im Jahr 1952, demzufolge die einzigen bewegungs-invarianten, stetigen additiven Funktionale auf dem Raum der konvexen Körper im $\mathbb{R}^n$ die Linearkombinationen der inneren Volumina (Quermaßintegrale) sind. In den letzten Jahren haben Minkowski-Bewertungen großes Interesse auf sich gezogen, das sind Funktionen, die konvexen Körpern wiederum konvexe Körper zuordnen und die Bewertungen in Bezug auf die Minkowski-Addition sind. Erste Ergebnisse für Minkowski-Bewertungen haben sich mit $SL(n)$ verträglichen Funktionen beschäftigt. Das wichtigste Beispiel ist hier durch den klassischen Projektionenkörper gegeben.

Beginnend mit seiner Dissertation 2005, erreichte Franz Schuster in mehreren Arbeiten grundlegende Resultate zur Klassifizierung von $SO(n)$ kovarianten Minkowski-Bewertungen. Dies steht natürlich in der Tradition des Hadwigerschen Funktionalatzes, stellt sich jedoch als wesentlich schwieriger heraus. In seiner Arbeit *Crofton measures and Minkowski valuations* (Duke Mathematical Journal 2010) gelingt es Franz Schuster, die Stützfunktionen von $SO(n)$ -kovarianten Minkowski-Bewertungen zu beschreiben und zu zeigen, dass sie sich als Faltung mit den sogenannten Crofton-Maßen μ_i darstellen lassen:

$$h(\Phi K, \cdot) = c_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \text{vol}_i(K|\cdot) * \mu_i + c_n V(K),$$

wobei $h(L, \cdot)$ die Stützfunktion von L bezeichnet, das n -dimensionale Volumen mit V bezeichnet wird und $\text{vol}_i(K|\cdot)$ das i -dimensionale Volumen der Projektion von K auf einen i -dimensionalen Unterraum ist.

Franz Schuster ist es auch gelungen, für Minkowski-Bewertungen isoperimetrische Ungleichungen herzuleiten. Die ersten Resultate dieser Art sind schon in

seiner Dissertation enthalten. Viel stärkere Resultate erzielte er in der Arbeit *Valuations and Busemann-Petty type problems* (Advances in Mathematics 2008). Hier beweist er Sätze in der Tradition von Busemann und Petty für eine ganze Klasse von Minkowski-Bewertungen. Vor Kurzem gelang es Franz Schuster in Zusammenarbeit mit Semyon Alesker (Tel Aviv University) und Andreas Bernig (Universität Frankfurt), in der Arbeit *Harmonic analysis of translation invariant valuations* (Geometric and Functional Analysis 2011) grundlegende Ergebnisse zur Zerlegung des Raums der translationsinvarianten Bewertungen in irreduzible $SO(n)$ invariante Unterräume zu erzielen. Konsequenzen aus dieser Darstellung sind eine Klassifizierung von $SO(n)$ -kovarianten Tensorbewertungen und neue isoperimetrische Ungleichungen für Minkowski-Bewertungen.

Franz Schuster beschäftigte sich auch mit vielen weiteren Fragen. Das reicht von seiner gemeinsamen Arbeit mit Peter M. Gruber über Ellipsoide, die aus Franz Schusters Diplomarbeit hervorgegangen ist, über seine Arbeiten mit Rolf Schneider über Minkowski-Klassen und mit Gabriel Maresch über isotrope Maße, zu seinen Arbeiten mit seinem Dissertanten Thomas Wannerer über $GL(n)$ kontravariante Minkowski-Bewertungen und seinem Dissertanten Manuel Weberndorfer über Brascamp-Lieb-Ungleichungen.

