Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

Vorstand des Vereinsjahres 2010:

M. Drmota (TU Wien): Vorsitzender
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Stellvertretender Vorsitzender
J. Wallner (TU Graz):
Herausgeber der IMN
B. Lamel (Univ. Wien): Schriftführer
A. Ostermann (Univ. Unnsbruck):
Stellvertretender Schriftführer
G. Larcher (Univ Linz): Kassier
P. Kirschenhofer (MU Leoben):
Stellvertretender Kassier
G. Schranz-Kirlinger (TU Wien):
Beauftragte für Frauenförderung
G. Teschl (Univ. Wien):
Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
C. Christian (Univ. Wien)
U. Dieter (TU Graz)
H. Engl (Öst. Akad. Wissenschaften)
P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
R. Mlitz (TU Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
L. Reich (Univ. Graz)
N. Rozsenich (Wien)
W. Schachermayer (Univ Wien)
F. Schweiger (Univ. Salzburg)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
H. Strasser (WU Wien)
W. Wurm (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionsvorsitzende gehören statutengemäß dem Beirat an.

Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:

W. Woess (Graz)
G. Kirchner (Innsbruck)
H. Kautschitsch (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
P. Hellekalek (Salzburg)
C. Krattenthaler (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 214 (64. Jahrgang) **August 2010**

Inhalt

Die Titelseite zitiert die Zahlenreihen

1 48 54 01 40	1 05	1 37
1 47 06 41 40	5 19	8 01
1 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01
1 41 33 45 14 03 45	13 19	20 49
1 38 33 36 36	9 01	12 49
1 35 10 02 28 27 24 26	1 22 41	2 16 01

aus der Keilschrifttafel der Sammlung G. A. Plimpton (Inv. Nr. 322), die in der Columbia University aufbewahrt wird. Diese sind als Hexagesimalzahlen zu interpretieren (allerdings ist jedes Keilschriftsymbol für eine hexagesimale Ziffer auf dezimale Weise aus den Zeichen für 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 zusammengesetzt). Die 2. und 3. Spalte enthalten ganze Zahlen a, b mit der Eigenschaft, dass $b^2 - a^2$ ein Quadrat ist; die erste Spalte enthält den Bruch $b^2/(b^2 - a^2)$. In jedem Fall besitzt dieser Bruch eine endliche hexagesimale Entwicklung.

Diese Tafel aus der Zeit von 1900–1600 v.Chr. wird weithin als Beleg für das Wissen der babylonischen Mathematiker um große pythagoreische Tripel angesehen. Man schließt daraus, dass wahrscheinlich bereits in dieser frühen Zeit eine Konstruktionsvorschrift für pythagoreische Tripel vorhanden war.

Die führende Eins in der ersten Spalte ist eine Konjektur, was jedoch nichts an der mathematischen Signifikanz der restlichen Ziffern ändert. Es ist auch ein Fehler wiedergegeben, der sich im Original findet: In der mittleren Spalte sollte in der vorletzten Zeile „8 01“ statt „9 01“ stehen.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 214 (2010), 1–16

Algorithms, random tree models and combinatorial objects

Alois Panholzer
TU Wien

The author thanks the editors of IMN for their invitation to give an overview about his recent research topics. The following paper exemplifies by concrete examples my main research directions, which concern the analysis of algorithms and data structures, random tree models and combinatorial objects.[1]

1 Average-case analysis of Union-Find algorithms

The concept of so-called average case analysis of algorithms and data structures has been introduced by Donald Knuth in his famous book series *The art of computer programming* [11] in the late sixties and early seventies of the last century. It has been popularized and developed further by well known mathematicians and computer scientists as, e.g., Philippe Flajolet, Rainer Kemp, Helmut Prodinger and Robert Sedgewick; together they founded an international conference series dedicated to that topic.

The average case analysis of algorithm deals with questions concerning the average behaviour of cost measures (as, e.g., running time, space requirement, recursion depth) of algorithms and data structures. Contrary to the worst case analysis of algorithms, where the most unfavourable situation for a particular algorithm is analyzed, one is here interested in the "typical" behaviour of it. In practice such an analysis is often of more interest, since it describes in a better way the actual performance when using many executions of the algorithm considered. As an example, the popular Quicksort sorting algorithm (basic implementation) for sorting a data array needs $\sim n^2/2$ comparisons between data elements to sort an array

[1]*Anmerkung des Herausgebes:* Die Österreichische Mathematische Gesellschaft hat Alois Panholzer eingeladen, als Förderungspreisträger 2009 an dieser Stelle einen Überblick über seine Arbeit zu geben.

ISSN 0020-7926

with n entries in the worst case; however, an average case analysis shows that the algorithm only uses $\sim 2n\log n$ comparisons on average (under the so-called random permutation model) and thus that the typical behaviour is much better.

Needless to say that the worst case analysis of an algorithm is also an important cost measure, since, informally speaking, it describes what could happen although, with some luck, such bad situations will not occur often. Moreover, unlike for a description of the worst case behaviour, it is for describing the average case behaviour of an algorithm important to introduce and apply appropriate probabilistic models for the distribution of the input data. Going back to the example of the Quicksort algorithm, e.g., if one already knows that the data array to be sorted consists of partially ordered lists then one cannot expect that an average case analysis of the non-randomized algorithm (using in every recursion step the first element of an array to compare it with each of the other elements) carried out for the "random permutation model" (where one assumes that all $n!$ permutations of $\{1,2,\ldots,n\}$ could be chosen as input array with the same probability) will describe the performance of the algorithm well in this situation.

In a mathematical setting an average case study of a cost measure of a particular algorithm corresponds to an analysis of the distributional behaviour of a sequence of random variables X_n, where n measures the size of the input data (sometimes it is appropriate to introduce random variables depending on further parameters, not only on the input size). Besides the description of the most basic quantity, namely the expected value $\mathbb{E}(X_n)$, one is often interested in a more detailed study of X_n leading to the variance $\mathbb{V}(X_n)$ (and thus to concentration results), results on the behaviour of higher moments, limiting distribution results, estimates on the occurrence of rare events (so-called tail estimates), etc.

Now we turn our attention to a particular problem, for which we will discuss such an average case analysis of an algorithm used in this context. The so-called "Union-Find problem" (see [1]) consists of maintaining a representation of equivalence classes or partitions of a finite set, such that the following two basic operations have to be supported, UNION: "Merge two different equivalence classes s and t into a single equivalence class" and FIND: "Find the equivalence class that contains a given element x." This problem arises naturally in several applications in computer science as, e.g., in minimum-cost spanning tree algorithms (amongst them the popular algorithm of Kruskal) and algorithms for detecting the equivalence of finite automata.

Following [1] the Union-Find problem for partitions $P(S)$ of a finite set S can be treated by introducing the following data structure:

> For every element $x \in S$ we store in $R[x]$ the name of the equivalence class containing x. Furthermore for every equivalence class $s \in P(S)$ we store in $N[s]$ the number of elements of s and in $L[s]$ we store the elements of s in a linked list.

Yao [25] has described basic algorithms for implementing the operation UNION; amongst them the algorithm *Quick Find Weighted* is the most efficient and most popular one:

Quick Find Weighted (QFW). If we want to merge the different equivalence classes s and t then we update the class with less elements:

> If $N[s] \leq N[t]$ then set $R[x] := t$ for all x in $L[s]$, append $L[s]$ to $L[t]$, set $N[t] := N[t] + N[s]$ and call the new equivalence class t, otherwise set $R[x] := s$ for all x in $L[t]$, append $L[t]$ to $L[s]$, set $N[s] := N[s] + N[t]$ and call the new equivalence class s.

The cost of the UNION operation when merging the equivalence classes s and t can be measured by the number of updated elements, i.e., the number of allocations $R[x] := s$ (or $R[x] := t$). For QFW the cost of one merging step is thus given by $\min(N[s], N[t])$, the minimum of the class sizes. When applying this algorithm the FIND operation for an element x, i.e., finding the equivalence class where x is contained, simply consists of evaluating $R[x]$ and can thus be carried out in bounded time; this explains the name *Quick Find*.

In order to measure the average behaviour of the QFW algorithm (and other merging algorithms) various models for sequences of UNION operations have been introduced. We focus here on the so-called *random spanning tree model*. We deal with a set S of size n, where at the beginning all elements $x \in S$ are forming an equivalence class $\{x\}$. These n equivalence classes will then be merged into larger and larger classes by carrying out UNION operations according to the following rules. In this model a spanning tree of the complete graph with vertex set S is chosen at random and then the edges of this spanning tree are randomly ordered, i.e., enumerated from 1 to $n-1$. Let us assume this leads to a sequence of edges $e_1 = (x_1, y_1)$, $e_2 = (x_2, y_2)$, $\dots$, $e_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1})$, with $x_i, y_i \in S$. This gives then the following sequence of UNION operations: $\text{UNION}(R[x_1], R[y_1])$, $\text{UNION}(R[x_2], R[y_2])$, $\dots$, $\text{UNION}(R[x_{n-1}], R[y_{n-1}])$. Thus in this model all $n^{n-2}(n-1)!$ possible sequence of UNION operations of that kind will occur equally likely.

The basic parameter of interest describing the average performance of the algorithm QFW is then the total cost, i.e., the sum of the costs of every merging step, when merging the elements of a set S of size n, where at the beginning all elements are lying in different equivalence classes, into one equivalence class (containing all elements of S) by carrying out a sequence of $n-1$ UNION operations according to the rules given in the random spanning tree model. This parameter, which can be considered as a random variable depending only on the size n of the set S of elements, is denoted by $X_n^{[\text{QFW}]}$. The QFW algorithm under the random spanning tree model is illustrated by an example in Figure 1.

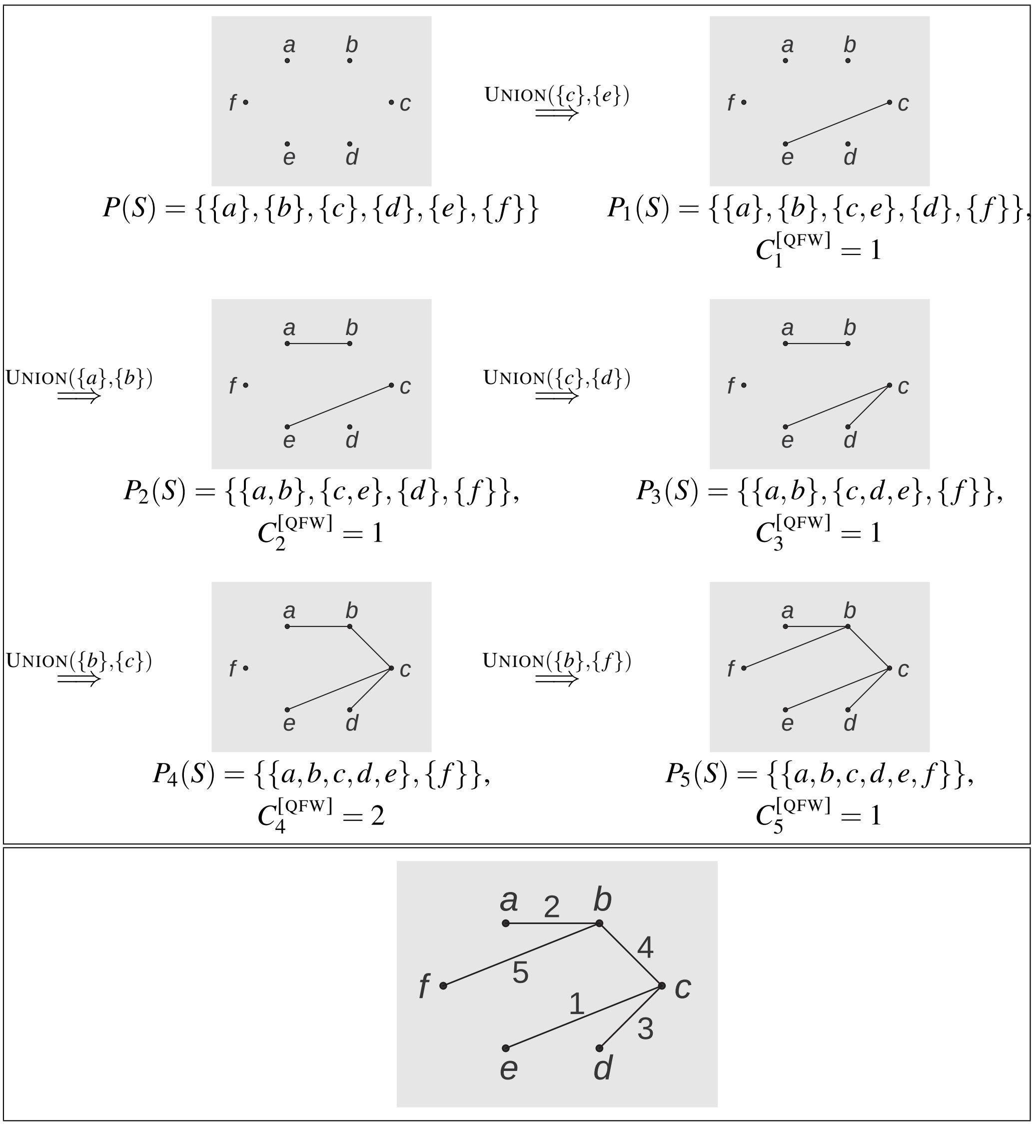


Figure 1: Choosing the particular spanning tree given in the example the QFW algorithm has total cost $X^{[\mathrm{QFW}]} = \sum_{i=1}^{5} C_i^{[\mathrm{QFW}]} = 6$ to merge the elements $S = \{a,b,\ldots,f\}$ starting with the partition $P(S) = \{\{a\},\{b\},\ldots,\{f\}\}$. Here $C_i^{[\mathrm{QFW}]}$ denotes the cost of the i-th merging step of the QFW algorithm.

Under the random spanning tree model the algorithm QFW has been analyzed first by [25] and [12]. Knuth and Schönhage [12] obtained the following asymptotic result for the expected total cost:

$$\mathbb{E}(X_n^{[\mathrm{QFW}]}) = \frac{1}{\pi} n \log n + O(n).$$

Only recently in a collaboration with Markus Kuba [14] further progress in the analysis of $X_n^{[\mathrm{QFW}]}$ has been made. First we showed a concentration result, namely that, after normalization, $X_n^{[\mathrm{QFW}]}$ converges in the $\mathcal{L}_2$ metric to $\frac{1}{\pi}$:

$$\frac{X_n^{[\mathrm{QFW}]}}{n \log n} \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \frac{1}{\pi}.$$

However, the main contribution was a full characterization of the limiting distribution of $X_n^{[\mathrm{QFW}]}$ by its sequence of positive integer moments. We remark that similar results have been obtained earlier by Hwang and Neininger [9] when characterizing the limiting distribution of the number of comparisons used in the Quicksort algorithm to sort a random permutation of length n.

Theorem 1. *Let $X_n^{[\mathrm{QFW}]}$ denote the total cost of the algorithm "Quick Find Weighted" QFW to merge all elements of a finite set S of size n under the random spanning tree model. Then the expected value of $X_n^{[\mathrm{QFW}]}$ has, for $n \to \infty$, the following asymptotic expansion:*

$$\mathbb{E}(X_n^{[\mathrm{QFW}]}) = \frac{1}{\pi} n \log n + Cn + O(n^{\frac{3}{4}}),$$

with a certain constant $C \approx 0.6315$, which is given as follows:

$$C = \frac{\gamma + 2\log 2}{\pi} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \Big[e^{-(n+1)} \Big(R_{n+2} - R_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+2)!} R_{n-k} \Big) - \frac{1}{\pi} \Big],$$

with

$$R_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^k (n-k)^{n-k-1}}{k!(n-k)!} \min(k, n-k).$$

The suitably centered and normalized r.v. $X_n^{[\mathrm{QFW}]}$ converges in distribution to a r.v. X, which can be characterized by its r-th integer moments:

$$\frac{X_n^{[\mathrm{QFW}]} - \frac{1}{\pi} n \log n - Cn}{n} \xrightarrow{(d)} X, \quad \text{with} \quad \mathbb{E}(X^r) = m_r,$$

where m_r is given recursively as follows:

$$m_r = \frac{\Gamma(r-1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(r-\frac{1}{2})} \sum_{\substack{r_1+r_2+r_3=r, \\ r_2, r_3 < r}} \binom{r}{r_1, r_2, r_3} m_{r_2} m_{r_3} I_{r_1, r_2, r_3}, \quad \text{for} \;\; r \geq 2,$$

with initial values $m_0 = 1$ *and* $m_1 = 0$ *and*

$$I_{r_1,r_2,r_3} = \int\limits_{[0,1]} \Big(\frac{1}{\pi}\big(x\log x + (1-x)\log(1-x)\big) + \min(x,1-x)\Big)^{r_1} x^{r_2-\frac{1}{2}}(1-x)^{r_3-\frac{3}{2}}\,dx.$$

To show our results we used two main ingredients, namely, a suitable distributional recurrence for the random variable $X_n^{[\text{QFW}]}$ together with explicit solutions of the corresponding recurrences for the r-th integer moments in terms of lower order moments. To obtain the distributional recurrence for $X_n^{[\text{QFW}]}$, i.e., the starting point of our analysis, we consider the "inverse process": instead of merging equivalence classes by carrying out UNION operations and thus adding successively edges until one obtains a spanning tree, we start with a random spanning tree and remove successively edges until all nodes are isolated. The basis of the approach is the following simple fact. Let us assume we start with a random unrooted labelled tree of size n (this corresponds to the random spanning tree of the complete graph of a set S of size n) and remove one edge at random (this corresponds to the edge, which has been added in the final, i.e., the $(n-1)$-st, merging step). Then it holds that both resulting subtrees, let us assume they are of sizes k and $n-k$, with $1 \le k \le n-1$, are itself *random* unrooted labelled trees of smaller sizes k and $n-k$, respectively. In the QFW algorithm the cost of this edge-removal step is given by $\min(k, n-k)$. This leads to the following distributional recurrence for the total cost $X_n := X_n^{[\text{QFW}]}$ of the algorithm QFW under the random spanning tree model, when merging the elements of a set of size $n \ge 2$ (with $X_1 = 0$):

$$X_n \stackrel{(d)}{=} X_{S_n} + X^*_{n-S_n} + t_{n,S_n}, \quad \text{for } n \ge 2, \tag{1}$$

where S_n is independent of $(X_j)_{j\ge1}$ and $(X_j^*)_{j\ge1}$, which are independent copies of each other. The toll function $t_{n,k}$ is for QFW given by

$$t_{n,k} := \min(k, n-k).$$

Furthermore, S_n is distributed as follows:

$$\mathbb{P}\{S_n = k\} = \binom{n}{k}\frac{k^k(n-k)^{n-k-1}}{(n-1)n^{n-1}}, \quad \text{for } 1 \le k \le n-1.$$

To treat the recurrences appearing for the r-th integer moments, which can be deduced easily from (1), we used a generating functions approach leading to explicitly solvable differential equations.

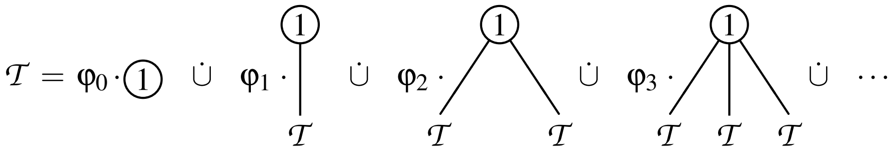
We remark that there is an interesting connection between merging models for Union-Find algorithms introduced in computer science and certain coagulation models for particles introduced in statistical physics. In particular, it is known [23] that the random spanning tree model corresponds to the so-called additive Marcus-Lushnikov process; here the probability that in a merging step two particles of sizes x and y, respectively, will merge is proportional to the sum $x+y$ of their sizes. Of course, the approach presented for analyzing the cost of Union-Find algorithms could be applied also to analyze certain parameters for this coagulation model.

2 Growth models for random increasing trees

A study of random trees turns out to be of interest in various scientific branches as computer science, probability theory and combinatorics. Although trees can be considered as particular graphs the techniques introduced and applied to study important quantities for random trees are somewhat different from standard methods used in the study of random graphs; however, recently methods from analytic combinatorics (which are of great importance in the study of random trees) have been applied with success also to certain random graph models. A good source for methods and problems in connection with random trees is the recent book of Drmota [5], but also the general treatment on analytic combinatorics by Flajolet and Sedgewick [6].

We will consider here a particular class of tree models called *increasing trees*, which has been introduced independently in a combinatorial and a probabilistic context. The interest in these models comes from the fact that they are appropriate to describe the behaviour of a lot of quantities in various applications (see [20] for a survey). E.g., they are used as a model for the spread of epidemics, for pyramid schemes, for the family trees of preserved copies of ancient texts, and as a simplified growth model of the world wide web (there are relations to the so-called Barabási-Albert model for scale-free networks, see [3]).

Combinatorially increasing trees can be described as rooted ordered trees (the left-to-right order of the subtrees of a node is important), where the nodes are labelled by distinct integers of $\{1,2,\dots,n\}$ (with n the size of the tree), in such a way that the label of a child node is always larger than the label of its parent node. Actually one considers weighted trees, where each node v in the tree gets a weight $\varphi_r > 0$ depending on the out-degree (i.e., the number of children) $d^+(v) = r$ of v; the weight of a tree T is simply the product of the weights of all nodes $v \in T$. Given a degree-weight sequence $(\varphi_r)_{r\geq 0}$ this also leads to a natural definition of random increasing trees, where one simply assumes that each increasing tree of size n appears with a probability proportional to its weight. One can describe a combinatorial class $\mathcal{T}$ of increasing trees also via a formal recursive equation (stated here somewhat informal avoiding the rigorous combinatorial constructions hidden behind, as the so-called partition product and the boxed product for labelled combinatorial objects, see, e.g., [6]):



This equation reflects the decomposition of a tree into the root node and its subtrees and thus often gives rise to a top-down approach for analyzing parameters in increasing tree families. The model of increasing trees has been introduced in its fully generality by Bergeron et al. [2], but important particular instances have been considered already earlier by Prodinger and Urbanek [24].

For applications those increasing tree models are of particular interest, which also allow a probabilistic description via a tree evolution process, i.e., where it holds that for every tree T' of size n with vertices $v_1, \dots, v_n$ there exist probabilities $p_{T'}(v_1), \dots, p_{T'}(v_n)$, such that when starting with a *random tree* T' of size n of the tree family considered, choosing a vertex v_i in T' according to the probabilities $p_{T'}(v_i)$ and attaching node $n+1$ to it, we obtain again a *random tree* T of size $n+1$ of the tree family considered. There are several prominent instances of increasing tree models as *recursive tree* ($\varphi_r = \frac{1}{r!}$), *binary increasing trees* ($\varphi_r = \binom{2}{r}$) and *plane recursive trees* ($\varphi_r = 1$), which have been introduced in a probabilistic context via their simple tree evolution processes.

In a joint work with Helmut Prodinger [21] we fully answered the question, which increasing tree models also allow a description via tree evolution processes; it turns out that this is possible only for few instances, but for all these models the "insertion probabilities" $p_{T'}(v_i)$ are quite simple to describe, since they only depend on the size of the tree T' and on the out-degree of the node v_i. In the theorem stated below we could show that there are only three types of tree evolution models captured by increasing trees, but they are of particular importance: the probability that a new node is attached to an already existing one is (i) the same for all nodes (uniform attachment), (ii) proportional to a linear function of the out-degree of the node (preferential attachment, "success breeds success"), (iii) proportional to the difference between a maximal possible number d of children and the out-degree, i.e., the actual number of children (saturation model).

Theorem 2. *A family of increasing trees $\mathcal{T}$ can be constructed via a tree evolution process if and only if there exist positive constants $a, b > 0$, such that the degree-weight generating function $\tilde\varphi(t) = \sum_{r\ge 0} \tilde\varphi_r t^r$ satisfies $\tilde\varphi(t) = a\varphi(bt)$, where $\varphi(t)$ is given by one of the following three formulae:*

* *Case A (recursive trees): $\varphi(t) = e^t$,*
* *Case B (d-ary trees): $\varphi(t) = (1+t)^d$, for $d \in \{2,3,4,\dots\}$,*
* *Case C (generalized plane recursive trees): $\varphi(t) = \frac{1}{(1-t)^\alpha}$, for $\alpha > 0$.*

The corresponding tree evolution processes, which generate random trees of arbitrary size n, can be described as follows:

* *Step* 1*: The process starts with the root labelled by* 1.
* *Step* $i+1$*: At step* $i+1$ *the node with label* $i+1$ *is attached to any previous node* v *(with out-degree* $d^+(v)$*) of the already grown tree of size* i *with probabilities* $p(v)$ *given as follows:*

$$p(v) = \begin{cases} \frac{1}{i}, & \text{for Case A (uniform attachment model)}, \\ \frac{d-d^+(v)}{(d-1)i+1}, & \text{for Case B (saturation model)}, \\ \frac{d^+(v)+\alpha}{(\alpha+1)i-1}, & \text{for Case C (preferential attachment model)}. \end{cases}$$

The tree evolution process is illustrated in Figure 2 for random recursive trees, which are generated by a "uniform attachment model", i.e., in the $(i+1)$-st step a random node in the tree already generated is chosen to attach the new node $i+1$.

Therefore, the increasing tree families characterized here have the advantage of leading to a combinatorial, but also to a probabilistic description. The description of the tree models by means of a tree evolution process often allows a bottom-up approach for analyzing tree parameters.

In a series of joint papers with Markus Kuba [13, 15, 16] we studied the distributional behaviour of important quantities in random increasing tree families, where the main focus has been given to a precise analysis of the behaviour of so-called label-dependent parameters such as the out-degree (i.e., the number of children) of the node labelled j, the number of descendants of the node labelled j, or the distance between the nodes labelled j_1 and j_2, respectively, in a random tree of size n. The exact and asymptotic results lead to a precise description of the behaviour of "the j-th individual" during the tree evolution process according to the growth of $j = j(n)$ as $n \to \infty$. Figure 3 shall illustrate such important label-dependent parameters.

We state here just one particular result concerning the node-to-node distance (a fundamental quantity when analyzing network models) for the family of plane recursive trees.

