

# Internationale Mathematische Nachrichten

## International Mathematical News

### Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

#### Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email [imn@tuwien.ac.at](mailto:imn@tuwien.ac.at), <http://www.oemg.ac.at/>

#### Redaktion:

*J. Wallner* (TU Graz, Herausgeber)  
*H. Humenberger* (Univ. Wien)  
*R. Tichy* (TU Graz)  
*R. Winkler* (TU Wien)

#### Ständige Mitarbeiter der Redaktion:

*C. Binder* (TU Wien)  
*R. Mlitz* (TU Wien)  
*K. Sigmund* (Univ. Wien)

#### Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

© 2010 Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wien.

ISSN 0020-7926



# Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

<http://www.oemg.ac.at/>

email: [oemg@oemg.ac.at](mailto:oemg@oemg.ac.at)

## **Sekretariat:**

TU Wien, Institut 104,  
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.  
Tel. +43-1-58801-11823  
email: [sekr@oemg.ac.at](mailto:sekr@oemg.ac.at)

## **Vorstand des Vereinsjahres 2010:**

*M. Drmota* (TU Wien): Vorsitzender  
*M. Oberguggenberger* (Univ. Innsbruck): Stellvertretender Vorsitzender  
*J. Wallner* (TU Graz):  
Herausgeber der IMN  
*B. Lamel* (Univ. Wien): Schriftführer  
*A. Ostermann* (Univ. Innsbruck):  
Stellvertretender Schriftführer  
*G. Larcher* (Univ. Linz): Kassier  
*P. Kirschenhofer* (MU Leoben):  
Stellvertretender Kassier  
*G. Schranz-Kirlinger* (TU Wien):  
Beauftragte für Frauenförderung  
*G. Teschl* (Univ. Wien):  
Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

## **Beirat:**

*A. Binder* (Linz)  
*C. Christian* (Univ. Wien)  
*U. Dieter* (TU Graz)  
*H. Engl* (Öst. Akad. Wissenschaften)  
*P. M. Gruber* (TU Wien)  
*G. Helmsberg* (Univ. Innsbruck)  
*H. Heugl* (Wien)

*W. Imrich* (MU Leoben)  
*M. Koth* (Univ. Wien)  
*C. Krattenthaler* (Univ. Wien)  
*W. Kuich* (TU Wien)  
*R. Mlitz* (TU Wien)  
*W. Müller* (Univ. Klagenfurt)  
*W. G. Nowak* (Univ. Bodenkult. Wien)  
*L. Reich* (Univ. Graz)  
*N. Rozsenich* (Wien)  
*W. Schachermayer* (Univ. Wien)  
*F. Schweiger* (Univ. Salzburg)  
*K. Sigmund* (Univ. Wien)  
*H. Sorger* (Wien)  
*H. Strasser* (WU Wien)  
*W. Wurm* (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionsvorsitzende gehören statutengemäß dem Beirat an.

## **Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:**

*W. Woess* (Graz)  
*G. Kirchner* (Innsbruck)  
*H. Kautschitsch* (Klagenfurt)  
*F. Pillichshammer* (Linz)  
*P. Hellekalek* (Salzburg)  
*C. Krattenthaler* (Wien)  
*H. Humenberger* (Didaktikkommission)

## **Mitgliedsbeitrag:**

Jahresbeitrag: € 20,-

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria-Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).



# Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News  
Nouvelles Mathématiques  
Internationales

Nr. 213 (64. Jahrgang)

April 2010

---

## Inhalt

<i>James B. Cooper: On Paul Samuelson, Linz and the holy grail equation</i> . . .	1
<i>Manfred Husty, Gerhard Kirchner, Norbert Netzer, Michael Oberguggenberger, Alexander Ostermann, Franz Pauer: Mathematik in Innsbruck</i> . . .	7
<i>Hans Humenberger: Iterationen, Grenzwerte und Spinnwebdiagramme – oder: warum ist 2 doch nicht 4?</i> . . . . .	19
<i>Günter Rote: Richtig Zitate zählen</i> . . . . .	35
Buchbesprechungen . . . . .	41
Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft . . . . .	65
Neue Mitglieder . . . . .	69

Die Titelseite zitiert die Zahlenreihen

1 48 54 01 40	1 05	1 37
1 47 06 41 40	5 19	8 01
1 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01
1 41 33 45 14 03 45	13 19	20 49
1 38 33 36 36	9 01	12 49
1 35 10 02 28 27 24 26	1 22 41	2 16 01

aus der Keilschrifttafel der Sammlung G. A. Plimpton (Inv. Nr. 322), die in der Columbia University aufbewahrt wird. Diese sind als Hexagesimalzahlen zu interpretieren (allerdings ist jedes Keilschriftsymbol für eine hexagesimale Ziffer auf dezimale Weise aus den Zeichen für 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 zusammengesetzt). Die 2. und 3. Spalte enthalten ganze Zahlen  $a$ ,  $b$  mit der Eigenschaft, dass  $b^2 - a^2$  ein Quadrat ist; die erste Spalte enthält den Bruch  $b^2/(b^2 - a^2)$ . In jedem Fall besitzt dieser Bruch eine endliche hexagesimale Entwicklung.

Diese Tafel aus der Zeit von 1900–1600 v.Chr. wird weithin als Beleg für das Wissen der babylonischen Mathematiker um große pythagoreische Tripel angesehen. Man schließt daraus, dass wahrscheinlich bereits in dieser frühen Zeit eine Konstruktionsvorschrift für pythagoreische Tripel vorhanden war.

Die führende Eins in der ersten Spalte ist eine Konjektur, was jedoch nichts an der mathematischen Signifikanz der restlichen Ziffern ändert. Es ist auch ein Fehler wiedergegeben, der sich im Original findet: In der mittleren Spalte sollte in der vorletzten Zeile „8 01“ statt „9 01“ stehen.

# On Paul Samuelson, Linz and the holy grail equation

**James B. Cooper**

Univ. Linz

The distinguished American academic P. A. Samuelson, who is generally regarded as having been the most important economist of the 20th century, died on the 13th of December, 2009 at the age of 94 (for this assessment and some of the quotes in what follows, see [6]). In the course of his professional life, he wrestled with a mathematical problem to which he returned again and again – the search for an equation which would provide a criterium for determining whether certain economic processes are driven by a maximising principle.

This equation came to be so important to him that he referred to it as the holy grail equation. In the course of a long collaboration with the economist T. Russell of Santa Clara University in California and the author – for a survey of some of the fruits of this collaboration, see the article [1] – it was found to have the specific form:

$$\begin{aligned} & b^{(0,2)}(x,y)a(x,y)^3 + 2\left(b^{(0,1)}(x,y)^2 + b^{(1,1)}(x,y)\right)a(x,y)^2 \\ & - \left(b^{(0,1)}(x,y)\left(3a^{(1,0)}(x,y) - 4b^{(1,0)}(x,y)\right)\right. \\ & \left. + a^{(0,1)}(x,y)b^{(1,0)}(x,y) + a^{(2,0)}(x,y) - b^{(2,0)}(x,y)\right)a(x,y) \\ & + 2\left(a^{(1,0)}(x,y) - b^{(1,0)}(x,y)\right)^2 + b(x,y)^3a^{(0,2)}(x,y) + b(x,y)^2 \\ & \left(2a^{(0,1)}(x,y)^2 - a(x,y)a^{(0,2)}(x,y) + 2a^{(1,1)}(x,y)\right) - b(x,y)\left(b^{(0,2)}(x,y)a(x,y)^2\right. \\ & \left. + 2\left(2a^{(0,1)}(x,y)b^{(0,1)}(x,y) + a^{(1,1)}(x,y) + b^{(1,1)}(x,y)\right)\right) \\ & a(x,y) + b^{(0,1)}(x,y)a^{(1,0)}(x,y) + a^{(0,1)}(x,y) \\ & \left.\left(3b^{(1,0)}(x,y) - 4a^{(1,0)}(x,y)\right) - a^{(2,0)}(x,y) + b^{(2,0)}(x,y)\right) = 0. \end{aligned}$$

Before explaining the significance of this equation in more detail, we give a brief description of Samuelson's work, in particular its relationship to mathematics. Samuelson's friend, colleague and fellow Nobel laureate Robert Solow made the much-quoted comment: "If you did a time and motion study of what any modern economist does at work, you would find that an enormous proportion traces back to Paul Samuelson". One of Samuelson's main achievements was to bring mathematics squarely into mainstream economic theory and, with this aim in mind, he maintained contact with a circle of mathematicians. Many regard his main contribution to his subject to have been its transformation into one that solves problems and answers questions about cause and effect with mathematical rigor and clarity and it is generally assumed that the award of the Bank of Sweden prize in economics (*vulgo* the Nobel prize) in 1970 was in recognition of his seminal text "*The Foundations of Economical Analysis*" (which had appeared in 1948) and its subsequent influence on the development of academic economics. This led Samuelson to seek a dialogue with mathematicians whom he was accustomed to submit to a barrage of interesting and challenging questions. His most famous collaborator was the troubled mathematical genius John Nash who was later to become a fellow-laureate.

Samuelson used mathematics to craft theoretical forecasts of how an economy would behave, to study business cycles and also to examine relationships between the individual consumer and the overall economic situation and it was in the latter connection that the search for the holy grail was to become of central importance in his work, this for the following reason. In addition to his activities as an economist, teacher, governmental advisor and administrator (a large proportion of the laureates in economics were his students or colleagues at the Massachusetts Institute of Technology, where he built up one of the major world centres in economics), Samuelson was profoundly interested in the philosophy of science, in particular in the works of Percy Bridgman (also a laureate – in this case for physics) and the Anglo-Austrian philosopher Karl Popper, for whom he had a high regard. This interest went well beyond mere dilettantism and had a profound influence on his way of thinking about mathematics and its role in economics. He demanded of a mathematical approach to economics that it be falsifiable in the Popperian sense and that those predictions which were falsifiable should be expressible in terms involving quantities which could be measured directly. Here he was influenced by the operationalism of Bridgman. The latter was an experimentalist whose main achievements lay in empirical investigations of the thermodynamical properties of substances at very high pressure so that his interest in the philosophy of science was, as was also the case with Samuelson, motivated by eminently practical considerations. This was the background to Samuelson's search for the holy grail equation.

Samuelson observed that classical thermodynamics and economics are related by a common search for an optimising basis for observed behaviour (of a group of





Figure 1: From left: Paul Samuelson, T. Russell, and the author at the former's ninetieth birthday celebration.

people in the latter case, of a thermodynamical substance in the former). In thermodynamics the observed isotherms and adiabats are hypothesised to be derived from the minimisation of a scalar quantity “energy”, in economics the quantities are derived from the maximisation of the scalar quantity “profits”. Deriving a test for these hypotheses then becomes a common task of both disciplines. The  $a$  and  $b$  in the holy grail equation are the gradients of indifference curves or “isoquants” in economic models (comparable to the isotherms and adiabatics in Gibbsian thermodynamics). The use of these gradients as input was important to Samuelson since they, in contrast to the abstract quantities involved, can be directly measured from empirical data, at least in principle. An analogous situation occurs in the theory of thermodynamics where the key notions of temperature and entropy cannot be directly measured, but only their indifference curves and hence the gradients of the latter.

The above equation was just one aspect of the collaboration between Samuelson, Russell and the author which led to a series of articles in economics and mathematics and to the introduction of several concepts (Samuelson configurations, Samuelson submanifolds, Samuelson webs) which are at present objects of study

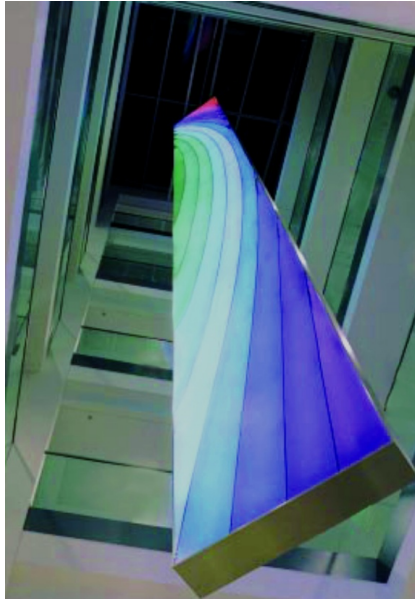


Figure 2: Waltraut Cooper: Highlight – Light Sculpture at the Raiffeisen Landesbank, Linz (Photo: Paul Kranzler).

for academics in Italy, Romania, Norway, the Ukraine and the United States. (see, for example [4, 2, 5])

Although the equations and formulae which were developed in the above mentioned theories are very lengthy and complex (the holy grail equation is one of the more harmless ones), their visualisation leads to images with striking aesthetic qualities and these have inspired the author's wife, the artist Waltraut Cooper, to a group of light installations within the framework of her extended series "Digital Poetry" (see [3] for an overview). A major example is a large scale light sculpture which is on permanent exhibition in the entrance foyer of the central building of the Raiffeisenbank in Linz.

Paul Samuelson, who was born in 1915 in Gary, Indiana to a family of Polish jewish immigrants, was the first American to win the Nobel prize in Economics, which he received "for having done more than any other contemporary economist to raise the level of scientific analysis in economics theory".

In addition to his achievements as an academic economist, for which he also received the National Medal of Science from President Bill Clinton, he was enormously influential as a teacher and as author of the bestselling textbook in economics of all time, as advisor to President John F. Kennedy and Lyndon Johnson, and as a consultant to the United States Treasury. By raising the analytic level in economical theory he became one of the principal founders of neo-Keynsian or neoclassical economics. In the course of his extended *opus* (the version of his *Collected papers* which was published in 1987 already had 388 articles), he made substantial contributions to Welfare Economics, Public Finance theory, Interna-

tional economics, Macroeconomics and Consumer Theory. Particularly relevant to the above article is the fact that he was a pioneer in the introduction of thermodynamical methods in economics and the study of how *operationally meaningful* theorems could be derived with analogous methods in order to establish a general theory of economics based on two general hypotheses – the maximising behaviour of agents (consumers with respect to utility, business firms with respect to profit) and economic systems as systems in stable equilibrium.

Paul Samuelson, who was a member of a distinguished family of economics including his brother Robert Samuelson, sister-in-law Anita Summers and nephew Larry Summers, died in December, 2009.

## References

- [1] J. B. Cooper, T. Russell: The surprising ubiquity of the Samuelson configuration. In M. Szenberg et al., Eds., *Samuelsonian economics and the twenty-first century*. Oxford Univ. Press, 2006.
- [2] J. B. Cooper, T. Russell: On Samuelson submanifolds in four space. *Ukr. Math. J.* 6,2 (2009) 264–275.
- [3] W. Cooper: Catalogue “Waltraut Cooper” of the exhibition *Brehm Cooper Dorfer*, Nordico-Museum der Stadt Linz (vol. 98 of the catalogue series), 2009.
- [4] V. V. Goldberg, V. V. Lychagin: Samuelson webs of maximal rank. *arxiv 0910:4749*.
- [5] T. Russell: Additive separability, optimization and trivial webs. *arxiv 0901:0192*.
- [6] P. Samuelson, obituary. *The Independent*, 16.12.2009.

*Author’s address:*

*James B. Cooper  
Institut für Analysis, Johannes Kepler Universität Linz  
Altenberger Straße 69  
A 4040 Linz.*



# Mathematik in Innsbruck

**Manfred Husty, Gerhard Kirchner, Norbert Netzer,  
Michael Oberguggenberger, Alexander Ostermann,  
Franz Pauer**

Universität Innsbruck

*Mit diesem Artikel wird die Reihe fortgesetzt, in der sich die universitären Mathematikstandorte in Österreich in den IMN vorstellen.*

Die Begründung der ersten Mathematischen Lehrkanzel an der Universität Innsbruck geht auf das Jahr 1677 zurück. Das Fach selbst hatte in den ersten Jahrzehnten eine eher untergeordnete Bedeutung. Der Mathematik kamen im Rahmen der philosophischen Fakultäten bloß vorbereitende Aufgaben für die höheren Studien zu. Es fand ein rascher Wechsel von Professoren statt, die im Jesuitenorden beheimatet waren. Eine derartige Lehrtätigkeit galt damals als Durchgangsstadium und nicht als Lebensberuf.

Als Begründer des akademischen Unterrichts in der Mathematik gilt Anton Baumgarten, der ab dem Jahr 1852 Lehrstuhlinhaber war und seine Hauptaufgabe in der Lehrerausbildung hatte. Auf seinen Antrag hin wurde im Jahr 1872 die zweite Lehrkanzel für Mathematik geschaffen, die mit Otto Stolz (zunächst als Extraordinarius und 1876 als Ordinarius) besetzt wurde.

Als Gründungsdatum des Instituts für Mathematik an der Universität Innsbruck kann wohl der 18. Oktober 1875 angesehen werden, als das zuständige Ministerium das Gründungsstatut des Innsbrucker Mathematischen Seminars mit gleichzeitiger Systemisierung von drei Stipendien genehmigte. Die Gründung des Seminars geht auf eine Initiative von Otto Stolz zurück. Seine Aufgaben werden in §1 des Gründungsstatuts folgendermaßen beschrieben:

„Das mathematische Seminar ist eine mit der Philosophischen Facultät verbundene öffentliche Anstalt, welche den Zweck hat, Studierende der Mathematik durch eigene gemeinsame Übungen auf dem Gebiet ihrer Studien unter Anleitung der Fach-Professoren zur Lehrtätigkeit an den Mittelschulen vorzubereiten,

sowie denselben Gelegenheit zu weiterer fachwissenschaftlichen Ausbildung zu bieten.“

Stolz war bis zum Jahre 1905 als Inhaber dieser Lehrkanzel tätig und musste dann aus gesundheitlichen Gründen in den Ruhestand treten. Im Jahr 1878 trat Baumgarten vom Lehramt zurück. Die erste Lehrkanzel wurde in den folgenden Jahren durch Leopold Gegenbauer (1878–1893) und Wilhelm Wirtinger (1895–1903) besetzt. In den Jahren 1900 bis 1904 existierte eine dritte Lehrkanzel, die mit dem Extraordinarius Konrad Zindler besetzt wurde. Im Jahr 1904 folgte dieser als Nachfolger von Wirtinger als Ordinarius auf die erste Lehrkanzel. Er übte diese Tätigkeit bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1930 aus.

Im Jahre 1906 wurde Josef Anton Gmeiner als Nachfolger von Otto Stolz zum Ordinarius ernannt. Nach seiner krankheitsbedingten Beendigung der Lehrtätigkeit folgte ihm im Jahr 1927 Leopold Vietoris nach. Dieser nahm für die Jahre 1927–1928 einen Ruf an die Technische Hochschule Wien an, kehrte aber im Jahr 1930 als Nachfolger Zindlers nach Innsbruck zurück. Nach seiner Emeritierung im Jahr 1961 war er bis in das hohe Alter wissenschaftlich tätig. In den Jahren 1926 bis 1929 supplierte der aus der Innsbrucker Schule hervorgegangene Heinrich Schatz die Lehrkanzeln von Gmeiner und Vietoris. Im Jahr 1929 wurde er zum Extraordinarius ernannt und rückte auf die frei gewordene 2. Lehrkanzel nach. Im Jahr 1941 erfolgte seine Ernennung zum Ordinarius, bis dann im Jahr 1945 seine Universitätslaufbahn durch Amtsenthebung unterbrochen wurde. Im Jahr 1951 erfolgte seine neuerliche Habilitation und in den Jahren 1956 bis 1958 eine Stelle als *full professor* in Bagdad. 1959 kehrte er als Extraordinarius nach Innsbruck zurück, 1962 erfolgte die Ernennung zum Ordinarius. In den Jahren 1945/46 wurde die Lehrkanzel von Schatz durch Johann Radon suppliert. Im Jahr 1947 wurde der seit 1941 als Extraordinarius in Wien tätige Wolfgang Gröbner als Ordinarius nach Innsbruck berufen. Er war hier bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1970 wissenschaftlich überaus produktiv und seine zahlreichen Schüler tragen seine Ideen weiter. In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts wurde wieder eine dritte Professur geschaffen. Im Jahr 1961 wurde Gustav Lochs zum Außerordentlichen und 1965 zum Ordentlichen Professor ernannt. Nach seiner Emeritierung wurde die Professur im Studienjahr 1977/78 durch Detlef Gronau suppliert. Als Nachfolger von Gröbner und Schatz wurden im Jahr 1970 Roman Liedl und im Jahr 1972 Ulrich Oberst berufen. Ihre Emeritierung erfolgte in den Jahren 2008 (Liedl) beziehungsweise 2009 (Oberst). In die Zeit der frühen Siebzigerjahre fällt auch die Gründung der Fakultät für Bauingenieurwesen und Architektur, die mit zwei Ordinariaten für Mathematik und einem für Geometrie ausgestattet wurde. Die Nachfolge von Lochs trat im Jahr 1978 Ottmar Loos an, der diese Stelle bis zu seiner Pensionierung im Jahr 2003 innehatte. Diese Stelle wurde im Jahr 2009 durch Stefan Geiß nachbesetzt. Zur Stärkung der Angewandten Mathematik wurde im Jahr 2001 Otmar Scherzer als vierter Professor an die damalige Naturwissenschaftliche Fakultät berufen, der 2009 einen Ruf an die Universität Wien annahm.