Seine sehr erfolgreiche Zusammenarbeit mit Christoph Haberl sei besonders hervorgehoben. Haberl und Schuster ist es gelungen, die L_p -Petty-Projektionenungleichung von Erwin Lutwak, Deane Yang und Gaoyong Zhang aus dem Jahr 2000 wesentlich zu verschärfen. Diese gemeinsame Arbeit *General L_p affine isoperimetric inequalities* erschien 2009 im Journal of Differential Geometry und ist die Grundlage für zwei weitere gemeinsame Arbeiten. Einerseits wird in *Asymmetric affine L_p Sobolev inequalities* die L_p affine Sobolev-Ungleichung von Lutwak, Yang und Zhang verschärft; insbesondere ist dieses Resultat essentiell stärker als die L_p -Sobolev-Ungleichung von Aubin und Talenti. Andererseits ist in Kooperation mit Jie Xiao (University of Newfoundland) die Arbeit *An Asymmetric Affine Polyá-Szegő Principle* entstanden. Diese Arbeit enthält Verschärfungen der Resultate von Cianchi, Lutwak, Yang und Zhang über affine Sobolev-Ungleichungen. Speziell werden in dieser Arbeit verschärfte Versionen der affinen Moser-Trudinger- und der affinen Morrey-Sobolev-Ungleichungen sowie eine affine logarithmische Sobolev-Ungleichung bewiesen.

Franz Schuster hat im letzten Jahr eine große Arbeitsgruppe aufgebaut. Inzwischen hat auch Lukas Parapatits seine Dissertation bei Franz Schuster abgeschlossen und Florian Besau und Astrid Berg werden bald folgen. Franz Schuster ist ein effizienter Organisator und er scheint es zu genießen, große Projekte durchzuführen. Es freut mich sehr, dass seine Arbeit mit dem Förderungspreis der ÖMG ausgezeichnet wurde, und ich wünsche ihm weiterhin viel Erfolg und viele schöne mathematische Resultate.

(M. Ludwig)

Ausschreibung der Preise der ÖMG

Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2014

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2014 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematiker oder Mathematikerinnen, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind und welche einen wesentlichen Teil ihrer Arbeiten in Österreich erbracht haben. Dabei soll die Promotion mindestens zwei bis maximal zehn Jahre zurückliegen (Überschreitungen sind möglich bei Kindererziehungszeiten und bei nachweislichen Präsenz- oder Zivildienstzeiten).

Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten habilitierten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen. Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2014 beim Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung; 2. Publikationsliste; 3. Wissenschaftlicher Lebenslauf.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine Begutachungskommission den Preisträger oder die Preisträgerin aus. Der Preis ist mit 1.000 € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird der Preisträger oder die Preisträgerin eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er oder sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Michael Oberguggenberger, Universität Innsbruck, Technikerstraße 13, 6020 Innsbruck

Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2014

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2014 wieder zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2012 oder 2013 eine Diplom- oder Masterarbeit bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Diplomarbeiten ist ein Abschluss eines Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Doktoratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlos-

senen Master- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2014 beim Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Ein Exemplar der als besonders hochqualifiziert bewerteten mathematischen Diplomarbeit bzw. Dissertation; 2. Zwei begründete Bewertungen dieser Diplomarbeit bzw. Dissertation; 3. Einen Lebenslauf des Kandidaten bzw. der Kandidatin einschließlich kurzer Beschreibung des Studienablaufs.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachungskommission die Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500 € dotiert. Jeder Preisträger erhält eine Urkunde. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er bzw. sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Michael Oberguggenberger, Universität Innsbruck, Technikerstraße 13, 6020 Innsbruck

Ausschreibung der Schülerinnen- und Schülerpreise der ÖMG

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft zeichnet herausragende Fachbereichsarbeiten in Mathematik oder Darstellender Geometrie an österreichischen Schulen mit Preisen aus. Diese Arbeiten müssen bis 15. März 2014 in der ÖMG (Adresse siehe unten) einlangen und werden von einer Jury begutachtet.

Die Verfasserinnen und Verfasser jener Arbeiten, die im Zuge dieser Begutachtung in die engere Wahl kommen, werden zu einem Kurzvortrag eingeladen, in dem sie ihre Arbeit präsentieren. Anschließend erfolgt die Preisverleihung. Diese Veranstaltung, zu der auch die betreuenden Lehrerinnen und Lehrer eingeladen sind, findet im Rahmen der traditionellen ÖMG-Lehrerfortbildungsveranstaltung am Freitag nach Ostern 2014 (25. April) an der Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Oskar-Morgenstern-Platz 1, statt.