Theorem 3. *Let* $\Delta_{n;j_1,j_2}$ *count the distance between the nodes with label* j_1 *and label* j_2 *in a random plane recursive tree of size n. Then it holds that the random variable*

$$\Delta^*_{n;j_1,j_2} := \frac{\Delta_{n,;j_1,j_2} - \mu_{n;j_1,j_2}}{\sigma_{n;j_1,j_2}},$$

with $\mu_{n;j_1,j_2} := \frac{1}{2}(\log j_1 + \log j_2)$ *and* $\sigma^2_{n;j_1,j_2} := \frac{1}{2}(\log j_1 + \log j_2)$*, is, for arbitrary sequences* $(n, j_1(n), j_2(n))_{n\in\mathbb{N}}$*, with* $1 \le j_1 = j_1(n), j_2 = j_2(n) \le n$ *and* $j_1 \neq j_2$*,*

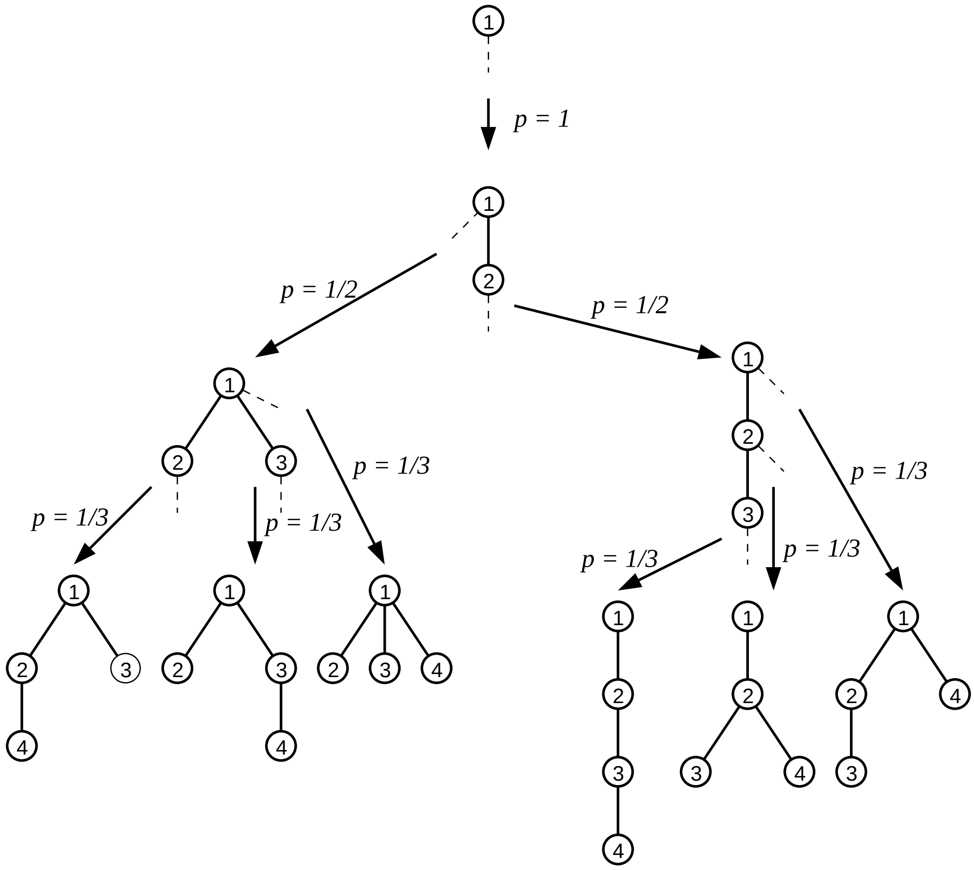


Figure 2: Generating random recursive trees via a tree evolution process.

provided that $\max(j_1, j_2) \to \infty$*, asymptotically for* $n \to \infty$ *Gaussian distributed:*

$$\Delta^*_{n;j_1,j_2} = \frac{\Delta_{n,;j_1,j_2} - \mu_{n;j_1,j_2}}{\sigma_{n;j_1,j_2}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0,1).$$

We remark that interesting generalizations of the model of increasing trees have been introduced also. In one such generalization called *bucket increasing trees* introduced in a joint work with Markus Kuba [18] the nodes of a tree are buckets, which can contain up to a fixed integer amount of $b \geq 1$ elements (= labels). The bucketing effect is then related to the aging and fertility restrictions of generalized preferential attachment rules introduced in [4]. Another direction, which is pursued in a joint study with Georg Seitz [22], concerns the introduction and analysis of evolution models for "k-dimensional trees", which are particular graph models that allow a tree-like combinatorial description. Only recently such models have been introduced as scale-free network models [7].

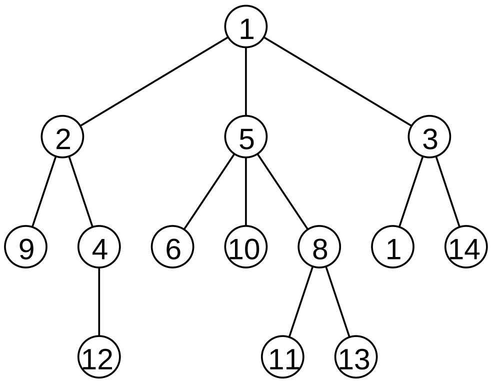


Figure 3: An increasing tree of size 14. The depth (i.e., the root-to-node distance) of node 5 is one, the distance between nodes 4 and 5 is three, the number of descendants of node 5 (including the node itself) is six and the out-degree of node 5 is three.

3 Analysis of diminishing urn models

Pólya-Eggenberger urn models are simple, useful mathematical tools for describing many evolutionary processes in diverse fields of application such as analysis of algorithms and data structures, statistics and genetics. Due to their importance in applications, there is a huge literature on the stochastic behaviour of urn models; see for example [10, 19].

In the simplest case of two types of colours for the balls Pólya-Eggenberger urn models can be described as follows. At the beginning, the urn contains m black and n white balls. At every step, we choose a ball at random from the urn, examine its colour and put it back into the urn and then add/remove balls according to its colour by the following rules. If the ball is white, then we put a white and b black balls into the urn, while if the ball is black, then c white balls and d black balls are put into the urn. The values $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ are fixed integer values and the urn model is specified by the transition matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Urn models with r (≥ 2) types of colours can be described in an analogous way and are specified by an $r \times r$ transition matrix.

Most studies of urn models impose the so-called *tenability* condition on the transition matrix, so that the process can be continued *ad infinitum* (or no balls of a given colour being completely removed). However, in some applications (examples given below), there appear urn models with a very different nature, which we will refer to as *diminishing urn models*. For simplicity of presentation, we describe them in the case of balls with two types of colours, black and white. We consider Pólya-Eggenberger urn models specified by a transition matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, and in addition there is a set of absorbing states $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. The urn contains m black balls and n white balls at the beginning and evolves by successive draws at discrete instances according to the transition matrix until an absorbing state $s = (j,k) \in \mathcal{S}$ is reached, i.e., when the urn contains exactly j black balls and k white balls. Then the urn process stops.

In contrast to "ordinary" urn models, where one is mainly interested in the exact (or limiting) distribution of the colours of the balls in the urn after a fixed amount of draws (or as the number of draws tends to infinity), for diminishing urns, the main question is different, namely: starting at state (m,n), what is the probability of reaching the absorbing state $(j,k) \in \mathcal{S}$, or (depending on the problem) what is the number of balls left in the urn when the process stops?.

We give a few motivating examples of diminishing urn models, which appear in the literature (see [8] for references).

The OK Corral problem. This corresponds to the urn $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ with two absorbing axes: $\mathcal{S} = \{(0,n) : n \geq 0\} \cup \{(m,0) : m \geq 0\}$. An interpretation is as follows. Two groups of gunmen, group A and group B (with n and m gunmen, respectively), face each other. At every discrete time step, one gunman is chosen uniformly at random who then shoots and kills exactly one gunman of the other group. The bloody gunfight ends when one group gets completely "eliminated". Two questions are of interest: (i) what is the probability that group A (group B) survives? and (ii) what is the probability that the gunfight ends with k survivors of group A (group B)? This problem was introduced by Williams and McIlroy and studied recently by several authors (Kingman and Volkov; Flajolet, Dumas and Puyhaubert) using different approaches, leading to very interesting results. Also the urn corresponding to the OK corral problem can be viewed as a basic model in the mathematical theory of warfare and conflicts.

The cannibal urn. Introduced by Greene and analyzed in details by Pittel, this urn model is a slight modification of the diminishing urn with $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ and the vertical wall of absorbing states $\mathcal{S} = \{(0,n) : n \geq 0\} \cup \{(1,n) : n \geq 0\}$. In terms of weighted lattice paths, one starts at position (m,n), the weight (and thus the probability) of a step to $(m-1,n)$ is $\frac{n}{m-1+n}$ (not $\frac{n}{m+n}$), and the weight to $(m-2,n+1)$ is $\frac{m-1}{m-1+n}$.

Such an urn was introduced to model the behaviour of cannibals in biological populations. It can be described as follows. A population consists of cannibals and non-cannibals. At every time step, a non-cannibal is selected as victim and removed; after that a member in the remaining population (cannibals and non-cannibals) is selected uniformly at random. If the selected individual is a cannibal it remains as a cannibal, but if the selected individual is a non-cannibal, it becomes then a cannibal. The question is, when starting with n cannibals and m non-cannibals, what is the number of resulting cannibals in the population at the moment when all non-cannibals are removed?

The pills problem. The transition matrix is given by $M = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ and the absorbing axis is $\mathcal{S} = \{(0,n) : n \geq 0\}$. An interpretation is as follows. An urn has two types of pills in it, which are single-unit and double-unit pills, respectively. At every step, we pick a pill uniformly at random. If a single-unit pill is chosen, then we eat it up, and if the pill is of double unit, we break it into two halves – one half is eaten up and the other half is now considered of single unit and thrown back into the urn. The question is then, when starting with n single-unit pills and m double-unit pills, what is the probability that k single-unit pills remain in the urn when all double-unit pills are drawn?

This problem has been stated by Knuth and McCarthy, where the authors asked for a formula for the expected number of remaining single-unit pills, when there are no double-unit pills in the urn. Interestingly the solution of the problem is given by a nice explicit formula.

Brennan and Prodinger proposed several generalizations of the problem. One natural generalization is to consider r types of pills, which are of i units, $i = 1,\dots,r$, respectively. At every time step, a pill is chosen uniformly at random; if the pill is of single unit, it is eaten up, and if the pill is of i units, $i \geq 2$, it is broken into two parts, one of single unit and the other of $(i-1)$ units. The piece of single unit is eaten up and the remaining piece is thrown back into the urn. We stop if there are no more pills of the largest units r.

This problem corresponds to the diminishing urn model with the $r \times r$ transition matrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

and the absorbing hyperplane $\mathcal{S} = \{(n_1,\dots,n_{r-1},0) : n_1,\dots,n_{r-1} \geq 0\}$. One might then be interested in finding the probability that k pills of single unit remain in the urn when there are no more pills of r units, the starting configuration being n_i pills of i units.

In the study of urn models it is helpful to describe the evolution of the urn by weighted lattice paths, which is described next in the case of urns with two types of balls. If the urn contains m black balls and n white balls and we select a white ball (with probability $\frac{n}{m+n}$), then this corresponds to a step from (m,n) to $(m+a,n+b)$, to which the weight $\frac{n}{m+n}$ is associated; and if we select a black ball (with probability $\frac{m}{m+n}$), this corresponds to a step from (m,n) to $(m+c,n+d)$ (with weight $\frac{m}{m+n}$). The weight of a path after t successive draws consists of the product of the weights of every step. By this correspondence, the probability of starting at (m,n) and ending at (j,k) is equal to the sum of the weights of all possible paths starting at state (m,n) and ending at the absorbing state $(j,k) \in \mathcal{S}$ (which did not

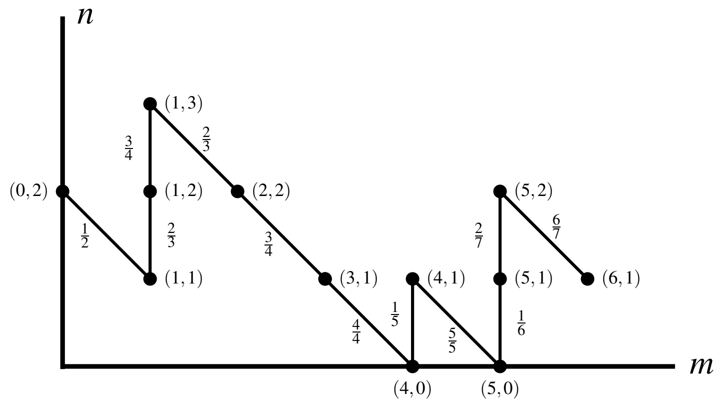


Figure 4: An example of a weighted path from $(6,1)$ to the absorbing state $(0,2)$ for the so-called pills problem with transition matrix $M = [-1,0;1,-1]$ and the vertical absorbing axis $\mathcal{S} = \{(0,n) : n \geq 0\}$. The illustrated path has weight $\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{3920}$.

reach any absorbing state before). Unfortunately, the expressions so obtained for the probability are, although exact, less useful for large m or n. An example for the weighted path corresponding to the evolution of a diminishing urn is given in Figure 4.

As mentioned above, for diminishing urns one is interested in the position of the absorbing state. Probabilistically, we consider the pair of random variables $(X_{n,m}^{(1)}, X_{n,m}^{(2)})$, such that $\mathbb{P}\{(X_{n,m}^{(1)}, X_{n,m}^{(2)}) = (j,k)\}$ gives the probability that when starting at state (m,n) (with m black balls and n white balls), the urn process reaches the absorbing state (j,k), namely, the process terminates with j black balls and k white balls. These probabilities can be encoded by the corresponding probability generating functions $h_{n,m}(v_1, v_2)$ defined via

$$h_{n,m}(v_1,v_2) := \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\big\{(X_{n,m}^{(1)}, X_{n,m}^{(2)}) = (j,k)\big\} v_1^j v_2^k.$$

According to the outcome of the first draw of the urn process, one obtains the following recurrences for the probability generating functions:

$$h_{n,m}(v_1,v_2) = \frac{n}{m+n} h_{n+a,m+b}(v_1,v_2) + \frac{m}{m+n} h_{n+c,m+d}(v_1,v_2), \qquad (2)$$

for $(m,n) \notin S$. The boundary values at the absorbing states $(m,n) \in S$ are given by $h_{n,m}(v_1,v_2) = v_1^m v_2^n$.

Together with Hsien-Kuei Hwang and Markus Kuba [8] we suggested a generating functions approach to treat the recurrences (2). For various diminishing urn models (containing, e.g., all the before mentioned urns) we could apply this approach with success, which leads to a study of first order linear partial differential equations for the corresponding generating functions (where difficulties as dealing with unknown boundary values will occur in some situations). As an example we state results leading to a precise description of the behaviour of the pills problem urn.

Theorem 4. *Starting with m double-unit pills and n single-unit pills, the probability generating function $h_{n,m}(v) := \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\{X_{n,m} = k\} v^k$ of the number $X_{n,m}$ of the remaining single-unit pills in the urn when all double-unit pills are already taken is given by*

$$h_{n,m}(v) = mv \int_0^1 (1+(v-1)q)^n (1-q-(v-1)q\log q)^{m-1} dq.$$

If $m \to \infty$, then the random variable $X_{n,m}$ converges, after suitable normalization, in distribution to an exponentially distributed random variable X with parameter $\lambda = 1$, namely

$$\frac{X_{n,m}}{\frac{n}{m} + \log m} \xrightarrow{(d)} X,$$

where X has density $f(x) = e^{-x}$ for $x \geq 0$.

If m is fixed and $n \to \infty$, then the random variable $X_{n,m}$ converges, after suitable normalization, in distribution to a Beta random variable B_m; in symbol

$$\frac{X_{n,m}}{n} \xrightarrow{(d)} B_m \overset{(d)}{=} \mathrm{Beta}(1,m),$$

where B_m has density $m(1-x)^{m-1}$, $0 \leq x \leq 1$.

Together with Markus Kuba we have pursued further problems in connection with urn models, e.g., describing the area under weighted lattice paths associated to triangular diminishing urns [17].

References

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, 1974.

[2] F. Bergeron, P. Flajolet and B. Salvy, Varieties of Increasing Trees, *Lecture Notes in Computer Science* 581, 24–48, 1992.

[3] B. Bollobás and O. M. Riordan, Mathematical results on scale-free random graphs, in *Handbook of graphs and networks*, 1–34, Wiley-VCH, Weinheim, 2003.

[4] C. Borgs, N. Berger, J. T. Chayes, R. D'Souza and R. D. Kleinberg, Degree distribution of competition-induced preferential attachment graphs, *Combinatorics, Probability and Computing* 14, 697–721, 2005.

[5] M. Drmota, *Random Trees*, Springer, Wien, 2009.
[6] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
[7] Y. Gao, The degree distribution of random k-trees, *Theoretical Computer Science* 410, 688–695, 2009.
[8] H.-K. Hwang, M. Kuba and A. Panholzer, Analysis of some exactly solvable diminishing urn models, in: The 19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Nankai University, Tianjin, 2007.
[9] H.-K. Hwang and R. Neininger, Phase change of limit laws in the quicksort recurrence under varying toll functions, *SIAM Journal on Computing* 31, 1687–1722, 2002.
[10] N. L. Johnson and S. Kotz, *Urn models and their application. An approach to modern discrete probability theory*, John Wiley, New York, 1977.
[11] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Volume 1–3, Addison-Wesley, Reading, 1968 (Vol. 1), 1969 (Vol. 2), 1973 (Vol. 3).
[12] D. E. Knuth and A. Schönhage, The expected linearity of a simple equivalence algorithm, *Theoretical Computer Science* 6, 281–315, 1978.
[13] M. Kuba and A. Panholzer, Descendants in increasing trees, *Electronic Journal of Combinatorics* 13, research paper 8, 2006.
[14] M. Kuba and A. Panholzer, Analysis of the total costs for variants of the Union-Find algorithm, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, in: 2007 International Conference on the Analysis of Algorithms, Proceedings AH, 259–268, 2007.
[15] M. Kuba and A. Panholzer, On the degree distribution of the nodes in increasing trees, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 114, 597–618, 2007.
[16] M. Kuba and A. Panholzer, On the distribution of distances between specified nodes in increasing trees, *Discrete Applied Mathematics* 158, 489–506, 2010.
[17] M. Kuba and A. Panholzer, On the area under lattice paths associated with triangular diminishing urn models, *Advances in Applied Mathematics* 44, 329–358, 2010.
[18] M. Kuba and A. Panholzer, A combinatorial approach to the analysis of bucket recursive trees, *Theoretical Computer Science*, to appear.
[19] H. Mahmoud, *Pólya urn models*, CRC Press, Boca Raton, 2009.
[20] H. Mahmoud and R. Smythe, A Survey of Recursive Trees, *Theoretical Probability and Mathematical Statistics* 51, 1–37, 1995.
[21] A. Panholzer and H. Prodinger, Level of nodes in increasing trees revisited, *Random Structures & Algorithms* 31, 203–226, 2007.
[22] A. Panholzer and G. Seitz, Ordered increasing k-trees: introduction and analysis of a preferential attachment network model, to appear in Proc. AofA'10.
[23] J. Pitman, Coalescent random forests, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 85, 165–193, 1999.
[24] H. Prodinger and F. J. Urbanek, On monotone functions of tree structures, *Discrete Applied Mathematics* 5, 223–239, 1983.
[25] A. C.-C. Yao, On the average behavior of set merging algorithms (Extended abstract), *Conference Record of the Eight Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 192–195, 1976.

Author's address: Alois Panholzer. Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, Technische Universität Wien. Wiedner Hauptstr. 8–10/104, 1040 Wien. email alois.panholzer@tuwien.ac.at. http://info.tuwien.ac.at/panholzer.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 214 (2010), 17–47

Mathematik in Wien: Universität Wien

Andreas Čap, Hans G. Feichtinger, Herwig Hauser, Bernhard Lamel, Karl Sigmund und Gerald Teschl

Universität Wien

Mit diesem Artikel wird die Reihe fortgesetzt, in der sich die universitären Mathematikstandorte in Österreich in den IMN vorstellen.

1 Geschichte

Die Geschichte der Mathematik an der Universität Wien reicht bis zum Gründungsjahr der Universität Wien, 1365, zurück. Als Teil der Ausbildung an der Artistischen Fakultät war Mathematik von Anfang an ein fester Bestandteil des universitären Lebens und wurde von herausragenden Astronomen und Mathematikern unterrichtet: Johann von Gmunden (ca. 1380–1442), Georg von Peuerbach (1423–1461) und Johannes Müller von Königsberg (1436–1476), der später als Regiomontanus bekannt wurde und als einer der wichtigsten Begründer der sphärischen Trigonometrie gilt. Die astronomischen Tafeln des letzteren begleiteten Columbus auf seinen Fahrten.

Auch späterhin, bis zum Beginn des 17. Jahrhunderts, lehrte mancher bedeutende Mathematiker an der Universität Wien: so z.B. der Humanist Konrad Celtis, der „mathematisierende Poet“ Johann Stabius, der die erste flächentreue Karte (in Herzform) entwarf, und Paul Fabricius, einer der bedeutendsten Universalgelehrten seiner Zeit, sowie der Jesuitenpater Guldin (1577–1643). Es folgten viele Jahrzehnte der Stagnation, ehe im 19. Jahrhundert ein Aufschwung einsetzte. Hier ist Joseph Petzval (1807–1891) zu nennen, der zwar als Sonderling galt, aber die Theorie der photographischen Dioptrik entwickelte, auf welcher die Geräte von Voigtländer und Zeiss beruhten.

ISSN 0020-7926

Gab es ursprünglich nur einen Mathematikprofessor, so wuchs die Anzahl der Mathematikprofessoren an der Universität Wien über die Jahrhunderte langsam auf schließlich drei zu Ende des 19. Jahrhunderts. Versuche, Gauß an die Wiener Universität zu gewinnen oder Jacobi von Berlin wegzuberufen, schlugen fehl.

Die Berufung von Boltzmann (1844–1906) auf einen Lehrstuhl der Mathematik (dann 1873–1876 in Wien) war ein erstes, wichtiges Signal für einen Aufwärtstrend. Ludwig Boltzmann war allerdings eher mathematischer und theoretischer Physiker und wurde auch schnell von seinem Wiener mathematischen Lehrstuhl wegberufen, aber die geistige Atmosphäre begann sich spürbar zu wandeln. Emil Weyr (1848–1894) machte sich als Geometer einen Namen, Leo Königsberger (1837–1921) arbeitete auf dem Gebiet der Analysis. Beide hatten im Ausland studiert, was früheren Generationen österreichischer Studenten verwehrt gewesen war.

Gustav von Escherich (1849–1935) prägte als Ordinarius an der Universität Wien Generationen von Studenten der Mathematik. Zwar werden heute keine großen Entdeckungen mit ihm assoziiert, doch leistete er sehr wichtige Vorarbeiten, die den Boden für die kommende Blüte vorbereiteten. Er führte in Österreich die strengen Beweismethoden von Weierstrass ein und gründete gemeinsam mit Weyr die „Monatshefte für Mathematik und Physik“, in der zahlreiche grundlegende Arbeiten veröffentlicht wurden. Sein Zeitgenosse Franz Mertens (1840–1927) konnte bereits wichtige Resultate zur Theorie der Reihen beitragen und insbesondere zur Zahlentheorie: Die Mertenssche Vermutung, aus deren Richtigkeit die der Riemannschen folgen würde, beschäftigte viele Mathematiker ein Jahrhundert lang und konnte erst durch Odlyzko und Te Riele 1985 widerlegt werden. Auch der Geometer Gustav Kohn (1859–1921) beeinflusste die Entwicklung der Mathematik in Österreich nachhaltig.

Zu den herausragendsten mathematischen Begabungen in Wien in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts gehörten Alfred Tauber (1866–1942) und Wilhelm Wirtinger (1865–1945), die beide die Geschichte der Mathematik des 20. Jahrhunderts stark beeinflussen sollten. Der in Pressburg geborene Tauber formulierte und bewies in seiner Habilitationsschrift ein Theorem über die Konvergenz von Reihen, das zum Ausgangspunkt für das riesige Feld der sogenannten „Tauberschen Sätze“ wurde. Wirtinger, der aus Ybbs stammte, überstrahlte ihn noch durch seine frühen Beiträge zur Zahlentheorie, Gruppentheorie und zur komplexen Analysis. Wirtinger wurde 1895 als Ordinarius nach Innsbruck, 1903 nach Wien berufen, wogegen Tauber als Chefmathematiker in der Phönix-Versicherung unterkam.

1912 wurde Philipp Furtwängler (1869–1940) an die Wiener Universität berufen. Diese Entscheidung schien kühn, denn Furtwängler war nicht habilitiert, doch rechtfertigte sie sich glänzend. Furtwänglers Vorlesungen galten als unvergleichliche Kunstwerke (obwohl er durch eine Lähmung an den Rollstuhl gefesselt war) und inspirierten zahlreiche Studenten. Gegen Ende der Zwanzigerjahre vollbrachte der fast sechzigjährige Furtwängler sein Meisterstück, den Beweis der Hilbertschen Hauptvermutung, die für die algebraische Zahlentheorie grundlegend ist.

Zu Beginn des Jahres 1920 kehrte Hans Hahn (1879–1934) an die Wiener Universität zurück, nach frühen Berufungen in Czernowitz und Bonn. Er hat durch seine Arbeiten in Analysis und allgemeiner Topologie, vor allem aber als einer der Schöpfer der Funktionalanalysis, eine wegweisende Bedeutung erlangt. Außerdem gründete Hahn (gemeinsam mit seinem Schwager Otto Neurath und dem aus Deutschland berufenen Philosophen Moritz Schlick) den Wiener Kreis. Hahns früh erblindete Schwester Olga (1882–1937), die (zum Teil gemeinsam mit ihrem Mann Neurath) wichtige frühe Arbeiten zur mathematischen Logik verfasste, gehörte auch zu dieser Gruppe von Mathematikern und Philosophen. Der Wiener Kreis sollte die Geschichte der Philosophie, vor allem im angelsächsischen Raum, nachhaltig beeinflussen.

In den Zwanzigerjahren besaß das mathematische Seminar der Universität Wien Weltgeltung. Neben dem Dreigestirn der Ordinarien Wirtinger, Furtwängler und Hahn gab es zahlreiche junge und hochbedeutsame Mathematiker. Viele widmeten sich der damals aufblühenden Topologie, so Witold Hurewicz (1904–1956), Walther Mayer (1887–1948) und Leopold Vietoris (1891–2002). Ein junger Mathematiker namens Eduard Helly (1884–1943) brachte aus der sibirischen Kriegsgefangenenschaft eine brillante Habilitationsarbeit zurück, die ähnlich wie Hahns Arbeiten zu einer Grundlage der Funktionalanalysis wurde. Aus Hamburg wurde 1922 der junge Kurt Reidemeister (1893–1971) als ao. Professor für Geometrie geholt. Reidemeister entwickelte in Wien seine wegweisende Theorie der Knoten. Er spielte auch im Wiener Kreis eine wichtige Rolle. Reidemeister vermittelte seinerseits den Wiener Otto Schreier (1901–1928) nach Hamburg, wo dieser grundlegende Sätze zur Gruppentheorie entdeckte und (gemeinsam mit Artin) viel zur Entwicklung der modernen Algebra beitrug.

Ein besonders brillanter Kopf am Wiener mathematischen Seminar war der junge Karl Menger (1904–1985), der Sohn des Schöpfers der österreichischen Schule der Nationalökonomie. Menger verfasste bereits als Student entscheidende Beiträge zur Kurven- und Dimensionstheorie und wurde, knapp fünfundzwanzigjährig, zum außerordentlichen Professor für Geometrie an der Wiener Universität ernannt. Trotz oder vielmehr wohl eben wegen seiner Jugend scharten sich einige der begabtesten Studenten um ihn, in einer Gruppe, die sich als „Wiener Mathematisches Kolloquium“ rasch neben dem Wiener Kreis etablierte. Hierzu zählten Olga Taussky (1906–1995) (die später als Taussky-Todd am Caltech in Pasadena eine der weltweit bekanntesten Mathematikerinnen wurde) und Franz Alt (1908–), der durch eine kurze Arbeit zur Messbarkeit der Nutzenfunktion und durch seine Pionierrolle bei der Entwicklung des Computers bekannt wurde. Noch bemerkenswerter war der Rumäne Abraham Wald (1902–1950), der sich bald von Menger emanzipierte und Entscheidendes leistete, sowohl in der Wirtschaftstheorie, die ihm den ersten seriösen Gleichgewichtssatz verdankt, als auch für die Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mithilfe des Begriffs der Zufallsfolge. Wald wurde, nach seiner Emigration in die USA, in kurzer Zeit zu einem der Begründer der modernen Theorie der mathematischen Statistik.