Derzeit sind am Institut zwei Professoren tätig. Es sind dies der kürzlich berufene Stefan Geiß und der aus der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften stammende Alexander Ostermann, der im Zuge der Umstrukturierung der Universität der Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik zugeordnet wurde.

Während des letzten Drittels des vorigen Jahrhunderts wurde zur Bewältigung des steigenden Personalbedarfs in der Lehre der Mittelbau verstärkt. So verfügte das Institut bis zum Jahr 2003 neben drei Ordinariaten über 13 Mittelbaustellen, von denen 8 durch Habilitierte besetzt waren. Diese Gruppe leistet bis heute einen wesentlichen Beitrag zu Lehre und Forschung. Besonders hervorgehoben werden soll dabei Heinrich Reitberger, dem für seine Leistungen im Jahr 1993 der Titel eines Universitätsprofessors verliehen wurde.

Seit dem Jahr 1965 haben sich an der Universität Innsbruck 24 Personen im Fach Mathematik habilitiert. Elf von diesen wurden zu Professoren an in- und ausländischen Universitäten ernannt. Der aktuelle Entwicklungsplan der Universität sieht für das Jahr 2010 die Nachbesetzung der durch das Ausscheiden von Otmar Scherzer vakanten Professur vor. Für drei weitere Professuren (Funktionalanalysis und Scientific Computing, Variationsmethoden und partielle Differentialgleichungen, Angewandte Algebra und Diskrete Mathematik) ist der Start der Berufungsverfahren im Zeitraum 2010 bis 2012 geplant.

Im Folgenden werden die Arbeitsgebiete und die Studienmöglichkeiten am Institut für Mathematik dargelegt, gefolgt von einem Blick auf einen Ausschnitt der Öffentlichkeitsarbeit. Anschließend wird über Mathematik und Geometrie an der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften berichtet. Den Abschluss bildet ein Kurzbericht über das im Jahr 2010 startende Doktoratskolleg Plus „Computer-gestützte interdisziplinäre Modellierung“.

## **Mathematik an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik**

### **Algebra und Diskrete Mathematik**

Das Gebiet der Algebra steht in einer langen Tradition an der Universität Innsbruck. Während der letzten fünf bis zehn Jahre wurde im Bereich Algebra und Diskrete Mathematik in den folgenden Gebieten geforscht.

*Systemtheorie und Computeralgebra:* Die System- oder Kontrolltheorie ist ein wesentlicher Teil der Ingenieurmathematik mit Anwendungen in vielen Gebieten der Technik und der Naturwissenschaften, wie zum Beispiel Elektrotechnik, Informationstechnik, Biomathematik und Wirtschaftsmathematik. Der Schwerpunkt in Innsbruck liegt auf sowohl theoretischen als auch konstruktiv algorithmischen Aspekten von *linearen* Systemen, formuliert in der Sprache der ‘Behavior’. Die dabei verwendeten Behavior sind Lösungsräume in geeigneten Funktionenräumen

von linearen Systemen von Differenzgleichungen, meistens mit konstanten Koeffizienten, im diskreten Fall, und von gewöhnlichen oder partiellen Differential- oder Differential-Differenzgleichungen im kontinuierlichen Fall.

Viele Standardsignalräume induzieren eine kategorielle Dualität zwischen endlich erzeugten polynomialen Moduln und Behaviors und stellen damit einen engen Zusammenhang zwischen Algebra und Analysis her, genauer zwischen den algebraischen Eigenschaften der Gleichungen und den analytischen Eigenschaften ihrer Lösungen. Dieses Gebiet wird daher oft auch als Algebraische Analysis bezeichnet. Insbesondere ermöglicht die Dualität die Anwendung weit entwickelter algebraischer Theorien wie kommutative und homologische Algebra, algebraische Geometrie und Computeralgebra, auf die Systemtheorie. Speziell Gröbnerbasen für Moduln wurden so zu einem wesentlichen Hilfsmittel für zahlreiche konstruktive Verfahren.

In den letzten fünf Jahren wurden Forschungsergebnisse unter anderen zu den folgenden Themen erzielt, zum Großteil im Rahmen von FWF-Projekten: Diskrete Systemtheorie über Quasi-Frobenius-Ringen statt Körpern, endlich dimensionale diskrete Systeme, Lösung des Cauchyproblems für Systeme partieller Differenzgleichungen, Stabilisierung mehrdimensionaler Eingabe/Ausgabe-Systeme durch Rückkopplung, Zustandsdarstellungen mehrdimensionaler Systeme, Dualität von Differential-Differenzen-Systemen auf Liegruppen, Lösbarkeit und Dualität für analytische Systeme partieller Differential-Differenzgleichungen.

*Algebraische Zahlentheorie und Galoistheorie:* Seit etwa 25 Jahren wird in Innsbruck über Abelsche Zahlkörper, insbesondere deren arithmetische Klassenformel, geforscht. Es wurden Beiträge zur Relativklassenzahl und ihrem Zusammenhang zur Verteilung von Potenzresten erzielt.

Im Bereich Galoistheorie und Galoismoduln richtet sich das Interesse neben dem Verständnis von Resolventen vor allem auf (lineare) Relationen zwischen den Nullstellen von Polynomen. Es wurde ein verbessertes Verständnis von Resolventen algebraischer Gleichungen und deren Separabilität erreicht und das Relationenideal von algebraischen Gleichungen ausführlich studiert. Weiters wurde der erste Algorithmus zur Berechnung einer Normalbasis einer Galoiserweiterung in deterministisch-polynomialer Zeit entwickelt.

Im Bereich Dedekindsche Summen und deren Verteilung konnte die Verteilung aller (dem Betrag nach) „großen“ Dedekind-Summen präzise beschrieben werden, eine asymptotische untere Schranke für das arithmetische Mittel von Dedekind-Summen bestimmt werden und Ansätze zu einem Verteilungsgesetz von Dedekind-Summen mittlerer Größenordnung erarbeitet werden. Einige Arbeiten sind besonders den Zusammenhängen zwischen den genannten Gebieten, etwa zwischen Klassenformeln und Dedekind-Summen, gewidmet.

*Didaktik der Algebra:* Im Grenzbereich Algebra/Didaktik der Algebra wird daran gearbeitet, verschiedene Themen der Algebra in möglichst einfacher Sprache



darzustellen. Die Ergebnisse werden in didaktischen Zeitschriften und Veranstaltungen zur Lehrerfortbildung zugänglich gemacht.

*Diskrete Mathematik:* Neben der Tätigkeit im Bereich Informatik/Lehre wird in der Diskreten Mathematik vor allem in den Gebieten der Graphentheorie und der Computergraphik gearbeitet. In einem aktuellen FWF-Forschungsprojekt des Translational-Research-Programms entstand eine enge Zusammenarbeit mit dem Institut für Gerichtsmedizin an der Medizinischen Universität Innsbruck zur Qualitätskontrolle von mitochondrialen DNA-Daten. Das gerichtsmedizinische Institut baut für Populationsstudien und forensische Gutachten die Datenbank EMPOP nach hohen Qualitätsstandards auf. Von Seiten der Mathematik wird die Entwicklung und der Einsatz von *graphentheoretischen und probabilistischen Methoden zur Analyse von Haplotypen* beigetragen. Für die Visualisierung von Mutationen werden quasimediane Netzwerke und Steinerbäume berechnet, für die phylogenetische Alinierung und die Haplogruppenzugehörigkeit werden die Parameter von diskreten Markov-Modellen geschätzt.

*Globale Beleuchtungsmodelle in der Computergraphik* sind das Thema eines FFG-Projekts über Visual Computing mit Partnern aus der Beleuchtungsindustrie. Im Rahmen der Forschungszusammenarbeit werden quantitative Kriterien für die Farbwiedergabe von Leuchten entwickelt und Monte-Carlo-Verfahren für Beleuchtungsberechnungen auf lichttechnische Korrektheit geprüft und verbessert.

### **Angewandte Analysis, Stochastische Analysis und Numerische Mathematik**

Neben Algebra und Diskreter Mathematik bildet Analysis und Numerische Mathematik die zweite Säule der Forschung am Institut für Mathematik.

Aus dem Gebiet der Analysis werden am Institut aktuell folgende Forschungsthemen behandelt: lineare Funktionalanalysis, partielle Differentialgleichungen, Distributionentheorie, Funktionalgleichungen und stochastische Analysis. Die explizite Berechnung von Fundamentallösungen partieller Differentialgleichungen hat eine lange Tradition in Innsbruck und wird in Zusammenarbeit mit dem Arbeitsbereich für Technische Mathematik der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften intensiv betrieben. So konnte erst kürzlich die Fundamentalmatrix des Systems der linearen Elastodynamik in hexagonalen Medien berechnet und damit ein offenes Problem der konischen Reflexion in solchen Medien gelöst werden.

Durch die Neuberufung von Stefan Geiß konnte weiters der Bereich der Stochastischen Analysis neu etabliert werden. Dieses Forschungsgebiet soll in den nächsten Jahren signifikant verstärkt werden.

Beim Arbeitsbereich Numerische Mathematik liegt der Forschungsschwerpunkt in der Zeitintegration nichtlinearer Evolutionsgleichungen. Das Hauptinteresse liegt dabei in der Konstruktion und mathematischen Analyse von sogenannten geometrischen Zeitintegrationsverfahren, welche die analytische Struktur des

Flusses in der Diskretisierung möglichst genau nachbilden. Im Gegensatz zu klassischen Diskretisierungen werden dabei gewisse Größen, beispielsweise die Energie, erhalten. Typische Vertreter solcher Verfahren sind exponentielle Integratoren und Operator-Splitting-Verfahren. In diesem Zusammenhang werden auch konkrete Anwendungen auf Gleichungen der mathematischen Physik betrachtet. Seit längerer Zeit wird in Forschung und Lehre mit mehreren Instituten an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik sowie an der Fakultät für Bauingenieurwesen erfolgreich zusammengearbeitet. Mitglieder des Arbeitsbereichs sind regelmäßig in Doktoratskursen für die Technischen Wissenschaften sowie im Universitätslehrgang „Schutztechnik im alpinen Raum“ tätig.

Der Arbeitsbereich ist stark in die internationale Forschung eingebunden. So werden regelmäßig internationale Workshops in Innsbruck sowie, gemeinsam mit Partnern von der Universität in Triest, Sommerschulen aus dem Themenbereich Numerische Mathematik in den Südtiroler Dolomiten veranstaltet. Universitätsintern beteiligt sich der Arbeitsbereich an den Forschungszentren „Computational Engineering“ und „Hochleistungsrechnen“, die in der Forschungsplattform „Scientific Computing“ zusammengefasst sind. Ab Herbst 2010 ist der Bereich zusätzlich in das neu etablierte Doktoratskolleg Plus „Computergestützte interdisziplinäre Modellierung“ eingebunden.

Neben den angeführten Schwerpunkten in der Forschung ist der Bereich auch stark in Drittmittelprojekten engagiert, beispielsweise auf dem Gebiet der Optimierung von Freiformflächen in der Lichttechnik in Zusammenarbeit mit dem *LichtLabor Bartenbach* oder in der Luft- und Raumfahrtforschung. Details zu einem der gemeinsamen Projekte sind im Abschnitt über den Arbeitsbereich für Technische Mathematik zu finden.

Zusammen mit diesem Arbeitsbereich wurden in den letzten Jahren auch zahlreiche E-Learning-Materialien (für Lehre und Selbststudium), beispielsweise Java-Applets zur Visualisierung grundlegender Zusammenhänge in der Analysis und Numerischen Mathematik, entwickelt.

## **Das Mathematikstudium an der Universität Innsbruck**

*Bachelorstudium Technische Mathematik:* Das Bachelorstudium Technische Mathematik bereitet auf eine Tätigkeit als Mathematikerin bzw. Mathematiker in Industrie und Wirtschaft sowie auf das Masterstudium der Technischen Mathematik vor. Das Studium beinhaltet eine Grundausbildung in Algebra (30 Punkte nach ECTS), Analysis (42.5 ECTS), Geometrie (7.5 ECTS), Stochastik (15 ECTS) sowie Numerische Mathematik und Optimierung (22.5 ECTS). Im Rahmen des gemeinsamen ersten Semesters der Studienrichtungen Technische Mathematik, Informatik und Physik sind auch Einführungsveranstaltungen zu Physik und Informatik (je 7.5 ECTS) enthalten. Neben einer Einführung in die mathematische Modellierung (7.5 ECTS) und Lehrveranstaltungen zu „Soft Skills“ (5 ECTS) ist

ein Wahlmodul (20 ECTS) zu absolvieren, dessen Inhalte sowohl aus vertiefenden mathematischen Fächern als auch aus der Physik oder der Informatik gewählt werden können. Schließlich sind im Rahmen von Seminaren (je 7.5 ECTS) zwei Bachelorarbeiten zu verfassen.

*Lehramtsstudium im Unterrichtsfach Mathematik:* Das Ziel des Lehramtsstudiums ist die wissenschaftliche Berufsvorbildung für das Lehramt an Höheren Schulen in fachlicher, fachdidaktischer, pädagogischer und schulpraktischer Hinsicht. Das Studium enthält Lehrveranstaltungen zu Algebra und Geometrie (38.5 ECTS), Analysis und Stochastik (36.5 ECTS), Informatik (7.5 ECTS), Fachdidaktik (10 ECTS) sowie ergänzende und freie Wahlfächer (12.5 ECTS). Weiters sind die pädagogischen und die schulpraktischen Ausbildungsteile (insgesamt 30 ECTS) zu absolvieren und eine Diplomarbeit (30 ECTS) aus einem der beiden Unterrichtsfächer einschließlich der Fachdidaktik zu verfassen.

*Masterstudium Technische Mathematik:* Das Masterstudium Technische Mathematik bereitet auf eine hochqualifizierte Tätigkeit als Mathematikerin bzw. Mathematiker in Industrie und Wirtschaft sowie auf das Doktoratsstudium vor. Das Masterstudium Technische Mathematik vertieft und verbreitert die Fähigkeiten und Kenntnisse aus dem Bachelorstudium Technische Mathematik. Das Studium beinhaltet Pflichtveranstaltungen aus Funktionalanalysis und Numerik von partiellen Differentialgleichungen (je 10 ECTS) sowie Wahlmodule (gesamt 70 ECTS) aus den Bereichen Algebra und Diskrete Mathematik, Angewandte Analysis und Numerische Mathematik sowie Inverse Probleme, Bildverarbeitung und Kinematik. Schließlich ist eine Masterarbeit (30 ECTS) zu verfassen. Das Studium schließt mit dem akademischen Grad „Diplom-Ingenieur“ ab.

*Doktoratsstudium (PhD):* Das „Doctor of Philosophy“-Doktoratsstudium Mathematik befähigt zu selbstständiger Forschung in einem Teilgebiet der Mathematik oder der Didaktik der Mathematik. Neben der Abfassung der Dissertation und ihrer Verteidigung (125 ECTS) sind Lehrveranstaltungen (insb. Seminare und Kurse) aus dem Gebiet der Dissertation (35 ECTS) sowie über fächerübergreifende und generische Kompetenzen (10 ECTS) zu absolvieren. Weiters besteht die Verpflichtung zur aktiven Teilnahme am wissenschaftlichen Diskurs (10 ECTS), zum Beispiel im Rahmen von Konferenzen.

### **Zur Öffentlichkeitsarbeit: Wie ein didaktisches Experiment zur Institution wurde – Projekte für Schüler und Jugendliche**

Im Rahmen der Öffentlichkeitsarbeit hat sich das Institut für Mathematik unter anderem die Aufgabe gestellt, die Jugend für Mathematik zu begeistern und dazu die Kooperation mit Volksschulen als Pilotprojekt gestartet.

Unter dem Motto „Mathematik geht zu den Schülern“ kam es im Sommersemester 2007 erstmals zur Begegnung der Volksschüler mit Studierenden und Lehrenden der Universität Innsbruck. Das Projektteam aus Lehrenden und Studierenden

konnte den Schülerinnen und Schülern zeigen, dass Mathematik sehr spannend sein kann und auch in Alltagssituationen eine wichtige Rolle spielt. In zwei Tagen konnten sie in spielerischer Weise Freude am Entdecken, Ausprobieren, Begreifen und Verstehen gewinnen, darunter im Fahrtechnikzentrum des ÖAMTC mit dem Thema „Geschwindigkeit und Bremsweg“ und an der Schule mit mathematischen Rätseln, Denksportaufgaben und mathematische Basteleien.

Für alle Verantwortlichen und Beteiligten, von der Schulaufsicht und der Schulleitung bis zu den Lehrpersonen und dem Projektteam, war die Veranstaltung ein voller Erfolg. Das Wichtigste aber ist, dass die Hauptakteure, nämlich die Kinder, begeistert waren. Auch den Studierenden hat das Projekt, das in Form eines Praktikums als Lehrveranstaltung angeboten wurde, viel gebracht. In der Vorbereitungsphase wurden von ihnen die Aufgaben selbständig entwickelt. Sie übernahmen dabei die volle Verantwortung für den Inhalt sowie für die organisatorische Abwicklung. Für viele war es das erste Mal, dass sie an einem Projekt eigenverantwortlich mitarbeiten konnten. Der Höhepunkt war auch für sie die Umsetzungsphase mit den Kindern. In den folgenden Sommersemestern 2008 und 2009 wurde das Projekt an zwei weiteren Schulen durchgeführt und das inhaltliche Angebot erweitert.

Eine enge Kooperation entstand mit der „Jungen Uni Innsbruck – Wissenschaft für junge Menschen“. Diese Institution hat das Ziel, frühzeitig die Freude an der Wissenschaft und Forschung zu wecken. Einmal im Semester wird unter dem Titel „Mathe-cool“ das Programm im Rahmen der Zusammenarbeit der Jungen Uni mit der Volkshochschule für die Öffentlichkeit angeboten. Eine weitere Präsentation erfolgte im Tiroler Landhaus bei einer Festveranstaltung des Vereins Phönix, der die Förderung von Kindern aus Familien mit Migrationshintergrund zum Ziel hat. Selbstverständlich nimmt das Institut auch regelmäßig teil, wenn sich die Universität in der breiten Öffentlichkeit präsentiert, wie bei der „Langen Nacht der Forschung“ oder bei dem regelmäßig stattfindenden Aktionstag für Schulklassen. Ein besonderer Höhepunkt war das im Juni 2009 von der Volkshochschule Innsbruck durchgeführte „Fest der Mathematik“, zu dem unter der Schirmherrschaft der für die Bildung zuständigen Vizebürgermeisterin zwei Tage lang Schulklassen aus der Landeshauptstadt eingeladen wurden.

Jedenfalls besteht die Absicht, diese Aktivitäten weiterzuführen, da immer wieder sowohl Studierende als auch Schulklassen daran großes Interesse zeigen.

## **Mathematik und Geometrie an der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften**

Nach Gründung der Fakultät für Bauingenieurwesen und Architektur an der Universität Innsbruck im Jahr 1969 wurden dort zwischen 1970 und 1973 zwei Mathematikinstitute und ein Geometrieinstitut eingerichtet, das „Institut für Mathe-

matik I“ (Lehrstuhl Helmberg), das „Institut für Mathematik II“ (Lehrstuhl Kremser) und das „Institut für Darstellende Geometrie“ (Lehrstuhl Tschupik), mit jeweils drei bis vier Assistentenstellen. Die Größe der Institute entsprach den damaligen Intentionen zum Ausbau der Bau fakultät zu einer vollen Technischen Universität. Im Jahr 1980 wurden die Institute zum „Institut für Mathematik und Geometrie“ zusammengelegt, welches 1999 in „Institut für Technische Mathematik, Geometrie und Bauinformatik“ umbenannt wurde. Nach der Emeritierung von Herbert Kremser (1995), Gilbert Helmberg (1996) und Josef Peter Tschupik (1997) wurde die Professur für Numerik und Bauinformatik in den Jahren 1996–1999 von Rolf Stenberg gehalten. Manfred Husty trat die Professur für Geometrie und CAD im Jahr 2000 an. Eine zusätzliche Professur für Wissenschaftliches Rechnen wurde 2002 durch Alexander Ostermann besetzt. Die Nachfolge Stenberg wurde im Jahr 2007 durch Michael Oberguggenberger angetreten.