Die ÖMG bittet alle ihre Mitglieder und die Leserinnen und Leser der *IMN*, potentielle Interessenten von dieser Einladung zu informieren und Schulen zur Teilnahme zu ermuntern.

Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Michael Drmota, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, 1040 Wien

Neue Mitglieder

Roland Donninger, Dr. – Ecole Polytechnique Federale, Station 8, CH-1014 Lausanne. geb. 1977. Doktorat an der Univ. Wien 2007, anschließend Postdoc an der Univ. Wien (–2008), Univ. Chicago (2009–2010) und EPFL (seit 2011). email roland.donninger@epfl.ch.

Gregor Ehrensperger, B.Sc. – Karl Schönherr-Str. 28, 6094 Axams. geb. 1986. Student der Mathematik an der Univ. Innsbruck. email gregor.ehrensperger@student.uibk.ac.at

Marlene Koch – Smolekstr. 91, 2401 Fischamend. geb. 1995. Studentin an der Technischen Universität Wien. email leni.koch@aon.at.

Gertrud Konrad, Dr. – TU Wien, Atominstitut, Stadionallee 2, 1020 Wien. geb. 1977. 2012 Doktorat in Experimentalphysik an der Univ. Mainz, seit diesem Zeitpunkt Universitätsassistentin am Atominstitut der TU Wien. email gkonrad@ati.ac.at, <http://gertrudemiliekonrad.weebly.com>.

Daniel Krenn, Dr. – TU Graz, Institut f. Optimierung und Diskrete Mathematik, Steyrerg. 30, 8010 Graz. geb. 1982. Studium und Doktorat in Technischer Mathematik an der TU Graz, derzeit Universitätsassistent an der TU Graz. 2013 Studienpreis der Österr. Math. Gesellschaft. email krenn@math.tugraz.at, <http://www.danielkrenn.at>.

Christian Kühn, Ph.D. – TU Wien, Institut 101, Wiedner Hauptstr. 8–10/101, 1040 Wien. geb. 1981. 2005 Bachelorstudium an der Jacobs University Bremen, 2008 Abschluss des Master und 2010 des Doktoratsstudiums an der Cornell University. 2010–2011 Postdoc am Max Planck-Institut in Dresden, seit 2011 TU Wien. email ck274@cornell.edu, <http://www.ax.tuwien.ac.at/~ckuehn>.

Georg Maierhofer – Hochschloss-Str. 42, 8665 Langenwang. geb. 1995. Student an der Univ. Cambridge. email georg@dr-maierhofer.at, <http://georg.dr-maierhofer.at>.

Nicole Radda, Mag. – Bessemerstr. 3/2/20, 1210 Wien. geb. 1988. seit 2011 Lehrerin für Mathematik und Geschichte am BRG 22 (Bernoulli) in Wien. email nicole.radda@gmx.at.

Franz Schuster, Univ.-Prof. Dr. – TU Wien, Institut f. Diskrete Mathematik und Geometrie, Wiedner Hauptstr. 8-10/104, 1040 Wien. geb. 1978. 2005 Abschluss des Doktoratsstudiums, 2006–2009 Mitarbeiter in FWF-Projekten an der TU Wien, 2009–2012 Universitätsassistent an der TU Wien, seit April 2013 Univ.-Prof. für Geometrische Analysis an der TU Wien. email *franz.schuster@tuwien.ac.at*, <http://dmg.tuwien.ac.at/schuster>.

Manuel Weberndorfer, Dr. – TU Wien, Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, Wiedner Hauptstr. 8–10/104, 1040 Wien. geb. 1986. 2010–2013 Forschungsassistent an der TU Wien, 2012 Abschluss des Doktoratsstudiums der Technischen Mathematik. Seit 2013 Universitätsassistent an der TU Wien. 2013 Studienpreis der Österr. Math. Gesellschaft. email *manuel.weberndorfer@tuwien.ac.at*, <http://dmg.tuwien.ac.at/fg6/weberndorfer>.