Der bedeutsamste Beitrag zur Mathematik, der in Österreich geschaffen wurde, ist aber zweifellos Kurt Gödel (1906–1978) zu verdanken, der (im Rahmen seiner Dissertation bei Hahn) die Vollständigkeit der Logik erster Ordnung bewies und gleich anschließend 1930 seinen berühmten Unvollständigkeitssatz entdeckte. Dadurch wurde es klar, dass das Programm von Hilbert zur Begründung der Konsistenz der Mathematik nicht durchgeführt werden kann. Wenige Jahre später zeigte Gödel, dass die Kontinuumshypothese nicht im Widerspruch zu den übrigen Axiomen der Mengenlehre steht. Sein Resultat und seine Methoden sind entscheidende Beiträge zur Mengentheorie geworden.

Kurt Gödel verließ Österreich während des Zweiten Weltkriegs und kehrte nie wieder zurück. Zusammen mit dem Tod von Hahn, der Emeritierung von Furtwängler und Wirtinger sowie der Emigration von Karl Menger, Taussky, Alt, Helly und Wald bedeutete das einen fatalen Aderlass. Nach dem sogenannten Anschluss hatte das Wiener mathematische Institut mit den Ordinarien Anton Huber (1897–1975) und Karl Mayrhofer (1894–1969) keine Chance, das frühere wissenschaftliche Niveau zu halten. Nach dem Krieg aber wurden die beiden nunmehr frei gewordenen Stellen durch hervorragende Mathematiker wiederbesetzt, nämlich durch Johann Radon (1887–1956) und Edmund Hlawka (1916–2009). Radon hatte grundlegende Beiträge zur Maßtheorie, Funktionalanalysis, Variationsrechnung, Differentialgeometrie und zur konvexen Geometrie erbracht. Besonders bekannt wurde sein Name aber durch die Anwendungen von zwei seiner mathematischen Arbeiten. Die nach ihm benannte Radon-Transformation wurde zur Grundlage der Computertomographie und anderer „bildgebender“ Verfahren; und der Satz von Radon–Nikodym entwickelte sich zu einem zentralen Bestandteil der Finanzmathematik. Das Interessante dabei ist, dass Radon, wie seine Zeitgenossen auch, niemals an solche Anwendungen gedacht hatte: Sie wurden erst Jahrzehnte später aktuell. Radon wurde nach dem Ersten Weltkrieg und kurzen Zwischenstationen in Hamburg, Greifswald und Erlangen dann Professor an der Universität von Breslau, bis er 1945 vertrieben wurde. Der junge Wiener Edmund Hlawka hatte während des Krieges aufhorchen lassen, als er eine fundamentale zahlengeometrische Vermutung von Minkowski bewies. Diese beiden Mathematiker sowie Nikolaus Hofreiter (1904–1990) und Leopold Schmetterer (1919–2004) prägten die Nachkriegsjahre und regten zahlreiche hervorragende Schüler an, wie etwa Wolfgang Schmidt (geb. 1933) und Harald Niederreiter (geb. 1945).

Die Aufwärtsentwicklung am Institut für Mathematik hat insbesondere in den letzten Jahrzehnten schwunghaften Charakter angenommen. Es wurden neue Impulse gesetzt und es fand, auch durch Nach- und Neubesetzungen, die Öffnung zu vorher nicht vertretenen Gebieten statt, etwa zur Computergestützten Mathematik (durch Einrichtung eines eigenen Lehrstuhls für „Computerorientierte Mathematik“), zur Mathematischen Physik und zur Finanzmathematik. Es gibt jetzt mehrere international anerkannte Arbeitsgruppen. Weiters wurde am nahegelegenen Institut für Formale Logik ein hochklassiges Programm für mathematische Logik implementiert.

Im Zuge der Neuorganisation der Universität Wien in der ersten Hälfte des Jahres 2004 wurde beschlossen, aus den früheren Instituten für Mathematik und für formale Logik eine eigene Fakultät für Mathematik zu bilden.

2 Die heutige Fakultät für Mathematik

Im Vergleich zu anderen österreichischen Mathematikstandorten ist das besondere Charakteristikum unserer Fakultät die Breite der vertretenen Fächer, beginnend mit den Grundlagen der Logik, über alle klassischen Kernfächer bis hin zu konkreten Anwendungen in der Industrie (eine Ausnahme bildet lediglich die Statistik, die an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften angesiedelt ist). Die Fakultät möchte die Mathematik als Ganzes in Forschung und Lehre repräsentieren, was sich auch darin ausdrückt, dass keine Trennung in *Reine Mathematik* und *Angewandte Mathematik* vorgenommen wurde, nicht zuletzt deswegen, weil sich viele Fakultätsmitglieder beiden Bereichen verbunden fühlen.

Neben der Breite der mathematischen Forschung kann das anregende Forschungsklima und die Bereitschaft für die Verfolgung neuer Fachrichtungen sicherlich zu den besonderen Merkmalen der Fakultät gezählt werden. Ein kompetitives und leistungsorientiertes Klima bietet sowohl Ansporn als auch Basis für die Ausformung interessanter Forschungszweige.

In jüngster Vergangenheit erlebte das Institut für Mathematik und in weiterer Folge die Fakultät für Mathematik unter Dekan Harald Rindler einen großen Aufschwung, der mit einem stetigen Wachstum beim Personal, besonders der Anzahl der Drittmittelangestellten, und dem damit verbundenen Wachstum an Forschungsprojekten einhergeht.

Der Ursprung dieses Aufschwungs liegt einerseits in einem Kern von herausragenden Mathematikern und Lehrern, denen es gelungen ist, ambitionierten wissenschaftlichen Nachwuchs am Institut heranzuziehen. Doch wäre es andererseits ohne die entsprechende Personalpolitik, welche darauf abzielte, dem eigenen Nachwuchs auch hier eine Perspektive zu bieten, wohl nicht gelungen, soviele erfolgreiche Arbeitsgruppen aufzubauen. In diesem Umfeld wurden erste Forschungsprojekte eingeworben und wiederum neuer Nachwuchs ausgebildet.

Es gelang aber nicht nur, eine Reihe hervorragender Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler in Wien zu halten, sondern es konnte auch eine Reihe international führender Mathematiker hierher berufen werden (einzig die Frauenquote bei den Berufungen kann in diesem Zusammenhang nicht als Erfolg gewertet werden – die erste Professorin wurde erst vor kurzen berufen und hat ihren Dienst noch nicht angetreten). Auch bei den Berufungen hat sich die Strategie, eine große Breite anzustreben, und nicht nur bestehende Bereiche zu verstärken, bewährt.

Als bestes Beispiel für die konsequente Nachwuchsförderung ist wohl die außergewöhnlich hohe Anzahl an START-Preisträgern zu nennen, welche die Fakultät hervorgebracht hat. Diese haben allesamt die entscheidenden Jahre vor dem Erhalt des Preises an der Fakultät gearbeitet und konnten oft nur unter schwierigsten Bedingungen an der Fakultät gehalten werden. Ohne diese unermüdlichen Bemühungen hätten wohl die meisten Wien verlassen oder wären überhaupt nie nach Wien gekommen.

Auf der anderen Seite muss aber auch festgehalten werden, dass diese Bemühungen gerade in letzter Zeit oft gescheitert sind und eine Reihe vielversprechender Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler aufgrund mangelnder Zukunftsperspektiven ins Ausland abgewandert sind.

Weiters gibt es mehrere Drittmittelprojekte, welche von „Selbstantragstellern" durchgeführt werden. Auch das erfolgreiche Heranführen des Nachwuchses an solche eigene Forschungsprojekte muss wohl auf die Breite der Fakultät zurückgeführt werden, da hier im Gegensatz zum Heranbilden von im Fachgebiet eng eingegrenztem Nachwuchs die Möglichkeit geboten wird, eigenständige Forschungsprogramme zu finden und sie antragsgerecht zu formulieren. Das gebotene Umfeld ist gerade für Jungwissenschaftlerinnen und -wissenschaftler in dieser Phase sehr entgegenkommend, da sie mit vielen Ideen aus anderen Gebieten konfrontiert werden, die sie dann in ihre eigene Arbeit einfließen lassen können. Abgesehen von den fachlichen Unterstützungsmöglichkeiten gibt es auch noch das (wohl einzigartige) Projektservice, das mittlerweile auch für andere Fakultäten Vorbildcharakter hat. Dieses ist aus der Initiative einer kleinen Gruppe junger Wissenschaftler hervorgegangen und steht bei Drittmittelprojekten von der Antragstellung bis hin zur Abwicklung mit Rat und Tat zur Seite. Es ist gerade für Erstantragsteller eine entscheidende Stütze. Nichtsdestotrotz sind gerade für junge Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler mit eigenen Projekten kaum Zukunftsperspektiven an der Fakultät vorhanden.

Die Möglichkeit der Durchführung dieser vielen Projekte an der Fakultät bringt uns zu der durch das stetige Wachstum des Instituts entstandenen Raumproblematik. Zunächst verteilte sich das Institut von den ursprünglichen Räumlichkeiten in der Strudlhofgasse auf eine immer größer werdende Anzahl von umliegenden Standorten. Erst 2004 konnte das Institut wieder zu einem einheitlichen Standort in der Nordbergstraße 15 (ehemalige Direktion der Post AG) zusammengeführt werden. Aufgrund der weiterhin steigenden Anzahl von Projekten mussten inzwischen aber schon wieder umliegende Standorte angemietet werden. Für 2013 ist eine neuerliche Umsiedlung in das ehemalige PVA-Gebäude an der Roßauer Lände 3 geplant, womit dann wieder ein einheitlicher Fakultätsstandort (zugleich auch Standort der Computational Sciences) gegeben sein wird, nun auch wieder in Nähe zu anderen naturwissenschaftlichen Fächern.

Das gemeinsame Ziel, hochqualitative Forschung von möglichst großer Originalität zu betreiben, führt zu einem sehr produktiven Klima innerhalb der Fakultät. Dieses inspirierende Ambiente wird weiter verstärkt durch die im Umfeld der Fakultät angesiedelten Forschungsinstitute, das Erwin Schrödinger-Institut für Mathematische Physik und das Wolfgang Pauli-Institut, an denen regelmäßig Workshops und Tagungen stattfinden.

Zuletzt sei noch hervorgehoben, dass die Stärke unserer Fakultät nicht auf den Leistungen von einigen wenigen Aushängeschildern basiert, sondern auf einer gleichmäßig hohen Qualität in *allen* Kurien. Aufgrund der Struktur (eine begrenzte Zahl von Professuren bei gleichzeitiger Entstehung einer Vielzahl von Forschungsgruppen) ergibt sich sogar ein im Vergleich zu anderen österreichischen Instituten vermutlich überdurchschnittlicher Beitrag des Mittelbaus in den Bereichen Forschung, Lehre und Administration.

Lehre

Die Lehrveranstaltungen unserer Fakultät decken Bachelor-, Master-, Doktorats- und Lehramtsstudium Mathematik sowie das auslaufende Diplomstudium vollständig ab. Insgesamt sind in diesen Studien derzeit fast 1.500 Studierende inskribiert. Daneben betreuen wir auch einen Teil des Lehramtsstudiums Informatik und bieten Servicelehre für andere Studienrichtungen an, insbesondere für Physik, Astronomie, Meteorologie und Geophysik, Biologie und Informatik. Einen weiteren Schwerpunkt im Ausbildungssektor stellen regelmäßige Weiterbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen und Lehrer an Gymnasien dar, beispielsweise der jährlich stattfindende und auf Aktivitäten von Hans-Christian Reichel zurückgehende Lehrerfortbildungstag am ersten Freitag nach Ostern.

Die Umstellung auf die Bologna-Architektur erfolgte an unserer Fakultät mit dem Wintersemester 2007/08. Im Zuge dieser Umstellungen wurde auch der Studienplan für das Lehramtsstudium neu gestaltet, das einen wichtigen Teil unserer Lehraufgaben darstellt. Nach dieser Umstellung ist nur noch das erste Semester des Mathematikstudiums für die Studierenden des Lehramts und des Bakkalaureats gleich; ab dann werden fast nur noch getrennte Lehrveranstaltungen angeboten, um den unterschiedlichen Zielsetzung der beiden Studien optimal gerecht werden zu können.

Beim Entwurf der Bologna-Curricula wurde die Einheitlichkeit der Mathematik in den Vordergrund gestellt. Insbesondere haben wir uns entschlossen, jeweils nur ein Bachelorprogramm und ein Masterprogramm für Mathematik anzubieten und Möglichkeiten zur Spezialisierung durch innere Differenzierung der Curricula zu realisieren. Im Bachelorcurriculum betrifft die innere Differenzierung 42 ECTS (also knapp eineinhalb Semester) und wird durch eine Wahlmöglichkeit zwischen zwei alternativen Pflichtmodulgruppen realisiert. Die beiden Modulgruppen „Vorbereitung auf wissenschaftliche Arbeit“ und „Wissenschaftliche Berufsvorbereitung“ unterscheiden sich weniger in den behandelten Themen als vielmehr in der Art der Präsentation. In der Modulgruppe „Vorbereitung auf wissenschaftliche Arbeit“, die sich primär an Studierende richtet, die ein anschließendes Masterstudium anstreben, liegt der Schwerpunkt auf einem systematischen Aufbau der Grundlagen. In der „Mathematischen Berufsvorbereitung“ stehen überblicksartige und exemplarische Präsentationen im Vordergrund. Ein anschießendes Masterstudium ist mit beiden Modulgruppen möglich.

Das Ziel, im Bachelorprogramm eine breite und solide Grundausbildung sicherzustellen, führt dazu, dass, insbesondere in der „wissenschaftlichen“ Modulgruppe, den Studierenden nur wenige Wahlmöglichkeiten angeboten werden können. Zum Ausgleich ist das Mastercurriculum sehr frei gestaltet (es gibt keine einzige Lehrveranstaltung, die für alle Studierenden verpflichtend ist) und bietet eine Vielzahl von Wahl- und Kombinationsmöglichkeiten. Im Laufe des Studiums wählen die Studierenden einen der folgenden sieben Studienschwerpunkte:

- Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik
- Analysis
- Angewandte Mathematik und Scientific Computing
- Biomathematik
- Geometrie und Topologie
- Mathematische Logik und Theoretische Informatik
- Stochastik und Dynamische Systeme.

Für den gewählten Studienschwerpunkt sind eine vorgeschriebene Standardausbildung von 30 ECTS Umfang sowie (im Rahmen des Schwerpunkts) frei wählbare Vertiefungslehrveranstaltungen im Ausmaß von 21 ECTS zu absolvieren. Zusätzlich sind insgesamt 24 ECTS an Lehrveranstaltungen aus anderen Schwerpunkten (davon 15 ECTS aus der Standardausbildung) zu absolvieren. Abgerundet werden die vorgeschriebenen Lehrveranstaltungen durch 15 ECTS, die frei aus allen Schwerpunkten gewählt werden können. Somit haben die Studierenden die Möglichkeit, entweder die Breite oder die Tiefe ihrer mathematischen Ausbildung zu betonen und ihr Studienprogramm entsprechend den vielfältigen Wechselwirkungen zwischen den mathematischen Teilgebieten zu gestalten.

Für die Qualität des Masterstudiums ist, vor allem im Bereich der Vertiefungslehrveranstaltungen, natürlich die Qualität und Breite der an der Fakultät vertretenen Forschungsgruppen von zentraler Bedeutung. Das gilt analog auch für das Doktoratsstudium. Hier wurde bei der (durch die gesetzlich vorgeschriebene längere Mindeststudiendauer notwendig gewordene) Umstellung der Curricula im Herbst 2009 die bisherige freie Gestaltung des Studienplans beibehalten beziehungsweise ausgebaut. Das Curriculum gibt nur einen Rahmen für den Umfang der zu absolvierenden Lehrveranstaltungen vor, die Details werden in einer Dissertationsvereinbarung festgelegt, die von dem/der Studierenden und dem/der BetreuerIn in Absprache mit dem studienrechtlich zuständigen Organ abgeschlossen wird. Verstärkt wird das Angebot an spezialisierter Lehre noch durch Lehrveranstaltungen von Gastprofessoren sowie durch die Senior Fellow Lectures, die von renommierten Spitzenforscherinnen und -forschern im Rahmen ihres Aufenthalts als Senior Fellows am Erwin Schrödinger-Institut angeboten werden.

Ein Gutteil der Studierenden im Doktoratsbereich ist an der Fakultät angestellt. Neben der häufigen Variante einer Finanzierung über Einzelprojekte sind Mitglieder der Fakultät auch führend an verschiedenen Doktoratsschulen beteiligt. Hier ist insbesondere das Wissenschaftskolleg "Differential equations: Models in science and engineering" zu nennen, das gemeinsam mit der TU Wien abgewickelt wird. Es ist eingebettet in den EU-finanzierten Marie Curie Early Stage Training Multi Site "Differential Equations". Von den ersten fünf der von der Universität Wien eingerichteten Initiativkollegs waren zwei ("Modern Mathematical Analysis and Applications – Time-Frequency and Microlocal Analysis", "Differential Geometry and Lie Groups") fast vollständig an unserer Fakultät angesiedelt, an einem dritten ("The Sciences in Historical Context") waren Fakultätsmitglieder beteiligt. Im Herbst 2010 beginnen zwei fakultäts- bzw. universitätsübergreifende DK+ Doktoratskollegs mit Beteiligung unserer Fakultät.

Die Qualität der Ausbildung, die sich am Ende natürlich aus einer Vielzahl von Einzelleistungen zusammensetzt, ist an einer großen Anzahl von Auszeichnungen unserer Absolventinnen und Absolventen (von ÖMG-Studienpreisen über Würdigungspreise des Ministeriums bis hin zu verschiedenen Exzellenzstipendien) und ihrem späteren Werdegang abzulesen.

Um vermehrt Schülerinnen und Schüler für ein Mathematikstudium begeistern zu können, organisiert die Fakultät für Mathematik seit 2006 jährlich eine Sommerschule für Schüler ab der 6. Oberstufe, die besonderes Interesse an Mathematik haben.

Forschung in Zahlen

Die erfolgreichen Aktivitäten der Mitglieder in der Forschung erstrecken sich auf weite Teile der reinen und angewandten Mathematik.

Aktuell laufen an der Fakultät 10 EU-Projekte, 65 FWF-Projekte, 10 WWTF-Projekte und 8 sonstige Drittmittelprojekte. Das gesamte Fördervolumen beträgt etwa 30 Millionen € pro Jahr. Zusätzlich zu den 69 wissenschaftlichen Planstellen des Instituts (davon 50 Habilitierte und 19 Assistenten) sind aus diesen Mitteln derzeit 59 PostDocs, 59 Dissertanten und 15 sonstige Mitarbeiter angestellt.

Die Anerkennung der Fakultät wird durch zahlreiche Preise belegt, sowohl national von mehreren Wittgensteinpreisen über mehrere START-Preise bis hin zu mehreren Exzellenzstipendien und Studienpreisen für unsere Absolventinnen und Absolventen, als auch international wie z.B. ERC Advanced Grants, ein Göran Gustafsson-Preis, ein KAUST Award oder ein Marie-Curie Excellence Grant.

Mitglieder unserer Fakultät sind an entscheidenden Stellen im Erwin Schrödinger-Institut und im Wolfgang Pauli-Institut tätig. Neben den *Monatsheften für Mathematik*, die unserer Fakultät traditionell eng verbunden sind, sind Mitglieder der Fakultät als Herausgeber von mehr als 30 internationalen Fachzeitschriften, bei fünf davon als Chefherausgeber, tätig.

Absolventen unserer Fakultät sind in vielen Forschungsbereichen in der ganzen Welt und in den verschiedensten Anwendungsgebieten tätig (darunter Größen wie Wolfgang Schmidt und Martin Nowak); sie haben Professuren an renommierten Institutionen wie der ETH, der Harvard University oder der University of Chicago erhalten.

3 Beschreibung der Forschungsschwerpunkte

Im Anschluss an eine kurze Auflistung aller an der Fakultät vertretenen Forschungsgruppen folgt eine Beschreibung der einzelnen Forschungsschwerpunkte.

* Kurt Gödel Research Center
* Biomathematik, Dynamische Systeme und Finanzmathematik: Biomathematik / Dynamische Systeme und Ergodentheorie / Finanzmathematik
* Analysis, Geometrische Strukturen und Mathematische Physik: Differential Algebras and Nonlinear Analysis (DIANA) / Differentialgeometrie und Liegruppen / Komplexe Analysis / Mathematische Physik
* Computational Science: A Computational Research Enterprise (ACORE) / Computerorientierte Mathematik / Numerical Harmonic Analysis Group (NuHAG) / Partielle Differentialgleichungen und Anwendungen
* Arithmetik, Algebra und Diskrete Mathematik: Arithmetik und Zahlentheorie / Algebraische Geometrie / Algebraische Strukturen / Kombinatorik und Diskrete Mathematik
* Fachdidaktik / Schulmathematik.

Die im Folgendem jeweils aufgelisteten Personen umfassen alle habilitierten Mitglieder, die entweder aus Fakultätsmitteln oder aus einem eigenen Forschungsprojekt angestellt sind.

Kurt Gödel Research Center

Sy-David Friedman (Mathematische Logik) · Jakob Kellner (Forcing)

Das Kurt Gödel Research Center (KGRC) beschäftigt sich mit mathematischer Logik, in erster Linie mit Mengenlehre, in letzter Zeit auch vermehrt mit deskriptiver Mengenlehre, Modelltheorie, Berechenbarkeitstheorie und insbesondere den Verbindungen dieser Gebiete untereinander und zur Mengenlehre.

• *Mathematische Logik* behandelt (mit rein mathematischen Methoden) meta-mathematische Fragen wie 'Was ist ein Algorithmus' oder 'Was ist ein Beweis?'. Die Klärung dieser Begriffe ermöglicht unter anderem Beweise, dass bestimmte Probleme nicht algorithmisch lösbar oder dass bestimmte mathematische Sätze unabhängig (d.h. weder beweisbar noch widerlegbar) sind.

• *Berechenbarkeitstheorie* untersucht Algorithmen. Ein bekanntes Resultat (Matiyasevich): Es gibt keinen Algorithmus, der für ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten entscheidet, ob dieses Polynom eine ganzzahlige Nullstelle hat. Berechenbarkeitstheorie hat auch wichtige Anwendungen in deskriptiver Mengenlehre. Am KGRC wird u.a. über algorithmischen Zufall und über Komplexitätsgrade von Äquivalenzrelationen auf natürlichen Zahlen geforscht.

• *Mengenlehre* bietet eine (prädikatenlogische) Sprache, in der sich (im Wesentlichen) die gesamte Mathematik auf natürliche Weise formulieren lässt, sowie das Axiomensystem ZFC, das eine quasi-universelle Axiomatisierung der gesamten Mathematik darstellt: Ein mathematischer Satz wird heutzutage genau dann als bewiesen akzeptiert, wenn er sich (im Prinzip) formal aus ZFC herleiten lässt. Ein Satz heißt unabhängig von ZFC, wenn er aus ZFC weder beweisbar noch widerlegbar ist.

Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze liefern (mit rein logischen Methoden) Beispiele von unabhängigen Sätzen (z.B. die Konsistenz von ZFC). Es gibt aber auch Sätze, die auf viel stärkere Art (und aus mengentheoretischen, nicht logischen Gründen) unabhängig von ZFC sind: Das klassische Beispiel ist die Kontinuumshypothese (CH): „Jede unendliche Menge reeller Zahlen lässt sich bijektiv entweder auf $\mathbb{N}$ oder auf $\mathbb{R}$ abbilden.“ Der Beweis der Unabhängigkeit von CH bildet die Keimzelle der modernen Mengenlehre. Ein anderes zentrales Phänomen sind „große Kardinalzahlen“, verschiedene Begriffe von „höheren Unendlichkeiten“. Es stellt sich bemerkenswerterweise heraus, dass die Konsistenzstärken dieser Begriffe linear geordnet sind und dass viele Sätze aus Mengenlehre und anderen Gebieten der Mathematik zu einer dieser Kardinalzahlen äquikonsistent sind. (Z.B.: „Es gibt eine Fortsetzung des Lebesgue-Maßes auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R})$“ hat die Konsistenzstärke einer *measurable cardinal*.)

Am KGRC forschen wir über Forcing, class forcing, große Kardinalzahlen, cardinal characteristics, innere Modelle und Feinstruktur sowie über Anwendungen von Mengenlehre auf z.B. Maßtheorie, Topologie und (universelle) Algebra.

• *Deskriptive Mengenlehre* behandelt vorwiegend „definierbare“ Mengen, die (vor allem unter der Annahme von großen Kardinalzahlen) schöne Regularitätseigenschaften haben. (Z.B.: Borelmengen und analytische Mengen sind messbar; wenn es Woodin cardinals gibt, sind sogar alle projektiven Mengen messbar.) Am KGRC wird u.a. an Anwendungen auf Operatoralgebren und auf Klassifikationstheorie geforscht.

• *Modelltheorie* untersucht den Zusammenhang von Eigenschaften einer Theorie T und der Struktur der Modelle von T. Am KGRC wird über abstrakte elementare Klassen und über berechenbare Modelltheorie geforscht (z.B.: Welche Theorien haben entscheidbare Modelle?).

http://www.logic.univie.ac.at/

Biomathematik, Dynamische Systeme und Finanzmathematik

1 Biomathematik

Reinhard Bürger (Mathematische Populationsgenetik) · Joachim Hermisson (Theoretische Populationsgenetik) · Josef Hofbauer (Spieltheorie, Mathematische Ökologie und Ökonomie) · Christian Schmeiser (Mathematische Zellbiologie) · Kristan Schneider (Populationsgenetik und Epidemiologie; dzt. karenziert) · Karl Sigmund (Spieltheorie)

Diese Gruppe befasst sich sowohl mit Anwendungen und Problemen in der Biologie als auch mit mathematischen Fragestellungen, die ihren Ursprung in der Biologie haben. Sie entsprang der Initiative von Prof. Peter Schuster (Institut für Theoretische Chemie der Universität Wien), der Ende der 1970er-Jahre mathematische Mitarbeiter für die Arbeit an evolutionstheoretischen Problemen suchte und fand.

Die Hauptforschungsgebiete sind Evolutionsbiologie mit den Schwerpunkten Populationsgenetik und evolutionäre Spieltheorie, mathematische Ökologie, mathematische Ökonomie und Zellbiologie. Die verwendeten Methoden umfassen insbesondere dynamische Systeme, stochastische Prozesse, Computersimulationen und partielle Differentialgleichungen.

In der Populationsgenetik studiert man die Veränderung der genetischen Zusammensetzung von Populationen oder Arten unter dem Einfluss von Vererbung, Selektion, Migration, Paarungsverhalten, stochastischen Faktoren und anderen genetischen und evolutionären Mechanismen. Ziel ist ein besseres Verständnis der Mechanismen der biologischen Evolution. Umgekehrt wird durch die enormen Fortschritte in der Molekulargenetik umfangreiches Datenmaterial zur Verfügung gestellt, das es ermöglicht, die Spuren, die die Evolution in Genomen rezenter Arten hinterlassen hat, zu analysieren. In diesem bedeutenden Forschungsgebiet bedarf es einer engen Zusammenarbeit von Genetikern, Bioinformatikern, Statistikern und Mathematikern.

Die evolutionäre Spieltheorie wurde zum Studium von vererblichen Verhaltensweisen (Strategien) eingeführt, deren Selektionsvorteil von der Zusammensetzung der Population abhängt (also von den anderen „Spielern“). Im Vordergrund der Forschung steht die Analyse von dynamischen Systemen, die die Evolution von Populationen beschreiben, in denen verschiedene Strategien gespielt werden. Studiert werden dabei die Eigenschaften diverser Spieldynamiken (etwa die Replikatordynamik) und Anwendungen auf die Evolution von Kooperation sowie auf verschiedenste andere Probleme in der Ökologie und Ökonomie.