Im Verlauf der Umstrukturierung der Universität Innsbruck wurde die Hälfte der Stellen im Bereich Technische Mathematik an die nunmehrige Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik verschoben, darunter Alexander Ostermann mit drei Kolleg/inn/en und einer Sekretärin. Aus den verbleibenden Teilen entstanden der „Arbeitsbereich für Technische Mathematik“ und der „Arbeitsbereich für Geometrie und CAD“ als zwei von sechs Einheiten des neugeformten großen „Instituts für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften“.

Dass die Fakultät für Bauingenieurwissenschaften ihre eigenen Arbeitsbereiche für Mathematik und Geometrie besitzt, wurde gerade von den Entscheidungsträgern an der Bau fakultät besonders unterstützt. Es mag eine Ausnahme in der europäischen Universitätslandschaft sein, wird aber als großer Vorteil für beide Seiten gesehen (Förderung der Zusammenarbeit, Fokussierung auf Ingenieurwissenschaften, Mitgestaltungsmöglichkeit in Forschung und in den Curricula). Auch beim geplanten Ausbau der Technischen Studien an der Fakultät für Bauingenieurwissenschaften wird den beiden Arbeitsbereichen in Zukunft eine wichtige Rolle zukommen.

### **Der Arbeitsbereich für Technische Mathematik**

Als Teil einer Technischen Fakultät versteht es der Arbeitsbereich als seine Aufgabe, Ingenieurmathematik, Angewandte Analysis und Numerik in Forschung und Lehre zu vertreten. Dank seiner speziellen Stellung als Einheit in der Bau fakultät wurde eine enge Zusammenarbeit mit vielen ingenieurwissenschaftlichen Arbeitsbereichen erreicht; die Mathematik hat an der Fakultät einen anerkannten Stellenwert. Der Arbeitsbereich beteiligt sich an den Forschungszentren „Computational Engineering“ und „Alpine Infrastructure Engineering“, betreibt aber auch eigenständige theoretische und angewandte mathematische Forschung und betreut wissenschaftliche Forschungsprojekte und Projekte mit Bau firmen. Darüber hinaus bestehen Forschungskollaborationen mit Instituten der Fakultät für Mathema-

tik, Informatik und Physik.

Die Hauptforschungsgebiete am Arbeitsbereich sind partielle Differentialgleichungen, verallgemeinerte Funktionen, stochastische und probabilistische Methoden in den Ingenieurwissenschaften und in der Risikoanalyse und Numerik von Differentialgleichungen. Das Hauptgewicht liegt auf mathematischen Modellen in den Ingenieurwissenschaften, doch werden auch theoretische Beiträge zur Analysis und Stochastik und praktische Beiträge zur Biomechanik geliefert. Darüber hinaus wirkt der Arbeitsbereich bei universitären und universitätsnahen Forschungseinrichtungen mit, wie beim Technologiezentrum Ski- und Alpensport und dem alpS-Zentrum für Naturgefahren- und Risikomanagement. Traditionell wird die Forschung durch den FWF gefördert, jedoch wurde in den letzten Jahren die Zusammenarbeit mit Partnern der Bauindustrie intensiviert und einige FFG-Projekte abgewickelt.

Der Arbeitsbereich betreut die Grundausbildung in Mathematik, Informatik (inklusive Programmiersprachen) und Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik im Bachelor- und Masterstudium Bauingenieurwesen, eingeschlossen die Betreuung von Diplomarbeiten. Lehrveranstaltungen zu speziellen Themen wie etwa Finite Elemente und Risikoanalyse werden angeboten. Ab Wintersemester 2009 kamen die Studienrichtungen Mechatronik sowie das Masterstudium Domotronik dazu. Weitere Tätigkeitsfelder in der Lehre eröffneten sich im Universitätslehrgang „Schutztechnik im alpinen Raum“ und im Doktoratsstudium der Technischen Wissenschaften. In geringem Ausmaß erfolgt auch eine Mitwirkung in der Lehre für das Mathematikstudium.

Als typische Forschungsprojekte seien die Projekte ICONA (Innovative Concept for Nonlinear Analysis of Lightweight Structures, 2006–2008) mit dem Nachfolgeprojekt ACOSTA (Advanced Concepts for Structure Analysis of Large Lightweight Structures, ab 2008) genannt. Unter am Institut für Mathematik und am Arbeitsbereich für Technische Mathematik angesiedelter gemeinsamer Leitung werden diese Projekte mit dem Industriepartner Intales GmbH Engineering Solutions in Zusammenarbeit mit EADS Astrium ST und der TU Delft durchgeführt, unterstützt durch das Transferzentrum der Universität Innsbruck und den FFG. Die Projekte befassen sich mit der Ermittlung und Beurteilung der Beullast für die vordere Schürze (frontskirt) der ARIANE-5-Trägerrakete unter verschiedenen Lasten und Flugszenarien. Mit einer großen Gruppe von Diplomanden, Dissertanten und Mitarbeitern der Firma werden folgende Themen behandelt: (1) Entwurf einer großen Datenbank für die Flugszenarien; (2) Entwicklung neuer Gebietszerlegungsverfahren zur Verzweigungsanalyse; (3) Entwicklung eines neuen Schalenelements und (4) Entwicklung von Konzepten der Sensitivitätsanalyse zur Beurteilung der Zuverlässigkeit der Struktur und als Entscheidungsgrundlage für den Entwurf. Mit diesen Projekten hat der Arbeitsbereich und das Institut für Mathematik bereits Sichtbarkeit in der österreichischen Flug- und Raumforschung erzielt.

## Der Arbeitsbereich für Geometrie und CAD

Aus historischen Gründen und einer österreichischen Tradition folgend ist die Geometrie auch in Innsbruck an der technischen Fakultät angesiedelt. Dies ist wohl hauptsächlich durch Lehraufgaben in der Ingenieurausbildung der Bachelor- und Masterstudien Bau- und Umweltingenieurwissenschaften bzw. Architektur begründet. Doch in der Lehre dient der Arbeitsbereich – unterschiedlich gewichtet – drei Fakultäten: Bau- und Umweltingenieurwissenschaften, Architektur sowie Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik. Ab dem Studienjahr 2009/10 wird zusätzlich noch das gemeinsam von der Universität Innsbruck und der UMIT (Private Universität für Gesundheitswissenschaften, medizinische Informatik und Technik) betriebene Bachelorstudium Mechatronik, sowie der Universitätslehrgang „Schutztechnik im alpinen Raum“ bedient.

Durch die organisatorische Ansiedlung an einer technischen Fakultät sind aber auch die zentralen Forschungsaktivitäten im Bereich der Angewandten Geometrie bestimmt. Neben dem Hauptforschungsgebiet “Computational Kinematics” sind in jüngster Zeit Arbeiten zur Diskreten Geometrie, zu geometrischen Toleranzen und zur Konvexgeometrie entstanden. In den Bereichen Kinematik und Konvexgeometrie konnten FWF-Projekte und Projekte anderer Förderungsträger eingeworben werden, über die hauptsächlich Dissertanten angestellt wurden. Mit seinen Forschungsaktivitäten ist der Arbeitsbereich auch in das interfakultäre Forschungszentrum “Computational Engineering” eingebunden. Im Rahmen dieses Fakultätsschwerpunktes wurde z.B. in Zusammenarbeit mit dem Arbeitsbereich Vermessung und Geoinformation und dem Museum Carolino Augusteum Salzburg eine 3D-Vermessung und virtuelle Rekonstruktion des unvollendeten Kaiserdenkmals Maximilian I. für den Dom zu Speyer durchgeführt. Im Bereich “Computational Kinematics” werden mathematisch-geometrische Grundlagen für die Kinematik verschiedenster paralleler, serieller und hybrider Manipulatoren erarbeitet. So wurde z.B. in den letzten Jahren ein optimaler Algorithmus für die Berechnung der inversen Kinematik serieller 6R-Manipulatoren mit beliebigem Design entwickelt. In einem Folgeprojekt wurde dieser Algorithmus in einem Prototypsoftwarepaket implementiert, das in naher Zukunft von Anwendern getestet werden wird. Im FWF-Projekt “Uniqueness Results for Extremal Quadrics” geht es um Verallgemeinerungen eines klassischen Satzes der Konvexgeometrie: Jedem konvexen Körper kann in eindeutiger Weise ein Ellipsoid maximalen Volumens eingeschrieben beziehungsweise ein Ellipsoid minimalen Volumens umschrieben werden. Analoge Resultate in nichteuklidischen Geometrien für vom Volumen verschiedene Größenfunktionen und für umschließende Hyperboloide von Unterraumengen sind Thema des Projekts.

Neben den Forschungs- und Lehraufgaben widmet sich der Arbeitsbereich auch intensiv der postuniversitären Weiterbildung. Es werden sowohl Weiterbildungsveranstaltungen für Lehrer im Bereich Darstellende Geometrie als auch Sum-

merschools für Postdocs im Bereich Computational Kinematics angeboten. Die hier herausgegebene Zeitschrift IBDG (*Informationsblätter der Geometrie*) ist das zentrale Kommunikations- und Weiterbildungsorgan für Geometrielehrer Österreichs und über Österreichs Grenzen hinaus.

## **Computergestützte interdisziplinäre Modellierung: ein neues „Doktoratskolleg Plus“**

Im Jahr 2009 hat ein Konsortium von zehn Professoren und Professorinnen der Institute für Astro- und Teilchenphysik, Ionenphysik und Angewandte Physik, Mathematik, Informatik und Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften mit Unterstützung des Zentralen Informatikdiensts der Universität Innsbruck ein „Doktoratskolleg Plus“ beantragt. Der FWF hat diesem Antrag stattgegeben und das DK Plus W1227 eingerichtet; Leiterin ist die Innsbrucker Astrophysikerin Sabine Schindler. Im Vollausbau wird das Kolleg 28 Doktoratsstellen umfassen, wobei 10 durch den FWF, 10 durch die Universität Innsbruck und 8 durch weitere Finanzgeber zur Verfügung gestellt werden. Das Institut für Mathematik und der Arbeitsbereich für Technische Mathematik werden mit je 2 Doktoratsstellen beteiligt sein.

Ziel des Doktoratskollegs ist die Etablierung eines interdisziplinären Curriculums, das eine einzigartige Kombination der Gebiete Computergestützte Physik und Chemie, Astrophysik, Ingenieurwissenschaften, Paralleles und Verteiltes Rechnen und Angewandte und Numerische Mathematik umfasst. Wissenschaftliche Schwerpunkte reichen von interdisziplinärem, integriertem Modellieren von Multi-Skalen- und Multi-Phasen-Effekten, der Entwicklung von innovativen Methoden und Konzepten der Mathematik, Statistik und Informatik bis zu effizienter numerischer Simulation, Datenanalyse, Visualisierung und Mustererkennung. Den Studierenden stehen die Großrechner der Forschungsplattform „Scientific Computing“ zur Verfügung.

Das neuartige Curriculum beinhaltet Grundlagenforschung, Methodenentwicklung und angewandte Forschung. Die Kurse werden interdisziplinär in Zusammenarbeit der Lehrenden der einzelnen Fachgebiete gehalten, teilweise unter Beteiligung der höhersemestrigen Kollegsteilnehmer, mit Betonung von Teamarbeit. Nach einer internationalen Ausschreibung wird das „Doktoratskolleg Plus“ im Herbst 2010 starten.

*Adresse der Autoren: G. Kirchner, N. Netzer, A. Ostermann, F. Pauer: Institut für Mathematik, Universität Innsbruck. M. Husty, M. Oberguggenberger: Institut für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften, Universität Innsbruck*



# Iterationen, Grenzwerte und Spinnwebdiagramme – oder: warum ist 2 doch nicht 4?

Hans Humenberger

Universität Wien

## 1 Fortgesetztes Potenzieren

Schon in der 1. Klasse (eigentlich auch schon in der Volksschule) kommen Schlangenrechnungen ohne Klammern folgender Art vor:  $30 + 5 + 3 + 2 = 40$ . Hier ist klar, dass die Rechnung eigentlich von links nach rechts abgearbeitet werden muss, man darf aber umordnen und Teilsummen bilden (Vertauschungs- und Verbindungsgesetz, analog bei der Multiplikation). Auch bei der Subtraktion ist dies so vereinbart:  $30 - 5 - 3 - 2$  bedeutet eigentlich  $((30 - 5) - 3) - 2 = 20$ . Hier ist aber diese Vereinbarung dringlicher, denn die Subtraktion ist ja weder kommutativ noch assoziativ. Bei Subtraktionen kommen solche Rechnungen im Schulunterricht häufig vor. Eine Reihe ohne Klammern hintereinander geschriebener Divisionen kommt dagegen nicht sehr häufig vor. Sie wird aber genau so behandelt wie die Subtraktion, nämlich *Abarbeiten von links nach rechts*:  $30 : 5 : 3 : 2$  bedeutet  $((30 : 5) : 3) : 2 = 1$ . Wie sieht es nun mit fortgesetztem Potenzieren (ohne Klammern) aus? Es kommt noch weniger vor als das fortgesetzte Dividieren. Was sollen Ausdrücke wie  $a^{b^c}$  oder gar  $a^{b^{c^d}}$  bedeuten? In Analogie zu Subtraktion und Division wird man zunächst wahrscheinlich dazu verleitet, die Berechnung der Potenzen ebenfalls *von links nach rechts* bzw. hier vielleicht besser ausgedrückt *von unten nach oben* durchzuführen, also zu vereinbaren:

$$a^{b^c} = (a^b)^c \quad \text{bzw.} \quad a^{b^{c^d}} = ((a^b)^c)^d.$$

Dies wäre zwar konsistent mit Subtraktion und Division, jedoch hätten die jeweiligen „Türme“ unnötig viele „Etagen“, wie die Rechengesetze für Potenzen zeigen:

Der Turm  $a^{b^c}$  mit drei Etagen könnte in diesem Fall wegen  $a^{b^c} = (a^b)^c = a^{bc}$  auch mit zwei Etagen geschrieben werden, der Turm  $a^{b^{c^d}}$  mit vier Etagen könnte wegen  $a^{b^{c^d}} = ((a^b)^c)^d = a^{bcd}$  auch mit zwei Etagen geschrieben werden. Deswegen vereinbart man üblicherweise, beim fortgesetzten Potenzieren ohne Klammern die Potenzen von rechts nach links bzw. von oben nach unten zu berechnen:

$$a^{b^c} := a^{(b^c)} \quad \text{bzw.} \quad a^{b^{c^d}} := a^{(b^{(c^d)})}.$$

## 2 Grenzwerte und seltsame Gleichungen

Man kann im Schulunterricht ausgehend von einer Zahl  $a \in \mathbb{R}$  die einfache Frage stellen, wo das Anwenden immer derselben Grundrechenart hinführt: Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ergibt sich ein Grenzwert (ggf. welcher):

$$a + a + a + \dots \quad a - a - a - \dots \quad a \cdot a \cdot a \cdot \dots \quad a : a : a : \dots$$

Durch Fallunterscheiden – ein sehr wichtiges Prinzip in der Mathematik – kann man hier im Kapitel *Grenzwerte* leicht zu einer Übersicht kommen.

Durch solche Überlegungen liegt es für später (wenn auch schon Differentialrechnung zur Verfügung steht) natürlich nahe zu fragen, wie es in diesem Zusammenhang mit dem Potenzieren aussieht (hier wird man sich aus naheliegenden Gründen auf positive Zahlen beschränken):

$$a^{a^{a^{\dots}}} = z$$

Im Einzelnen drängen sich also folgende Fragen auf:

- Für welche Werte  $a > 0$  konvergiert die Folge  $a, a^a, a^{a^a}, \dots$ ? Gegen welchen Wert  $z$  konvergiert sie dann jeweils?
- Für welche  $z > 0$  gibt es ein  $a > 0$ , sodass die genannte Folge gegen  $z$  konvergiert?

Eine andere, vielleicht zunächst verstörende, aber motivierende Einstiegsmöglichkeit wäre auch folgende: Wir betrachten zunächst die Gleichung

$$a^{a^{a^{\dots}}} = 2$$

und interessieren uns für deren positive Lösung  $a > 0$ . Die fortgesetzten Potenzen werden von oben nach unten abgearbeitet, sodass die Gleichung auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$a^{\overbrace{(a^{a^{a^{\dots}}})}^{=2}} = 2 \quad \text{d.h.} \quad a^2 = 2.$$

Wegen  $a > 0$  erhalten wir daraus  $a = \sqrt{2}$ , was bedeutet:

$$\sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{2} \cdots = 2. \quad (1)$$

Nun lösen wir die Gleichung

$$b^{b^{b^{\cdots}}} = 4$$

nach demselben Muster und erhalten mit  $b^4 = 4$  die Lösung  $b = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ , was bedeutet:

$$\sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{2} \cdots = 4. \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) bedeuten aber  $2 = 4$ . Dass dies nicht stimmen kann, bedarf wohl keiner weiteren Erklärung, worin genau der Fehler steckt, allerdings schon. Genau darin sehen wir Motivationspotential, sich mit diesem Thema auseinanderzusetzen, ähnlich zu Paradoxa, die insbesondere in der Stochastik immer wieder auftreten, nach dem Motto: „Was ist da los? Das möchte ich genauer wissen!“

Klar ist, dass mindestens eine der beiden Gleichungen (1) oder (2) falsch sein muss. Wir müssen präzisieren, was die zunächst formal einfach hingeschriebenen Ausdrücke der Art  $x^{x^{x^{\cdots}}}$  überhaupt bedeuten sollen: Der Ausdruck  $\sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{2} \cdots$

kann als Grenzwert der Folge  $\sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}, \dots$  verstanden werden. Wenn dieser überhaupt existiert, so kann er natürlich nicht gleichzeitig 2 und 4 sein.

Die Lösung der Gleichung  $a^{a^{a^{\cdots}}} = 2$  nach obigem Muster setzt beim Übergang zu  $a^2 = 2$  die Existenz einer Lösung schon voraus, sodass wir in beiden Fällen eigentlich nur gezeigt haben (richtiger Satz): *Wenn*  $a^{a^{a^{\cdots}}} = 2$  bzw.  $b^{b^{b^{\cdots}}} = 4$  überhaupt positive Lösungen haben, so müssen diese in beiden Fällen  $\sqrt{2}$  sein.

Es wird sich allerdings herausstellen, dass im Fall  $b^{b^{b^{\cdots}}} = 4$  gar keine Lösung existiert, sodass der Übergang zu  $b^4 = 4$  nicht gerechtfertigt war.

### 3 Die positiven Lösungen der Gleichung $a^{a^{a^{\cdots}}} = a$

Um die Konvergenz der Folge  $a, a^a, a^{a^a}, \dots$  zu untersuchen, brauchen wir eine genauere Beschreibung von ihr.

Es liegt hier besonders nahe, die in Rede stehende Folge rekursiv (iterativ) zu beschreiben bzw. zu definieren

$$x_1 := a, \quad x_{n+1} := a^{x_n}$$

und anhand dieser Darstellung Einsichten über ihr Konvergenzverhalten für verschiedene Werte von  $a$  zu gewinnen. Dadurch wird bereits eine entscheidende Idee

ins Spiel gebracht: *Iterationen*. Diese sind mit einem Computer (Computeralgebra-System oder Tabellenkalkulation) ja sehr leicht und sehr schnell ausführbar, sodass einfaches Probieren mit verschiedenen Startwerten schon wertvolle Erkenntnisse liefert. Durch diese Möglichkeit eines ersten einfachen experimentellen Zuganges gewinnt dieses Problem zusätzlich an fachdidaktischem Potential.

### 3.1 Erste Vermutungen – arithmetische Computereperimente

Völlig klar ist, dass sich bei  $a = 1$  die konstante 1-Folge für  $(x_n)$  ergibt und somit auch der Grenzwert  $z = 1$  ist. Bei anderen Werten bietet es sich sehr an, zunächst den Computer (Computeralgebra-System<sup>1</sup> oder Tabellenkalkulation) zu verwenden, denn damit lassen sich ja leicht viele Folgenglieder der oben definierten Folge  $(x_n)$  produzieren, sodass sich bzgl. Konvergenz bzw. Divergenz schon starke Hinweise ergeben.

Als erstes probieren wir den oben schon im Zentrum stehenden Wert  $a = \sqrt{2}$  und erhalten:

$$(x_n) \approx (1,41; 1,63; 1,76; 1,84; 1,89; 1,93; 1,95; 1,966; 1,976; 1,984; 1,989; 1,992; 1,995; 1,996; 1,997; 1,9982; 1,9988; \dots)$$

Die Konvergenz gegen 2 scheint sich zu bestätigen.

*Bemerkung:* Wenn man bei  $a^{a^{a^{\dots}}}$  ohne Vorüberlegung erstmals nach einer Einschätzung gefragt wird, bei welchen positiven Werten für  $a$  sich Konvergenz ergeben könnte, so wird man vielleicht spontan  $0 < a \leq 1$  antworten („für  $a > 1$  wird  $x_n$  vermutlich ja unbeschränkt wachsen“), sodass diese Konvergenz für einen Wert größer als 1 schon eine erste Überraschung darstellen kann.

Allzu groß darf  $a$  allerdings nicht gewählt werden; die Grenze ist nicht erst bei  $a = 2$ , sondern offenbar schon früher erreicht, z.B. ergibt sich für  $a = 1,5$ :

$$(x_n) \approx (1,5; 1,8; 2,1; 2,35; 2,59; 2,86; 3,19; 3,64; 4,38; 5,91; 10,99; \dots) \rightarrow \text{Divergenz.}$$

Im Bereich  $a > 1$  scheint es also irgendwo zwischen  $a = 1,4$  und  $a = 1,5$  eine Grenze zu geben, bis zu der  $(x_n)$  konvergiert.

Auch im Bereich  $0 < a < 1$  gibt es (zumindest auf den ersten Blick) Überraschendes: Für  $a = 0,7$  ist die oszillierende Konvergenz schon innerhalb der ersten 10 Iterationen abzulesen:

$$(x_n) \approx (0,7; 0,78; 0,757; 0,763; 0,762; 0,762; \dots).$$

---

<sup>1</sup>In *Derive* z. B. mittels des Befehles  $I(a) := \text{ITERATES}(a^x, x, a, 10)$ , wodurch man die ersten 10 Werte von  $(x_n)$  erhält; analog könnten auch Tabellenkalkulation oder Computeralgebra-Systeme wie *Maple* oder *Mathematica* verwendet werden.

Für  $a = 0,5$  sind dafür schon mehr Iterationsschritte nötig:

$$(x_n) \approx (0,5; 0,71; 0,61; 0,654; 0,635; 0,644; 0,640; 0,6417; 0,6410; 0,6413; 0,6411; 0,6412; 0,6412; \dots).$$

Für  $a = 0,1$  kann man erst nach ca. 100 Schritten die Konvergenz erahnen

$$(x_n) = (0,1; \dots; 0,399087; 0,398944; 0,399075; 0,398955; \dots)$$

und für  $a = 0,01$  würde man vielleicht dasselbe erwarten, nur mit noch mehr nötigen Schritten; es drängt sich jedoch

$$(x_n) = (0,01; 0,955; 0,012; 0,945; 0,013; 0,942; 0,013; 0,942; 0,013; \dots),$$

also bereits nach wenigen Schritten der Verdacht auf: keine Chance für Konvergenz! Die Divergenz von  $(x_n)$  bei  $a \approx 0$  ist ein Phänomen, das zwar prima vista vielleicht überrascht, sich aber durch Einsetzen von  $a = 0$  (und  $0^0 := 1$ ) schon abzeichnet:  $(x_n) = 0; 1; 0; 1; 0; 1; \dots$ . Irgendwo zwischen  $a = 0,01$  und  $a = 0,1$  scheint es eine weitere Grenze zu geben, ab der  $(x_n)$  oszillierend konvergiert. Damit ist wohl die Basis für einen erheblichen Erklärungsbedarf geschaffen: Das Ziel muss nun darin bestehen, diese Grenzen herauszufinden und die jeweilige Konvergenz bzw. Divergenz zumindest besser zu verstehen (z.B. mittels graphischer Darstellungen) und ggf. auch nachzuweisen.

### 3.2 Fixpunkte, Graphische Darstellungen, Spinnwebdiagramme

Bei Iterationsfolgen wie obiger  $x_{n+1} := a^{x_n}$  wird ständig eine bestimmte Funktion  $\Phi$  angewandt, jeder Funktionswert wird im nächsten Schritt zum Argument (bei uns wäre  $\Phi(x) = a^x$ ). Graphisch entspricht dem Iterieren<sup>2</sup> einer Funktion  $\Phi : x \mapsto \Phi(x)$  ein abwechselnd waag- bzw. senkrechtes *Zickzack-Band* zwischen dem Graphen von  $\Phi$  und der 1. Mediane  $y = x$ . Man muss immer senkrecht zum Funktionsgraphen, von dort waagrecht zur 1. Mediane, dann wieder senkrecht zum Funktionsgraphen usw. Warum ist das so? Darauf sollten auch Schüler eine zufriedenstellende Antwort geben können. Dabei kommt man in manchen Fällen zu einem Fixpunkt  $x^*$  von  $\Phi$  (das Verfahren konvergiert, man nennt solche Fixpunkte aus naheliegenden Gründen *anziehend*) – siehe Abb. 1.

In anderen Fällen kommt man dem Fixpunkt  $x^*$  nicht näher (*abstoßender* Fixpunkt, Divergenz) – siehe Abb. 2. Dazu die folgenden Bemerkungen:

<sup>2</sup>Gemeint ist das wiederholte (Hintereinander-)Anwenden einer Funktion  $\Phi$  auf einen Startwert, also genau jener Sachverhalt, wie er in der rekursiven Definition einer Folge gegeben ist:  $x_1 = a$  und  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ .  $\Phi$  heißt aus naheliegenden Gründen in diesem Zusammenhang meist *Iterationsfunktion*.

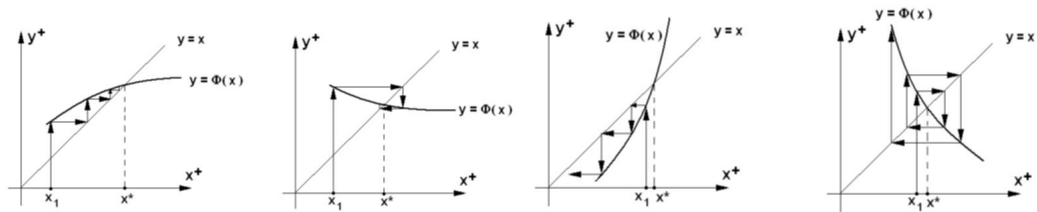


Abbildung 1: Anziehende Fixpunkte.

Abbildung 2: Abstoßende Fixpunkte.

- In den rechten beiden Fällen der Abbildungen 1 und 2 (negative Steigung von  $\Phi$ ) ergibt dieses Zickzack-Band ein Bild, das ähnlich zu Spinnweben ist; deshalb heißen Diagramme dieser Art auch *Spinnwebdiagramme*.
- Das ständige Anwenden einer Funktion  $\Phi$  – so wie wir es gemacht haben, graphisch repräsentiert durch die Spinnwebdiagramme – ist kein Einzeltrick, der nur hier funktionieren würde, sondern eine ausgereifte mathematische Methode („Iterationsverfahren“), Fixpunkte von Funktionen zu finden, d.h. eine Gleichung der Form  $\Phi(x) = x$  zu lösen. Dafür gibt es eine ganze ausgefeilte Theorie.

Schon aus den Abbildungen 1 und 2 und eventuell noch weiteren Versuchen mit Spinnwebdiagrammen ist zu erkennen: Wenn die 1. Mediane  $y = x$  vom Graphen von  $\Phi$  *flach* geschnitten wird ( $|\Phi'(x^*)| < 1$ ), so scheint Konvergenz vorzuliegen (*anziehender* Fixpunkt), bei steilem Schnitt ( $|\Phi'(x^*)| > 1$ ) scheint ein *abstoßender* Fixpunkt vorzuliegen. Dies ist auch wirklich so und kann ggf. genauer formuliert werden im Klassifikationskriterium für Fixpunkte (siehe Anhang). Wir begnügen uns hier mit der anschaulichen, graphischen Version.

*Eine wichtige Erkenntnis (allgemein) bei Iterationsfolgen:* Wenn  $\Phi$  stetig ist und die  $\Phi$ -Iterationsfolge  $(x_n)$  gegen einen Wert  $z$  konvergiert, dann muss dieser Grenzwert Fixpunkt von  $\Phi$  sein. Begründung:

$$\Phi(z) = \Phi(\lim x_n) \stackrel{\Phi \text{ stetig}}{=} \lim \Phi(x_n) = \lim x_{n+1} = z.$$

D.h. nur die Schnittpunkte von  $y = x$  mit dem Graphen von  $\Phi$  kommen als Grenzwerte infrage. Wenn es gar keine solchen Schnittpunkte gibt, so kann die Folge auch nicht konvergieren.

Die *arithmetisch-analytische* Eigenschaft *Konvergenz der  $\Phi$ -Iterationsfolge  $(x_n)$*  ist *graphisch* gleichbedeutend damit, dass das Spinnwebdiagramm einem dieser Schnittpunkte zustrebt (von einem dieser Schnittpunkte *angezogen* wird).

Zurück zu unserer konkreten Iterationsfolge  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = \Phi(x_n) = a^{x_n}$  bzw. zur konkreten Iterationsfunktion  $\Phi(x) = a^x$ . Wir haben für verschiedene Werte von  $a$  die Graphen der Funktionen  $\Phi: x \mapsto a^x$  zu zeichnen (Exponentialfunktionen) und

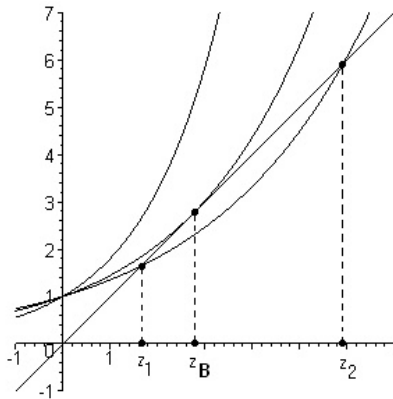


Abbildung 3: Zwei Schnittpunkte, ein Schnittpunkt (Berührung), kein Schnittpunkt.

jeweils nach Schnittpunkten mit der 1. Mediane  $y = x$  zu suchen (nur diese kommen als Grenzwerte infrage). Von diesen Fixpunkten müssen wir dann noch entscheiden (begründen), welche wirklich Grenzwerte der Iterationsfolge  $(x_n)$  sind (d.h. welche Fixpunkte anziehend sind, siehe unten).

### 3.3 Der Fall $a > 1$

Für welche Werte von  $a > 1$  hat der Graph der Iterationsfunktion  $\Phi : x \mapsto a^x$  überhaupt Schnittpunkte mit  $y = x$ ? Die Exponentialfunktion  $\Phi : x \mapsto a^x$  ist für  $a > 1$  streng monoton wachsend ( $\Phi'(x) > 0$ ) und links-gekrümmt ( $\Phi''(x) > 0$ ). Für  $a$ -Werte, die nur knapp größer als 1 sind, schneidet der Graph von  $\Phi$  die 1. Mediane  $y = x$  zweimal<sup>3</sup> (bei den Werten  $z_1 < z_2$ ); dies stimmt bis zu einem gewissen  $a$ -Wert (Grenzlage, Berührung) und für größere  $a$ -Werte gibt es keine Schnittpunkte mehr – siehe Abb. 3.

*Grenzlage bei Berührung:* Die Ableitungsfunktion von  $\Phi$  ist  $\Phi' : x \mapsto a^x \cdot \ln a$ . Bei Berührung müssen im Berührungspunkt die Funktionswerte und die Ableitungen von  $\Phi$  und  $y = x$  übereinstimmen:  $\Phi(z) = z$  und  $\Phi'(z) = 1$ . Durch Lösen des Gleichungssystems  $(a^z = z) \wedge (a^z \cdot \ln a = 1)$  findet man leicht den Berührungspunkt  $z_B = e$  von  $\Phi$  und den fraglichen Wert  $a_B$  bei Berührung:  $a_B = e^{1/e} \approx 1,445$ . Durch diese Überlegungen ist klar:

- Für  $a > e^{1/e} \approx 1,445$  hat  $\Phi(x) = a^x$  keinen Schnittpunkt mehr mit  $y = x$  und die Folge  $(x_n)$  muss divergieren.
- Im Fall  $a \leq a_{\max} = e^{1/e} \approx 1,445$  kann die Folge konvergieren:  $(x_n) \rightarrow z$  (der Nachweis der tatsächlichen Konvergenz fehlt noch).
- Der größtmögliche Grenzwert  $z$ , der dabei auftreten kann, ist  $z_{\max} = z_B = e$ : Im Fall zweier Schnittpunkte  $z_1 < z_2$  von  $\Phi$  mit  $y = x$  kommt nur  $z_1$

<sup>3</sup>Dies könnte bei Bedarf noch genauer begründet werden.

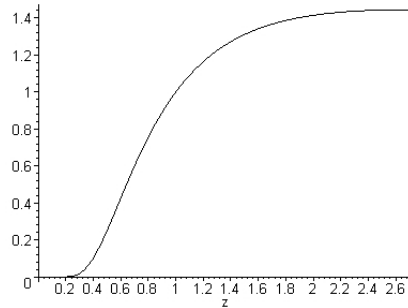


Abbildung 4: Graph von  $f : (0, e] \rightarrow (0, e^{1/e}]$ ;  $z \mapsto z^{1/z}$ .

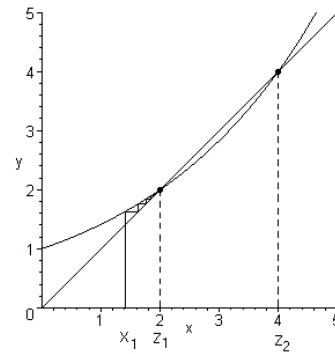


Abbildung 5: Typisches Spinnwebdiagramm für die Iterationsfunktion  $\Phi(x) = a^x$  für  $1 < a \leq e^{1/e}$ ; hier speziell:  $a = \sqrt{2} = x_1$  (Startwert) mit den beiden Fixpunkten  $z_1 = 2$  und  $z_2 = 4$ .

als Grenzwert infrage, da  $z_2$  ein *abstoßender* Fixpunkt ist (siehe Abb. 3; steiler Schnitt). Der größtmögliche Wert von  $z_1$  ist aber klarerweise  $z_B$  (bei Berührung fallen beide Schnittpunkte zusammen:  $z_1 = z_B = z_2$ ).

Die Obergrenzen für  $a$  und  $z$  (für mögliche Konvergenz) stehen bereits fest:  $a \leq e^{1/e}$  und  $z \leq e$ . Im Konvergenzfall  $(x_n) \rightarrow z$  muss  $z$  Fixpunkt von  $\Phi$  sein:  $a^z = z$ , woraus  $a = z^{1/z}$  folgt.

*Bemerkung:* Durch die Obergrenze der möglichen Grenzwerte  $z \leq e$  ist klar, dass der Grenzwert 4 niemals erreicht werden, also die Gleichung  $b^{b^{b^{\dots}}} = 4$  keine Lösung haben kann. Die Existenz einer solchen Lösung war aber der springende Punkt beim überraschenden Einstiegsphänomen „ $2 = 4^4$ “.

Die Funktion  $f : (0, e] \rightarrow (0, e^{1/e}]$ ;  $z \mapsto z^{1/z}$  ist *bijektiv*.<sup>4</sup> Jedem Wert  $z \in (0, e]$  wird durch  $f$  der *einzig mögliche* Startwert  $f(z) = a = x_1 \in (0, e^{1/e}]$  zugeordnet, für den  $(x_n)$  gegen  $z$  konvergieren *kann*.

Durch die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  (Bijektivität!) wird jedem Startwert  $x_1 = a \in (0, e^{1/e}]$  der *einzig mögliche* Grenzwert  $z = f^{-1}(a)$  zugeordnet.<sup>5</sup> Hier kann man die Umkehrfunktion nicht durch einen Term angeben, aber ihr graphischer Verlauf ist durch Spiegelung des Graphen von  $f$  (siehe Abb. 4) an der 1. Mediane  $y = x$  gegeben. Der Fall  $1 < a \leq e^{1/e} \Leftrightarrow 1 < z \leq e$  liefert also ein Spinnwebdiagramm der Art von Abb. 5:

- Start bei  $x_1 = a$ ; dieser Startwert liegt wegen  $x_1 = a = z_1^{1/z_1} < z_1$  *links* vom

<sup>4</sup> $f$  ist wegen  $f' > 0$  auf  $(0, e]$  streng monoton wachsend.

<sup>5</sup>Es zeigt sich allerdings, dass die jeweiligen Intervalle für *tatsächliche* Konvergenz nicht bis 0 gehen – siehe unten.



ersten (kleineren) Schnitt- bzw. Fixpunkt  $z_1$ ,

- und dann *monoton wachsende Konvergenz* gegen diesen *kleineren Fixpunkt* (mit dem Spezialfall der Berührung bei  $a = a_B = e^{1/e} \Leftrightarrow z = z_B = e$ ).

Man kann die Konvergenz also einerseits anschaulich aus einem Spinnwebdiagramm wie in Abb. 5 ablesen; andererseits kann man sie auch etwas formaler mit dem Satz von der monotonen Konvergenz beweisen:<sup>6</sup> Man zeigt, dass für  $1 < a \leq e^{1/e}$  die Folge  $(x_n)$  streng monoton wachsend [wegen  $a > 1$  und der strengen Monotonie wachsender Exponentialfunktionen ist  $x_2 = a^a > a^1 = x_1$ ; aus  $x_n > x_{n-1}$  folgt  $x_{n+1} = a^{x_n} > a^{x_{n-1}} = x_n$ ] und nach oben beschränkt ist (z.B. durch  $e$ , wie schon in Abb. 3 abzulesen ist:  $x_1 = a \leq e^{1/e} \leq e$ ; und aus  $x_n \leq e$  folgt  $x_{n+1} = a^{x_n} \leq a^e \leq (e^{1/e})^e = e$ ) – zwei schulübliche Analysis-Aufgaben.

Beim in Abb. 5 abgebildeten Spezialfall  $\Phi(x) = \sqrt{2}^x$  ergeben sich genau die beiden Fixpunkte  $z_1 = 2$  und  $z_2 = 4$ , wobei aber nur der *kleinere* der beiden, nämlich  $z_1 = 2$ , auch *Grenzwert* von  $(x_n)$  ist, d.h. die Gleichung  $a^{a^{a^{\dots}}} = 2$  ist lösbar ( $a = \sqrt{2}$ ) und  $b^{b^{b^{\dots}}} = 4$  nicht. Die Existenz einer solchen Lösung auch für die zweite Gleichung war aber genau der Hintergrund der Eingangsbehauptung „ $2 = 4$ “.

Nun ist die Konvergenz zunächst im Fall  $1 \leq a \leq e^{1/e}$  gesichert und mittels der anschaulichen Darstellung in einem Spinnwebdiagramm vermutlich auch besser zu verstehen.

Damit ist zwar der genaue Fehler bei der Eingangsüberraschung „ $2 = 4$ “ vollständig geklärt, aber man kann auch noch leicht genauer herausfinden, wie es um die Konvergenz für Werte  $0 < a < 1$  steht.

### 3.4 Der Fall $0 < a < 1$

In diesem Fall hat der Graph der Iterationsfunktion  $\Phi : x \mapsto a^x$  eine andere charakteristische Form (fallende Exponentialfunktion,  $\Phi' < 0$ ,  $\Phi'' > 0$ , siehe Abb. 6 für das zugehörige Spinnwebdiagramm<sup>7</sup>) und genau einen Schnittpunkt mit  $y = x$  (Fixpunkt von  $\Phi$ ).

Wir wissen: Der Fixpunkt  $x^*$  ist anziehend, wenn  $|\Phi'(x^*)| < 1$ , und abstoßend, wenn  $|\Phi'(x^*)| > 1$  ist. Die Iteration  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$  kann also nur dann konvergieren, wenn der Schnitt bei  $x^*$  nicht steiler als rechtwinklig erfolgt.