Es gibt zahlreiche Kooperationen mit Biologen, Genetikern, Bioinformatikern, Statistikern, Ökonomen und natürlich Mathematikern, sowohl innerhalb Österreichs als auch weltweit. Enge Zusammenarbeit gibt es insbesondere mit Instituten am Wiener Biozentrum, in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften und an der Veterinärmedizinischen Universität, weiters mit dem IST Austria (Klosterneuburg) und dem International Institute for Applied Systems Analysis (Laxenburg). Diese Vielfalt in Anwendungen und Kooperationen spiegelt sich auch darin wider, dass vier Mitglieder dieser Gruppe an drei verschiedenen Doktoratskollegs („DK+“) beteiligt sind. Weiters gibt es eine Vielzahl von Forschungsprojekten, die vom Wiener Wissenschafts-, Forschungs- und Technologiefonds WWTF, dem Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung FWF, der European Science Foundation ESF u.a. gefördert werden. Ein Mitglied hat eine Stiftungsprofessur des WWTF inne.

Mit den im Wiener Biozentrum angesiedelten Instituten spielt Wien im Bereich der Zellbiologie eine international bedeutende Rolle. In den letzten Jahren hat sich eine fruchtbare Kooperation mit theoretischen Gebieten wie der Bioinformatik und der Mathematik entwickelt. Kürzlich wurde durch das *Johann Radon-Institut* eine von einem Mitglied dieser Arbeitsgruppe geleitete Gruppe *Mathematical Methods in Molecular and Systems Biology* am Wiener Biozentrum angesiedelt. Zu den wissenschaftlichen Schwerpunkten gehören die Modellierung und Simulation der Dynamik von Teilen des Zytoskeletts sowie von interagierenden Zellensembles (Soziomikrobiologie). Als wesentlichste Drittmittelaktivität in diesem Bereich seien zwei vom WWTF geförderte Kooperationsprojekte mit dem *Institute for Molecular Biotechnology* (Österr. Ak. Wiss.) genannt.

http://homepage.univie.ac.at/Reinhard.Buerger/Biomathematik.html

2 Dynamische Systeme und Ergodentheorie

Franz Hofbauer (Ergodentheorie, Dynamische Systeme) · Viktor Losert (Ergodentheorie, Harmonische Analysis) · Peter Raith (Ergodentheorie, Intervallabbildungen) · Klaus Schmidt (Mehrparametrische Ergodentheorie, Verbindungen zu

Algebra und Arithmetik) · *Roland Zweimüller (Ergodentheorie, Verbindungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie)*

• *Ergodentheorie, Harmonische Analysis und Funktionalanalysis* (V. Losert). Das wohl zentralste Resultat in der klassischen Ergodentheorie ist der individuelle Ergodensatz von Birkhoff, der unter gewissen Zusatzvoraussetzungen (der „Ergodizität") eine exakte Interpretation von Boltzmanns Postulat „Zeitmittel = Raummittel" liefert. In der Funktionalanalysis werden viel allgemeinere Ergodensätze über die Mittel von Potenzen linearer Operatoren bewiesen. Andere Verbindungen zwischen Ergodentheorie, Funktionalanalysis und harmonischer Analyse ergeben sich aus der Untersuchung von Aktionen allgemeinerer Gruppen auf Maßräumen oder linearen Räumen sowie aus der Theorie der Operatoralgebren.

• *Ergodentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie* (R. Zweimüller). Die Ergodentheorie ist seit jeher eng mit der Wahrscheinlichkeitstheorie verbunden. So definiert jeder stationäre stochastische Prozess eine maßtreue Transformation auf einem Wahrscheinlichkeitsraum und asymptotische Aussagen über das stochastische Verhalten von Prozessen (z.B. Rekurrenz oder Grenzwertsätze) werden oft mit Methoden aus der Ergodentheorie bewiesen. Die Untersuchung von Abbildungen auf unendlichen Maßräumen führt ebenfalls zu interessanten, aber auch schwierigen wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragen über Rekurrenz und asymptotisches Verhalten gewisser nichtstationärer Prozesse.

• *Intervallabbildungen* (F. Hofbauer und P. Raith). Viele klassische dynamische Systeme lassen sich durch geeignete Wahl eines „Querschnitts" des Systems auf eine Intervallabbildung zurückführen. Stückweise monotone Intervallabbildungen bilden eine besonders intensiv untersuchte Klasse von chaotischen dynamischen Systemen. Hier ist die Struktur der nichtwandernden Menge und der invarianten Maße von besonderem Interesse sowie das Verhalten dieser Objekte unter Störungen des Systems.

• *Mehrdimensionale dynamische Systeme* (K. Schmidt). Die klassische Theorie der dynamischen Systeme beschäftigt sich vornehmlich mit dem asymptotischen Verhalten einzelner Transformationen und Strömungen (also von Aktionen der natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen oder der reellen Zahlen, die üblicherweise als Zeitentwicklungen eines gegebenen Systems interpretiert werden). Viele Probleme aus der Physik und anderen Anwendungsgebieten führen aber zu Systemen mit mehrdimensionalen Symmetriegruppen (z.B. Kristalle, Quasikristalle oder Gittersysteme aus der statistischen Physik). Hier haben in den letzten Jahren sogenannte „algebraische" Aktionen mehrdimensionaler Gruppen zu unerwarteten neuen Phänomenen geführt, die auch für die Untersuchung allgemeinerer Systeme wertvolle Einsichten liefern.

Nach der Emeritierung von K. Schmidt mit Oktober 2009 ist derzeit eine Professur auf dem Gebiet der dynamischen Systeme ausgeschrieben.

http://plone.mat.univie.ac.at/research/groups/et

3 Finanzmathematik

Walter Schachermayer (Stochastische Analysis und Finanzmathematik)

Mit der im Jahr 2008 erfolgten Berufung von Walter Schachermayer an die Universität Wien wurde an der Fakultät für Mathematik eine Forschungsgruppe für Finanzmathematik gegründet. Neben einer Reihe von projektfinanzierten PostDocs und Dissertanten gehören ihr drei junge Kolleginnen und Kollegen an: Mathias Beiglböck, Johanna Michor (dzt. karenziert) und Johannes Muhle-Karbe.

Forschungsgegenstand der Finanzmathematik ist die stochastische Modellierung von Finanzmärkten. Typische Fragestellungen sind beispielsweise die Bewertung und Absicherung von Optionen und anderen Derivaten oder die Optimierung von Portfolios. Die erste Frage geht auf L. Bachelier (1900) zurück, der – 5 Jahre vor Einstein und Smoluchowski – die Theorie der Brownschen Bewegung entwickelte, um Preise von Optionen zu berechnen. Seit den Siebziger-Jahren erfuhr dieses Gebiet eine Renaissance, die mit den Namen Black, Scholes und Merton (Nobelpreis für Ökonomie 1997) verbunden ist.

Die Forschungsgruppe befasst sich mit der stochastischen Theorie, die hinter den finanzmathematischen Anwendungen steht. Stichwörter sind Semi-Martingale, No Arbitrage, das *Fundamental Theorem of Asset Pricing*, die Dualitätstheorie der Portfolio-Optimierung, etc.

Ein neuer Schwerpunkt, der von der Gruppe in den kommenden 5 Jahren im Rahmen eines ERC Advanced Grants behandelt wird, betrifft die Rolle von Transaktionskosten (z.B. Tobin tax) in der Portfolio-Optimierung. Dies führt auf mathematisch interessante Fragestellungen, die über den üblichen Rahmen der Semi-Martingal-Theorie hinausführen.

http://plone.mat.univie.ac.at/research/groups/mathematical-finance

Analysis, Geometrische Strukturen und Mathematische Physik

1 Differential Algebras and Nonlinear Analysis (DIANA)

James Grant (Differentialgeometrie, Allgemeine Relativitätstheorie) · Michael Grosser (Funktionalanalyis, Algebren verallgemeinerter Funktionen) · Günther Hörmann (Regularitätstheorie, Partielle Differentialgleichungen) · Michael Kunzinger (Algebren verallgemeinerter Funktionen, nichtglatte Differentialgeometrie) · Roman Popovych (Symmetriegruppen, mathematische Physik) · Roland Steinbauer (nichtglatte Differentialgeometrie, Allgemeine Relativitätstheorie)

In vielen Problemstellungen der Analysis und Geometrie spielen Singularitäten (im weitesten Sinne) eine wichtige Rolle. Die Forschungsgruppe DIANA beschäftigt sich primär mit Fragestellungen, in denen die gleichzeitige Beherrschung niedriger Regularität, nichtlinearer Operationen und Differentiation erforderlich ist. Ausgehend von der linearen Theorie der Distributionen nach Sobolev und Schwartz und motiviert durch den sequentiellen Zugang zur Distributionentheorie nach Mikusinski leiten sich die verwendeten Methoden dabei oftmals aus der Theorie der Differentialalgebren verallgemeinerter Funktionen (nach Colombeau, Egorov, Oberguggenberger) ab.

In der Strukturtheorie von Algebren verallgemeinerter Funktionen wurden in den letzten Jahren diffeomorphismeninvariante Einbettungen von Distributionenräumen (sowohl skalar als auch vektorwertig) konstruiert, die maximale Konsistenzeigenschaften bezüglich klassischer Operationen (Produkt glatter Funktionen, Lie-Ableitungen) besitzen. Während in der Distributionentheorie die Charakterisierung durch Punktwerte verloren geht, wurde in Colombeaualgebren eine entsprechende Theorie verallgemeinerter Punkte und Punktwerte entwickelt, die es in vielen Fällen erlaubt, Beweistechniken der klassischen Analysis auf verallgemeinerte Funktionen zu erweitern. Der von der Gruppe mitentwickelte Zugang zur nichtglatten Differentialgeometrie findet insbesondere in der Symmetriegruppen-Analyse partieller Differentialgleichungen und der mathematischen Relativitätstheorie Anwendung (Studium singulärer Raumzeiten, normal hyperbolische Operatoren für singuläre Metriken).

Eines der Hauptanwendungsgebiete nichtlinearer Theorien verallgemeinerter Funktionen sind partielle Differentialgleichungen mit stark singulären Daten und/oder Koeffizienten. Die Motivation für das Studium derartiger Probleme kommt häufig aus der mathematischen Physik, insbesondere aus der Geophysik (z.B. Wellenausbreitung in heterogenen Medien mit nichtglatten Übergängen oder Schichtungen, seismische Wellen). Die Mitglieder der Forschungsgruppe entwickeln neue Methoden und Konzepte für die Untersuchung des Problems der Ausbreitung von Singularitäten auf Basis einer erweiterten mikrolokalen Theorie von Pseudodifferential- und Fourier-Integraloperatoren mit distributionellen Symbolen und Phasenfunktionen.

Die Forschungsgruppe ist national und international eng vernetzt, insbesondere mit folgenden Universitäten: Innsbruck (M. Oberguggenberger), Southampton (J. Vickers), Imperial College London (C. Garetto), Gent (H. Vernaeve).

http://www.mat.univie.ac.at/∼diana/

2 Differentialgeometrie und Liegruppen

Andreas Čap (Parabolische Geometrien, Liegruppen) · Stefan Haller (Differentialgeometrie und Topologie) · Andreas Kriegl (Nichtlineare Funktionalanalysis, Quasianalytische Funktionen) · Peter Michor (Differentialgeometrie, Diffeomorphismengruppen, Shape Spaces) · Yuri Neretin (Darstellungstheorie, Nichtkom-

mutative Harmonische Analysis, Symmetric Spaces) · Armin Rainer (Invariantentheorie, Quasianalytische Funktionen)

Als PostDocs sind Matthias Hammerl und Katja Sagerschnig tätig. Als Dissertanten arbeiten Martin Bauer, Philipp Harms, Osmar Maldonado, Ales Navrat und die ganz neue Doktorin Katharina Neusser. Unter den früheren Mitgliedern finden sich Stuart Armstrong, Simon Hochgerner, Josef Teichmann und Dennis Westra.

Eines der Hauptgebiete in der Forschungsgruppe ist Differentialrechnung im Unendlichdimensionalen (Convenient Calculus) in verschiedenen kategoriell richtigen Ausformungen, darauf aufbauend die unendlichdimensionale Differentialgeometrie, wo geometrische Strukturen auf Mannigfaltigkeiten untersucht werden, die auf lokalkonvexen Vektorräumen modelliert sind. Darunter fallen Diffeomeorphismengruppen und *shape spaces*. Riemannsche Metriken auf shape spaces werden in der Bildanalyse verwendet.

Ein zweites Hauptgebiet ist das Studium von Wirkungen von Liegruppen, von geometrischen Strukturen von endlicher Ordnung, und von Cartan-Zusammenhängen. Dies hat starke Verbindungen zur Algebra, insbesondere zur Darstellungstheorie halbeinfacher Gruppen. Das Gebiet der 'Parabolischen Geometrie' ist in Zusammenarbeit mit Brünn und Prag hier entstanden.

Eine stark bearbeitete Frage ist auch, wie differenzierbar man Wurzeln von solchen Polynomen wählen kann, die von Parametern glatt (reell analytisch, quasianalytisch, ...) abhängen. Dieselbe Frage wird auch für parametrisierte Familien von unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren mit kompakter Resolvente behandelt.

http://www.mat.univie.ac.at/∼cap/group.html

3 Komplexe Analysis

Bernhard Lamel (CR-Geometrie) · Friedrich Haslinger ($\bar\partial$-Neumann-Problem)

Diese Gruppe arbeitet im Umfeld von zwei großen Problemfeldern, welche in ihren Anwendungen eng verwandt sind.

Einerseits beschäftigt sie sich mit dem $\bar\partial$-Neumann Problem. Dieser grundlegende Ansatz in der Komplexen Analysis mehrerer Veränderlicher verbindet die Lösungen der $\bar\partial$-Gleichung (das heißt, holomorphe Funktionen) auf Gebieten im $\mathbb{C}^N$ mit dem Verhalten des Laplace-Operators des zugeordneten Komplexes, welcher als $\Box$-Operator bezeichnet wird; sein Inverses ist der $\bar\partial$-Neumann Operator. Das Problem bei diesem Operator ist, dass die natürlichen Neumann-Randbedingungen nicht koerziv sind, und das entstehende Randproblem daher nicht mehr elliptisch ist; seine Analyse unterliegt deswegen starken Einflüssen der Randgeometrie der betrachteten Gebiete. Aktuelle Fragestellungen gehen auf die Spektralanalyse des kanonischen Lösungsoperators unter verschiedenen Voraussetzungen ein, welche direkte Auswirkungen auf das Regularitätsverhalten der $\bar{\partial}$-Gleichung hat. Wichtige Bedingungen, welche untersucht werden, sind das Wachstumsverhalten und Positivitätseigenschaften von plurisubharmonischen Funktionen und deren Einfluss auf solche Regularitätseigenschaften.

Andererseits beschäftigt sich die Arbeitsgruppe mit CR (kurz für Cauchy-Riemann) Geometrie. Dies ist die Geometrie von reellen Untermannigfaltigkeiten komplexer Räume, wobei man als Strukturgruppe biholomorphe Abbildungen betrachtet. Insbesondere versucht man hier, verschiedene Klassen von Mannigfaltigkeiten durch Normalformen zu charakterisieren oder zumindest die Struktur verschiedener Abbildungsgruppen (oder auch allgemeiner von Abbildungen an sich) zu verstehen. Neben dem geometrischen Interesse soll dies auch zu einem besseren Verständnis der Bedingungen führen, welche bei der Analyse der $\bar{\partial}$-Gleichung in natürlicher Weise auftauchen. Insbesondere interessieren wir uns für Regularitätseigenschaften holomorpher Abbildungen von Gebieten am Rand derselben, einem faszinierenden klassischen Problem, das bis heute nur in einigen speziellen Fällen verstanden wird, sowie für die Frage, wie man potentialtheoretische Eigenschaften von Gebieten geometrisch charakterisieren kann (und umgekehrt).

In den Anwendungen spielt dann das Regularitätsverhalten des $\bar{\partial}$-Operators (am Rand) die entscheidende Rolle, und Analysis, Geometrie sowie Potentialtheorie fließen in dessen Untersuchung in engem Zusammenhang ein. Weiters ergeben sich faszinierende Brücken zur Spektraltheorie von Pauli- und Schrödingeroperatoren in den analytischen Fragestellungen und interessante Querverbindungen zu algebraischen Problemen (Lösungsverhalten von analytischen Gleichungen) bei den geometrischen Fragestellungen.

http://plone.mat.univie.ac.at/research/groups/scv/

4 Mathematische Physik

Adrian Constantin (Fluidmechanik) · Maria Hoffmann-Ostenhof (Elliptische PDEs) · Alexander Komech (Hamiltonsche PDEs) · Gerald Teschl (Spektraltheorie und Dynamische Systeme)

Diese Arbeitsgruppe beschäftigt sich mit mathematischen Problemen, die ihren Ursprung in der Physik haben.

Zunächst handelt es sich dabei um ganz klassische Probleme aus der Quantenmechanik, bei denen es um die Eigenschaften von Lösungen der Schrödingergleichung von Atomen und Molekülen geht. Mathematisch dreht es sich dabei um Regularitätstheorie von elliptischen partiellen Differentialgleichungen, insbesondere in der Nähe von Singularitäten der Koeffizienten. Ein weiteres Gebiet ist die inverse Spektral- und Streutheorie, speziell für den Fall der eindimensionalen

Schrödingergleichung. Dabei geht es einerseits darum, das Spektrum des Operators beziehungsweise von Streugrößen zu verstehen, und andererseits darum, aus diesen Daten das zugehörige Potential zu rekonstruieren.

Insbesondere letzteres stellt den Kern der sogenannten inversen Streutransformation dar, mit deren Hilfe man nichtlineare, vollständig integrable Wellengleichungen lösen kann. Diese Methode ist vergleichbar mit der klassischen Methode, lineare partielle Differentialgleichungen mittels Fouriertransformation zu lösen und wird deshalb oft auch als nichtlineare Fouriertransformation bezeichnet. Es lässt sich damit eine Reihe integrabler Wellengleichungen behandeln, wie zum Beispiel die Korteweg-de Vries-Gleichung (KdV), die Camassa-Holm-Gleichung (CH), die Toda-Gleichung, die Kac-van Moerbeke-Gleichung und das Ablowitz-Ladik-System. Aber nicht nur reine Existenzaussagen lassen sich damit beweisen, sondern auch die Langzeitasymptotik lässt sich mittels einer nichtlinearen Version der klassischen Methode des steilsten Abstiegs analysieren, indem man das inverse Streuproblem als Riemann-Hilbert-Problem formuliert. Auf diese Weise kann man zum Beispiel mathematisch rigoros beweisen, dass eine beliebige (hinreichend stark) abfallende Anfangsauslenkung bei der KdV-Gleichung im Laufe der Zeit in eine Anzahl nach rechts laufender Solitonen plus einen nach links laufenden abklingenden oszillierenden Anteil zerfällt.

Abgesehen von integrablen Modellen, die in bestimmten Regimen gelten, z.B. KdV oder CH im seichten Wasser, sind Wellen mit großen Amplituden von Interesse. Das führt auf die Untersuchung von freien Randwertproblemen der eulerschen Gleichungen der Strömungsmechanik. Außer Oberflächenwellen ist auch noch die Strömung unter der Oberfläche von Interesse – mit besonderer Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Welle und Strömung.

Ein weiterer Schwerpunkt sind globale Attraktoren für nichtlineare Hamiltonsche partielle Differentialgleichungen und die Konvergenz zum statistischen Gleichgewicht bei hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen mit zufälligen Anfangsdaten.

Derzeit laufen zwei große Forschungsprojekte zu den Themen „Spektralanalysis und Anwendungen auf Solitonengleichungen“ und „Der Fluss unter einer Wasserwelle“.

http://plone.mat.univie.ac.at/research/groups/mp

Computational Sciences

1 A Computational Research Enterprise (ACORE)

Herbert Muthsam (Numerische Hydrodynamik, Modellbildung, Stellarphysik) · Friedrich Kupka (Numerische Hydrodynamik, Modellbildung, Stellarphysik)

Die Gruppe ACORE befasst sich traditionell mit sehr anwendungsnahen Fragestellungen aus dem Gebiet der astrophysikalischen Strömungsmechanik (mit diversen Erweiterungen). Im Zentrum stehen Simulation und Modellierung aus dem Bereich der Stellarphysik, dies auf der Basis umfangreicher Softwareentwicklungen, wobei (etwa auch in der einschlägigen Lehre) die Breite der verwendeten Methodik betont wird.

Derartige Arbeiten erfordern eine nicht zu geringe personelle Ausstattung, die vor allem in jüngerer Zeit durch diverse Forschungsprojekte sichergestellt werden konnte. Dementsprechend erlebt die Gruppe gerade derzeit einen namhaften Aufschwung. Wesentlicher Träger ist unser Programmpaket ANTARES (A Numerical Tool for Astrophysical RESearch). Es weist eine Kombination von Eigenschaften auf, wie sie es sonst auf dem Gebiet der Modellierung der stellaren Konvektion und Pulsation derzeit nicht gibt.

Wesentliche Eigenschaften von ANTARES sind

- Verschiedene hochauflösende ENO-Methoden für zeitabhänge Anfangs-Randwertprobleme der astrophysikalischen Hydrodynamik
- Arbeiten auch an Methoden für Fluide geringer Machzahl
- Gekoppelte Gleichungen für (wahlweise) kompressible Hydrodynamik, Strahlungstransport und Magnetohydrodynamik (inklusive Varianten für zweikomponentige Fluide)
- Räumlich 1D, 2D oder 3D
- Gitter rektilinear oder in Polarkoordinaten
- Gitterverfeinerung, in zunehmendem Maße auch adaptiv
- Gitter z.T. beweglich (für Sternpulsationen)
- Realistische Mikrophysik (Zustandsgleichung, Viskosität, Opazitäten)
- Hochgradige Parallelisierung auf verschiedenen Computerarchitekturen möglich durch Verwendung sowohl von MPI wie auch von OpenMP.

Die Software ist in beständiger Erweiterung begriffen. Ein wesentlicher Teil der Problematik besteht darin, dass Methoden, die sich bei Standardtests (übliche *shock tube problems* etc.) bewähren, noch lange nicht bei den hier erforderlichen Langzeitintegrationen ohne Weiteres funktionsfähig sind. Es wird derzeit z.B. daran gearbeitet, wie die Behandlung der Strahlungstransportgleichung so gestaltet werden kann, dass sich nicht, wie momentan, eine für gewisse Klassen von Objekten prohibitiv kleine zeitliche Schrittweite ergibt. Ebenso wird derzeit an der Verbesserung von Methoden für Strömungen geringer Machzahl bei Zweikomponentenfluiden gearbeitet.

Unter Verwendung von ANTARES ergeben sich zunehmend Resultate. So haben wir z.B. in Zusammenhang mit der Sonnengranulation die höchste Auflösung weltweit erzielt, die den besonderen (von der allgemeinen Turbulenz abweichenden) turbulenten Zustand dieser Strömungen zeigt. Im Hinblick auf die Sternklasse der Cepheiden sind wir die ersten, die realistische 2D-Modelle rechnen und derzeit die volle Komplexität der notwendigen Simulationen erkennen, wie dies auch bei einer anderen Klasse von Objekten (Sterne vom Spektraltyp A) der Fall war. Ebenso sind wir gerade im Begriff, das wichtige und schwierige Gebiet der Semikonvektion, welches, was Simulationen betrifft, im astrophysikalischen Fall bisher nur durch ganz vereinzelte Anläufe und nie mit der notwendigen Konsequenz behandelt worden ist, auf breiterer Front aufzurollen; ist doch nicht einmal bekannt, ob sich stellare Semikonvektion als großräumiges Strömungsmuster oder im Sinne übereinander liegender, stufenförmiger Schichten gestaltet. In allen genannten Problemstellungen ist dabei die Variation der Lösung der betreffenden mathematischen Gleichungen, die die physikalische Situtation beschreiben, auf um mehrere Größenordnungen auseinanderliegenden räumlichen und zeitlichen Skalen die entscheidende Schwierigkeit, die durch geeignete numerische Verfahren gelöst werden muss.

Wesentlich für derartige Arbeiten sind natürlich namhafte Ressourcen an Computerleistung. Diese konnten bzw. können einerseits an verschiedenen ausländischen Rechenzentren (Amsterdam, Garching, München) eingeworben werden. Sehr erfreulich ist in diesem Zusammenhang die Entwicklung des *Vienna Scientific Cluster* in der jüngeren Vergangenheit, wo noch dazu in nächster Zeit eine sehr ansehnliche Aufstockung stattfindet, sodass hier kompetitive Ressourcen zur Verfügung stehen. Da detailierte numerische Simulationen für viele astrophysikalische Fragestellungen selbst für Supercomputeranwendungen zu kostenintensiv sind, beschäftigen wir uns auch mir der mathematischen Modellierung turbulenter Strömung. Die zu diesem Zweck hergeleiteten Modellgleichungen müssen unter anderem durch numerische Simulationen untersucht werden, da sie die Gültigkeit zusätzlicher Hypothesen über die reinen Erhaltungssätze der Hydrodynamik hinaus voraussetzen. Sie können aber dafür auch in Verbindung mit komplexen Fragestellungen gelöst werden, die einer Simulation derzeit nicht zugänglich sind. Die Wichtigkeit von Forschungsprojekten (besonders FWF, in einem Fall auch DFG) ist schon eingangs erwähnt worden.

http://www.univie.ac.at/acore/

2 Computerorientierte Mathematik

Arnold Neumaier (Numerik, Optimierung, Computergestützte Statistik) · Hermann Schichl (Globale Optimierung, Differentialgeometrie)

Der gemeinsame Schwerpunkt unserer Arbeit ist die Optimierung – das Finden des besten oder ungünstigsten Werts einer Größe, die durch mathematische Beziehungen (Gleichungen und/oder Ungleichungen) eingeschränkt ist. Dies ergibt einen starken Bezug zu sehr unterschiedlichen Anwendungen, insbesondere im Bereich der statistischen Datenanalyse.

Zum Beispiel wird die für erfolgreiche Tier- und Pflanzenzüchtung notwendige genetische Variabilität der Leistung von Zuchtvieh und Zuchtpflanzen heute weltweit mithilfe des Softwarepakets VCE analysiert, das von der deutschen Forschungsanstalt für Landwirtschaft in Zusammenarbeit mit uns entwickelt wurde. Ein besonders von Klimaforschern geschätztes Programm, ARfit zur Spektralanalyse multipler Zeitreihen, entstand in Zusammenarbeit mit dem Program in Atmospheric and Oceanic Sciences der Princeton University. Aus einer Industrie-Zusammenarbeit entstand das Paket SNOBFIT, mit dem man aufwendige experimentelle Kalibrationen oder Computer-Simulationen effizient optimieren kann.

Eines der langfristigen Projekte unserer Gruppe ist die Schaffung und Weiterentwicklung von Optimierungspaketen, die für symbolisch gegebene Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen durch systematische Raumüberdeckung nicht nur lokal beste Werte, sondern das globale Optimum liefert. Die dazu u.a. eingesetzte Intervall-Analysis ist gleichzeitig ein wichtiges Werkzeug für das Führen rigoroser computergestützter Beweise; z.B. beruht der 1998 von Thomas Hales (Michigan) vorgestellte Beweis der fast 400 Jahre alten Keplerschen Vermutung u.a. auf Computerprogrammen, die mittels Intervall-Analysis und linearer Optimierung eine Vielzahl der benötigten Ungleichungen rigoros verifizierten.