<sup>6</sup>Eine andere Begründungsmöglichkeit mithilfe des sogenannten ‚Kontraktionsatzes‘ ist im Anhang angegeben.

<sup>7</sup>Die Erzeugung eines Programms (z.B. mit dem Namen „Spinnweb( $\Phi, x_1, n$ )“ – in *Derive*, *Maple*, *Mathematica* o.Ä.), das für ein gegebenes Tripel (Iterationsfunktion  $\Phi$ , Startwert  $x_1$ , Anzahl der Iterationen  $n$ ) das zugehörige Spinnwebdiagramm zeichnet (vgl. die Abbildungen 1, 2, 5 oder 6), wäre eine lohnende Programmier-Aufgabe, wenn die Syntax des jeweiligen CAS schon vertraut ist.

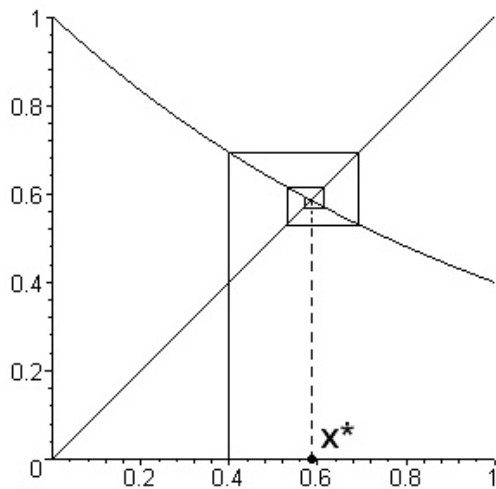


Abbildung 6: Spinnwebdiagramm für  $0 < a < 1$  (hier konkret:  $a = 0,4$ ).

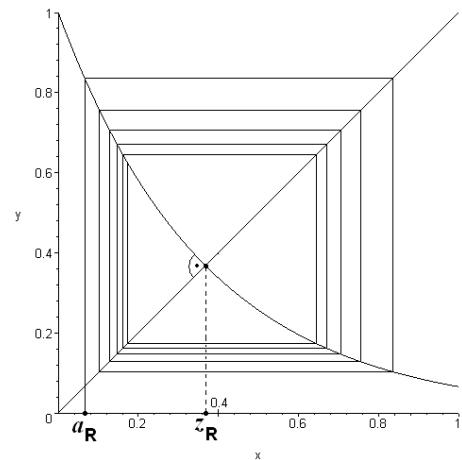


Abbildung 7: Grenzfall des rechtwinkligen Schnitts.

Je kleiner  $a$  ist, desto schneller ist der Abfall von  $\Phi(x) = a^x$  gegen 0, desto steiler also der Schnitt des Graphen von  $\Phi(x)$  mit  $y = x$  beim Fixpunkt  $x^*$ . Bei welchem  $a$ -Wert ( $a_R$ ) findet dieser Schnitt in welchem Punkt ( $z_R|z_R$ ) der 1. Mediane genau rechtwinklig statt ( $\Phi(z_R) = z_R$  und  $\Phi'(z_R) = -1$ ) ? Durch Lösen des Gleichungssystems  $(a^z = z) \wedge (a^z \cdot \ln a = -1)$  findet man leicht  $z_R = \frac{1}{e}$  (Fixpunkt) und den fraglichen Wert  $a_R$  bei rechtwinkligem Schnitt:  $a_R = \frac{1}{e^e} = e^{-e} \approx 0,066$  – siehe Abb. 7. Für kleinere  $a$ -Werte findet der Schnitt sogar steiler als rechtwinklig statt, sodass der Fixpunkt abstoßend ist.

Wir haben nun also die Bestätigung: Für  $0 < a < \frac{1}{e^e} = e^{-e} \approx 0,066$  kann die Folge  $(x_n)$  niemals konvergieren, hier erhalten wir notwendigerweise *Divergenz*. Der kleinste Wert  $a_{\min}$ , der als Lösung unserer Gleichung *infrage kommt*, ist also  $a_{\min} = a_R = \frac{1}{e^e} = e^{-e}$  und der kleinstmögliche Wert für  $z$  ist  $z_{\min} = z_R = \frac{1}{e} = e^{-1}$ . Wir haben im Fall  $e^{-e} \leq a < 1$  nun noch nicht analytisch nachgewiesen, dass hier tatsächlich Konvergenz vorliegt. Dies braucht u.E. in einem möglichen Schulunterricht zu diesem Thema auch nicht unbedingt stattzufinden. Hier bräuchte man u.a. den sogenannten ‚Kontraktionssatz‘<sup>8</sup> – wir verschieben diesbezügliche Betrachtungen in einen Anhang.

<sup>8</sup>Für elementare Darstellungen siehe z.B. KREBS 1981 oder SCHUPPAR 1999.

### 3.5 Zusammenfassung für die Gleichung $a^{a^{\dots}} = z$

Die genannte *Gleichung* (in den Variablen  $a$  und  $z$ ) ist in  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  genau dann lösbar, wenn:

$$e^{-e} \leq a \leq e^{1/e} \quad \text{bzw.} \quad e^{-1} \leq z \leq e.$$

Bei vorgegebenem Wert von  $z$  (im genannten Bereich  $e^{-1} \leq z \leq e$ ) kann der zugehörige Wert von  $a$  leicht mittels der Funktion  $f$  berechnet werden  $f: [e^{-1}, e] \rightarrow [e^{-e}, e^{1/e}]$ ;  $z \mapsto a = z^{1/z}$ ; für den zugehörigen Graphen (d.h. gesamte *Lösungsmenge* der Gleichung) siehe Abb. 4 mit der Einschränkung  $z \geq e^{-1}$  bzw.  $a \geq e^{-e}$ . Es liegt zwar der Wert 2, nicht aber 4 in diesem möglichen  $z$ -Bereich, was anfangs ja in beiden Fällen a priori angenommen wurde und der Grund für „2 = 4“ war.

Bei vorgegebenem Wert von  $a$  (im angegebenen Bereich  $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$ ) kann der zugehörige Wert von  $z$  i.A. nicht exakt berechnet werden; näherungsweise ist dies einerseits durch Ausführen hinreichend vieler Iterationen möglich [ $x_1 = a$  und  $x_{n+1} = a^{x_n}$ ] oder andererseits durch näherungsweise Lösen der Gleichung  $a^z = z$  mittels eines anderen Näherungsverfahrens (Halbierungsverfahren, NEWTON-Verfahren, etc.), wobei bei  $1 < a < e^{1/e}$  jeweils die kleinere der beiden Lösungen (Fixpunkte) den fraglichen Grenzwert  $z$  bestimmt; bei  $1 < a < e^{1/e}$  gibt es ja zwei Lösungen von  $a^z = z$ .

## 4 Das fachdidaktische Potenzial dieses Themas

Das hier dargestellte Thema bietet viele Möglichkeiten, es können an ihm viele wichtige Einsichten erlangt, Phänomene beschrieben, wichtige Inhalte aus dem Bereich Funktionen (Analysis) wiederholt und betont werden. Hier seien einige Punkte stichwortartig zusammenfassend aufgezählt:

- Das in der Mathematik so wichtige Prinzip des Fallunterscheidens kommt auf eine elementare Weise zum Einsatz.
- Die Frage nach der Existenz des Grenzwerts (Konvergenz) einer speziellen Folge ergibt sich in natürlicher Weise aus dem Kontext und wirkt nicht aufgesetzt.
- Mithilfe von Spinnwebdiagrammen ist die Konvergenz/Divergenz anschaulicher vor Augen geführt und kann somit besser verstanden werden.
- Graphen von Exponentialfunktionen und ihre wichtigen Eigenschaften werden dabei wiederholt (wachsend – fallend; Krümmung; wie oft schneiden ihre Graphen die 1. Mediane  $y = x$ ?). Allgemein wird dabei ein verständiger Umgang mit Funktionen und ihren Graphen gefördert.
- Bewusstwerden des Unterschieds beim fortgesetzten Subtrahieren und Dividieren gegenüber dem fortgesetzten Potenzieren – ohne Klammern.
- Ein sinnvoller Computereinsatz (Tabellenkalkulation, Computeralgebra-System) ist gegeben und auch nötig: Graphen zeichnen, Iterationen arithmetisch

ausführen und Folgenglieder berechnen, Spinnwebdiagramme, etc.

— Das gerade in der Angewandten Mathematik so wichtige Prinzip der Iteration/ Rekursion, das im alltäglichen Schulunterricht sicher oft etwas zu kurz kommt, erfährt hier eine Realisierung.

— Durch einen verblüffenden Einstieg kann Erklärungsbedarf geschaffen werden, sodass sich dadurch ein deutliches Motivationspotential ergibt. Ausgehend von einem überraschenden Phänomen kann man substanzielle Mathematik prozessorientiert betreiben.

— So manche schulübliche Analysisaufgabe (Berührsituation von Graphen, rechtwinkliger Schnitt, Umkehrfunktionen, etc.), auch Monotonie, Beschränktheit und das Lösen von Gleichung(ssystem)en können hier wiederholt werden.

## Literatur

- [1] KREBS, G. (1981): Näherungsweise Lösen von Gleichungen. Aus: Christmann, N. u.a. (Hrsg.): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht unter besonderer Berücksichtigung der Möglichkeiten von Rechnern. Schöningh, Paderborn, 91–127.
- [2] SCHUPPAR, B. (1999): Elementare Numerische Mathematik. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.

## 5 Anhang

Hier wollen wir nun auch im Fall  $0 < a < 1$  etwas strenger argumentieren, nicht nur mittels Computereperimenten und anschaulichen Spinnwebdiagrammen. Solche Argumentationen sind nicht für den allgemeinen Unterricht, sondern allenfalls für Wahlpflichtfächer gedacht. Grundlagen dafür:

**Kontraktionssatz für differenzierbare Funktionen.** Es sei  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\Phi$  ist differenzierbar auf dem Intervall  $I = [a, b] \subseteq D$ ,
2.  $\Phi(I) \subseteq I$ ,
3.  $|\Phi'(x)| < 1$  für alle  $x \in I$ .

Dann gibt es in  $I$  genau einen Fixpunkt  $z$  von  $\Phi$  und jede  $\Phi$ -Iterationsfolge  $(x_n)$  mit  $x_1 \in I$ ,  $x_{n+1} := \Phi(x_n)$  konvergiert gegen diesen Fixpunkt  $z$ . (Das Spinnwebdiagramm zieht sich in diesem Fall auf einen Punkt zusammen.)

**Klassifikationskriterium für Fixpunkte.** Es sei  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $z \in D$  sei ein Fixpunkt von  $\Phi$ , d.h.  $\Phi(z) = z$ .

1. Wenn  $|\Phi'(z)| < 1$  ist<sup>9</sup>, so ist  $z$  ein *anziehender* Fixpunkt, d.h. es gibt ein Umgebungsintervall  $I = [z - \varepsilon, z + \varepsilon]$  von  $z$ , sodass jede  $\Phi$ -Iterationsfolge  $(x_n)$  mit Startwert  $x_1 \in I$  gegen  $z$  konvergiert. Für  $0 \leq \Phi'(z) < 1$  ergibt sich *monotone* Konvergenz, für  $-1 < \Phi'(z) < 0$  ist die Konvergenz *oszillierend*.
2. Wenn  $|\Phi'(z)| > 1$  ist<sup>10</sup>, so ist  $z$  ein *abstoßender* Fixpunkt, d.h. es gibt ein Umgebungsintervall  $U = [z - \delta, z + \delta]$  von  $z$ , so dass jede  $\Phi$ -Iterationsfolge  $(x_n)$  mit Startwert  $z \neq x_1 \in U$  aus  $U$  herausführt.
3. Wenn  $|\Phi'(z)| = 1$  ist, so ist keine allgemeine Aussage möglich (es kommt auf  $\Phi$  bzw.  $|\Phi'|$  nahe  $z$  an).

Für Beweise des Kontraktionssatzes und des Klassifikationskriteriums für Fixpunkte sei auf die Literatur verwiesen.<sup>11</sup>

Mithilfe des Kontraktionssatzes kann man einen anderen Konvergenzbeweis im Fall  $1 < a \leq e^{1/e}$  führen. Man überzeugt sich, dass  $\Phi: x \mapsto a^x$  für  $1 < a < e^{1/e}$  mit  $I = [0, e]$  die Bedingungen des Kontraktionssatzes erfüllt:  $\Phi$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar. Wegen  $\Phi'(x) = a^x \cdot \ln a > 0$  für  $a > 1$  ist  $\Phi$  streng monoton wachsend; mit  $\Phi(0) = 1 \in I$  und  $\Phi(e) = a^e < (e^{1/e})^e = e$  gilt insgesamt  $\Phi(I) \subseteq I$ . Die dritte Bedingung des Kontraktionssatzes ist auch erfüllt:  $|\Phi'(x)| = \Phi'(x) = a^x \cdot \ln a < (e^{1/e})^e \cdot \frac{1}{e} = 1$ . Für  $a = e^{1/e}$  ist allerdings  $\Phi'(e) = 1$  und nicht  $< 1$ , sodass dieser Fall einer extra Untersuchung bedürfte. *Anschaulich* ist die Konvergenz aber auch im Berührfall klar (d.h. bei  $a = e^{1/e}$ ; man stelle sich z.B. das Spinnwebdiagramm von Abb. 5 mit *Berührung* statt zweimaligem Schnitt vor).

**Zu den Konvergenzbeweisen im Fall  $0 < a < 1$ .** Im Fall  $0 < a < e^{-e} \approx 0,066$  wissen wir schon, dass keine Konvergenz möglich ist (abstoßender Fixpunkt), es bleibt also noch der Nachweis der Konvergenz für  $e^{-e} \leq a < 1$ . Wir werden sehen, dass in diesem Fall die Iterationsfunktion  $\Phi$  mit dem Intervall  $I = [0, 1]$  die Voraussetzungen des Kontraktionssatzes erfüllt, sodass wir auf Konvergenz schließen können.

Wegen  $a < 1$  ist die Iterationsfunktion  $\Phi: x \mapsto a^x$  hier eine fallende Exponentialfunktion und hat genau einen Schnittpunkt mit  $y = x$  (Fixpunkt von  $\Phi$ , siehe Abb. 6). Die ersten beiden Bedingungen des Kontraktionssatzes (differenzierbar bzw.  $\Phi(I) \subseteq I$ ) sind klarerweise für alle Werte  $0 < a < 1$  erfüllt.

<sup>9</sup>D.h.  $\Phi$  verläuft beim Schnittpunkt  $(z|z)$  *flacher* als die 1. Mediane  $y = x$ .

<sup>10</sup>D.h.  $\Phi$  verläuft beim Schnittpunkt  $(z|z)$  *steiler* als die 1. Mediane  $y = x$ .

<sup>11</sup>Z.B. SCHUPPAR 1999; diese Beweise können durchaus auch auf Schulniveau – zumindest in Wahlpflichtfächern – thematisiert werden.

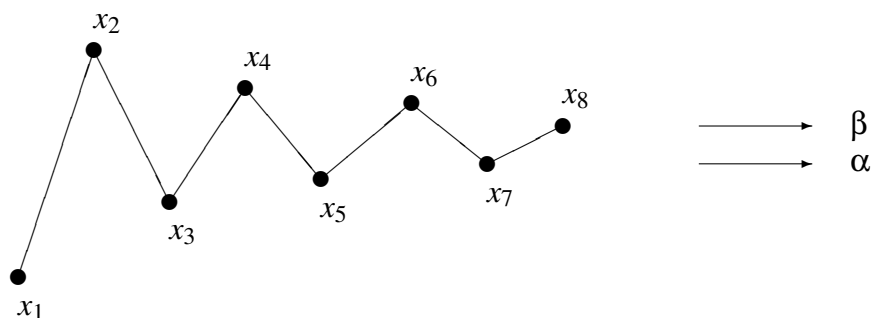


Abbildung 8: Monotone Konvergenz der beiden Teilfolgen.

Die dritte Bedingung  $|\Phi'| < 1$  ist jedoch nicht für alle  $0 < a < 1$  erfüllt: Der größte Wert von  $|\Phi'(x)|$  in  $I = [0, 1]$  tritt für alle  $0 < a < 1$  bei  $x = 0$  auf (bei  $x = 0$  verläuft  $\Phi$  am steilsten): Je größer  $a$  ist, desto kleiner ist dieser Wert (desto flacher ist  $\Phi$  bei  $x = 0$ ). Bei welchem  $a$  ist  $|\Phi'(0)| = 1$ ? Aus  $a^0 \cdot \ln a = -1$  erhält man sofort  $a = \frac{1}{e} \approx 0,368$ . Für alle größeren Werte von  $a$  erfüllt  $\Phi$  mit  $I = [0, 1]$  die Bedingungen des Kontraktionssatzes, sodass wir sicher sein können:

Im Fall  $\frac{1}{e} < a < 1$  konvergiert die Folge  $(x_n)$  mit Sicherheit (oszillierend) gegen  $z$ , die  $x$ -Koordinate des einzigen Schnittpunkts der 1. Mediane mit dem Graphen von  $\Phi : x \mapsto a^x$ .

Es bleibt noch der Bereich  $0,066 \approx e^{-e} \leq a \leq 1/e \approx 0,368$ . In diesem schwierigsten Fall erfüllt die Iterationsfunktion  $\Phi : x \mapsto a^x$  zwar die ersten beiden Bedingungen des Kontraktionssatzes mit  $I = [0, 1]$ , aber  $|\Phi'|$  ist nicht mehr  $< 1$  auf ganz  $I$ , sodass der Kontraktionssatz nicht mehr so ohne Weiteres als Begründung für Konvergenz herangezogen werden kann.

Für den ganzen Bereich  $0 < a < 1$  ist  $(x_n)$  nicht monoton, sondern oszillierend. Dies ist klar, denn  $\Phi$  ist für  $0 < a < 1$  streng monoton fallend; ausführlicher:

$$x_1 = a < 1 \Rightarrow x_2 = a^a > a^1 = a = x_1 \Rightarrow x_3 = a^{(a^a)} < a^a = x_2$$

und allgemein  $x_{2n-1} < x_{2n}$  bzw.  $x_{2n} = a^{x_{2n-1}} > a^{x_{2n}} = x_{2n+1}$ .

- Die Teilfolge  $(x_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_3, x_5, \dots)$  ist streng monoton wachsend und nach oben beschränkt (z.B. durch 1); daher muss  $(x_{2n-1})$  konvergieren mit Grenzwert  $\alpha$  [ $1 > a^a \Rightarrow a^1 < a^{(a^a)}$ , d.h.  $x_1 < x_3$ ; aus  $x_{2n-1} < x_{2n+1}$  folgt zunächst  $x_{2n} = a^{x_{2n-1}} > a^{x_{2n+1}} = x_{2n+2}$  und daraus analog  $x_{2n+1} < x_{2n+3}$ ].
- Die Teilfolge  $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (x_2, x_4, x_6, \dots)$  ist streng monoton fallend und nach unten beschränkt (z.B. durch 0); daher muss  $(x_{2n})$  konvergieren mit Grenzwert  $\beta$  [aus  $x_1 < x_3$  folgt  $x_2 = a^{x_1} > a^{x_3} = x_4$  und analog allgemein  $x_{2n} > x_{2n+2}$ ].

Insgesamt ergibt sich ein Bild wie in Abb. 8.

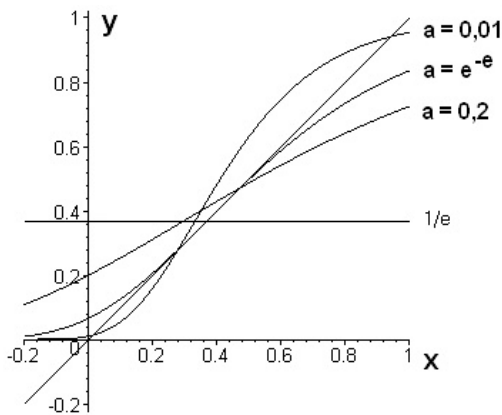


Abbildung 9: Graphen von  $\Psi$  für  $a = 0,2$ ,  $a = e^{-e} \approx 0,066$  und  $a = 0,01$ .

Unser Ziel muss nun darin bestehen, zu zeigen, dass für  $e^{-e} \leq a \leq \frac{1}{e}$  notwendig  $\alpha = \beta$  sein muss, sodass wir die Konvergenz von  $(x_n)$  nachgewiesen haben.