Techniken aus der reellen algebraischen Geometrie führten vor Kurzem zu notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingungen für die Verifikation eines globalen Optimums eines Optimierungsproblems mit polynomialen Zielfunktionen und Nebenbedingungen. (Wie in einfachen Fällen schon aus der Schule (Sattelpunkte) bekannt, klafft bei allgemeineren Funktionen dagegen stets eine Lücke zwischen verifizierbaren notwendigen und hinreichenden Bedingungen.) Derzeit untersuchen wir die Möglichkeit, Effizienzsteigerungen durch Ausnutzen von Symmetrien, wie sie in vielen Optimierungsproblemen aus der Anwendung vorhanden sind, zu gewinnen. Im Fall kontinuierlicher Symmetrien führt das auf interessante Querverbindungen zur Differentialgeometrie und der Theorie der Lie-Gruppen.

Seit einiger Zeit befassen wir uns auch intensiv mit einer Modellierungssprache für beliebige Mathematik (*http://www.mat.univie.ac.at/∼neum/FMathL.html*) und, als Zukunftsvision, mit der Schaffung eines automatischen mathematischen Assistenten.

http://www.mat.univie.ac.at/∼neum/cma.html

3 Numerical Harmonic Analysis Group (NuHAG)

Hans G. Feichtinger (Abstract and Computational Harmonic Analysis) · Karlheinz Gröchenig (Zeit-Frequenz-Analyse und Pseudo-Differentialoperatoren) · Norbert Kaiblinger (Harmonische Analyse)

Die Harmonische Analyse hat an der Fakultät für Mathematik eine lange Tradition, zurückgehend auf Arbeiten und Vorlesungen von Leopold Schmetterer, bzw. im Bereich der Abstrakten Harmonischen Analyse durch Hans Reiter, der 1971 nach Wien kam, wenige Jahre nach Publikation seines Buchs (1968).

Durch die Lehrtätigkeit von Edmund Hlawka bzw. Johann Cigler standen am Anfang Querverbindungen zur Theorie der Gleichverteilung bzw. zur Theorie der Banach Moduln im Vordergrund. Die Frage der Mittelbarkeit von lokalkompakten Gruppen bzw. Banachalgebren ist bis heute Forschungsgegenstand an der Fakultät. Reiters Theorie der Segal-Algebren war der Ausgangspunkt für die Untersuchung von Banachräumen von Funktionen bzw. Distributionen, deren Verhalten unter der Fouriertransformation, Verschiebung oder das Studium von Faltungsalgebren. Unter dem Einfluss von Hans Triebel (Univ. Jena) kamen Aspekte der 'Theory of Function Spaces' ins Spiel, ebenso wie die u.a. von Elias Stein propagierte Theorie der Glattheit von Funktionen (Besovräume und dgl.).

Ein wichtiger Schritt war die vor gut 20 Jahren entwickelte Coorbit-Theorie. Sie erlaubt eine einheitliche, auf gruppentheoretischen Überlegungen basierende Sicht auf die kontinuierliche bzw. diskrete Wavelet-Transformation, die von der affinen Gruppe (der sog. $ax+b$-Gruppe) kontrolliert wird, ebenso wie die für Anwendungen wichtige Kurzzeit-Fouriertransformation. In ihrer diskretisierten Form spricht man von Gabor-Analysis, unter Bezugnahme auf die bahnbrechende Arbeit von D. Gabor von 1946. Die daraus resultierenden atomaren Zerlegungen erlauben die Charakterisierung von Funktionenräumen (u.a. Sobolev-Räume) durch Wavelet- bzw. Gabor-Koeffizienten, ganz allgemein die Definition von Modulationsräumen, die in den letzten 10 Jahren stark an Bedeutung gewonnen haben, sowohl in der Modellierung von langsam zeit-varianten Kanälen, als auch in der Beschreibung von Eigenschaften (und der Inversion) von Pseudo-Differential-Operatoren, z.B. solchen aus der sogenannten Sjöstrand-Klasse.

Ebenso wichtig war in den letzten 20 Jahren die Verbindung zur sogenannten Sampling-Theorie. Hier geht es um die Rekonstruktion von band-begrenzten Funktionen aus (ausreichend dicht genommenen) Abtastwerten. Varianten davon, wie die Rekonstruktion von Funktionen in Räumen vom Spline-Typ aus lokalen Mittelwerten gehören zum selben Problemkreis. Iterative Verfahren zur Rekonstruktion zusammen mit theoretischer Konvergenzanalyse (worst case scenario) in Familien von Funktionenräumen sind hier zum etablierten Standard geworden.

Durch diese breite mathematische Thematik war der Arbeitsgruppe NuHAG möglich, diverse Kooperationen mit Anwendergruppen (wie etwa der Medizin, der Nachrichtentechnik, der Bildverarbeitung, oder der Geophysik) zu realisieren. Beispielsweise wird derzeit ein großes Projekt im Rahmen der ESO-Mitgliedschaft von Österreich an der Fakultät in Kooperation mit dem Institut für Astronomie realisiert. Von 2005 bis 2009 war an der Fakultät das Marie Curie Exzellenz-Programm EUCETIFA (= European Center for Time-Frequency Analysis) beheimatet (siehe *http://www.nuhag.eu*). Weiters gab es in diesem Bereich in den letzten Jahren und bis jetzt immer wieder incoming Individual Marie Curie Fellows, die in diesem Bereich tätig sind und die ausgezeichnete Infrastruktur nutzen können.

http://www.univie.ac.at/NuHAG/

4 Partielle Differentialgleichungen und Anwendungen

Klemens Fellner (Reaktions-Diffusionsgleichungen und Koagulations-Fragmentationsgleichungen) · Clemens Heitzinger (Homogenisierungsprobleme und Anwendungen in der Nanotechnologie) · Peter Markowich (Nichtlineare partielle Differentialgleichungen) · Norbert Mauser (Quantenphysik und Halbleiter) · Christian Schmeiser (Kinetische Transportgleichungen)

Das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen ist in Wien stark vertreten, wobei diese (besonders anwendungsorientierte) Arbeitsgruppe zu den Kerngruppen zählt. So ist von ihr die Gründung des vom FWF geförderten Wissenschaftskollegs *Differential Equations* ausgegangen, das in den vergangenen zehn Jahren die Doktoratsausbildung auf dem Gebiet der Differentialgleichungen in Wien geprägt hat. Als Weiterführung und Erweiterung ist die Einrichtung einer informellen *Vienna School of Differential Equations* geplant, die die Rekrutierung, Finanzierung und Ausbildung von Doktoranden an der TU Wien und an der Universität Wien koordinieren soll. Die internationale Vernetzung der Arbeitsgruppe wird verstärkt durch mehrere von ihren Mitgliedern koordinierte EU-Netzwerke sowie durch das vom Wissenschaftsministerium kofinanzierte Einladungsprogramm des *Wolfgang Pauli-Instituts* (WPI), das am Standort der Mathematik-Fakultät von Mitgliedern der Arbeitsgruppe geleitet wird. Besonders erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang der Status des WPI als Träger einer Unité Mixte International des französischen CNRS.

Die Anwendungsorientierung wird unterstrichen durch mehrere vom Wiener WWTF geförderte interdisziplinäre Kooperationsprojekte im Rahmen des *Mathematik und …* -Programms. Die Bandbreite der Anwendungsgebiete reicht dabei von Physik und Biologie bis zur darstellenden Kunst.

Eine der Kernkompetenzen dieser Arbeitsgruppe ist die Anwendung asymptotischer Methoden auf Differentialgleichungsprobleme mit mehrfachen Längen- und Zeitskalen. Dies erlaubt eine rigorose Analyse der Zusammenhänge zwischen verschieden genauen (bzw. komplexen) Beschreibungen von Vielteilchensystemen. Die idealisierten „Teilchen“ können dabei u.a. Elektronen, Moleküle, einzellige Lebewesen, Fahrzeuge oder Planeten repräsentieren. Eine typische Modellhierarchie besteht aus einem mikroskopischen Modell (System von gewöhnlichen oder stochastischen Differentialgleichungen oder Vielteilchen-Schrödingergleichung), einem mesoskopischen Modell (kinetische Transportgleichung) und einem makroskopischen Modell (System partieller Differentialgleichungen). Konvergenzbeweise für Lösungen beim Übergang zwischen diesen Modellklassen zählen zu den wichtigsten Resultaten dieser Arbeitsgruppe. Andere Arbeitsschwerpunkte sind die Modellbildung und die Entwicklung effizienter numerischer Methoden und Simulationen gemeinsam mit Anwendern.

http://homepage.univie.ac.at/peter.markowich/pdeintro.html

Arithmetik, Algebra und Diskrete Mathematik

1 Arithmetik und Zahlentheorie

Christoph Baxa (Analytische Zahlentheorie und Diophantische Approximation) · Joachim Mahnkopf (Zahlentheorie und Automorphe Formen) · Johannes Schoißengeier (Analytische Zahlentheorie und Diophantische Approximation) · Joachim Schwermer (Arithmetische Algebraische Geometrie und Automorphe Formen) · Leonhard Summerer (Zahlentheorie)

Auf dem Gebiet der Zahlentheorie wird an der Fakultät in verschiedene Richtungen geforscht: etwa im Themenkreis der zerlegbaren Formen und deren Automorphismengruppen oder betreffend Eigenschaften spezieller gleichverteilter Folgen, insbesondere ihrer Diskrepanzen, mit dem Ziel, gute Abschätzungen dafür anzugeben. Dabei sind Kettenbrüche ein wichtiges Hilfsmittel; diese stellen aber auch unabhängig davon ein Interessensgebiet dar. Dadurch ist auch ein Zusammenhang mit Fragen der Diophantischen Approximation, einem weiteren Forschungsschwerpunkt, hergestellt. Dabei geht es darum, wie gut man Zahlen durch einfachere approximieren kann, also z.B. algebraische Zahlen durch rationale etc. Diesbezüglich werden am Institut auch Methoden der Geometrie der Zahlen verwendet, um mehrdimensionale Approximationen zu untersuchen. Im Blickpunkt stehen Transferungleichungen für Approximationskonstanten sowie die Herleitung von Schranken für ebendiese Konstanten. Die Beschäftigung mit vielen dieser Probleme steht in der von Edmund Hlawka in Wien begründeten Tradition. Weiters wurden auch Fragen im Zusammenhang mit dem 10. Hilbertschen Problem behandelt. Dabei handelt es sich um mit dem Gebiet der Logik in Verbindung stehende Probleme, unter anderem, ob es möglich ist, zu entscheiden, ob eine vorgegebene Diophantische Gleichung lösbar ist.

Einen weiteren Schwerpunkt stellen die Untersuchungen im Rahmen der Theorie arithmetischer Untergruppen von algebraischen Gruppen dar. Themen der Forschung sind

• *Kohomologie arithmetischer Gruppen*. Die Kohomologie arithmetischer Gruppen ist eng verknüpft mit der Kohomologie gewisser topologischer Mannigfaltigkeiten, den lokal symmetrischen Räumen zu algebraischen Gruppen, der Darstellungstheorie algebraischer Gruppen und der Theorie automorpher Formen. Hierbei stehen Untersuchungen zu Existenz und Eigenschaften von cuspidalen automorphen Formen sowie zu den arithmetischen und analytischen Eigenschaften von Eisensteinschen Reihen im Vordergrund. Ebenso werden Fragen zur geometrischen Konstruktion von Kohomologieklassen via geometrischer Zykel und deren Bedeutung für die automorphe Theorie behandelt.

• *Arithmetische Varietäten*. Für gewisse algebraische Gruppen ist der zugehörige lokal symmetrische Raum eine algebraische Varietät („Shimura-Varietäten"). Es ergeben sich Fragen nach dem Zusammenhang der Kohomologie arithmetischer Gruppen und der Zahlentheorie von Shimura-Varietäten.

• *Automorphe L-Funktionen*. Formeln für die speziellen Werte der Riemannschen Zetafunktion an ganzzahligen Stellen gehen schon auf Euler zurück. Ein weiteres Thema ist es, ähnliche Aussagen für die speziellen Werte von L-Funktionen zu kohomologischen automorphen Darstellungen algebraischer Gruppen zu beweisen.

• *P-adische automorphe Darstellungen*. In jüngster Zeit habe p-adische Aspekte der Theorie automorpher Darstellungen wichtige Anwendungen in der Zahlentheorie gefunden. Ein zentrales Problem in diesem Zusammenhang ist die Konstruktion von p-adischen Familien von automorphen Darstellungen, für das neue Lösungsmethoden entwickelt werden sollen.

http://www.mat.univie.ac.at/algebra/groups/arithmetic/

2 Algebraische Geometrie

Goulnara Arzhantseva (Geometrische Gruppentheorie) · Herwig Hauser (Algebraische und analytische Geometrie, Singularitäten) · Ludmil Katzarkov (Algebraische und symplektische Geometrie, Homologische Mirror Symmetrie) · Joachim Schwermer (Automorphe Formen, Geometrie arithmetischer Varietäten)

Die Forschungen in der Algebraischen Geometrie gruppieren sich um zwei große Themenkreise: Singuläre Algebraische Varietäten und Birationale Geometrie.

Singularitäten sind Punkte, in denen algebraische Varietäten (Nullstellenmengen von polynomialen Gleichungssystemen) nicht glatt, also keine Mannigfaltigkeiten sind. Ihr Verständnis und ihre Strukturtheorie sind grundlegend für das lokale Studium der Geometrie von Varietäten. Gleichzeitig sind sie – schlagwortartig unter dem Begriff Katastrophentheorie zusammengefasst – charakteristisch für Obstruktionen in physikalischen Phänomenen und Prozessen, die sich in Sprüngen, Unstetigkeiten und Bruchstellen artikulieren.

Ein klassisches Problem der Singularitätentheorie (mit unzähligen Anwendungen) ist ihre Auflösung, das heißt, das Auffinden einer Parametrisierung der singulären Varietät durch eine Mannigfaltigkeit. Dieser Übergang formuliert sich algebraisch als „Explizitierung" einer impliziten Gleichung. Die Forschungen an der Fakultät für Mathematik lieferten und liefern wesentliche Beiträge zum Verständnis des noch immer offenen Problems der Auflösung über Körpern positiver Charakteristik. Methoden der lokal analytischen Geometrie werden mit Resultaten der kommutativen Algebra, insbesondere der Theorie der lokalen Ringe, kombiniert, um die Komplexität einer Singularität effizient zu beschreiben und zu messen. Dies ist notwendig, um eine Induktion durchführen zu können, die schrittweise die Varietät via *blowups* (= Aufblasungen) einer Mannigfaltigkeit annähert.

Die Untersuchungen im zweiten Themenkreis, der birationalen Geometrie, beschäftigen sich zum einen mit klassischen Rationalitätsfragen von Varietäten. Hier wurden in Dimension drei und vier international beachtete Durchbrüche erzielt.

Gleichzeitig gibt es wichtige Verbindungen zur „Mirror-Symmetrie“, zur symplektischen Geometrie und zu derivierten und triangulierten Kategorien. Spezialfälle der Vermutung über die homologische Spiegelungssymmetrie konnten bewiesen werden.

Neuere Resultate betreffen nicht-kommutative gemischte Hodge-Strukturen, deren Degenerierungen über die Spektra von Fukaya-Seidel-Kategorien untersucht werden. Diese Ideen erlauben einen neuen Zugang zum Vergleich von algebraischen Zykeln auf niedrig-dimensionalen Calabi-Yau- mit hochdimensionalen Fano-Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Komplementiert werden diese Untersuchungen durch die Konstruktion von Griffiths-Gruppen und Chern-Simons-Funktionalen.

Neben den genannten Forschungsrichtungen wird die Algebraische Geometrie durch Visualisierungen und zahlreiche Ausstellungen von reellen algebraischen Flächen einem größeren Publikum nähergebracht. Besonders zu erwähnen ist die Ausstellungsreihe IMAGINARY, die, konzipiert von Mathematikern der Fakultät für das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach, im Rahmen des *Jahres der Mathematik 2008* in Deutschland in vielen Städten zu Gast war und nun weiter durch Europa unterwegs ist.

http://www.mat.univie.ac.at/algebra/groups/alggeom/

3 Algebraische Strukturen

Goulnara Arzhantseva (Geometrische Gruppentheorie) · Karl Auinger (Gruppen, Halbgruppen) · Dietrich Burde (Liegruppen, Liealgebren, Darstellungstheorie) · Herwig Hauser (Kommutative Algebra) · Joachim Schwermer (Algebraische Gruppen)

Die Forschungen über algebraische Strukturen betreffen unter anderem die folgenden Gebiete: geometrische Gruppentheorie, Gruppen, Halbgruppen, Liegruppen, Liealgebren, kristallographische Gruppen, Darstellungstheorie, kommutative Algebra und algebraische Gruppen. Im Einzelnen bedeutet das eine Vielzahl interessanter Probleme, Methoden und Gebiete, die sich naturgemäß mit schon erwähnten Schwerpunkten überlappen.

In der geometrischen Gruppentheorie werden hierbei geometrische, analytische, kombinatorische und rechnerische Aspekte der Gruppentheorie untersucht, wie etwa das Studium von asymptotischen Invarianten von Gruppen oder das Studium von C^*-Algebren, die mit Gruppen assoziiert sind.

Im Bereich der Halbgruppen geht es um Pseudo-Varietäten endlicher Halbgruppen, Gleichungstheorien, graphentheoretischen Methoden und Verbindungen mit formalen Sprachen und Automatentheorie.

Die Forschung über Liegruppen und Liealgebren betrifft Deformationstheorie und Degenerationstheorie, Probleme der Darstellungstheorie und Kohomologietheorie von Liealgebren, geometrische Strukturen auf Liegruppen, kristallographische Gruppen und ihre Verallgemeinerungen, affine Wirkungen auf Liegruppen und -algebren, die in der theoretischen Physik von Interesse sind.

Die Forschung über kommutative Algebra bezieht sich auf verschiedene Aspekte der algebraischen Geometrie, etwa im Zusammenhang mit Auflösungen von Singularitäten. Dabei geht es zum Beispiel um die Theorie der lokalen Ringe.

Die reichhaltigen Aktivitäten im Bereich automorphe Formen schließen auch Gebiete ein wie zum Beispiel die Arithmetik algebraischer Gruppen, reelle und p-adische Lie-Gruppen, sowie die Geometrie arithmetischer Varietäten.

http://www.mat.univie.ac.at/algebra/groups/algstruct/

4 Kombinatorik und Diskrete Mathematik

Ilse Fischer (Abzählende und Algebraische Kombinatorik) · Markus Fulmek (Abzählende und Algebraische Kombinatorik) · Christian Krattenthaler (Kombinatorik, Statistische Physik, Spezielle Funktionen, Zahlentheorie) · Bernhard Krön (Graphenautomorphismen, unendliche Graphen, Geometrische Gruppentheorie) · Michael Schlosser (Kombinatorik, Spezielle Funktionen)

Im Zentrum der Forschung der Gruppe „Kombinatorik & Diskrete Mathematik" stehen zum einen Problemstellungen der Abzählkombinatorik und der Algebraischen Kombinatorik, insbesondere solche, die in anderen Gebieten der Mathematik, wie etwa Algebra (Gruppentheorie, Darstellungstheorie), Algebraische Geometrie oder der Zahlentheorie, oder anderen Wissenschaften, wie etwa Informatik oder Statistischer Physik, auftauchen.

In der Tat werfen strukturelle Fragestellungen, Spiegelungsgruppen und Klassische Gruppen betreffend, aber auch geometrische Fragestellungen, die kombinatorische Analyse von Gittermodellen der Statistischen Physik oder selbst Diophantische Probleme der Analytischen Zahlentheorie Probleme auf, die auf die Abzählung von kombinatorischen Objekten hinauslaufen.

Die kombinatorischen Objekte, die in diesem Zusammenhang auftreten, sind unter anderem nichtkreuzende Partitionen, Plane Partitions, Rhombus Tilings, nichtüberschneidende Gitterpunktwege, alternierende Vorzeichenmatrizen und monotone Dreiecke. Die Abzählung dieser Objekte führt im besten Fall zu exakten, expliziten Formeln – wenn das aber nicht möglich ist, ist man bemüht, asymptotische Formeln herzuleiten.

Die Vorgangsweise ist dabei im selben Atemzug „methodologisch" wie auch „angewandt": In den vergangenen Jahren wurden Determinantentechniken und Techniken für polynomiale Abzählformeln entwickelt, die auf eine Reihe von konkreten Problemen erfolgreich angewandt wurden. Da dies in der Regel auch wesentlich mit dem Einsatz des Computers einhergeht, werden immer wieder Computerprogramme bereitgestellt, die einem bei der Lösung der Probleme unterstützen.

Auf der anderen Seite treten in diesem Zusammenhang regelmäßig Hypergeometrische Reihen sowie q-Hypergeometrische Reihen auf, die einen zweiten Forschungsschwerpunkt der Gruppe darstellen. Die Anwendung von Summations- und Transformationsformeln von (q-)Hypergeometrischen Reihen spielt immer wieder eine entscheidende Rolle bei der Lösung von Abzählproblemen, die die oben erwähnten Objekte betreffen. Der Zusammenhang besteht aber auch umgekehrt: Kombinatorische Resultate können die Entwicklung der Theorie von (q)-Hypergeometrischen Reihen bewirken.

Weitere Forschungsthemen betreffen unendliche Graphen und Gruppen. In der geometrischen Gruppentheorie werden geometrische Eigenschaften von Cayley-Graphen wie Quasiisometrieinvarianten und Ränder im Unendlichen mit algebraischen Eigenschaften der Gruppe in Verbindung gebracht. In der Bass-Serre-Theorie und der Strukturbaumtheorie werden Bäume und baumähnliche Graphen behandelt. Dem stehen auf der algebraischen Seite Gruppensplittings gegenüber wie z.B. der Struktursatz von J. Stallings über Gruppen mit mehr als einem Ende. Eher strukturelle Fragen werden für Graphen untersucht, die bestimmte Symmetriebedingungen erfüllen. Das können Symmetriebedingungen sein, die schwächer als Transitivität sind, oder solche, die wesentlich stärker sind, bis hin zu 'highly arc transitive digraphs'.

http://www.mat.univie.ac.at/algebra/groups/discmath/

Fachdidaktik/Schulmathematik

Stefan Götz (Didaktik der Stochastik, Bildungsstandards) · Hans Humenberger (Anwendungsorientierung, Mathematik als Prozess, Elementarmathematik)

Fachdidaktik hat aus unserer Sicht die Aufgabe, grundlegende Beiträge für den

Prozess des fachbezogenen Lehrens und Lernens zu leisten. Diese sind sehr vielfältig und beziehen sich z.B. auf die Entwicklung neuer Unterrichtsinhalte, methodische Fragen und die Erforschung der Unterrichtspraxis. Die Ergebnisse dieser Forschungs- und Entwicklungsprozesse sollen in verständlicher und überzeugender Form an die Lehrenden in den Schulen weitergegeben und mittels Vorträgen bei wissenschaftlichen Tagungen und Publikationen in einschlägigen Zeitschriften mit der fachdidaktischen Community kommuniziert werden. Forschungsprojekte:

• Die interfakultäre Forschungsplattform „Theorie und Praxis der Fachdidaktik(en)“ (2009–2012) bezieht mehrere Fakultäten mit ein, auch die Fakultät für Mathematik, die einen stellvertretenden Leiter stellt (S. Götz). Ziel ist es, Gemeinsamkeiten und Unterschiede der einzelnen Fachdidaktiken (vorerst an der Universität Wien) aufzuzeigen. Dabei wird auf Inhalte, Methoden, Spezialisierung, kognitive und affektive Komponenten, theoretische Konzepte und (hoch)schulpraktische Umsetzungen, Begriffsbildungen, empirische Untersuchungsdesigns, etc. fokussiert. Eine zusätzliche Intention der Forschungsplattform ist es auch, die Nachwuchsförderung im Bereich Fachdidaktik voranzubringen.

• EU-Projekt “Developing Quality in Mathematics Education II” (2007–2010, elf Länder, H. Humenberger): Hierbei geht es u.a. darum, Unterrichtsmaterialien zu entwickeln, die für die Schüler(innen) ansprechend sind (sie also kognitiv aktivieren und involvieren), die viel Selbstständigkeit im Prozess des Lösens bzw. Bearbeitens der Aufgaben zulassen bzw. erfordern. Ein Team entwickelt solche Aufgaben, dann werden sie in die verschiedenen Sprachen der beteiligten Länder übersetzt und dort im Unterricht ausprobiert. Das zugehörige Feedback trägt zur Verbesserung dieser Aufgaben bei, die von einem Forschungsteam evaluiert und nach verschiedenen Kriterien hin untersucht werden (für mehr Informationen und Materialien siehe *http://www.dqme2.eu*).

• EU-Projekt “Math2Earth – Bringing Mathematics to Earth” (2008–2010, A. Ulovec): Einer der häufig genannten Antworten auf die Frage nach Gründen für mangelnde Motivation von Schüler(inne)n im Mathematikunterricht ist: „Das ist zu abstrakt, hat keine echten Anwendungen, und wir brauchen es nicht im späteren Leben“. Das Projekt sollte hier gegensteuern, indem es realistische Anwendungen der Mathematik im Berufs- und Alltagsleben zeigt (in Form von Unterrichtsmaterialien), die in Zusammenarbeit mit Professionisten verschiedener Berufe entwickelt werden. Diese Materialien sind sowohl in Buchform als auch online für Lehrkräfte gratis erhältlich.

Internationale Tagungen: Bei uns finden immer wieder auch internationale fachdidaktische Tagungen statt, z.B. die so genannte ISTRON-Tagung im Herbst 2009 (ISTRON ist eine Vereinigung von Fachdidaktiker(inne)n und Lehrkräften mit dem Ziel, die Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht zu stärken) oder die Tagung des Stochastik-Arbeitskreises der *Gesellschaft für Didaktik der Mathema-*

tik im Herbst 2010. Seit 2006 sind wir auch an der Organisation der „Internationalen Tagung über Schulmathematik“ an der TU Wien (M. Kronfellner) beteiligt (alle zwei Jahre: 2006, 2008, 2010).

Lehrerfortbildung: In den Jahren 2008–2009 war unsere Arbeitsgruppe federführend am „Regionalen Fachdidaktikzentrum Mathematik Wien“ beteiligt. Dieses wurde von IMST in diesem Zeitraum gefördert; dabei wurden z.B. drei Lehrerfortbildungstage organisiert (Volksschule, Sekundarstufe 1, Sekundarstufe 2). Die Mitglieder der Arbeitsgruppe organisieren auch darüber hinaus regelmäßig Lehrerfortbildungen (z.B. die schon seit vielen Jahrzehnten bei uns stattfindende ÖMG-Lehrerfortbildungstagung). Es gibt bei uns (jeweils im Sommersemester) auch regelmäßig ein fachdidaktisches Kolloquium, bei dem Vortragende aus dem In- und Ausland zu aktuellen fachdidaktischen Themen bzw. Problemen im Mathematikunterricht sprechen.

Schulbücher: Ein wichtiger Beitrag zum Schulbezug unserer Arbeiten wird durch die Beteiligung an überdurchschnittlich vielen Schulbuchreihen deutlich, als Herausgeber bzw. als Autor(inn)en. So sind Mitglieder unserer Arbeitsgruppe an zwei Schulbuchreihen für die AHS-Oberstufe, an drei für die AHS-Unterstufe bzw. Hauptschule und an einem für die Volksschule beteiligt.

http://www.univie.ac.at/mathematik_didaktik/

Computational Science Center

Zusätzlich zu den oben beschriebenen Arbeitsgruppen gibt es noch das *Computational Science Center* unter der Leitung von Otmar Scherzer (das jedoch eigenständig und nicht der Fakulät für Mathematik zugeordnet ist).

http://www.csc.univie.ac.at/

Danksagungen. Wir bedanken uns bei den einzelnen Forschungsgruppen für die zur Verfügungstellung der Arbeitsgruppendarstellung.