Sei  $\Psi(x) := a^{a^x}$ . Dann können wir zunächst  $x_{2n+1} = \Psi(x_{2n-1})$  und  $x_{2n+2} = \Psi(x_{2n})$  schreiben. Aufgrund der Konvergenz der beiden Teilfolgen erhalten wir daraus notwendig  $\Psi(\alpha) = \alpha$  und  $\Psi(\beta) = \beta$ , d.h.  $\Psi$  hat die beiden Fixpunkte  $\alpha$  und  $\beta$ .

Wenn wir nun zeigen können, dass  $\Psi$  mit  $I = [0, 1]$  die Bedingungen des Kontraktionssatzes erfüllt, so kann  $\Psi$  in  $I$  nur *einen* Fixpunkt haben, und wir haben  $\alpha = \beta$  und damit die Konvergenz von  $(x_n)$  bewiesen.

Klarerweise ist  $\Psi$  differenzierbar [ $\Psi'(x) = a^{a^x} \cdot a^x \cdot (\ln a)^2$ ] und wegen  $\Psi' > 0$  streng monoton wachsend. Wegen  $0 < a = \Psi(0) < a^a = \Psi(1) < 1$  gilt auch  $\Psi(I) \subseteq I$ , sodass die ersten beiden Bedingungen des Kontraktionssatzes erfüllt sind.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass für  $e^{-e} \leq a \leq \frac{1}{e}$  auch  $|\Psi'(x)| = \Psi'(x) < 1$  für alle  $x \in I = [0, 1]$  ist. Wir suchen das Maximum von  $\Psi'(x) = a^{a^x} \cdot a^x \cdot (\ln a)^2 = a^{a^x+x} \cdot (\ln a)^2$  für  $e^{-e} \leq a \leq \frac{1}{e}$  und  $x \in I = [0, 1]$ . Bei festem  $a$  ist  $\Psi'(x)$  genau dann maximal, wenn der Exponent  $a^x + x$  minimal ist ( $a < 1$ ). Dies ist, wie eine leichte Extremwertaufgabe zeigt, bei

$$x_0 = \frac{\ln\left(-\frac{1}{\ln a}\right)}{\ln a} = \frac{-\ln(-\ln a)}{\ln a}$$

der Fall. Durch Einsetzen erhält man für diesen Wert  $x_0$  nach kurzer Rechnung den größten Wert von  $\Psi'$  bei festem  $a$ :  $\Psi'_{\max} = \Psi'(x_0) = \frac{-\ln a}{e}$ . Wegen  $\Psi'(x) \leq \Psi'(x_0) = \frac{-\ln a}{e} < 1$  für  $e^{-e} < a \leq \frac{1}{e}$  und  $x \in I = [0, 1]$  erfüllt  $\Psi$  in diesem Bereich also auch die dritte Bedingung des Kontraktionssatzes, womit alles gezeigt ist.

Im (letzten!) Fall  $a = e^{-e}$  ist leider  $\Psi'_{\max} = \Psi'(x_0) = 1$  und nicht  $< 1$ , sodass dieser Fall einer extra Untersuchung bedarf. Man überzeugt sich für  $a = e^{-e}$  leicht:  $\Psi(x_0) = \frac{1}{e} = x_0$ ,  $\Psi'(x_0) = 1$ ,  $\Psi''(x_0) = 0$  und  $\Psi''(x) > 0$  für  $x < x_0$  bzw.  $\Psi''(x) < 0$  für  $x > x_0$ .

Dadurch ist klar, dass für  $a = e^{-e}$  der Punkt  $(x_0|x_0) = (\frac{1}{e}|\frac{1}{e})$  einerseits Wendepunkt im Graphen von  $\Psi$  ist mit  $y = x$  als Wendetangente und dass andererseits (dies ist das Entscheidende!)  $x_0$  der *einzig*e Fixpunkt von  $\Psi$  ist, sodass wir auch im Fall  $a = e^{-e}$  die Gleichheit  $\alpha = \beta$  und damit Konvergenz von  $(x_n)$  folgern können (allerdings ist die Konvergenz in diesem Fall sehr langsam – auch schon, wenn  $a$  nur knapp über  $e^{-e}$  liegt).

Abb. 9 zeigt die Graphen von  $\Psi$  für  $a = 0,2$ , für den Grenzfall  $a = e^{-e}$  (1. Mediane  $y = x$  ist Wendetangente) und für  $a = 0,01$  ( $\Psi$  hat 3 Fixpunkte).

*Bemerkung:*  $\Psi(x_0)$  ist sogar unabhängig von  $a$ ; eine kurze Rechnung zeigt:  $\Psi(x_0) = \frac{1}{e}$ . Die Wendepunkte von  $\Psi$  liegen also bei den verschiedenen  $a$ -Werten alle „auf Höhe  $\frac{1}{e}$ “.

*Anschrift des Verfassers:*

*Hans Humenberger,  
Fakultät für Mathematik, Universität Wien,  
Nordbergstraße 15, A 1090 Wien.  
email [hans.humenberger@univie.ac.at](mailto:hans.humenberger@univie.ac.at)*



# Richtig Zitate zählen

**Günter Rote**

Freie Universität Berlin

In den *Internationalen mathematischen Nachrichten* vom August 2008 (Heft Nr. 208) ist eine verdienstvolle Studie abgedruckt, die die Verwendung von Zitatstatistiken und insbesondere des berühmten *Impact Factors* für mathematische Zeitschriften kritisch beleuchtet, (S. 1–25, *Citation Statistics*, von Robert Adler, John Ewing, und Peter Taylor).

Als verspäteten Nachtrag dazu möchte ich an einer Stelle dieser Studie Kritik anbringen, die vielleicht vom methodisch-mathematischen Gesichtspunkt interessant ist. Wer das *IMN*-Heft nicht zur Hand hat, kann auch die Online-Fassung vom Juni 2008 nehmen, die man im Netz findet: <http://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Report/CitationStatistics.pdf>.

Vorab möchte ich betonen, dass ich mit den Grundaussagen und den Schlussfolgerungen dieses Berichts voll einverstanden bin. Wenn ich an einer Stelle herumkrittelle, wo ich finde, dass die Autoren über das Ziel hinausgeschossen haben, so soll das keineswegs als grundlegende Kritik an der Studie verstanden werden.

**Qualität von Zeitschriften.** Im dritten Abschnitt, *Ranking Papers* (S. 10–14 im *IMN*-Heft, S. 9–12 in der Online-Fassung) geht es darum, dass man aus dem Qualitätsurteil über eine Zeitschrift, die sich aus dem *Impact Factor* ergibt, ein Qualitätsurteil über die in ihr erscheinenden Arbeiten ableitet. Die Autoren kritisieren diese Schlussweise, allerdings mit einer Methode, die sich prinzipiell dagegen richtet, dass man aus der Zeitschrift, in der etwas erscheint, ein Urteil über den Wert der Arbeit herleitet.

Nun ist dieses Vorgehen nach meiner Erfahrung gang und gäbe, und mein Ziel ist es, dieses Vorgehen zu rechtfertigen oder zumindest gegen die ungerechtfertigte Kritik zu verteidigen.

Jeder, der längere Zeit auf einem Gebiet arbeitet und publiziert, kennt dort die „guten“ und die „weniger angesehenen“ Zeitschriften, die „Hauszeitschriften“ von nur lokaler Bedeutung und die „Spitzenzeitschriften“, bei denen man den Kolleginnen und Kollegen gratuliert, die dort etwas untergebracht haben (oder es ihnen neidvoll missgönnt, je nachdem). Wer etwas publizieren möchte, fragt sich oft,

ob die Ergebnisse gut genug sind, um es mit Zeitschrift A zu probieren, oder ob der Artikel lieber gleich bei Zeitschrift B eingereicht werden soll.<sup>1</sup> Wenn ich eine Publikationsliste begutachten soll, bei der ich das Gebiet gut kenne, nicht aber die Arbeiten selbst, schaue ich zu allererst (vielleicht noch bevor der Reflex des Zählens einsetzt), wo die Arbeiten erschienen sind.

Es ist klar, dass man aus der „Qualität“ der Zeitschrift, in der eine Arbeit erschienen ist, nicht direkt auf die Qualität dieser Arbeit und der zugrunde liegenden Forschungen schließen kann; in jeder Zeitschrift erscheinen bessere und schlechtere Artikel. Dennoch halte ich dieses Vorgehen als Näherungslösung für sinnvoll, solange man nicht *die Arbeiten selbst* lesen und begutachten will, und ich weiß aus Kommissionen und Gutachten, dass es der gängigen Praxis entspricht.

Wenn man es nun als gegeben annimmt, dass es so etwas wie „bessere“ und „schlechtere“ Zeitschriften gibt, stellt sich die legitime Frage, wie die „Qualität“ einer Zeitschrift zustandekommt.

Natürlich speist sich unser Wissen über die Qualität einer Zeitschrift aus vielen Quellen, zum Beispiel aus Erfahrungen mit dem Begutachtungsprozess, aus Gesprächen mit Kolleginnen, usw., aber wir möchten hier einmal den „wissenschaftlichen“ Blickpunkt „von außen“ einnehmen, wenn wir diese Frage stellen (wie die Politiker und Forschungseinrichtungen, die uns das Geld geben).

Da wir aus der Qualität der *Zeitschrift* auf die Qualität der in ihr enthaltenen *Artikel* schließen wollen, müssen wir die Qualität dieser Artikel zu einem Qualitätsmaß für die Sammlung der Artikel (die Zeitschrift) *aggregieren*.

Zusammenfassend: Die Qualität einer Zeitschrift ergibt sich also aus der Qualität der in ihr erscheinenden Artikel, und sie strahlt wiederum, wie früher dargelegt, auf die wahrgenommene oder angenommene oder vorhergesagte Qualität der Artikel zurück.

Dies wirft zwei neue Fragen auf: (a) Wie soll man die „Qualität“ eines einzelnen Artikels messen? (b) Wie kombiniert man die „Qualitäten“ einzelner Artikel zu einer Maßzahl für die Qualität einer Zeitschrift?

Frage (a) wäre Anlass zu einer langen inhaltlichen Debatte. Wer als Herausgeber an einer Zeitschrift beteiligt ist, weiß vielleicht, wie schwierig das Ringen um Qualitätsmaßstäbe ist. Ich möchte die Frage ausklammern, und wir wollen der Argumentation halber als Beispiel einfach annehmen, dass die Qualität an der Anzahl der Zitierungen gemessen wird, so wie es in diesem Teil der Studie gemacht wird. (In anderen Teilen, insbesondere im fünften Abschnitt, *The meaning of citations*, wird die Eignung der Zitierhäufigkeit als Qualitätskriterium eingehend diskutiert.)

Frage (b) andererseits ist eine Aufgabe, die mathematischer Analyse zugänglich

---

<sup>1</sup>Natürlich gibt es jenseits der Qualität auch andere Unterscheidungsmerkmale von Zeitschriften: solche für lange und tiefe Abhandlungen und solche für kurze und schnelle Notizen, solche für Übersichtsartikel und für mehr angewandte oder mehr theoretische Arbeiten, usw.

ist: Wie kann man die Daten, die man über die Arbeiten in zwei Zeitschriften *A* und *B* hat, möglichst gut zu einem Vergleich von *A* mit *B* oder zu Maßzahlen für *A* und *B* zusammenfassen? Bei der Berechnung des *Impact Factors* wird einfach der Mittelwert aus den Zitierhäufigkeiten der Einzelarbeiten gebildet.

In der Studie wird nun anhand eines konkreten Beispiels gezeigt, dass der Vergleich, der sich aus dieser Zusammenfassung durch Mittelwertbildung ergibt, mit einem anderen Vergleich wahrscheinlichkeitstheoretischer Natur in Widerspruch geraten kann: Die Grafik auf S. 12 (S. 11 der online-Fassung) zeigt für zwei verschiedene Zeitschriften, die *Proceedings of the AMS* und die *Transactions of the AMS*, die Verteilung, wie oft die Artikel aus einer bestimmte Periode bisher zitiert wurden. Daraus ergibt sich nach der gängigen Berechnungsmethode, dass die *Transactions* die einen etwa doppelt so hohen *Impact Factor* wie die *Proceedings* haben.

Die Autoren stellen nun die Frage:

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Artikel aus den *Transactions* (der „besseren“ Zeitschrift) öfter zitiert wurde als ein zufälliger Artikel aus den *Proceedings*?

Die Autoren geben diese Wahrscheinlichkeit mit 38 % an, also deutlich weniger als 1/2. Sie werten das als klares Zeichen, dass der Vergleich von *einzelnen Arbeiten* aufgrund der *Impact Factors* von *Zeitschriften* „wenig rationale Grundlage“ hat.

Zunächst befremdet es, dass der Gleichstand bei der Anzahl der Zitierungen nicht betrachtet wird. Ich will daher die Frage so erweitern:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Artikel aus den *Transactions* öfter/gleich oft/weniger oft zitiert als ein Artikel aus den den *Proceedings*?

In Ermangelung der Originaldaten habe ich die Balken der Grafik mit dem Lineal abgemessen. Die Rechnung ergibt als Antwort 37 % / 44 % / 19 %.

Man kann darüber streiten, ob die 37 % (oder 38 %) für die *Transactions* genügend spektakulär gegenüber den 19 % für die *Proceedings* sind, dass eine doppelt so große Maßzahl für die „Wichtigkeit“ der Zeitschrift herauskommen sollte, insbesondere in Anbetracht der 43 % unentschiedenen Ausgänge. Dass die Frage aber als Frage mit zwei Ausgängen formuliert wird und der Fall der Gleichheit zugunsten der *Proceedings* unterschlagen wird, ist zumindest eine tendenziöse Argumentation.

Schwerwiegender ist jedoch, dass die gestellte Frage nach der Wahrscheinlichkeit prinzipiell zum Vergleich ungeeignet ist. Ein bekanntes Paradoxon der Wahrscheinlichkeitstheorie sind drei Würfel A,B,C, deren Seiten mit Zahlen derart be-

schriftet sind, dass beim gleichzeitigen Wurf von A und B die Wahrscheinlichkeit, dass A einen höheren Wert als B hat, größer als  $1/2$  ist. Genauso gewinnt aber B über C, und C gewinnt wiederum über A.<sup>2</sup> Die Wahrscheinlichkeitsfrage beim Vergleich der Zeitschriften verläuft nach demselben Muster. Die paarweisen Vergleiche, die man erhält, sind nicht notwendigerweise transitiv, und daher ist dieses Verfahren prinzipiell ungeeignet, um Zeitschriften (oder irgendwelche anderen Gegenstände) in eine Rangfolge zu bringen.

Die Autoren der Studie ziehen aus ihren Rechenbeispielen folgenden Schluss:

Die Information, die man aus dem *Impact Factor* einer Zeitschrift über einzelne Artikel gewinnt, ist „überraschend vage und kann in dramatischer Weise irreführend sein“.

Das mag vielleicht sein, aber durch den Wahrscheinlichkeitsvergleich wird diese Aussage nicht untermauert, denn damit ließe sich *jede* Vergleichsmethode für Zeitschriften diskreditieren: Keine wie immer geartete Methode kann Zeitschriften aufgrund der in ihnen enthaltenen Artikel in eine Rangordnung bringen, die mit dem von den Autoren vorgeschlagenen Wahrscheinlichkeitsvergleich in allen Fällen konsistent ist.

Meiner Meinung nach trifft die oben zitierte Schlussfolgerung der Autoren dennoch zu, aber das liegt an der schwachen Aussagekraft der Zitierhäufigkeit und überdies am kurzen Bewertungszeitraum von zwei Jahren, der in den *Impact Factor* einfließt, wie in der Studie ausführlich dargelegt wird. An sich halte ich die Praxis, die Zeitschrift als Ersatzkriterium für die Qualität einer Arbeit zu nehmen, für vernünftig. Es wäre interessant, empirisch zu untersuchen, wie stark die Qualität von Arbeiten in einer Zeitschrift korreliert. Niemand wird erwarten, dass die Aussage „Zeitschrift A ist besser als B“ bedeutet, dass jeder Artikel in A besser sein soll als jeder Artikel in B, aber stimmt es vielleicht näherungsweise und mit großer Wahrscheinlichkeit, wenn man eine Liste von 10 oder 20 Arbeiten betrachtet?

**Theorie des Messens.** In vielen Situationen ist es erforderlich, komplexe Informationen und Daten in eine Rangordnung (zum Beispiel eine Berufsliste) oder eine einzelne Bewertungszahl (zum Beispiel einen Gehaltsbonus) zu kondensieren. Die mathematische Disziplin, die sich mit solchen Fragen befasst, ist die *Entscheidungstheorie* und die *Theorie des Messens* (engl. *Theory of Measurement*, nicht zu verwechselnd mit der Maßtheorie). Es gibt umfangreiche Monographien zu diesem Thema, z.B. David H. Krantz, R. Duncan Luce, Patrick Suppes, Amos Tversky, *Foundations of Measurement*, 3 Bände (1971–1990). Dieser

<sup>2</sup>Für die Leser, die dieses Beispiel nicht kennen und sich nicht selber das Vergnügen machen wollen, sich solche Würfel auszudenken, ist hier eine Lösung: A trägt die Ziffern 1,5,9 und zwar jede Ziffer doppelt; B trägt 3,4,8 und C 2,6,7. A gewinnt über B mit Wahrscheinlichkeit  $5/9$ , und genauso ist es bei den anderen Paaren.

Bereich berührt auch mathematische Grundlagenfragen. Breiter bekannte Ergebnisse sind vielleicht der Arrowsche Unmöglichkeitssatz (der Satz vom Diktator) oder die Paradoxien von Verhältniswahlsystemen.

Typischerweise geht man dabei axiomatisch vor, indem man gewisse „vernünftige“ Forderungen an die gesuchte Maßzahl stellt. (Soll man zum Beispiel als Autor seine Bewertung verbessern können, indem man einen Artikel, der in einer „schlechten“ Zeitschrift erschienen ist, unter den Tisch fallen lässt oder unter einem Pseudonym schreibt, oder gilt das Prinzip „Mehr ist besser“?) Danach untersucht man alle Funktionen, die mit den Forderungen verträglich sind, oder man stellt fest, dass die Forderungen widersprüchlich sind.

Die Autoren der Studie loben ihre Methode des Wahrscheinlichkeitsvergleichs, weil sie „den Wert genauer statistischer Denkungsart im Gegensatz zu intuitiver Beobachtung zeigt“. Man möchte entgegnen, dass auch „statistische Denkungsart“ nicht vor naiven Fehlern schützt, wenn sie nicht mit dem Wissen um Entscheidungstheorie oder Theorie des Messens verbunden ist.

Die Studie wurde von der Internationalen Mathematischen Union (IMU), dem International Council of Industrial and Applied Mathematics (ICIAM) und dem Institut für Mathematische Statistik (IMS) in Auftrag gegeben. Gerade deshalb hätte sie der unkritischen Anwendung von Mathematik entgegenwirken und in dieser Hinsicht ein Vorbild sein können.

*Adresse des Autors: Günter Rote,  
Institut für Informatik,  
Freie Universität Berlin.*



# Buchbesprechungen

## *Allgemeines, Einführungen*

<i>V. Boju, L. Funar</i> : The Math Problems Notebook (P. PAUKOWITSCH) . . .	43
<i>C. Davis, M. Wikler Senechal, J. Zwicky (eds.)</i> : The Shape of Content (J. LANG) . . . . .	43
<i>J. Flachsmeyer</i> : Origami und Mathematik (P. PAUKOWITSCH) . . . . .	43
<i>E. Pegg Jr., A. H. Schoen, T. Rodgers (eds.)</i> : Homage to a Pied Puzzler (R. GERETSCHLÄGER) . . . . .	44
<i>J. P. Pier</i> : Mathématiques (G. BARAT) . . . . .	45

## *Geschichte, Werkausgaben*

<i>M. Rosen (ed.)</i> : Exposition by Emil Artin: A Selection (G. BARAT) . . .	46
<i>C. E. Sandifer</i> : The Early Mathematics of Leonhard Euler (D. GRONAU)	47
<i>M. B. W. Tent</i> : Leonhard Euler and the Bernoullis (H. PRODINGER) . . .	47

## *Kombinatorik und Diskrete Mathematik*

<i>S. Huczynska, J. D. Mitchell, C. M. Roney-Dougal (eds.)</i> : Surveys in Combinatorics 2009 (A. WINTERHOF) . . . . .	48
--	----

## *Algebra*

<i>L. Halle Rowen</i> : Graduate Algebra: Noncommutative View (V. ZIEGLER)	49
<i>I. M. Isaacs</i> : Algebra (A. GEROLDINGER) . . . . .	50
<i>Y. Katznelson, Y. R. Katznelson</i> : A (Terse) Introduction to Linear Alge- bra (P. PAUKOWITSCH) . . . . .	50
<i>F. W. Lawvere, S. H. Schanuel</i> : Conceptual Mathematics (F. SCHWEIGER)	51
<i>T. Szamuely</i> : Galois Groups and Fundamental Groups (V. ZIEGLER) . . .	51

## *Geometrie, Topologie*

<i>A. Connes, M. Marcolli</i> : Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives (F. LUEF) . . . . .	52
--	----

<i>H. Fukagawa, T. Rothman</i> : Sacred Mathematics (H. STACHEL) . . . . .	53
<i>R. Schneider, W. Weil</i> : Stochastic and Integral Geometry (M. REITZNER) . . . . .	53
<i>D. Taimina</i> : Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes (H. STACHEL) . . . . .	54

*Reelle und Komplexe Analysis*

<i>J. Appell</i> : Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen (G. MARESCH) . . . . .	55
<i>P. Pucci, J. Serrin</i> : The Maximum Principle (N. ORTNER) . . . . .	56
<i>D. Schleicher (ed.)</i> : Complex Dynamics (F. SCHWEIGER) . . . . .	56

*Funktionalanalysis*

<i>N. P. Brown, N. Ozawa</i> : $C^*$ -Algebras and Finite-Dimensional Approximations (F. LUEF) . . . . .	57
<i>B. D. MacCluer</i> : Elementary Functional Analysis (G. TESCHL) . . . . .	58

*Angewandte und numerische Mathematik*

<i>C. Eck, H. Garcke, P. Knabner</i> : Mathematische Modellierung (F. SCHWEIGER) . . . . .	58
<i>M. A. Lewis, M. A. J. Chaplain, J. P. Keener, P. K. Maini (eds.)</i> : Mathematical Biology (G. SCHRANZ-KIRLINGER) . . . . .	59
<i>J. A. Trangenstein</i> : Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations (G. SCHRANZ-KIRLINGER) . . . . .	59

*Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*

<i>E. J. Dudewicz et al. (eds.)</i> : FSDD-I: Fitting Statistical Distributions to Data, Vol. II (E. STADLOBER) . . . . .	60
<i>S. Sheffield, T. Spencer (eds.)</i> : Statistical Mechanics (S. WAGNER) . . . . .	61

*Elementar- und Schulmathematik*

<i>G. Hinrichs</i> : Modellierung im Mathematikunterricht (F. SCHWEIGER) . . . . .	62
<i>A. Koepsell, D. Tönnies</i> : Dynamische Geometrie im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I (P. PAUKOWITSCH) . . . . .	62



## *Allgemeines, Einführungen*

**V. Boju, L. Funar: The Math Problems Notebook.** Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 2007, xii+232 S. ISBN 978-0-8176-4546-5 P/b € 34,90.

Der vorliegende Band wendet sich an alle jene Personen, welche einerseits Freude am Lösen von Aufgaben aus unterschiedlichen mathematischen Bereichen haben und die andererseits das betreffende mathematische Umfeld kennenlernen möchten: Über 250 Problemstellungen aus der Zahlentheorie, der Algebra, Kombinatorik, Geometrie und Analysis werden unter diesen beiden Gesichtspunkten behandelt. Im Anhang finden sich viele einschlägige Formeln und Aussagen.

Dieses Buch ist auch deshalb sowohl Studierenden als auch Vortragenden sehr zu empfehlen, weil die unterschiedlichen Lösungsansätze nicht nur isoliert dargestellt, sondern untereinander verzahnt werden, sodass insgesamt ein Lehrbuch zu Problemlösungstechniken auf hohem Niveau vorliegt.

P. Paukowitsch (Wien)

**C. Davis, M. Wikler Senechal, J. Zwicky (eds.): The Shape of Content.** Creative Writing in Mathematics and Science. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2008, xvii+194 S. ISBN 978-1-56881-444-5 H/b \$ 39,—.

This is a diverse collection of essays, short stories, poems, long stories and the like. The bracket across all this variety is pretty loose. One contribution is called 'The Birth of Celestial Mechanics' about Isaac Newton; a short biography and a dignified tribute to his achievements in the world of mathematics and physics. This text is a real treat. And there are quite a few others in this book which are on a par with this one. There are, though, stories (and poems) which I cannot really relate to. For some contributions the connection with mathematics seems far-fetched. This book is a mosaic of elements which only remotely add up to a consistent picture. To me it is a mixed bag. Literally.

J. Lang (Graz)

**J. Flachsmeyer: Origami und Mathematik.** Papier falten – Formen gestalten. (Berliner Studienreihe zur Mathematik, Band 20.) Heldermann Verlag, Lemgo, 2008, 239 S. ISBN 978-3-88538-120-4 P/b € 20,—.

Im Vorwort gibt der Autor der Hoffnung Ausdruck, „*dass durch die Lektüre die viel verbreitete Verdrossenheit gegen eine Beschäftigung mit Mathematik bei dem einen oder anderen abgebaut würde. . . . Über die ästhetische Brücke des Umgangs mit Origami kann zusammen mit dem Selbermachen – dem Formen gestalten – eine Akzeptanz des Mathematischen entfaltet und ein wenig von der verborgenen Poesie sichtbar werden.*“

Insgesamt werden 98 ebene und räumliche, zum Teil sehr komplexe Origami-Objekte samt der jeweiligen Faltprozedur vorgestellt. Der am handwerklichen Nachvollzug und der Schönheit der entstehenden geometrischen Formen interessierte Leser findet jeweils hilfreiche Anleitungen im Zusammenhang mit der konkreten Faltrealisierung, etwa in Form von Hinweisen zu gebotener besonderer Faltgenauigkeit oder von Tipps zur eleganten Anfertigung scheinbar unmöglicher räumlicher Origami. Auch finden sich immer wieder Ausblicke zum ästhetischen Ausgestalten sowohl der hier vorgestellten als auch der von kreativen Lesern „neu erfundenen“ Origami-Phänomene.

Der auf den mathematischen Hintergrund der behandelten geometrischen Objekte und deren Zusammenhang blickende Leser wird einerseits von den mathematischen Inhalten selbst und andererseits von den didaktischen Fähigkeiten des Autors sehr angetan sein: Von nichttrivialen Details Ostwaldscher Rechtecke – diese Form liegt der Papiernormung der DIN A-Reihe zugrunde und weist das Verhältnis Seite : Diagonale =  $1 : \sqrt{2}$  auf, sodass beim Falten parallel zur kürzeren Symmetralen wieder ein Rechteck dieser Art entsteht – bis zu komplexen Aussagen über Archimedische Polyeder, vom goldenen Schnitt bis zur Eulerschen  $\phi$ -Funktion reicht die Bandbreite der hier behandelten mathematischen Sachverhalte.

Nach Ansicht des Referenten verbindet das vorliegende Buch in ausgezeichneter Weise die handwerkliche Tätigkeit der Papierfaltkunst mit der Kopfarbeit der Mathematik und erfüllt insgesamt eindrucksvoll die eingangs formulierte Hoffnung des Autors.

P. Paukowitsch (Wien)

**E. Pegg Jr., A. H. Schoen, T. Rodgers (eds.): Homage to a Pied Puzzler.**  
A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2009, xxviii+285 S. ISBN 978-1-56881-315-8 H/b \$ 49,-.

Bei diesem Buch handelt es sich um eine Sammlung von Aufsätzen, die anlässlich der siebenten „Gathering for Gardner“ im Jahr 2006 zusammengestellt wurde.

Zu Ehren von Martin Gardner, dem international wohl wichtigsten Popularisierer unseres Fachs, finden etwa alle zwei Jahre Treffen statt, die dem Bereich der sogenannten ‚Unterhaltungsmathematik‘ gewidmet sind. In diesem Werk werden einige faszinierende Facetten dieser leider in unserem akademischen Leben zu Unrecht gering geschätzten Sparte behandelt. (Besonders in den allgemeinbildenden Schulen sollten Themen der Unterhaltungsmathematik meines Erachtens viel stärkere Berücksichtigung finden, als dies jetzt der Fall ist, aber auch den Universitäten täte es gut, der besonderen Art fachlicher Spezialisierung für derartige Inhalte größere Anerkennung zukommen zu lassen.)

Da es sich um das siebente Treffen handelte, widmen sich viele Arbeiten auf verschiedene Art der „Sieben“. Zu den behandelten Inhalten zählen Pentominos, Puzzletheorie, Origami und Polyeder sowie eine Vielzahl weiterer anspruchsvol-

ler Themen verschiedenster Art.

Das Buch stellt eine wertvolle Ergänzung jeder Schulbibliothek dar, und kann jedem Lehrer/jeder Lehrerin auf der Suche nach Zusatzmaterial für die Spitzenleute in der eigenen Klasse nur angeraten sein. Auch für jene, die aktuelles Material für die Popularisierung des Fachs Mathematik suchen, oder auch nur selbst ein paar vergnügliche Stunden mit intelligentem Rätseln verbringen wollen, ist dieser Band ans Herz zu legen.

R. Geretschläger (Graz)

**J. P. Pier: Mathématiques.** Entre savoir et connaissance. Vuibert, Paris, 2006, VIII+211 S. ISBN 978-2-7117-7181-3, P/b € 30,-.

Dieses Buch besteht aus etwa 180 Seiten philosophischer und historischer Überlegungen über die Mathematik, ihre Entwicklung, ihren Platz in der Wissenschaft und in der intellektuellen Geschichte.

Eine erste Reihe von Kapiteln behandelt in dieser Reihenfolge die Zahlen, die Algebra, die Geometrie, das Unendliche und die Analysis. Sie beschreiben das Wesen dieser Branchen der Mathematik durch Allgemeinheiten (zum Beispiel interessiert sich die Algebra nicht für die Objekte, sondern für die Prozesse, die auf diese Objekte unabhängig ihren Natur wirken), und durch Beispiele – Strukturen, Sätze und Konstruktionen werden erwähnt.

Die zwei letzten Kapitel sind mehr philosophisch und widmen sich der Erkenntnistheorie, bzw. der Frage der Wahrheit. Welche Rolle spielt die Mathematik in der modernen Physik und in der Wissenschaft im Allgemeinen? Wie allgemein soll eine Theorie sein, damit sie ein tiefes Gefühl des Verständnisses hinterlässt? Ist die Wahrheit nur auf eine Axiomatik bezogen, oder ist Platonismus im Rahmen der Mathematik eine passende Denkweise? Solche Fragen werden in diesen zwei Kapiteln gestellt und diskutiert.

Das Buch lässt sich nicht so leicht lesen. Pier schreibt sehr impressionistisch, manchmal elliptisch. Sein Stil ist sehr reduziert – man könnte an Wittgenstein denken. Man darf bei ihm keine flüssige Argumentation erwarten, eher eine Aneinanderreihung von Argumenten und Meinungen, mit zahlreichen Beispielen und unzählbaren Zitate in verschiedenen europäischen Sprachen (die nie übersetzt werden – fast alle Zitate sind allerdings französisch, englisch oder deutsch). Häufige unentwickelte Andeutungen vereinfachen das Verständnis des Lesers auch nicht immer. Nichtsdestotrotz erleuchten diese Zitate natürlich das Thema. Eine erneute Lektüre des Buchs ist übrigens viel angenehmer als die erste.

Pier lässt meistens die Mathematiker für ihn sprechen und entwickelt selbst hier keine philosophische Theorie. Dennoch hat er ein Vorbild, offensichtlich Bourbaki. Diejenigen, die diesen Geschmack teilen (und französisch lesen können), werden das Buch genießen.

G. Barat (Marseille)

## *Geschichte, Werkausgaben*

**M. Rosen (ed.): Exposition by Emil Artin: A Selection.** (History of Mathematics, Vol. 30.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island and The London Mathematical Society, 2007, x+346 S. ISBN 978-0-8218-4172-3, P/b \$ 59,-.

Dieses Buch sammelt kurze darlegende Texte und einige bedeutende Forschungsarbeiten von Emil Artin. Die Auswahl ist so gedacht, dass alles von Studenten gelesen werden kann. Alle Texte sind ins Englische übersetzt.

Der erste Text handelt von der Gammafunktion. Absichtlich verwendet Artin hier die komplexe Analysis nicht. Er fängt mit reellen konvexen Funktionen bei Null an und entwickelt die wichtigsten Eigenschaften der Gammafunktion mit vollen Beweisen, die vom Leser nichts fordern, das er nicht nach zwei Jahren Studium gelernt hätte.

Der zweite Text ist sein berühmtes Buch über Galoistheorie mit dem Anhang von Milgram. Nach 30 Seiten Körpertheorie kennt man Zerfällungskörper, die Galois-Korrespondenz, die Kummerschen Erweiterungen sowie die klassischen historischen Anwendungen der Theorie (Konstruierbarkeit und Auflösbarkeit). Artin war mit dem Beweis der Korrespondenz durch das primitive Element nicht zufrieden. Er entwickelte denn einen auf linearer Algebra aufbauenden Ansatz, dessen Hauptpunkt die Ungleichung  $[K : K^\Sigma] \geq |\Sigma|$  ist, wobei  $\Sigma$  eine endliche Menge von Automorphismen des Körpers  $K$  ist. Dieser Zugang ist Standard geworden.

Der dritte Text ist länger – etwa 120 Seiten. Es handelt sich um eine Einführung in die algebraische Zahlentheorie. Archimedische und nicht-archimedische Bewertungen, Approximationssätze, Verzweigungstheorie, Endlichkeit der Klassenzahl. . . Alles, was man in solch einem Textbuch findet. Interessanterweise werden viele einfache Beispiele explizit ausgerechnet, was für das Verständnis unentbehrlich ist.

Danach folgen kürzere Texte. Die reellen Körper werden untersucht, und vor allem dieser Satz bewiesen (Artin-Schreier): *Seien  $K$  algebraisch abgeschlossen und  $L \subset K$  mit  $1 < [K : L] < \infty$ , dann ist  $L$  reell (d.h.  $-1$  ist keine Summe von Quadraten) und es gilt  $K = L(\sqrt{-1})$ .* Ein kurzer Beweis des Satzes von Krein-Milman und ein Ausflug in die Topologie mit der Theorie der Zöpfe beenden das Buch.

Der Stil von Artin ist abstrakt, knapp und präzise, kristallklar. Diese Texte sind zeitlos. Deswegen ist dieses Buch nicht nur von einem historischen Standpunkt interessant, obwohl dessen Inhalt heutzutage in zahlreichen Textbüchern zu finden ist.

G. Barat (Marseille)

**C. E. Sandifer: The Early Mathematics of Leonhard Euler.** The Mathematical Association of America, 2007, xix+393 S. ISBN 978-0-88385-559-3 H/b £ 25,99.

Alle, die sich je mit Originalarbeiten von Euler befasst haben, kennen, abgesehen von sprachlichen Schwierigkeiten, die Mühen, die man mit diesen Texten hat. So ist ein Leitfaden durch Eulers Arbeiten sicher hilfreich. Das vorliegende Buch behandelt die Arbeiten Eulers chronologisch geordnet von 1725 bis 1741. Jede Epoche wird mit historischen Notizen über Weltgeschehen, Eulers persönliches Leben und Eulers nichtmathematische Werke eingeleitet.

Dann folgen Kurzbesprechungen der einzelnen Arbeiten, wobei summarisch der Inhalt und teilweise auch die konkreten mathematischen Texte angegeben werden. Dies erspart aber den am Detail Interessierten nicht, das Original heranzuziehen, wie auch der Autor empfiehlt, wobei die genauen bibliographischen Angaben dies gut möglich machen. Von den insgesamt 49 besprochenen Arbeiten seien die folgenden besonders hervorgehoben. E(neströmverzeichnisnummer)-5 (1729/30): *Über fortschreitende Progressionen*. Hier führt Euler erstmals die (von Legendre so genannte) Gammafunktion als unendliches Produkt wie auch mittels Integraldarstellungen durch das 2. Eulersche Integral, hergeleitet aus dem 1. Eulerschen Integral (Betafunktion), ein. E-26 (1732): *Betrachtungen über Theoreme die Fermat und andere zu Primzahlen betrachtet haben*. Hier zeigt Euler, dass die 5. Fermatzahl keine Primzahl ist. E-11 und E-28 (1733): *Über Differentialgleichungen, die keine Separation der Variablen zulassen*. Arbeiten über die Riccati-Gleichung. E-53 (1735): *Lösung eines Problems geometrischer Lagen*. Das Königsberger Brückenproblem. E-54 (1736): *Beweis eines Theorems, wenn man Primzahlen betrachtet*, das ist der kleine Satz von Fermat. E-71 (1737): *Über Kettenbrüche*. „Hier findet man fast alles, was wir über Kettenbrüche wissen“ (so der Autor). E-72 (1737): *Über unendliche Reihen*. Produkt-Summenformel für die Zetafunktion und „andere nette Resultate“. E-98 (1738): *Beweise arithmetischer Theoreme*. Fermats Theorem für  $n = 4$ . Weitere Arbeiten behandeln die Euler-McLaurinsche Summenformel, Bernoulli-Zahlen, Variationsrechnung und anderes mehr.

Das Studium der mathematischen Arbeiten Eulers kann durchaus anregend sein, wie der Referent aus eigener Erfahrung weiß, und kann daher nur empfohlen werden. Dieses Buch ist dazu eine Hilfe.

D. Gronau (Graz)

**M. B. W. Tent: Leonhard Euler and the Bernoullis.** Mathematicians from Basel. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2009, xix+276 S. ISBN 978-1-56881-464-3 H/b \$ 29,-.

Der engagierte Verleger Klaus Peters, welcher selbst promovierter Mathematiker ist, legt hiermit ein weiteres Werk vor, das die Mathematik einem gebildeten und interessierten Laienpublikum schmackhaft machen soll. Die Autorin Tent ist ei-

ne pensionierte Lehrerin, die bereits ihren dritten Text publiziert; die Vorgänger waren über Gauss und Emmy Noether.

Die Zielgruppe ist “young adults”, also liegt ein „Jugendbuch“ vor. Die Autorin reichert den Text an durch viele und ausgedehnte fiktive Dialoge, die Walter Gautschi im Umschlagtext als “refreshing fictional dialogue” bezeichnet. Der Rezensent (kinderlos und alternd) findet sie eher irritierend, gibt aber gern zu, zu wenig von “young adults” zu verstehen. Also kann es sehr gut sein, dass die Dialoge gerade angesichts der Zielgruppe die richtige Wahl sind.

Leonhard Euler steht als erster im Titel, aber bekommt, dem zeitlichen Ablauf gemäß, die zweite Hälfte zugesprochen. Viele interessante Details kann man dem wohlrecherchierten Text entnehmen, die Geheimnisse sollen hier aber noch nicht verraten werden. Ein schönes Weihnachtsgeschenk für die begabten Sprösslinge!

H. Prodinger (Stellenbosch)

### *Kombinatorik und Diskrete Mathematik*

**S. Huczynska, J. D. Mitchell, C. M. Roney-Dougal (eds.): Surveys in Combinatorics 2009.** (London Mathematical Society Lecture Notes Series 365.) Cambridge University Press, 2009, vii+327 S. ISBN 978-0-521-74173-6 P/b £ 40,-.

This volume contains the survey articles based on the invited lectures given at the 22nd British Combinatorial Conference, held in St Andrews in July 2009.

The papers are *A. Bonisoli*: Graph decompositions and symmetry *R. A. Bailey and P. J. Cameron*: Combinatorics of optimal designs *W. H. Haemers*: Regularity and the spectra of graphs *G. B. Khosrovshahi and B. Tayfeh-Rezaie*: Trades and *t*-designs *H. A. Kierstaed, A. V. Kostochka and G. Yu*: Extremal graph packing problems: Ore-type versus Dirac-type *D. Kühn and D. Osthus*: Embedding large subgraphs into dense graphs *O. Giménez M. Noy*: Counting planar graphs and related families of graphs *B. Bollobás and O. Riordan*: Metrics from sparse graphs *G. F. Royle*: Recent results on chromatic and flow roots of graphs and matroids.

A. Winterhof (Linz)

## *Algebra*

**L. Halle Rowen: Graduate Algebra: Noncommutative View.** (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 91.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008, xxv+648 S. ISBN 978-0-8218-0570-1 H/b \$ 85,-.