Adresse der Autoren:

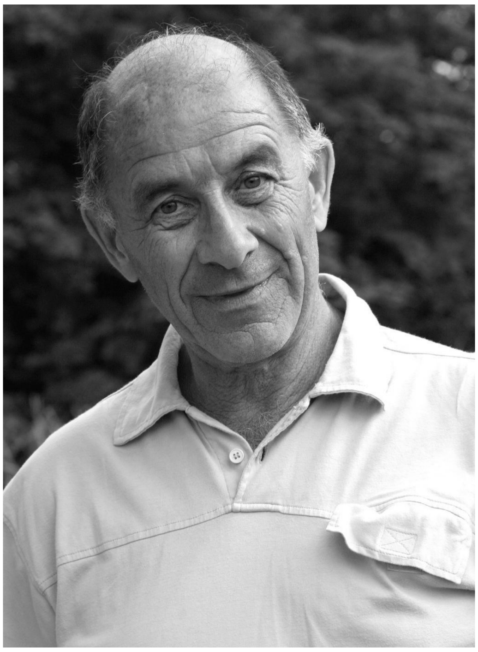
Fakultät für Mathematik, Universität Wien,
Nordbergstraße 15, A 1090 Wien.
email dekanat.mathematik@univie.ac.at,
http://www.mat.univie.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 214 (2010), 49–57

Vladimir Igorevich Arnold

Oleg Karpenkov
TU Graz

In the following article the last Ph.D. student of V.I. Arnold gives a personal account on his teacher who unexpectedly passed away earlier this year.



On June 3, 2010, the outstanding mathematician Vladimir Igorevich Arnold died in Paris at the age of 72. He was an international member of the French Academy of Science since 1983, an international member of the U.S. National Academy of Sciences since 1984, a corresponding member/member of the Russian Academy of Sciences since 1984/1990, a member of the Academy of Arts and Sciences of the United States since 1987, a member of the London Royal Society since 1988, an international member of Accademia dei Lincei in Rome since 1988, and a member of the Russian Academy of Natural Sciences since 1991. From 1996, V. I. Arnold was President of the Moscow Mathematical Society.

Vladimir Arnold started his mathematical life with finding a solution of the 13t h Hilbert problem at the age of twenty. For this result he received the Prize of the Moscow Mathematical Society in 1958. He had a great influence on many branches of mathematics and its applications. He is one of the co-authors of the theory of small denominators (KAM-theory), developed a theory of Lagrangian singularities, and he laid down the basics of symplectic topology. Vladimir Arnold has influenced differential equations and partial differential equations, singularity theory, topology, theory of braids, real algebraic geometry, magneto-hydrodynamics, the theory of multidimensional continued fractions, finite projective geometry, and combinatorics.

ISSN 0020-7926

Together with his scientific advisor A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold received the Lenin prize of the Soviet Government in 1965, for work on celestial mechanics. In 1982 he received the Crafoord Prize of the Swedish Academy of Sciences (with L. Nirenberg) for his theory of nonlinear differential equations. In 1994 he was awarded the Technion's Harvey prize for a *basic contribution to the stability theory of Dynamical Systems, his pioneering work on singularity theory and seminal contributions to analysis and geometry*. Further, in 2001, he received the Dannie Heineman Prize for Mathematical Physics for *his fundamental contributions to our understanding of dynamics and of singularities of maps with profound consequences for mechanics, astrophysics, statistical mechanics, hydrodynamics and optics* and the Wolf Prize in Mathematics. In 2007 he was awarded the State Prize of the Russian Federation in science and technology for *outstanding success in mathematics*. Together with L. D. Faddeev, V. I. Arnold in 2008 received the Shaw Prize *for their contributions to mathematical physics*.

Supervising Ph.D. theses. I thank my lucky stars that I had an opportunity to be supervised by Vladimir Arnold and to work with him for almost ten years. Despite all the academic honors and rewards, Vladimir Arnold always kept in touch with students. Anyone was able to become a student of Vladimir Arnold, I did not remember that he refused to work with someone. However, only a few students continued. It was not complicated to become his student, but it took an effort to stay his student and later to write a Ph.D. thesis under his supervision.

The first task a student receives from Vladimir Arnold is to solve the exercises of the so-called *mathematical trivium*. This is a list of 100 selected exercises, that any master student should be able to solve. In addition, Vladimir Arnold said that any of these problems should take at most 5 minutes. They cover many branches of mathematics, and each of them is dedicated to some bright idea in the corresponding area. Let us formulate one of them.

Problem 2: Compute $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\tan x - \tan\sin x}{\arcsin\arctan x - \arctan\arcsin x}$.

This famous exercise has two essentially different solutions. One is straightforward: One should apply the rule of de l'Hospital. However, the calculation of derivatives by hand can take several hours or even days depending on the technical ability of the student. The second solution is very elegant. I will skip it in order to give the reader the opportunity to discover the idea and to enjoy the process of solving the exercise. Usually each exercise takes much more than just 5 minutes to solve. In my case it was only 10 exercises per week. Vladimir Arnold checked the exercises only in written form. If there is even a very small non-clear or non-accurate statement in the solution, the exercise is returned unaccepted with partially humorous remarks. As I heard, there is no one who successfully solved all (or even 90 of 100) exercises – it is almost impossible. While probably many of these exercises were collected by Vladimir Arnold from folklore, several definitely belong to himself.

When the majority of exercises is done, Vladimir Arnold has collected evidence that he works with a strong and diligent student. At that time he already has some information on the abilities and mathematical priorities of his new follower. Nevertheless he never proposed certain problems to his students, he told them that they can choose any problem he (Arnold) is currently interested in. When I asked him for a problem for my Ph.D., he told me that *to choose a problem is as personal as to choose a wife*, so to ask this question to someone else is just useless. Each year he announced many new problems and new directions that appeared in mathematics, many of which are collected in the book *Arnold's Problems* (Springer Verlag, Berlin; PHASIS, Moscow, 2004), where they are supplemented by comments on their state at that time by mathematicians who personally contributed to them. The half-life of such a problem turned out to be approximately 8 years. Many are still open or only partially solved.

As a rule, Vladimir Arnold worked in a certain area for several years. He did there as much as he could, formulating problems and conjectures for his students and colleagues for further study. Then he usually switched to another area, giving to his followers the opportunity to enjoy the beauty of mathematics. Such a system works perfectly, since students do not compete with other former students, and the knowledge of the members of Arnold's school is complementary but not competitive.

It was usually hard to write a Ph.D. thesis under the supervision of Vladimir Arnold. When you have enough material for the thesis and finally bring a text to Vladimir Arnold to read (waiting for his praise and admiration), then within one week he gives the thesis back to you, together with a review for the Ph.D. defense, looking at you in a very amicable and gentle-ironical way. So you are almost ready to go and defend the thesis, but then you suddenly have a closer look at the returned text and you find that all the empty spaces on each page and sometimes between the lines are filled by Arnold's remarks. The amount of remarks and corrections was really comparable to the amount of the text itself. The last hope for easy money is lost when you read his review. First he describes the area of the thesis and its importance in science and applications, but then he continues with the following: *unfortunately the student did not understand all this, he did not solve the original problems, and the text is completely unreadable.* Finally he concludes with an exposition of currently unsolved problems in this area for further investigation and wishes you good luck in the Ph.D. defense. Of course it is useless even to try to defend the thesis with such a review. So after this trip back to the earth you work hard for several weeks and prepare a completely revised text (that is really an improvement on the first one). Then you give the second version to Vladimir Arnold, and he returns within one week with new comments and a review. In this review he softens some of the original statements, but usually it is still not sufficient for a Ph.D. defense. So you should continue to improve your text. When I had rewritten my thesis 7 times, I finally received a review with which I could try to defend the thesis. Later I found out that I was actually lucky: in some cases the number of iterations was 20! Here I should admit that after each correction cycle the quality of the text in general improves, and its mathematical worth increases as well. In addition, the student learns much on how to write. All of Vladimir Arnold's articles and books are written in perfect language, understandable to specialists from different areas: he was aiming to educate them in the same way as his students.

Outlook on Mathematics. Vladimir Arnold liked to joke that mathematicians often experience life in the way of a person much younger than they actually are. They somehow finish their 'growth' at certain age. The younger the age of maturity, the more brilliant the professional characteristics of a mathematician usually are. Then he states that he himself stopped growing at the age of a 12–13 year old boy. This is approximately the age when a child is wondering about everything he sees. He is trying to play with everything and to make simple experiments which do not make sense for an adult, with the purpose to answer thousands of 'why' questions. Usually when children grow older, they are less and less interested in such things.

Experiments formed an essential part of Vladimir Arnold's research. He stated that mathematics is an experimental science. If one is aiming to solve some problem first he should collect information. Many laws just cannot be seen without an exhaustive study of examples.

In addition Vladimir Arnold did not like to distinguish the branches of mathematics, since it is based on bright ideas that appear in theorems of different areas of mathematics. This can be easily seen by means of the idea of Euclid's algorithm and its realization in terms of ordinary continued fractions. The algorithm was invented in number theory to find the greater common divisor $\gcd(p,q)$ of two integers p and q, and works as follows. The first step is to find integers a_0 and r_1 with $q > r_1 \geq 0$ such that

$$p = a_0 q + r_1.$$

Suppose we have completed $k-1$ steps, resulting in integers a_{k-2} and r_{k-1}. Then we find a_{k-1} and r_k where $r_{k-1} > r_k \geq 0$ such that

$$r_{k-2} = a_{k-1} r_{k-1} + r_k.$$

The algorithm stops after $n+1$ steps, and we have $\gcd(p,q) = r_n$. The key point of the algorithm is computation of the numbers $a_0, \ldots, a_n$. It is interesting to note that these numbers form an ordinary continued fraction for p/q. Indeed,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

To calculate $a_0, \ldots, a_n$ for a positive rational number p/q, we only employ the two basic operations $s \to s-1$ and $s \to s^{-1}$:

$$\frac{p}{q} = 1 + \left(\frac{p}{q} - 1\right) = \ldots = a_0 + \left(\frac{p}{q} - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor\right) = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{p}{q} - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor}} = a_0 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\frac{p}{q} - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor} - 1\right)} = \ldots$$

Here $\lfloor x \rfloor$ denotes the greatest integer $\leq x$. Similar operations appear in different problems, and interpretations of Euclid's algorithm are used in Anosov systems in dynamic theory, in classifications of rational knots and 3-dimensional manifolds in topology, and in Hirzebruch-Jung theory of singularity resolutions. Simplest continued fractions appear in the spiral patterns of sunflowers and cones of trees. This is also due to the fact that the corresponding biological laws somehow refer to the mentioned operations.

In the opinion of Vladimir Arnold, the difference between mathematics and physics is only in the total cost of experiments. In physics, they may cost millions like in the case of the Large Hadron Collider, while in mathematics they cost almost nothing: one can perform them with a pen and paper. In the past centuries certain areas of mathematics, mechanics, and astronomy were close and essentially dependent on each other.

Vladimir Arnold payed extra attention to the history of science and knew many details from the original classical texts of the great mathematicians of the past centuries: L. Euler, H. Poincairé, F. Klein, etc. He liked to know by whom a theorem was discovered first. The Arnold principle states that *theorems, theories, principles, etc. in science are usually not named after their authors*. While saying this he always added that *Arnold's principle applies to itself.* He explained to us that there are two ways to avoid wrong attributions: One should either tell all discoveries fairly to everyone, or to keep them secret up to the end. In both cases there is no opportunity for another party to steal the results. He mentioned that he prefers and follows only the first strategy and taught us not to be lazy to give talks and to make them in such a way that everyone can understand them, even if he works in another field of mathematics.

Arnold's seminars. Vladimir Igorevich was running two permanent seminars: one in Moscow and one in Paris. I attended the Paris seminar only a small number of times, but I was regularly participating in the Moscow seminar which took place in room 14-14 of the Main Building of Moscow State University. This building is situated on top of a spectacular green hill (Vorobyevi Gori) to the South-West of the center of Moscow near the Moscow river. It is one of seven Stalinist neoclassic-style skyscrapers built in 1953. It has 36 floors, the Mathematical Department being located at floors 12–16, with a magnificent view of the city. A seminar usually started on Tuesdays at around 4 p.m. and officially lasted for one and a half hours. In former times it could continue for two or three more hours, depending on the subject. When I started to attend the seminar in 1998, it lasted usually no more than two hours, since many of its participants, including Arnold himself, were involved in the meetings of the Moscow Mathematical Society scheduled two hours after the seminar.

The first talk of each winter semester was always given by Vladimir Arnold himself. This was the most important event in the life of the seminar. In this talk he discussed new problems for the seminar that he had collected recently. The list usually contained 10–20 problems on 4 or 5 different subjects. Some of them were rather elementary and perfectly suitable for students starting their research, while other problems were dealing with more complicated subjects that sometimes even gave a new sight on classical problems and conjectures. These problems form the core of the volume *Arnold's Problems* mentioned above.

Apart from the problems, Vladimir Arnold usually distributed 'tasks' to his former students. He brought recent papers that attracted his attention and asked the members of the seminar if someone is interested to read some of them and give their opinion. In the majority of cases the papers were interesting, and we spent one seminar or half of a seminar to listen to the participants who had read the papers.

The remaining seminar talks were given by his students and colleagues who presented their new results, and in part by distinguished colleagues who gave survey talks. This seminar did not have a certain fixed subject. Vladimir Arnold himself contributed to many branches of mathematics, including applied mathematics and mechanics. So one could expect talks on current problems all over mathematics and its applications. It was felt to be an honor to speak at the seminar and to receive comments of Vladimir Arnold and his former students, many of whom are now holding professor positions at Moscow State University or some other institutes or universities in Moscow. Almost always the feedback received from the audience led to new insights, additional references, and ideas for future work.

It was really a peculiar experience for a speaker to have Vladimir Igorevich in the audience. He would interrupt any speaker, especially in his seminar. When the talk started without taking care of all important definitions and notions, he would ask for all the necessary details and himself explain the importance of these details to the speaker, mentioning examples when different understandings or definitions of certain notions lead to completely different results. Such a speaker would be lucky to give the main definitions and the main result in one and a half hours. In some sense, of course, this is the minimal amount of information necessary for the audience. So at the end of the talk it was completely clear what was the result and what are the open questions (which are often not mentioned by the speakers, but are extremely interesting for the audience). While listening to such a presentation, Vladimir Arnold did not distinguish between a young unknown student and a famous academician. Of course not all people would appreciate such an attitude and from time to time they got quite angry (Vladimir Igorevich did not pay attention to their complaints). All this made the talks extremely useful for the audience and in many cases for the speaker himself. Sometimes, when the speaker ignored his remarks, Arnold would start to correct his students' papers or think about his own research. Thus the speaker was in some sense 'punished': his talk had become an ordinary talk, with the majority of the audience not paying attention, either switching to their own businesses, or diligently continuing looking at the blackboard with eyes wide open.

On abstraction and teaching. Vladimir Arnold was against what he called 'algebraization' of mathematics which is very popular in our days among many people whom he would refer to as the *devils of algebra*, while he attributed himself as the *angel of geometry*. One cannot conclude from this that he was 'against' certain areas of mathematics, but he was against eliminating the thinking process by formal calculations, which apparently he thought certain followers of N. Bourbaki are guilty of.

Once I was reading a preprint of a school textbook, and there was a standard question on percentages: *With a monthly interest rate of 1%, by how many percent has the capital increased after one year?* The solution given by the author was around 20000%. This is clearly not true, and you would never write such nonsense if you were thinking while writing the book. Unfortunately similar situations sometimes present themselves in mathematical articles where catching mistakes is not as easy.

Vladimir Igorevich did always care about the future of mathematics. On the one hand he was a person with great knowledge which he was trying to transfer to his colleagues, students, or even persons met by chance. On the other hand, he clearly understood that the roots of mathematics lie in education. If we neglect the quality of teaching in schools, we will get a generation unable to expand, usefully employ, or even to keep the achievements of our and previous generations. A recent issue here is the use of computers which in many cases makes it possible to press the correct buttons instead of thinking. As a result we get pupils unable to do simple operations without a computer. Here are my favorite examples of 'wrong' answers given by pupils which I know from Vladimir Arnold. The first one is coming from some American test where it turned out that the majority of school-children did not know to handle fractions: They did computations like

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+1}{3+2}=\frac{3}{5}.$$

The second example is related to the traditional emphasis on axiomatics in France. Vladimir Arnold asked a pupil with an excellent record in mathematics: *What is* $2+3$? After a minute of thinking the pupil replied that

$$2+3=3+2,$$

since addition is a commutative operation. Vladimir Arnold was constantly trying to improve mathematical education, writing many articles, critical reviews, and giving public talks with the purpose of educating a new generation of mathematicians.

Private life and work. It is hard to believe how many things Vladimir Arnold apparently managed to do. The reviewing of theses and articles of his students and colleagues was just a small part of his work. In the last years he wrote what must have been up to 100 handwritten pages per day. This includes new articles, books on mathematics, articles on popular mathematics and recent problems of education. It is interesting to know that Vladimir Arnold did not like to work on a computer in his office, but he preferred to do research with pencil and paper, occupying one of his favorite outdoor places: sitting under the oldest tree in Paris or somewhere in the Bois de Vincennes; somewhere in the rocky region of Trieste, where he took part in archeological research in the local caves; at his dacha near Moscow in an area with beautiful lakes, rivers and forests, berries and mushrooms.

I have experienced Vladimir Arnold as a perfect person to discuss any subject. Communication with him was a powerful stimulus for research, and yielded inspiration for work even months after it actually took place. He preferred to meet people in an informal environment, for instance in his dacha, where the meeting could last all evening. His wife Eleonora Aleksandrovna is a hospitable, very friendly and kind person, who used to prepare delicious dinners for their guests. After such a dinner Vladimir Arnold invited his guests for a round trip in the forest, on foot, on skis, or by bike. In Paris he usually invited his guests and colleagues for 4–5 hour excursions and gave bright expositions of history that were full of stories about the adventures of G. Casanova, or the guillotine, or or the poisons of Catherine de Medici.

In Russia, Vladimir Arnold spent most of the time at his famous dacha situated in the academician suburban settlement not far from Moscow. To go there, one takes the bus from the local train station *Perkhushkovo* and alights at bus stop ‘Dacha No. 1’ (Dacha No. 1 is one of the dachas belonging to Stalin). In such settlements academicians can meet and talk to each other privately and informally, and you could meet leading people of all branches of science. Doubtless this invitation to multidisciplinary collaboration was appreciated by many Russian scientists living there.

When Vladimir Arnold stayed in Moscow, his students, friends, and colleagues had an opportunity to meet another challenge: It sounds quite simple to run 40 kilometers on cross-country skies together with Vladimir Arnold and his older students in the forests on both sides of Moscow river. But the main obstacle to completing this particular course is that it starts on one side of the river and finishes on the other. The river in this place is quite close to its origin and not very wide, but fast enough not to freeze in most winters. Approximately halfway, Vladimir Arnold crossed the river by swimming, with the majority of his group following him (I should add at this point that the only thing Vladimir Arnold was wearing were his shorts). In his best days, Vladimir Arnold was in very good shape physically: he used to go by bike but stated that mere bike roads were too simple, he would swim 10 kilometers from Luminy to Marseille, or sail in a canoe for several days. Of course like every man of his age, he had some health problems. Still all who knew him were sure that he would celebrate his 80-th, 90-th, and 100-th anniversaries. He died unexpectedly. Several days before his death he was full of plans, new ideas and enthusiasm. Now he has left us. But we still have his rich intellectual legacy contained in his many lecture notes, books, articles and students, who were inspired by the enthusiastic, optimistic, and always young genius which Vladimir Arnold definitely was.

Acknowledgments. The author is grateful to S. Tretyakova for permission to use her photo of V.I. Arnold.

Author's address:

Oleg Karpenkov
Institut f. Geometrie, TU Graz
Kopernikusgasse 24
8010 Graz

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 214 (2010), 59–60

Nachruf auf Walter Rudin

Friedrich Haslinger
Universität Wien

Walter Rudin wurde am 2. Mai 1921 in Wien geboren. Er stammt aus einer prominenten altösterreichischen Familie jüdischen Urprungs; sein Urgroßvater, ein Zündholzfabrikant, wurde von Kaiser Franz Joseph zum Ritter geschlagen. Sein Vater, Robert Pollak-Rudin, war ein bedeutender Elektrotechniker. Walter Rudin besuchte die Ressel-Realschule (heute BRg 4) in der Waltergasse im 4. Wiener Gemeindebezirk. Im Jahr 1938 wurde Walter Rudin vom Besuch der Schule ausgeschlossen und emigrierte einige Monate später in die USA. Im Rahmen der 150-Jahr-Feier des BRg 4 wurde im November 2005 eine Erinnerungsstätte errichtet, in welcher auch Walter Rudin an gebührender Stelle erwähnt wird.

Walter Rudin hat in sehr eindringlicher Art und Weise in seiner Autobiografie "The Way I Remember It" (History of Mathematics, American Mathematical Society, London Mathematical Society, 1997) die näheren Umstände seiner Flucht aus Österreich geschildert.

Walter Rudin promovierte 1949 an der Duke University mit einem bedeutenden Beitrag in der Harmonischen Analysis. Seine weiteren wissenschaftlichen Stationen waren das M.I.T., die Rochester University und die University of Wisconsin, Madison.

Sein wissenschaftliches Werk umfasst ca. 200 hochqualitative Arbeiten in renommierten Fachzeitschriften auf verschiedenen Gebieten der Analysis: Theorie der Fourierreihen, Theorie der Lückenreihen, Funktionenalgebren, Harmo-

Walter Rudin mit seiner Frau Mary Ellen und Friedrich Haslinger anlässlich der Verleihung der Ehrendoktorwürde im September 2006. (Foto: Yvonne Nagel)

ISSN 0020-7926

nische Analysis, Abstrakte Harmonische Analysis, Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. Im MathSciNet der American Mathematical Society finden sich 210 Eintragungen (siehe *http://www.ams.org/mathscinet*).

Von besonderer Bedeutung sind auch seine Lehrbücher, die mehrfache Auflagen erfuhren und durch ihre wissenschaftliche Prägnanz und Genauigkeit die Entwicklung der modernen Analysis in nachhaltiger Art und Weise beeinflusst haben und noch immer beeinflussen. Es sind dies die Bücher

- Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill (1953, 1964, and 1976, Übersetzung ins Deutsche: Oldenbourg Verlag 1998);
- Real and Complex Analysis, McGraw-Hill (1966, 1974, and 1976, Übersetzung ins Deutsche: Oldenbourg Verlag 1999);
- Functional Analysis, McGraw-Hill (1973, and 1991);
- Function Theory on the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 241, Springer Verlag (1980).

Die beiden erstgenannten Bücher wurden 1993 mit dem renommierten Steele Prize for Mathematical Exposition der American Mathematical Society ausgezeichnet (siehe: *http://www.ams.org/prizes/steele-prize.html*).

Angesichts der vielen wichtigen wissenschaftlichen Beiträge Walter Rudins und der Tatsache, dass seine Lehrbücher nach wie vor auch bei den Vorlesungen an unserer Fakultät als Grundlage verwendet werden und nicht zuletzt wegen seines österreichischen Ursprungs verlieh die Universität Wien im Jahr 2006 das Ehrendoktorat an Walter Rudin. Aus gesundheitlichen Gründen konnte Walter Rudin nicht nach Wien reisen, um die akademische Ehrung in Empfang zu nehmen. Ich hatte die Ehre und das Vergnügen, ihm im Rahmen einer von der University of Wisconsin gestalteten akademischen Feier das Ernennungsdekret der Universität Wien zu überreichen. Es war allen Anwesenden klar, dass Walter Rudin diese Ehrung mit großer Freude entgegennahm.

Walter Rudin, der an Parkinson litt, erlag am 20. Mai 2010 seiner Krankheit im Alter von 89 Jahren in Madison, Wisconsin (USA).

Adresse des Autors:

Friedrich Haslinger
Fakultät f. Mathematik, Universität Wien
Nordbergstraße 15
1090 Wien

Buchbesprechungen

Allgemeines

C. Adams: Riot at the Calc Exam and Other Mathematically Bent Stories. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, xvi+271 S. ISBN 978-0-8218-4817-3 P/b $ 32,–.

Wer eine unterhaltsame Lektüre mit mathematisch angehauchten Themen sucht, ist mit diesem Buch an der richtigen Adresse. Um eine Freude damit zu haben, ist vielleicht eine Vertrautheit mit der englischen Umgangssprache, eine Neigung zu amerikanischem Humor (was immer das auch sein mag. . .) und vielleicht doch zumindest ein wenig Einblick in die Welt der höheren Mathematik Voraussetzung.

Die hier gesammelten Kurzgeschichten sind zum größten Teil im *Mathematical Intelligencer* erschienen und mögen manchen aus dieser Quelle schon bekannt sein. Adams persifliert in seinen Geschichten jede denkbare literarische Kurzform, von der Kontaktanzeige über das Reisetagebuch zum Modeschaubericht, aber auch die klassische Kurzgeschichte. Der mathematische Inhalt ist oft im metaphorischen Kontext begraben, niemals aber schwer zu finden.

Besondere Erwähnung verdienen als Anlesetipps die Stephen King-artige *The Integral: A Horror Story* und die Lebenshilferatgeber des *Mathematical Ethicist*. Wer also etwas zum Schmunzeln im Fachkontext sucht, findet hier das Richtige.

R. Geretschläger (Graz)

J. Green, J. LaDuke: Pioneering Women in American Mathematics. The Pre-1940 PhD's. (History of Mathematics, Vol. 34) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island – The London Mathematical Society, 2009, xviii+349 S. ISBN 978-0-8218-4376-5 H/b $ 79,–.

About two third of the contents of this book is devoted to biographical entries of American women who had earned their Ph.D. before 1940 either in US institutions or US born women who received foreign degrees. The first such degree was granted by Columbia in 1886.

A still more detailed information on these women can found on a website hosted by the American Mathematical Society under *http://www.ams.org/bookpages/hmath34*.

In addition to identifying this large group of 228 women, the authors also place them within a broader historical context. One of the findings from their study is that these women come from a wide range of geographic, economic and educational background. They are, however, not racially diverse, no African-American women are represented. They came from farms, cities and small towns, and their parents had a broad mix of educational backgrounds ranging from no formal schooling to professional and doctoral degrees. The idea to write such a book came in January 1978 during a mathematics meeting in Atlanta.

It is indeed an interesting and comprehensive publication which reveals reasons as well as obstacles for women studying mathematics. A lot of this still seems to be valid.

G. Schranz-Kirlinger (Wien)

J. Havil: Impossible?. Surprising Solutions to Counterintuitive Conundrums. Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2008, xii+235 S. ISBN 978-0-691-13131-3 H/b \$ 27,95.

Der Autor sammelt in dem vorliegenden Band eine große Anzahl von solchen mathematischen Fragestellungen, welche zwar einfach formulierbar und auch für mathematische Nichtspezialisten verständlich sind, die aber scheinbar unlösbar und zum Teil sogar in sich widersprüchlich sind. Wenn auch die vorgestellten, unter Verwendung des „richtigen" mathematischen Werkzeugs aus der Analysis, Algebra und mathematischen Logik verblüffende Lösungen aufweisende Probleme nicht neu sind – dieses Buch ist aufgrund sowohl der Auswahl der Fragen als auch ihrer didaktischen Aufbereitung sowie wegen der präzisen Darstellung des mathematischen Hintergrundwissens den an einschlägigen Literaturstellen interessierten Lesern sehr zu empfehlen.

Die Kapitelüberschriften zeigen die Bandbreite der behandelten Themen: It's Common Knowledge; Simpson's Paradox; The Impossible Problem; Braess's Paradox; The Power of Complex Numbers; Bucking the Odds; Cantor's Paradise; Gamov-Stern Elevators; The Toss of a Coin; Wild-Card Poker; Two Series; Two Card Tricks; The Spin of a Needle; The Best Choice; The Power of Powers; Benford's Law; Goodstein Sequences; The Banach-Tarski Paradox.

Ein sehr abgerundetes Buch!

P. Paukowitsch (Wien)

E. Pegg Jr., A. H. Schoen, T. Rodgers (eds.): Mathematical Wizardry for a Gardner. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2009, xx+262 S. ISBN 978-1-56881-447-6 H/b \$ 49,–.

Das vorliegende Buch enthält 24 Publikationen von Mathematikern, welche von Martin Gardner beeinflusst und zur Beschäftigung mit dem mathematischen Umfeld Gardners inspiriert wurden.

Folgende Kapitel und Artikel finden sich: *(I)* Spin a Tale: The IG Nobel Prizes; Martin Gardner and Paperfolding; . . . Nothing but Confusion? Anamorphoses with Double Meaning. *(II)* Ponder a Puzzle: Peg Solitaire with Diagonal Jumps; The Grand Time Sudoku and the Law of Leftovers; Patulous Pegboard Polygons; Beamer Variant; Packing Equal Circles in a Square. *(III)* Bring a Friend: Uncountable Sets and an Infinite Real Number Game; The Cyclic Butler University Game; Misere Play of G-A-R-D-N-E-R, the G4G7 Heptagon Game. *(IV)* Play with Numbers: The Association Method for Solving Certain Coin-Weighing Problems; The Art of Ready Reckoning; Spherical Algebra; Mathematical Idol; The Elevator Problem. *(V)* Take a Shape: Jordan as a Jordan Curve; Wang Tiles, Dynamical Systems, and Beatty Difference Sequences; The Trilobite and Cross; Orderly Tangels Revisited; Quasi-Periodic Essays in Architectural and Musical Form; Ellipses; Dances with Tangrams (and without Wolves); Two Special Polyhedra among the Regular Toroids.

Hier liegt ein sehr interessantes Buch für an der einschlägigen Literatur interessiertes Fachpublikum vor.

P. Paukowitsch (Wien)

A. Soifer: Mathematics as Problem Solving. Second Edition. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, xviii+106 S. ISBN 978-0-387-74646-3 P/b € 39,95.

Etwa 20 Jahre nach der ersten Auflage des vorliegenden, im Umfeld von mathematischen Olympiaden, vorwiegend aus dem russischen Fachbereich, angesiedelten Bandes, erscheint die zweite Auflage nun im Springer-Verlag, woraus zweifellos die internationale fachliche Anerkennung des Autors herauslesbar ist. Es enthält über 200 Problemstellungen aus den mathematischen Disziplinen der mathematischen Logik, Zahlentheorie, Algebra, Geometrie und Kombinatorik sowie das nun neu hinzugefügte Kapitel mit dem Titel *Chess* 7×7*: A Journey from Ramsey Theory to the Olympiad to Finite Projective Planes*.

Zu einem Teil der vorgestellten Problemstellungen finden sich Lösungen bzw. unterschiedliche Lösungsansätze. Insgesamt wird dieses Buch das Interesse an der Beschäftigung mit Mathematik und die Freude an der Eleganz mathematischer Argumentation sicher fördern.

P. Paukowitsch (Wien)

P. Winkler: Mathematical Mind-Benders. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2007, x+148 S. ISBN 978-1-56881-336-3 P/b $ 18,95.

In diesem Buch setzt Peter Winkler seine erfolgreiche Sammlung von unterhaltsamen mathematischen Problem fort. Beginnend mit einigen 'warm-up'-Problemen steigert sich der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben im Laufe der 11 Kapitel bis zum letzten Kapitel mit noch ungelösten oder erst vor Kurzem gelösten Problemen. Ein typisches Problem aus dem ersten Kapitel ist etwa, wie man mit einer getürkten Münze dennoch eine 50:50-Entscheidung treffen kann, ein typisches ungelöstes Problem ist jenes nach der minimalen Anzahl von Damen, um ein $n \times n$

Schachbrett abzudecken. Dazwischen werden Probleme aus der Geometrie, Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Spieltheorie, usw. in sehr anschaulicher Weise gestellt und in einem Lösungsteil am Ende jedes Kapitels auch ausführlich gelöst.

Alles in allem ist dies zwar kein Buch, um sich Ideen für wissenschaftliche Arbeiten zu holen, sondern um sich die Freizeit auch mit mathematischen Rätseln unterschiedlicher Schwere zu vertreiben. Für jeden Rätselfreund unter den Mathematikern ist dieses Buch daher definitiv zu empfehlen.

R. Kainhofer (Wien)

D. Wright: Mathematics and Music. (Mathematical World 28.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, xiv+161 S. ISBN 978-0-8218-4873-9 P/b \$ 35,–.

Both mathematics and music are lifelong passions of the author. Over the years David Wright understood that there is a positive supportive coexistence between mathematics and music in his own thought processes and that he was appealing to skills and instincts endemic to one subject when actively engaged with the other. Thus he designed and teaches a university course in Mathematics and Music at Washington University in St. Louis, the notes from which formed the beginnings of this book.

G. Schranz-Kirlinger (Wien)

Algebra und Diskrete Mathematik

T. Camps, V. große Rebel, G. Rosenberger: Einführung in die kombinatorische und die geometrische Gruppentheorie. (Berliner Studienreihe zur Mathematik, Band 19.) Heldermann Verlag, Lemgo, 2008, 298 S. ISBN 978-3-88538-119-8 H/b € 36,–.

Dies ist eine gut lesbare Einführung in die kombinatorische und geometrische Gruppentheorie in deutscher Sprache. Im ersten Teil über „kombinatorische Gruppentheorie“ (Kapitel 1–7) werden klassische Themen wie Nielsentransformationen, Todd-Coxeter-Algorithmus und Reidemeister-Schreier-Verfahren in (hauptsächlich) endlich präsentierten Gruppen, freie Produkte mit und ohne Amalgamierung (Normalformen, Sätze von Kurosch und Gruschko), HNN-Erweiterungen und Ein-Relatorgruppen behandelt. Für die genannten Klassen von Gruppen stehen das Wortproblem, das Konjugationsproblem und (teilweise) das Isomorphismusproblem im Zentrum der Betrachtung und geometrische Hilfsmittel wie Cayleygraphen spielen in der Darstellung eine entscheidende Rolle. Dies natürlich umso mehr im zweiten Teil über „geometrische Gruppentheorie“ (Kapitel 8–19), der in den ersten Kapiteln die Anwendung von Lyndon-van Kampen-Diagrammen in der Small Cancellation-Theorie eindrucksvoll demonstriert. Das Hauptgewicht in diesem zweiten Teil liegt aber zweifellos auf der Behandlung der hyperbolischen Gruppen. Die wichtigsten Themen sind hier: Gromov-Produkt, Quasi-Isometrien, Rips-Komplex, etc. Im ganz kurzen letzten Kapitel werden einige wichtige Definitionen und Resultate der sogenannten automatischen Gruppen zusammengefasst, die sich aus einer Wechselwirkung zwischen Gruppentheorie und Informatik entwickelt haben, welche umso interessanter geworden sind, nachdem sich herausgestellt hat, dass es sich dabei um eine Verallgemeinerung der hyperbolischen Gruppen handelt.

K. Auinger (Wien)

R. Cooke: Classical Algebra. Its Nature, Origins, and Uses. John Wiley & Sons, 2008, xii+206 S. ISBN 978-0-470-25952-8 P/b £ 28,95.

Im ersten Teil (Lesson 1–5) gibt der Autor einen Überblick über die Entwicklung der klassischen Algebra, insbesondere über die unterschiedlichen Zugänge zum Lösen von Gleichungen bei den alten Ägyptern, Babyloniern, Chinesen, Japanern, Arabern. Teil 2 (Lesson 6–7) beschreibt erste Zugänge zu formelmäßigen Lösungen der Gleichungen zweiten und dritten Grades, wobei besonders die Gleichung zweiten Grades von unterschiedlichen Seiten beleuchtet wird – als Vorbereitung auf Überlegungen, die später bei Gleichungen höheren Grades von Bedeutung sein werden. Alternative Formen der kubischen Lösungsformel sowie der „casus irreducibilis“ leiten zu Teil 3 (Lesson 8–9) über. Hier geht es im Wesentlichen um Resolventen und das Aufzeigen der Bedeutung von Permutationen für das Lösen von Gleichungen höheren Grades. Im vierten Teil (Lesson 10–11) wird schließlich – wieder ausgehend von Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades – die Existenz und Konstruierbarkeit von Lösungen betrachtet, um schließlich zu Abels Beweis und zur Galoistheorie zu gelangen. In einem Epilog werden die grundlegenden Begriffe der modernen Algebra kurz zusammengefasst.

Dieses Buch unterscheidet sich somit grundlegend von anderen Algebra-Büchern, nicht nur, weil es ausführlich die historischen Wurzeln beschreibt, sondern vielmehr versucht, die grundlegenden Ideen, die für die Weiterentwicklung der Algebra entscheidend waren, zu skizzieren, von verschiedenen Seiten zu beleuchten und Querverbindungen herzustellen. Eine ideale Ergänzung für alle, denen formale Beweise allein nicht die gewünschte Einsicht in die Materie bieten.

M. Kronfellner (Wien)

D. Cvetkovic, P. Rowlinson, S. Simic: An Introduction to the Theory of Graph Spectra. (London Mathematical Society Student Texts 75) Cambridge University Press, 2010, x+364 S. ISBN 978-0-521-13408-8 P/b £ 24,99.

Die Autoren des Buches sind bekannte Größen auf dem Gebiet der algebraischen Graphentheorie, die auch schon für andere Bücher (wie den Klassiker *Spectra of Graphs* von Cvetković/Doob/Sachs) verantwortlich zeichnen.

Mit dem vorliegenden Werk ist ihnen eine überaus umfangreiche Zusammenstellung von Resultaten aus der spektralen Graphentheorie gelungen, die den Leser in die faszinierenden Zusammenhänge zwischen Graphentheorie und linearer Algebra einführen. Es wird nur wenig Basiswissen (Grundzüge der Graphentheorie und linearen Algebra) vorausgesetzt, sodass es grundsätzlich auch für Neulinge auf diesem Gebiet geeignet ist.

Als Einstiegswerk für jemanden, der sich in die Theorie der Graphspektren einlesen will, erscheint mir das Buch jedoch ein wenig zu umfangreich. Etwas Erfahrung auf dem Gebiet ist meines Erachtens nötig, um die zahlreichen Resultate schätzen zu können.

Wer schon etwas Vorbildung auf dem Gebiet der algebraischen Graphentheorie hat, wird dieses Buch sicherlich zu schätzen wissen. In neun sorgfältig verfassten Abschnitten werden nahezu alle erdenklichen Aspekte von Graphspektren behandelt. Dabei wird deutlich, dass spektrale Graphentheorie nicht nur für sich selbst genommen interessant ist, sondern in verschiedene Bereiche der Graphentheorie hineinspielt und auch außerhalb der Mathematik Anwendungen hat.

Zunächst werden die wesentlichsten Begriffe und Konzepte erläutert; dem schließt sich in Kapitel 2 eine Diskussion an, wie sich das Spektrum unter verschiedenen Operationen verhält. In Kapitel 3 werden Zusammenhänge zwischen den Eigenwerten eines Graphen und dessen Struktur beleuchtet (z.B. Zusammenhang, Regularität, Automorphismen). Dem schließt sich ein Kapitel an, in dem der Frage nachgegangen wird, inwieweit ein Graph durch sein Spektrum charakterisiert werden kann. Kapitel 5 stellt die Frage, wie einzelne Eigenwerte mit der Struktur eines Graphen zusammenhängen. Besonders interessant aus meiner Sicht ist das Kapitel über spektrale Techniken, in denen Probleme aus anderen Bereichen der Graphentheorie mithilfe spektraler Methoden gelöst werden. Dabei ergeben sich oft überraschende Zusammenhänge. Ein hübsches kleines Beispiel dafür ist ein eleganter spektraler Beweis der Tatsache, dass sich der K_{10} nicht in drei kantendisjunkte Kopien des Petersengraphen zerlegen lässt. Während es in diesen ersten sechs Kapiteln nahezu ausschließlich um das Spektrum der Adjazenzmatrix geht, beleuchtet Kapitel 7 die Laplacematrix und verwandte Matrizen. Den Abschluss bilden zwei Kapitel über vermischte Resultate und Anwendungen in anderen Bereichen der Mathematik, Physik, Chemie und Informatik. Ein umfangreiches Literaturverzeichnis zeugt ebenfalls von der gründlichen Arbeit der Autoren.

S. Wagner (Stellenbosch)

J. Meier: Groups, Graphs and Trees. An Introduction to the Geometry of Infinite Groups. (London Mathematical Society Student Texts 73.) Cambridge University Press, 2008, xi+231 S. ISBN 978-0-521-71977-3 P/b £ 19,99.

This is a very stimulating and well accessible introduction to the geometric theory of groups that requires only very basic knowledge in group theory and graph theory. Based on the very definition of the Cayley graph of a group presentation, the topics covered by the book include groups acting on trees, the word problem and connections with regular languages, word growth and ends in groups. Particular emphasis is on the study of the theory on concrete examples of infinite groups: the even numbered chapters are all devoted to this. In these chapters the following types of groups are studied in more detail: groups generated by reflections, Baumslag-Solitar groups, the Gupta-Sidki version of the Grigorchuk group, the Lamplighter group, and Thompson's group F.

K. Auinger (Wien)

W. E. Ryan, S. Lin: Channel Codes. Classical and Modern. Cambridge University Press, 2009, xvi+692 S. ISBN 978-0-521-84868-8 H/b £ 50,–.

The book gives an overview of mainly binary channel codes. It contains material for a first course in coding theory (Chapter 1–5 and 7) which contains basics on coding and capacity, basic algebraic results, linear codes, cyclic codes and concatenated codes, convolutional codes, low-density parity-check (LDPC) codes, and turbo codes. Material for more advanced courses (Chapter 6, 8–15) is centered in LDPC codes. 250 problems of various types are also included to test and enhance learning.

A. Winterhof (Linz)

T. Tao, V. H. Vu: Additive Combinatorics. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics 105.) Cambridge University Press, 2010, xviii+512 S. ISBN 978-0-521-13656-3 P/b £ 28,–.

The term "Additive Combinatorics" in the title refers to a subject which aims at investigating combinatorial properties of subsets of additive groups. This has to be understood in a wide sense: this comprises the study of "sum-free" sets (sets which do not contain any sum of two of their elements), the question of whether a positive integer can be written as a sum of a fixed number of squares (k-th powers, primes, etc.), the question of whether one can find arithmetic progressions of length k in certain subsets of the integers, etc. This has been a very lively and prosperous research area in the recent past, with the spectacular result of Green and Tao that there are arbitrarily long arithmetic progressions consisting of prime numbers having come to the attention of every mathematician, but not being the only recent spectacular result in this area. This book presents for the first time an as complete as possible, systematic exposition of this area, which is at the interface of number theory, combinatorics, probability, geometry, harmonic analysis, and ergodic theory, since the methods which one needs draw from all these areas. Clearly, this book will be *the* reference book for this area for the future, and it is therefore a must for each library. Since the book covers and introduces to each of the different aspects of the underlying theories, parts from the book can also be well used as a basis for graduate courses. At any rate, it is a pleasure to read (in) this text!

C. Krattenthaler (Wien)

Zahlentheorie

H. Davenport: The Higher Arithmetic. An Introduction to the Theory of Numbers. Eighth Edition. Cambridge University Press, 2008, ix+239 S. ISBN 978-0-521-72236-0 P/b £ 23,99.

This is the eighth edition of the book from 1952 with additional material by J.H. Davenport written for the sixth edition. This book is one of the excellent classical introductions to elementary number theory. It contains numerous exercises. A few noteworthy results of this book are mentioned below.

Chapter I: *Factorization and the Primes*: An introduction to induction and a proof of the unique factorization theorem via induction is given. Chapter II: *Congruences:* Chevalley's theorem on the existence of nontrivial solutions of a polynomial congruence in several variables with zero constant term is proved. Chapter III: *Quadratic Residues:* The number of pairs $(n, n+1)$ modulo p with prescribed Legendre symbols is determined. Chapter IV: *Continued Fractions:* Continued fractions of quadratic irrationals are treated. Chapter V: *Sum of Squares:* The two-prime theorem is studied. Chapter VI: *Quadratic Forms:* Dirichlet's class number formula is discussed. Chapter VII: *Some Diophantine Equations:* The Thue-Siegel theorem is exposed. Chapter VIII: *Computers and Number Theory:* This chapter contains sections on primality testing, pseudorandom number generation, integer factoring, and public key cryptography.

A. Winterhof (Linz)

R. Schulze-Pillot: Einführung in Algebra und Zahlentheorie. Zweite, überarbeitete und erweiterte Auflage. (Springer-Lehrbuch.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, xi+279 S. ISBN 978-3-540-79569-8 P/b € 24,95.

Dies ist eine Einführung in die elementaren Fragestellungen und Resultate der Algebra und Zahlentheorie. Dabei werden abstrakt algebraische Konzepte meist durch konkrete Problemstellungen der elementaren Zahlentheorie motiviert – dadurch eignet sich dieses Buch recht gut als Grundlage für eine Einführungsvorlesung in dem genannten Gebiet.

Nach zwei einführenden Kapiteln, in denen die Voraussetzungen und einige grundlegende Definitionen zusammengefasst werden, widmen sich die folgenden drei Kapitel elementar zahlentheoretischen Begriffen wie Teilbarkeit, Primzahlen, Kongruenzen, die teilweise schon in allgemeinen Hauptidealringen studiert werden. Daran schließen sich zwei Kapitel über (nicht-kommutative) Gruppentheorie an, in denen einerseits die üblichen Grundbegriffe inklusive Isomorphiesätze entwickelt werden und andererseits schon die Anfänge der Gruppenwirkungen dargestellt werden mit einem Beweis der Sylowsätze als Anwendung. Im anschließenden Kapitel über abelsche Gruppen wird zunächst der Hauptsatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen formuliert und bewiesen, während die folgenden zwei Unterabschnitte die Charaktergruppe und die diskrete Fouriertransformation studieren. Im nächsten Kapitel geht es wieder zurück zur Zahlentheorie: Hier werden die Struktur der primen Restklassengruppe, Primitivwurzeln und Potenzreste und das quadratische Reziprozitätstheorem behandelt. Ein Ausblick auf Primzahltests rundet dieses Kapitel ab. Es folgen zwei Kapitel über Körpertheorie: Im ersten davon geht es um die allgemeine Theorie der Körpererweiterungen, den Zerfällungskörper, den algebraischen Abschluß und die Konstruktion mit Zirkel und Lineal; das zweite widmet sich der Konstruktion und Klassifizierung der endlichen Körper und zeigt, wie endliche Körper in der Kodierungstheorie Anwendung finden. Kapitel 11 behandelt die Irreduzibilität und Faktorisierung von Polynomen (auch über endlichen Körpern). Das letzte Kapitel präsentiert schließlich einen Ausblick auf die Galoistheorie.

K. Auinger (Wien)

Geometrie

A. Barvinok: Integer Points in Polyhedra. (Zurich Lectures in Advanced Mathematics.) EMS, Zürich, 2008, viii+191 S. ISBN 978-3-03719-052-4 P/b EUR 34,–.

These are the lecture notes for a graduate course which the author, one of the experts in this field, taught at the ETH Zürich and the University of Michigan in 2007. It is a very elegant algebraic exposition of the most important aspects of integer points counting in polyhedra with an eye on algorithmic applications.

The main concept used in the text is that of a *valuation*: If $P \subset \mathbb{R}^d$ is a polytope and $\mathbb{Z}^d$ is the standard integer lattice in $\mathbb{R}^d$, then $|P \cap \mathbb{Z}^d|$ is a valuation. To count integer lattice points, it is therefore useful to decompose the polytope under question into simpler pieces with nice properties. It follows a detailed description of the algebra of polyhedra whose elements are indicator functions. An application of this fruitful notion (due to H. Hadwiger) is to realize that the Euler characteristic is the unique valuation whose value on indicators of non-empty closed convex sets equals one. The author then continues to study linear transformations of polyhedra, containment of lines and rays, convolutions, Minkowski sums, tangent cones, polarity, and many other properties and concepts. From this he derives the structure of general polyhedra (bounded polytopes), namely that every polyhedron can be written as the Minkowski sum of a subspace, a pointed cone without lines and a polytope.

The reader is then well prepared for the notion of the *exponential valuation* which extends the notion of volume to unbounded polyhedra. This allows one to use the whole power of the algebra of polyhedra to compute volumes. Next, the author studies lattices, bases and parallelopipeds, reduced bases, the Minkowski convex body theorem, all in view of the LLL algorithm. This is then exploited to do some efficient counting of integer points in rational cones. There are many other topics to be found in the text, such as totally unimodular polytopes, decompositions of rational cones, Ehrhart (quasi-)polynomials, Pick's formula, Brion's theorem, etc. The final chapters are devoted to an exposition of the recent 'local' formula obtained by N. Berline and M. Vergne in 2007 for the number of integers points in a polytope, i.e., the number of lattice points in a rational polytope can be expressed in terms of the volumes of faces of the polytope and certain explicit valuations on the tangent cones at the faces.

The text contains 20 chapters, 77 helpful illustrations and many exercises. It can be read without difficulty by anyone with some reasonable background in linear algebra. This is a wonderful book, if you want to study this subject from scratch.

T. Stoll (Marseille)

M. Gardner: Sphere Packing, Lewis Caroll, and Reversi. Martin Gardner's new mathematical diversions. Cambridge University Press, 2009, xiv+282 S. ISBN 978-0-521-74701-1 P/b £ 9,99.

Der vorliegende Band enthält wesentlich erweiterte Neubearbeitungen durch Martin Gardner von 20 Publikationen, welche in der wissenschaftlichen Zeitschrift *Scientific American*, Scientific American, Inc., in den Jahren 1959–1961 erschienen sind. Die einzelnen Kapitel sind durch Zusätze, Lösungen sowie umfangreiche aktuelle Literaturhinweise abgerundet.

Die große Bandbreite der behandelten mathematischen Fragestellungen soll die folgende Aufzählung zeigen: Logische Argumentationen mithilfe des Binärsystems, nichttriviale Fragen zu Gruppen, Zerlegungs- und Faltungsprobleme ebener Figuren sowie trickreiche Flächenreduktionen durch lokale Ungenauigkeiten, Fragestellungen zu Graphen und, damit zusammenhängend, alten und neuen Brettspielen sowie verblüffenden Kartentricks, Packungsprobleme von Kugeln und Fragen der Packungsdichte, interessante Näherungskonstruktionen im Umfeld der transzendenten Zahl π, Färbungen von unterschiedlichen ebenen und räumlichen Trägerbereichen, bemerkenswerte ebene Schnitte von Raumobjekten, Polyominos und gefärbte räumliche Dominos, griechisch-lateinische Quadrate, Ellipsen und elliptische Billards, H.S.M. Coxeter und Fragestellungen der ebenen Geometrie.

Wie in allen seinen Büchern, gelingt es dem Autor auch diesmal, einen an mathematischen Phänomenen unterschiedlicher Art interessierten Leserkreis anzusprechen und zur Beschäftigung mit durchaus tiefliegenden mathematischen Aussagen zu inspirieren.

P. Paukowitsch (Wien)

Reelle und Komplexe Analysis

M. Giaquinta, G. Modica: Mathematical Analysis. An Introduction to Functions of Several Variables. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2009, xii+348 S. ISBN 978-0-8176-4509-0 H/b € 127,33.

Die Autoren behandeln 5 Themen: *Differentialrechnung* (beginnend mit Richtungs- und partiellen Ableitungen bis zu Gâteaux- und Fréchetdifferenzierbarkeit), *Lebesguesche Integrationstheorie* (inkl. Transformationsformel), *Differentialgeometrie* (aufgeteilt in “curves and differential forms” und in “surfaces and level sets”), *Funktionentheorie* und *Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Geschrieben von weltweit anerkannten Experten der modernen Theorie partieller Differentialgleichungen (M. Giaquinta, S. Hildebrandt: Calculus of Variations I,II. Grundlehren, 310, 311, Springer, Berlin, 1996), handelt es sich bei der vorliegenden Darstellung der mehrdimensionalen Analysis um ein Meisterwerk, das den Vergleich mit den besten Büchern auf diesem Gebiet (wie z.B. J. Dieudonné: Foundations of Analysis; L. Schwartz: Cours d’analyse; R. Godement: Analysis; H. Amann-Escher: Analysis; H. Cartan: Calcul différentiel; J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk: Multidimensional Real Analysis; K. Königsberger: Analysis) nicht zu scheuen braucht. Die Expertise der Autoren zeigt sich auch in der Aufnahme von Themen, die sonst nicht zu finden sind: die Lemmas von Sard and Morse, Z-transform, Laplace-Beltrami-Operator und mittlere Krümmung, die Ungleichung von Young und Hadamard als Anwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode. Im Gegensatz zu manchen der oben genannten Bücher sind die Autoren einem leserfreundlichen Stil verpflichtet: “…always providing examples, illustrations and exercises to clarify the main presentation…”. Höchst empfehlenswert!

N. Ortner (Innsbruck)

M. E. H. Ismail: Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable. With two chapters by W. Van Assche. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 98.) Cambridge University Press, 2009, xviii+708 S. ISBN 978-0-521-14347-9 p/b £ 45,–.

Gábor Szegős Buch *Orthogonal polynomials* (1938) nahm die Stelle des führenden Lehrbuchs auf diesem Gebiet ein. Vieles hat sich aber weiterentwickelt, und Ismails Buch wird nun das neue Referenzwerk sein. Es ist enzyklopädisch, und der Blickwinkel ist der der „speziellen Funktionen"; ich möchte es der „konkreten Mathematik" zuordnen.

Ein langes Vorwort von Richard Askey gibt die richtige Perspektive. Askey selbst hat vor nicht allzu langer Zeit selbst ein wichtiges Referenzbuch über spezielle Funktionen vorgelegt (mit Andrews und Roy).

Dann folgen 24 Kapitel, deren Auflistung hier zu lange ausfallen würde; 2 derselben wurden von Walter van Assche verfasst. Die Literaturzitate erstrecken sich über 35 Seiten; viele derselben sind Ismail selbst zuzuordnen. 10 Kapitel sind den q-Reihen gewidmet, einem Gebiet, dessen Wichtigkeit und Schönheit gar nicht überschätzt werden kann.

Ramanujan hätte seine Freude an diesem Buch gehabt. Bruce Berndt, der einen großen Teil seines Lebens der Mathematik Ramanujans widmet, schrieb in einer Besprechung von Ismails Buch, dass er es in einer Reihe mit Whittaker/Watson, Watson, Gasper/Rahman, Olver und Andrews/Askey/Roy aufstellen wird. Das werde ich auch tun, und in diese Eliteabteilung gehört es auch.

Ein wichtiges und schönes Buch. Wer konkrete Mathematik liebt, wird auch dieses Buch lieben.

H. Prodinger (Stellenbosch)

J. Mashreghi: Representation Theorems in Hardy Spaces. (London Mathematical Society Student Texts 74.) Cambridge University Press, 2009, xii+372 S. ISBN 978-0-521-73201-7 P/b £ 23,99.

The self-contained book gives a complete description of the representation theorems for Hardy spaces of harmonic and analytic functions on the unit disc and on the upper half plane. The present text provides direct proofs for both classes, which means that for the upper half plane certain topics from Fourier analysis are needed. Quite often in text books about Hardy spaces of the unit disc the corresponding results on the upper half plane are derived by means of conformal mappings. This text uses a direct way, where many deep facts from Fourier analysis are included. Each single section contains interesting exercises, many with accompanying hints. In the appendix one finds the most important facts from real analysis and measure theory which are used in the text, and a panoramic view of the representation theorems.

F. Haslinger (Wien)

Funktionalanalysis

F. W. King: Hilbert Transform, Vol 1+2. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 124+125.) Cambridge University Press, 2009, Vol. 1: xxxviii+ 858 S. ISBN 978-0-521-88762-5, Vol. 1: xxxviii+660 S. ISBN 978-0-521-51720-1 H/b £ 75,–.

Die Hilbert-Transformation ist eine Integraltransformation, welche speziell im Kontext der Funktionentheorie auf einer Halbebene auftritt. In der Theorie der harmonischen Funktionen oder der Hardy-Räume ist diese Transformation ein wichtiges Instrument und ein Objekt von eigenständigem Interesse. Das Verhalten der Hilbert-Transformation ist meist nichttrivial, teilweise sogar ziemlich diffizil. Es gibt viele bekannte, allesamt sehr tiefliegende Sätze, die sich mit der Hilbert-Transformation und ihren Eigenschaften befassen. Dementsprechend wird diese Transformation auch in vielen klassischen Lehrbüchern behandelt.

Inhalt, Umfang und Intention des nun vorliegenden Werks werden am besten und einfachsten durch seinen Erscheinungsort beschrieben: die Serie *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*.

Im ersten Band behandelt der Autor analytische Eigenschaften der Hilbert-Transformation, Rechenregeln, Abschätzungen, asymptotisches Verhalten, etc. Es finden sich auch Kapitel über spezielle Funktionen, diskrete Hilbert-Transformation und numerische Aspekte. Im zweiten Band werden zunächst noch einige Verallgemeinerungen diskutiert, zum Beispiel mehrdimensionale Varianten; danach wendet sich der Autor dem Studium mannigfaltiger Anwendungen zu. Die Hilbert-Transformation tritt in vielen Bereichen der Physik auf, und spielt dort eine wesentliche Rolle (einige Stichworte: signal processing, optics, light scattering, eletric circut analysis, etc.)

Für die Präsentation des umfassenden Stoffs hat der Autor einen Weg gewählt, der die Lesbarkeit und Verständlichkeit des Buchs und damit seinen Wert für die mathematische Gemeinschaft, entscheidend verringert. Abgesehen von wenigen Ausnahmen werden Aussagen nicht klar formuliert und bewiesen, sondern es wird irgendetwas herumgerechnet und am Ende, oder mittendrin, kommt (vielleicht) etwas heraus. Um mit den Worten des Autors zu sprechen: ‘A focus of the book is on problem solving rather than on proving theorems.’ Leider ist *problem solving* nicht wirklich spannend, wenn man nicht weiß, welches Problem eigentlich betrachtet wird. Weiters ist dadurch selten klar ersichtlich, welche Voraussetzungen die gerade betrachteten Objekte nun wirklich erfüllen müssen, damit die bewiesenen Eigenschaften (die sich der bemühte Leser aus den Formeln zusammensuchen darf) gelten. Dies aber wäre, insbesondere in Anbetracht des sensiblen Charakters der Hilbert-Transformation, schon ganz wesentlich. Dem angestrebten enzyklopädischen Charakter des Buchs widerspricht auch die Tatsache, dass viele Ergebnisse nicht in ihrer vollen Allgemeinheit dargestellt werden. Einzig zugutehalten muss man dem Autor, dass er der Stoff in recht kurzen Gliederungseinheiten arrangiert hat, deren Titel zumindest ein bisschen Aufschluss darüber gibt, was denn gerade passiert.

Zusammenfassend könnte ich meinen Eindruck vielleicht so beschreiben: Wenn man das Buch auch nur unter größter Mühe ernsthaft lesen kann, das Herumblättern macht trotzdem großen Spaß. Es werden ohne Zweifel ausnehmend viele interessante Eigenschaften der Hilbert-Transformation gebracht, deutlich mehr als in den diversen Klassikern, die dieses Thema behandeln, und mit ein bisschen Glück findet man vielleicht auch etwas (nützliches und verständliches). Das am backcover angegebene Ziel des Buchs jedoch, nämlich "This work, written in an easy-to-use style, is destined to become the definitive reference on the subject", geht von einer falschen Prämisse aus und wird wohl kaum erreicht werden.

H. Woracek (Wien)

Mathematische Physik

J. Blank, P. Exner, M. Havlíček: Hilbert Space Operators in Quantum Physics. Second Edition. (Theoretical and Mathematical Physics.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, xvii+664 S. ISBN 978-1-4020-8869-8 H/b EUR 96,25.

Die Rolle der Operatortheorie in der theoretischen Physik im Allgemeinen und in der Quantentheorie im Speziellen ist im Laufe der Zeit stetig gewichtiger geworden, und es wurden immer mehr Gebiete erschlossen, wo sich ein Einsatz dieser mathematischen Methoden als fruchtbar erweist. Das vorliegende Werk ist eine gelungene Einführung in diese interessante Wechselbeziehung zwischen Mathematik und Physik.

Zielgruppe sind Studenten höherer Semester der Physik oder Mathematik sowie Wissenschafter, die sich in dieses Gebiet einlesen wollen. Das Buch ist aus einer Reihe von Vorlesungen entstanden, was sich in einem sympathischen didaktischen Aufbau widerspiegelt. Dementsprechend wäre es auch gut zur Vorbereitung einer Vorlesung zum Thema geeignet.

Der Stoff zerfällt thematisch (und auch vom Umfang her) in zwei Hälften: Die erste Hälfte befasst sich mit den Sätzen der Funktionalanalysis, auf denen die späteren physikalischen Interpretationen aufbauen, zunächst Banach- und Hilberträume sowie Maßtheorie und Banachalgebren (im Anhang), dann Spektraltheorie kompakter, beschränkter und unbeschränkter Operatoren und C^*-Algebren. In der zweiten Hälfte werden die aus der Quantentheorie motivierten Begriffe und Sätze systematisch dargestellt; von den grundlegenden Begriffen wie zum Beispiel Zustände, Ort/Moment, time evolution, über axiomatischer Aufbau, Schrödinger-Operatoren und scattering bis hin zu modernen Entwicklungen wie Quantengraphen.

Der Teil des Buchs, in dem die mathematischen Grundlagen dargestellt werden, ist mit einem geringen Grundwissen aus Funktionalanalysis lesbar; der Teil, der sich mit den aus der Quantentheorie motivierten Begriffen beschäftigt, baut ebenfalls nur auf einem gewissen Standardwissen im Umfang eines Grundkurses auf. Vom Standpunkt des Mathematikers muss noch man hervorheben, dass man eigentlich überhaupt kein physikalisches Vorwissen braucht, um den Stoff verstehen zu können; dieses ist nur dann nötig, wenn man der Wahl der Vokabel intuitiven Sinn geben oder Ergebnisse im physikalischen Kontext interpretieren möchte. Fixiert man sich jedoch nicht darauf, findet man auch ganz ohne physikalisches Vorwissen ein schönes mathematisches Gebäude vor.

H. Woracek (Wien)

G. Teschl: Mathematical Methods in Quantum Mechanics. With Applications to Schrödinger Operators. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 99.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, xiv+305 S. ISBN 978-0-8218-4660-5 H/b $ 59,–.

Das Zusammenspiel von Funktionalanalysis und Quantenmechanik hat sich als äußerst fruchtbar herausgestellt. Tatsächlich sind viele mathematische Begriffsbildungen und Fragestellungen aus dieser physikalischen Theorie motiviert, und umgekehrt wären viele physikalische Einsichten ohne entsprechende dahinterliegende Mathematik unmöglich. Dementsprechend interessant ist es, eine Einführung in dieses Gebiet zu haben, die auch für interessierte Studenten lesbar ist.

Der Fokus des vorliegenden Werks liegt auf der Theorie von Schrödingeroperatoren. Es werden insbesondere auch Sturm-Liouville-Operatoren betrachtet und eine Einführung in deren Titchmarsh-Weyl-Theorie gegeben. Weiters finden sich Anwendungen; zum Beispiel wird das Spektrum des Wasserstoffatoms diskutiert. Bei allen Diskussionen wird ein deutlich höherer Anspruch mathematischer Exaktheit gestellt, als in manch anderem, mehr physikalisch orientierten Text.

Das Buch richtet sich primär an Studenten der mittleren Semester, ist aber sicher auch für Wissenschafter, die sich in die Materie ein erstes Mal einlesen wollen, wertvoll. Es wird versucht, nur minimalstes Grundwissen aus Analysis vorauszusetzen, insbesondere werden keine Kenntnisse aus Funktionalanalysis oder Maßtheorie explizit vorausgesetzt. Da die mathematischen Mittel, die in der Quantenmechanik benützt werden, sehr tiefliegend sind, und der Umfang eines Buches beschränkt ist, ist dies ein schwieriger Spagat. Der notwendige mathematische Apparat, sprich Lebesgue-Integral, Hilberträume, C^*-Algebren, Spektraltheorie, Störtheorie, etc. wird im ersten Teil des Buchs bzw. im Anhang so weit nötig (und so weit in dem vorgegebenen Umfang überhaupt möglich) aufgebaut. Dies macht das Buch weitgehend eigenständig lesbar, wenn auch für nicht vorgebildete Leser sicher mit etwas Mühe. Der Preis dafür ist jedoch eine sehr konzise Darstellung und eine sehr zielgerichtete Stoffauswahl, was teilweise den Eindruck erwecken mag, dass nur die halbe Wahrheit vermittelt wird. Dies ändert aber nichts an der Tatsache, dass man das Buch als gelungene Einführung in die Theorie der Schrödinger-Operatoren betrachten kann, welches sicher das Interesse an diesem Gebiet zu wecken vermag.

H. Woracek (Wien)

Einführungen

R. Busam, T. Epp: Prüfungstrainer Lineare Algebra. 500 Fragen und Antworten für Bachelor und Vordiplom. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2009, viii+245 S. ISBN 978-3-8274-1976-7 P/b € 19,95.

Die beiden Autoren haben sich das Ziel gesetzt, die zentralen Begriffsbildungen und Beweistechniken der Linearen Algebra in Form des Frage- und Antworten-Stils darzulegen. Bei der Auswahl der 500 Fragen wird dem Verständnis der grundlegenden Konzepte Vorrang gegenüber der numerischen Lösung von Rechenbeispielen eingeräumt. Sehr viele Verweise auf die Querverbindungen der Linearen Algebra zu anderen Gebieten der Mathematik sowie der Natur- und Computerwissenschaften zeigen die grundsätzliche Bedeutung der Linearen Algebra im Kanon der mathematischen Disziplinen. Aus dem Vorwort sei der folgende Satz zitiert, der vor allem im Zusammenhang mit der in Österreich wieder entbrannten Sucht nach einer Reform des Lehramtsstudiums und der Reduktion der zentralen mathematischen Inhalte beachtet werden sollte: *„Die Lineare Algebra ist heutzutage derart grundlegend für sämtliche Teilgebiete der Mathematik und in ihrer Darstellung derart einheitlich, dass es künstlich wäre, Niveauunterschiede einzuführen und ein Buch über Lineare Algebra speziell an Diplommathematiker, Lehramtskandidaten oder Informatiker zu adressieren. Es mag sein, dass es in der Analysis Unterschiede in den Ansprüchen gibt, aber in der Linearen Algebra muss im Großen und Ganzen jeder dasselbe wissen."*

Die grundlegenden Inhalte der Linearen Algebra sind in die folgenden Kapitel aufgeteilt: Algebraische Grundlagen, Vektorräume, Lineare Abbildungen und Matrizen, Determinanten, Normalformentheorie, Euklidische und unitäre Verktorräume, Anwendungen in der Geometrie.

Durch die vom Standpunkt der zentralen Bedeutsamkeit sehr zweckmäßige Auswahl der einzelnen Fragen und die didaktisch jeweils sehr abgerundeten und Querverbindungen enthaltenden Antworten ist der vorliegende Band sowohl als „Prüfungstrainer" zur Vorbereitung für Studierende als auch als Nachschlagewerk zur Linearen Algebra ganz allgemein sehr zu empfehlen.

P. Paukowitsch (Wien)

R. Butt: Introduction to Applied Linear Algebra with MATLAB. (Sigam Series in Applied Mathematics, Vol. 7.) Heldermann Verlag, Lemgo, 2008, xiii+517 S. ISBN 978-3-88538-407-6 H/b EUR 68,–.

This book grew out of Lecture Notes for a course on Numerical Linear Algebra held by the author at the King Saud University at Riyadh. I must admit that I found the actual content of the book quite disappointing and far from providing a solid basis in either applied or numerical linear algebra. The book provides a number of worked out examples on various basic methods, including iterative methods.

While it is arguable whether one should hide the mathematical substance in short summaries and definitions without giving any geometrical insight into the subject, one would at least expect to learn efficient coding or the use of MATLAB. However, the reader must get the impression that the eigenvalue problem is solved by guessing the roots of a cubic polynomial and the routine for fitting polynomials fails to mention the Vandermonde matrix and uses the name of a standard MATLAB routine (= *polyfit.m*). The code for the trace (using a triple loop) is a really good example how one should *not* write code. Why not: For a square matrix of size 10000 the code "*n = max(size(A)); trc = sum(1 : n + 1 :* n^2*)*" (or the built-in variant) runs about 500 times faster than the one in the book (p. 185). Students may appreciate the explicit examples in the text, but unfortunately no web page for download is provided that could save users from retyping them.

H. G. Feichtinger (Wien)

A. Iosevich: A View from the Top. Analysis, Combinatorics and Number Theory. (Student Mathematical Library, Vol. 39.) American Mathematical Society, 2007, xiii+136 S. ISBN 978-0-8218-4397-0 P/b $ 29,–.

Das Buch ist aus einer *problem solving class* für Undergraduates entstanden. Ziel ist es, die Mathematik anders als in den klassisch vorgehenden Vorlesungen vorzustellen und die Kreativität der Studenten durch schwierige Probleme herauszufordern. Kombinatorik ist sicher ein Gebiet der Mathematik, das einfache Aussagen anbietet, die sich mithilfe analytischer bzw. probabilistischer Mittel lösen lassen. Daher die Entscheidung des Autors, eine Reise durch die Kombinatorik anzubieten.

Das Buch beginnt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung in $\mathbb{R}^2$, dann in $\mathbb{R}^n$ und schlägt allerlei Varianten und Verallgemeinerungen vor. Dieses Kapitel bestimmt den Ton des Buchs: Nach einem sehr einfachen Anfang werden die ersten Formeln und Beweise in verschiedenen Richtungen hinterfragt und der Leser wird gebeten, sie zu analysieren und weiter nachzudenken. Ein Großteil des Inhalts steht als Aufgabe, mit oder ohne Hinweis; Kapitel enden mit Bemerkungen und oft mit einer wichtigen Referenz.

Die nächsten Kapitel wenden sich an die diskrete Geometrie: Wie groß bleibt eine endliche Menge von Punkten, wenn sie auf eine Ebene projeziert wird? Geometrie über endlichen Körpern wird auch diskutiert, Graphen und Inzidenzmatrizen eingeführt. Nach einer raschen Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie wird folgendes Problem von Tchebycheff untersucht: Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei ganze Zahlen teilerfremd sind? Die letzten Kapitel sind analytisch: einfache Beispiele der Methode der stationären Phase, Einführung in die Fourier-Analysis mit dem Hardyschen Problem als Ziel (wieviele Punkte mit ganzen Koordinaten enthält die Kreisscheibe mit Mittelpunkt O und Radius R, wenn R groß wird?)

Der Leser wird im Vorwort ehrlich gewarnt: Es sei ein sehr anspruchsvolles Buch, das man nur mit Bleistift, Papier und viele Mühe lese. Es ist sicher eine gute Idee, motivierte Studenten mit solchen Problemen herauszufordern. Dennoch könnte man dem Buch erstens vorwerfen, dass die Voraussetzungen unklar sind. Mit Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^2$ anzufangen, entspricht einem absichtlich einfachen Startpunkt. Eine Seite lang über den Limes von $(\log n)/n$, die kombinatorische Bedeutung der Faktoriellen und der Binomialkoeffizienten oder über die Konvergenz der Reihe $\sum n^{-2}$ zu plaudern, war vielleicht im Gegenteil nicht notwendig. Zugleich wird beispielsweise der Leser im ersten Kapitel ohne Weiteres gefragt, die Lagrange-Multiplikatoren zum Einsatz zu bringen. Zweitens scheint mir das Buch schwer ohne Hilfe verwendbar zu sein. Keine der Aufgaben wird gelöst und der Leser wird oft nach schwierigen Dingen gefragt, ohne dass er mehr als einen kleinen Hinweis bekommt.

So funktioniert natürlich die Forschung; einem Studenten kann es aber etwas brutal ausscheinen. Außerdem helfen dabei einige Druckfehler nicht. Nur irische Studenten werden sich wahrscheinlich beklagen, dass der Autor *Guinness* nur mit einem *n* schreibt. Dass der Gleichheitsfall in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung falsch ist, oder dass die Definition der Kanten eines Graphen ungeeignet ist, ist wahrscheinlich störender. Dennoch gefiel mir das Buch ganz gut und ich empfehle es Lehrenden oder Studenten, die in ihrer Umgebung bei Bedarf mathematische Hilfe finden können.

G. Barat (Marseille)

D. Logofătu: Grundlegende Algorithmen mit *Java*. Vom Algorithmus zum fertigen Programm – Lern- und Arbeitsbuch für Informatiker und Mathematiker. Mit 115 Abbildungen. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2008, xvi+334 S. ISBN 978-3-8348-0369-6 p/b € 29,90.

Dieses Buch bietet einen sehr praxisbezogenen Zugang zur Implementierung von grundlegenden mathematischen Algorithmen in *Java*. Im ersten Kapitel werden die grundlegenden Konzepte von Algorithmen dargelegt, hauptsächlich natürlich die Komplexität und die Klassifizierung. Das zweite Kapitel erläutert anhand eines einfachen Beispiels (maximale Verschachtelung von vorgegebenen Boxen ineinander) ausführlich den Weg von einem abstrakten mathematischen Algorithmus über dessen Analyse zur Implementierung in *Java*. Die folgenden 6 Kapitel des

Buchs behandeln unterschiedliche Typen von Algorithmen: *greedy algorithms*, das *data ordering problem* bei der Datenübertragung, diverse Rekursionen, *divide and conquer*-Algorithmen, Backtracking und Dynamische Programmierung. Dabei werden jeweils zahlreiche real auftretende Problemstellungen gegeben, die dann mit dem entsprechenden Algorithmus-Typ gelöst und in *Java* implementiert werden. Das letzte Kapitel über Potenzsummen geht noch kurz auf algebraische Probleme und deren Modellierung in *Java* ein.

Jede der in den einzelnen Kapiteln gegebenen Problemstellungen (insgesamt 60 Probleme) wird zunächst in Form einen Algorithmus gelöst, gefolgt vom Quellcode der entsprechenden *Java*-Implementierung. Der Zweifarbdruck (schwarz und blau) vereinfacht die Darstellung der Algorithmen und des Quellcodes enorm. Am Ende jedes Kapitels finden sich noch zusätzliche Problemstellungen zu den einzelnen Algorithmen, die nicht mehr im Buch gelöst und erläutert sind. Zu erwähnen wäre außerdem noch die zum Buch zugehörige Webseite *http://www.algorithmen-und-problemloesungen.de*, auf der die abgedruckten Quellcodes und die Beispieldateien auch elektronisch verfügbar sind. Ebenso positiv zu vermerken ist, dass die Autorin auf Anfragen (ob man z.B. den Quellcode auch in eigenen Projekten benutzen darf) sehr entgegenkommend und rasch reagiert.

R. Kainhofer (Wien)

G. Wittmann: Elementare Funktionen und ihre Anwendungen. (Mathematik Primar- und Sekundarstufe.) Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008, ix+225 S. ISBN 978-3-8274-1907-1 P/b € 19,95.

Der vorliegende Band richtet sich an Studierende des Lehramts Mathematik in der Primar- und Sekundarstufe und vermittelt die fachlichen Grundlagen zum Erreichen der Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss im Umfeld „Funktionaler Zusammenhang“. Die elementaren Funktionen und ihre Eigenschaften werden praxisorientiert – anhand von vielen, didaktisch sehr zweckmäßig ausgewählten Beispielen – behandelt. Die Darstellung meidet die Differential- und Integralrechnung, lässt jedoch problemlos erkennen, an welchen Stellen die entsprechenden Begriffsbildungen der Analysis einzubinden sind, falls dies im Rahmen des jeweiligen Unterrichts gewünscht wird.

Jedem Kapitel sind Aufgaben angefügt, wobei viele dieser insgesamt 56 Aufgaben mit einem lösungsorientierten Hinweiskatalog ausgestattet sind. Die Überschriften der einzelnen Kapitel zeigen die darin enthaltenen Funktionen und didaktischen Ideen unmittelbar: Funktionen und funktionales Denken; Problemlösen und Modellbildung mit Funktionen; lineare Funktionen; quadratische Funktionen; Potenzfunktionen; Polynomfunktionen; rationale Funktionen; Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen; Winkelfunktionen.

Aufgrund der Zielvorstellungen zur Verwendbarkeit dieses Lehrbuchs im universitären Lehrbetrieb, im Unterricht der genannten Schulstufen sowie zur fachlichen

Aus- und Weiterbildung von Lehrkräften steht anschauliches, anhand von konkreten Beispielen durchaus breit angelegtes Argumentieren im Vordergrund, knappe Formalismen haben hier naturgemäß wenig verloren.

Insgesamt liegt ein sowohl für Studierende als auch bereits aktive Lehrer sehr empfehlenswertes Lehrbuch an der Schnittstelle zwischen Fachwissenschaft und Fachdidaktik im beschriebenen mathematischen Umfeld vor.

P. Paukowitsch (Wien)

Neue Mitglieder

Werner Aumayr, Dipl.Ing. Dr.techn. – AMAG Austria Metall AG, Hertzstr. 5, 4020 Linz. geb. 1961. Studium Technische Mathematik TU Wien, 1985 Promotion sub auspiciis praesidentis. Derzeit Chief Information Officer AMAG. email *werner@umayr.net*.

Dietrich Burde, Dr. – Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Nordbergstr. 15, 1090 Wien. geb. 1963. Studium Musikhochschule Frankfurt am Main (1983–1987), Studium Mathematik an Univ. Frankfurt, Promotion 1992, 1999 Habilitation an der Universität Düsseldorf, 2001 Professor an der IU Bremen, 2002 Universität Wien, 2004 Gastprofessor KU Leuven, 2009 Assoz. Professor Universität Wien. email *dietrich.burde@univie.ac.at*.

Christine Duller, Dipl.Ing. MMag. Dr. – Institut für Angewandte Statistik, Universität Linz, Altenbergstr. 69, 4040 Linz. geb. 1967. 1995 Dip.-Ing. (Technische Mathematik), 1998 Mag.rer.soc.oec., 1999 Abschluss Versicherungsmathematik, Dr.rer.soc.oec., 2007 Mag.rer.nat. (Lehramt Mathematik, Geschichte). Seit 2005 Assistenzprofessorin. email *christine.duller@jku.at*.

Christopher Frei, Dipl.Ing. – Institut für Mathematik A, TU Graz, Steyrergasse 17/3, 8010 Graz. geb. 1985. 2004–2008 Bachelorstudium Technische Mathematik TU Graz, 2008–2009 Masterstudium Mathematische Computerwissenschaften TU Graz, seitdem Projektassistent bei R. Tichy. email *frei@math.tugraz.at*.

Agelos Georgakopoulos, Dr. – Institut für Mathematik C, TU Graz, Steyrergasse 17/3, 8010 Graz. geb. 1997. Promotion in Hamburg. Derzeit als Postdoc bei W. Woess an der TU Graz. email *georgakopoulos@tugraz.at*.

Philipp Grohs, Dipl.Ing. Dr.techn. – TU Wien, Nussdorferstr. 33/15, 1090 Wien. geb. 1981. 2006 Dipl.Ing. TU Wien, 2007 Dr.techn. TU Wien. Derzeit an TU Wien und TU Graz beschäftigt. email *philippgrohs@gmail.com*.

Alfred Huber, Dipl.Ing. Dr.techn. – Prottesweg 2a, 8062 Kumberg. geb. 1959. LAP zum Chemielaborant. Studium Technische Physik und Promotion, dzt. wiss. Tätigkeit am Institut für Chemische Technologie von Materialien der TU Graz. email *dr.alfredhuber@gmx.at*.

Barbara Kaltenbacher, Prof. Dr. – Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen, Universität Graz, Heinrichstr. 36, 8010 Graz. geb. 1969. 1996 Doktorat Univ. Linz, 2003 Habilitation, 2006–2009 Professorin Universität Stuttgart, seit 2010 Professorin Univ. Graz. email *barbara.kaltenbacher@uni-graz.at*.

Veronika Kraus – Lange Gasse 64/3, 1080 Wien, Österreich. geb. 1983. 2001 bis 2008 Diplomstudium Technische Mathematik TU Wien, seit 2008 Doktoratsstudium, Projektassistentin am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der TU Wien. email *vkraus@dmg.tuwien.ac.at*.

Markus Kröll – TU Graz, Münzgrabenstr. 30, 8010 Graz, Österreich. geb. 1988. Student der Techn. Mathematik an der TU Graz. email *kkroell@student.tugraz.at*.

Ulrich Pferschy, a.o.Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr. – Institut für Statistik und Operation Research, Universitätsstr. 15, 8020 Graz. geb. 1968. Bis 1991 Studium der Technischen Mathematik TU Graz, Promotion 1995, 1992–1995 TU Graz, seit 1996 Universitätsassistent am Institut für Statistik und Operations Research der Universität Graz, 2001 Habilitation. email *pferschy@uni-graz.at*.

Elena Resmerita, Dr. – Institut für Industriemathematik, Johannes Kepler Universität Linz, Altenbergerstr. 69, 4040 Linz. geb. 1972. 1997 MSc. A.I. Cuza-Univ. Rumänien, 2003 Ph.D. Univ. Haifa, 2004–2008 Postdoc am RICAM in Linz, seit 2008 Elise-Richter-Stipendiatin der Univ. Linz. email *elena.resmerita@jku.at*.

Eva Sattlberger, Mag. Dr. – Magdalenenstr. 2/10, 1060 Wien. geb. 1972. Bundeslehrerin im Hochschuldienst, Univ. Wien. email *eva.sattlberger@univie.ac.at*.

Georg Seitz, Dipl.Ing. – Meiselstr. 8/2/14, 1150 Wien. geb. 1985. 2004–2008 Studium Technische Mathematik TU Wien. Seit 2009 Projektassistent am Inst. f. Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien. email *georg.seitz@tuwien.ac.at*;

Horst Trinker, Mag. Dr. – FB Mathematik, Universität Salzburg, Hellbrunnerstr. 34, 5020. geb. 1980. seit 2007 Forschungsassistent, Lehrbeauftragter Universität Salzburg; email *horst.trinker@sbg.ac.at*;

Thomas Wannerer, Dipl.Ing. – Missongasse 19, 2130 Ebendorf. geb. 1986.. 2005–2009 Studium der Technischen Mathematik TU Wien, 2009–2010 Universität Osnabrück, seit 2010 Projektassistent an der Forschungsgruppe Konvexe und Diskrete Geometrie, TU Wien. email *thomas.wannerer@tuwien.ac.at*;

Wolfgang Windsteiger, Dipl.Ing. Dr. – Institut für Symbolisches Rechnen (RISC) der JKU Linz, 4232 Hagenberg, Österreich. geb. 1967. Studium Technische Mathematik und Promotion an der Universität Linz. Seit 2001 Universitätsassistent an der JKU Linz. email *wolfgang.windsteiger@risc.jku.at*.