Das vorliegende Buch ist der zweite Teil der Buchreihe "Graduate Algebra" des Autors und somit fängt das Buch auch mit dem Kapitel 13 an. Wie der Titel verrät, werden in diesem zweiten Teil die nicht kommutativen Aspekte der Algebra behandelt. Das Buch ist sehr sorgfältig geschrieben und die viele Kommentare und Beispiele zu den Sätzen erhellen die recht abstrakte Theorie und dienen ebenfalls dem Verständnis des Lesers, der somit einen tieferen Einblick in das Gebiet bekommt. Ein weiterer Pluspunkt dieses Buchs sind die zahlreichen Beispiele (insgesamt mehr als 100 Seiten) von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad.

Das Buch ist aufgeteilt in 3 Teile (beginnend mit Teil IV). Der erste Teil, "The Structure of Rings", behandelt die klassischen Sätze der (nicht kommutativen) Ringtheorie. Hier spielen die Matrixringe  $M_n(R)$  eine zentrale Rolle und werden daher detailliert untersucht. Insbesondere wird der Satz von Artin-Wedderburn bewiesen. In weiterer Folge werden zuerst Artinsche und dann Noethersche Ringe behandelt. Danach wird auf das Wachstum algebraischer Strukturen eingegangen und es werden die dazu bekannten Sätze von Milnor, Wolf und Gromov vorgestellt. In einem letzten Kapitel werden die wichtigsten Eigenschaften von Tensorprodukten behandelt.

Der zweite Teil geht auf die Darstellungstheorie von Gruppen und Lie-Algebren ein. Nach einer grundlegenden Einführung in die Darstellungstheorie werden Charaktere eingeführt und behandelt. Unter anderem wird auch Burnsid's Ergebnis, dass jede Gruppe mit Ordnung  $p^u q^v$  auflösbar ist ( $p, q$  Primzahlen), bewiesen. Danach werden Lie-Algebren behandelt, insbesondere wird Cartan's Klassifizierung der einfachen endlichdimensionalen Lie-Algebren diskutiert. Den Abschluss dieses Teils bildet ein kurzes Kapitel über Dynkin-Diagramme und Coxetergruppen.

Der dritte Teil behandelt darstellbare Algebren. Insbesondere werden darstellbare Ringe, also solche Ringe, die man in Matrixringen über einen Körper einbetten kann, untersucht. Im ersten Kapitel werden zu diesen Untersuchungen Polynomidentitäten herangezogen. Danach wird die Artin-Wedderburn-Theorie weiter ausgebaut und mithilfe von Brauergruppen untersucht. Daraufhin wird ein Ausflug in die homologische Algebra gemacht und frühere Ergebnisse homologisch betrachtet und verallgemeinert. Der dritte Teil endet mit einem kurzen Kapitel über Hopf-Algebren.

V. Ziegler (Graz)

**I. M. Isaacs: Algebra.** A Graduate Course. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 100.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, xii+516 S. ISBN 978-0-8218-4799-2 H/b \$ 79,—.

Dieses Buch ist der unveränderte Nachdruck der im Jahr 1993 erschienenen Erstausgabe.

Das Werk ist in zwei annähernd gleich große Teile gegliedert. Der erste Teil, *Nichtkommutative Algebra*, ist im Wesentlichen der Gruppentheorie gewidmet und gibt dann eine Einführung in die Modultheorie (einfache Moduln, projektive Moduln, Artinsche Ringe). Der zweite Teil, *Kommutative Algebra*, startet mit Polynomringen, dann werden Körpererweiterungen (einschließlich der Galoistheorie und Kreisteilungskörper) behandelt, und diese Untersuchungen enden mit transzendenten Körpererweiterungen und dem Satz von Artin-Schreier. Auf den letzten 100 Seiten betrachtet der Autor Noethersche Ringe, ganze Ringerweiterungen und Dedekindringe.

Das Buch ist aus Vorlesungen des Autors hervorgegangen und richtet sich an Studenten ab dem 2. oder 3. Studienjahr (Graduate Students). Die Beweise sind klar und ausführlich dargestellt, und jedes der 30 Kapitel endet mit einer Reihe von Übungsaufgaben. Das Buch stellt eine gelungene Bereicherung der Lehrbuchliteratur zur Algebra dar.

A. Geroldinger (Graz)

**Y. Katznelson, Y. R. Katznelson: A (Terse) Introduction to Linear Algebra.** (Student Mathematical Library, Vol. 44.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008, x+215 S. ISBN 978-0-8218-4419-9 P/b \$ 35,—.

Das vorliegende Buch bietet eine ausgezeichnet zusammengestellte Plattform der zentralen Inhalte der Linearen Algebra. Beginnend mit den standardmäßigen Begriffsbildungen zu Vektorräumen über einem kommutativen Körper  $\mathbb{F}$  – häufig natürlich  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  –, linearen Abbildungen und deren Matrixbeschreibungen gelangt man zu den bekannten Aussagen im Umfeld des Dualraums, der adjungierten Abbildung, des Determinantenbegriffs sowie der invarianten Unterräume. Daran schließt je ein Abschnitt über Vektorräume mit innerem Produkt sowie zu Strukturtheoremen, insbesondere zur Jordan-Normalform, an. Ein Kapitel zu ausgewählten Anwendungsschwerpunkten sowie eine Sammlung zu allgemeinen mathematischen Grundlagen runden diesen Band ab.

Insgesamt liegt ein sehr gutes Lehrbuch zur Linearen Algebra vor, welches sowohl für Studierende zum Selbststudium als auch für Dozenten als Grundlage eines kompletten Durchgangs dieser mathematischen Disziplin sehr gut geeignet und sehr zu empfehlen ist.

P. Paukowitsch (Wien)



**F. W. Lawvere, S. H. Schanuel: Conceptual Mathematics.** A first introduction to categories. Second Edition. Cambridge University Press, 2009, xviii+390 S. ISBN 978-0-521-71916-2 P/b £ 29,99.

Wenn man eine interessante Alternative zu herkömmlichen Einführungen in die Diskrete Mathematik sucht, dann sollte man es mit dieser Einführung in die Kategorientheorie versuchen – als Lernender oder als Lehrender. Von zwei Fachleuten dieses Gebiets sehr engagiert geschrieben, setzt es (theoretisch) kaum Vorkenntnisse voraus. Es geht um Punkte, Pfeile und Diagramme. Die im Text vorkommenden Kategorien sind überwiegend Mengen, Graphen und diskrete dynamische Systeme, aber es werden erstaunlich viele Begriffe damit veranschaulicht (Produkte, Exponentialabbildungen, Topose, usw.). Hatte man sich bisher den Kategorien mit vielen Vorkenntnissen aus Algebra und Geometrie genähert, so wird hier Kategorientheorie als Grundlage der Mathematik präsentiert. Wie motivierend dieser Zugang ist, wird die Erfahrung zeigen.

F. Schweiger (Salzburg)

**T. Szamuely: Galois Groups and Fundamental Groups.** Second Edition. (Cambridge studies in advanced mathematics 117.) Cambridge University Press, 2009, ix+270 S. ISBN 978-0-521-88850-9 H/b £ 30,-.

Das vorliegende Buch betrachtet Konzepte der algebraischen Geometrie und Topologie unter dem Gesichtspunkt der Galoistheorie und liefert somit eine moderne Abhandlung dieses Themas. Das Buch ist übersichtlich geschrieben und abgesehen von grundlegenden Kenntnissen über Algebra (insbesondere über Körper), Topologie und Funktionentheorie in sich abgeschlossen. Jedoch sind Kenntnisse über Galoistheorie, Riemannsche Flächen und Schemata von Vorteil. So werden zum Beispiel Schemata auf nur 10 Seiten eingeführt und die wichtigsten Eigenschaften beschrieben. Ähnlich kurz werden Galoistheorie und Riemannsche Flächen abgehandelt. Die Kürze der Darstellungen der „Grundbegriffe“ wird aber durch zahlreiche Bemerkungen und Beispiele kompensiert. Dadurch werden dem Leser moderne Aspekte und Darstellungen zugänglich gemacht. Das Buch beinhaltet auch einige Anwendungen der Theorie, wie inverse Galoistheorie und Differential-Galoistheorie. Jedes Kapitel wird von einige Aufgaben abgeschlossen, die ebenfalls dem Verständnis dienen und dem Leser weitere Anwendungen aufzeigen.

Zum Inhalt des Buchs: Das Buch besteht aus sechs Kapiteln. Die ersten drei Kapitel bilden die Grundlage für den Rest des Buches. Insbesondere wird im ersten Kapitel die Galoistheorie bis hin zur étalen Formulierung von Grothendieck entwickelt. Das zweite Kapitel behandelt die Fundamentalgruppen der Topologie. Dabei wird unter anderem der Begriff der Garben eingeführt und diese werden dann auch untersucht. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit Riemannschen Flächen. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen kompakten Riemann-

schen Flächen und Galoisgruppen von algebraischen Erweiterungen  $k/\mathbb{C}(t)$  untersucht. Das vierte Kapitel vertieft diese Untersuchungen und erweitert sie auf algebraische Kurven. Als Anwendung werden in diesem Kapitel Resultate zur inversen Galoistheorie behandelt. Die Untersuchungen im vorherigen Kapitel führen dann zur Theorie der Schemata und die zuvor erzielten Ergebnisse werden in die Sprache der Schemata übertragen und verallgemeinert. Im letzten Kapitel wird das Konzept von “affine group schemes” und in weiterer Folge der Begriff der “Tannakian categories” eingeführt. Dies liefert unter anderem eine tiefe Verbindung zu Darstellungen. Als Anwendung wird kurz die Differential-Galoistheorie behandelt.

V. Ziegler (Graz)

### *Geometrie, Topologie*

**A. Connes, M. Marcolli: Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives.** (AMS Colloquium Publications, Vol. 55.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008, xxii+785 S. ISBN 978-0-8218-4210-2 H/b \$ 99,-.

In the last three decades noncommutative geometry has turned out to be of relevance for various problems in mathematics and physics. The book under review presents the frontier of current research in the areas of noncommutative geometry, quantum field theory and number theory. In the investigation of the relations between these different subjects Connes and Marcolli invokes results from functional analysis, arithmetic geometry, algebraic geometry and of course noncommutative geometry, as well as in physics involving elementary particle physics, perturbative quantum field theory, quantum statistical mechanics and quantum gravity. Moreover, it mixes them in an unexpected manner, introducing for instance methods from physics in number theory. Among the material covered in the book is Riemann’s hypothesis and the Standard model for elementary particles viewed from the perspective of noncommutative geometry.

The monograph under review contains original approaches and views on many traditional topics of mathematics and physics, which makes it a very stimulating reading for researchers in these areas with a strong background in operator algebras.

F. Luef (Berkeley)

**H. Fukagawa, T. Rothman: Sacred Mathematics.** Japanese Temple Geometry. Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2008, xxv+348 S. ISBN 978-0-691-12745-3 H/b \$ 35,-.

Im Westen erfuhr man erstmals durch das Buch von D. Pedoe und H. Fukagawa (1989) von der japanischen Tempel-Geometrie. Das vorliegende Werk enthält eine reichhaltige Auswahl dieser bemerkenswerten Probleme verschiedensten Schwierigkeitsgrades aus der Elementargeometrie und diskutiert auch ausführlich deren Lösungen. Auffällig viele Aufgaben haben mit berührenden Kreisen zu tun.

Darüber hinaus bietet das Buch einen Einblick in die jahrhundertelange und für uns ungewohnte Art der Verbreitung dieser Probleme auf bebilderten Holztafeln (*sangaku*) in Shinto-Schreinen und buddhistischen Tempeln. Diese Tafeln, von denen auch einige in Farbfotos gezeigt werden, sollten jedermann einladen, eine Lösung zu versuchen. Sie waren aber auch zum Teil „Votivgaben“ derjenigen, welchen eine Lösung gelungen ist, und darüber hinaus Unterrichtsbehelfe in den Samurai-Schulen.

Es ist oft erstaunlich, dass klassische geometrische Probleme (z.B. das Malfatti-Problem oder der Feuerbachkreis) vor ihrer Entstehung in Europa bereits in Japan dokumentiert und gelöst worden sind. Das Buch bietet so einen interessanten Vergleich zwischen den japanischen Lösungsmethoden und jenen der westlichen Welt. Auch enthält es erstmals ausschnittsweise Übersetzungen aus dem Tagebuch, welches ein japanischer Sammler dieser Aufgaben zu Beginn des 19. Jahrhunderts angefertigt hatte.

Dieses kostbar ausgestattete Buch wird viele ansprechen – Freunde geometrischer Probleme ebenso wie Interessenten an der Geschichte der Mathematik sowie Liebhaber japanischer Kunst und Kulturgeschichte.

H. Stachel (Wien)

**R. Schneider, W. Weil: Stochastic and Integral Geometry.** Springer, 2008, xii+694 S. ISBN 978-3-540-78858-4 \$ 129,-.

Dieses Buch ist eine konzentrierte und trotzdem gut lesbare Beschreibung des State-of-the-Art in der Stochastischen Geometrie. Diese beschäftigt sich mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf geometrischen Objekten. Ihr Untersuchungsgegenstand sind also Punkt- und Hyperebenenprozesse, zufällige Polytope und zufällige Mosaik und allgemein zufällige Mengen. Als Integralgeometrie bezeichnet man das vielleicht wesentlichste Hilfsmittel, um derartige Verteilungen in wichtigen Fällen explizit anzuschreiben: Transformationsformeln für Integrale über geeignet parametrisierte geometrische Objekte (z.B. Hyperebenenverteilungen) oder auch die explizite Berechnung von Integralen über Haarsche Maße auf geometrisch motivierten Wahrscheinlichkeitsräumen (als Beispiele seien die Cauchysche Oberflächenformel und die berühmte Kinematische Hauptformel genannt).

Seit im 18. Jahrhundert das bekannte Nadelproblem von Buffon und im 19. Jahrhundert das Bertrandsche Paradoxon und Sylvesters Vier-Punkt-Problem aufgeworfen wurden, werden Fragestellungen aus der Stochastischen Geometrie untersucht. Wichtige moderne Anwendungen der Stochastischen Geometrie finden sich in der Stereologie, Räumlichen Statistik, in der Bildanalyse, u.v.m.

Das Buch, welches von zwei ausgewiesenen Experten in diesem Gebiet geschrieben wurde, enthält eine systematische und ausführliche Darstellung zunächst der Grundlagen und dann der wichtigsten Resultate und Anwendungen der stochastischen Geometrie.

Der erste Teil des Buchs enthält eine Einführung in die Stochastische Geometrie: die Definition von zufälligen Mengen, von Punktprozessen (hier vor allem der Poissonschen Punktprozesse) und weiterer wichtiger geometrischer Modelle, z.B. von Partikel-Prozessen, Booleschen Modellen und Ebenen-Prozessen.

Im zweiten Teil werden die für das Weitere wichtigen integralgeometrischen Formeln bewiesen. Unter anderem wird hier die Kinematische Hauptformel gezeigt, sicher eines der herausragenden Resultate der Integralgeometrie.

Der dritte und vielleicht interessanteste Teil des Buchs enthält – unter anderem auch für Anwendungen – wichtige ausgewählte Resultate der Stochastischen Geometrie. Der Bogen reicht hier von klassischen Fragen über zufällige Polytope und Berührwahrscheinlichkeiten bis hin zu modernen Problemen über zufällige Mosaik und Zerlegungen des Raums.

Im Anhang werden dann die nötigen Hilfsmittel aus Topologie, Maßtheorie und Geometrie nachgereicht.

Dieses Buch präsentiert einen Großteil der wichtigen und interessanten Resultate der Stochastischen Geometrie und Integralgeometrie mit Beweisen. Es ist daher als solide Grundlage für jene geeignet, die sich in die Stochastische Geometrie einarbeiten wollen oder auch aufgrund ihrer Arbeit im Bereich der Stochastik oder Geometrie mit Fragestellungen der Stochastischen Geometrie und Integralgeometrie in Berührung kommen. Aufgrund der zahlreichen interessanten Bemerkungen zum Stand der aktuellen Forschung am Ende jedes Kapitels ist es auch für Spezialisten eine ergiebige Quelle. Um es für eine Vorlesung zu verwenden, bedarf es aufgrund seines Umfangs einer sorgfältigen Auswahl. Für Stochastiker und Geometer ist dieses Buch ein unverzichtbares Werkzeug und Nachschlagewerk.

M. Reitzner (Osnabrück)

**D. Taimina: Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes.** A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2009, xi+148 S. ISBN 978-1-56881-452-0 H/b \$ 35,-.

Man sollte sich von dem Titelbild mit der bunten und merkwürdig gekräuselten Häkelarbeit nicht abschrecken lassen. Dahinter verbergen sich viele kluge Gedanken über die Geometrie und deren Geschichte, insbesondere jene der hyperbolischen Geometrie, sowie über Geometrie und Kunst. Das Werk ist reich bebildert

und mit vielen originellen Zitaten prominenter Geometer ausgestattet, wie z.B. solchen von B. Thurston.

Auch wenn seit D. Hilbert bekannt ist, dass es keine vollständige Einbettung der hyperbolischen Ebene in den euklidischen Raum gibt, so besteht doch ein Interesse an hyperbolischen „Raumformen“. Hier nun werden spiralförmig gehäkelte Modelle vorgeschlagen, bei deren Herstellung in regelmäßigen Abständen mehr Maschen aufzunehmen sind, als dies bei einer ebenen Häkelarbeit erforderlich wäre. Dies liefert eine „Fläche“ von näherungsweise konstanter negativer Krümmung, was deren stark gekräuseltes Aussehen begründet. Damit können Phänomene der hyperbolischen Geometrie demonstriert werden – ganz unter der Devise, dass man Geometrie im wortwörtlichen Sinn „begreifen“ sollte.

Dieses Buch bietet keine geschlossene mathematische Theorie. Und doch ist es aus den eingangs genannten Gründen weit mehr als ein populärwissenschaftlicher Zugang zur nichteuklidischen Geometrie.

H. Stachel (Wien)

### *Reelle und Komplexe Analysis*

**J. Appell: Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen.** Eine Einführung in die Theorie reeller Funktionen. (Springer Lehrbuch.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, xvii+470 S. ISBN 978-3-540-88902-1 P/b € 29,95.

Anhand mannigfacher Beispiele wird in Jürgen Appells Buch die Theorie der Analysis einer reellen Variablen entwickelt. Bemerkenswert hierbei ist, dass anders als etwa im bekannten „Counterexamples in Analysis“ nicht vornehmlich eine Aufstellung elaborierter Beispiele gegeben wird, sondern die entsprechenden Konzepte ausführlich motiviert und die zugehörigen Sätze allesamt auch bewiesen werden. Dementsprechend stehen die Begriffe Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Riemann-Integrierbarkeit im Zentrum der ersten drei Kapitel. Im vierten Kapitel wählt Appell das Beispiel der Cantorfunktion, um Lebesguesches Maß und Baire'sche Kategorie in ansprechender Art und Weise zu verdeutlichen. Behandelt und charakterisiert werden dabei insbesondere auch absolut stetige Funktionen sowie die Beziehungen der unterschiedlichen Funktionenklassen zueinander (eine prominente Rolle im Appellschen Funktionszoo nimmt dabei die Funktionenschar  $f_{\alpha,\beta,n}(x) = x^\alpha \sin^n x^\beta$  ein). Die letzten beiden Kapitel haben schließlich Funktionen in mehreren Variablen sowie die Anfänge der Vektoranalysis zum Inhalt. Neben den vielen hundert ausgearbeiteten Beispielen finden sich am Ende jedes Kapitels auch zahlreiche lohnende Übungsaufgaben.

Wiewohl Appells Buch die wesentliche Theorie einer Analysisvorlesung präsentiert, wird „Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen“, ganz dem Titel entsprechend, wohl eher als reichhaltiges Reservoir zahlreicher erhellender und den Kern

der Sache treffender Illustrationen allgemeiner Sätze Verwendung finden. Die wenigen Druck- und Flüchtigkeitsfehler, wie sie wohl bei einer Erstauflage unvermeidlich sind, tun der Freude beim Betrachten der vielen possierlichen Funktionen jedenfalls keinen Abbruch.

G. Maresch (Wien)

**P. Pucci, J. Serrin: The Maximum Principle.** (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 73.) Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2007, x+235 S. ISBN 978-3-7643-8144-8 H/b € 49,90.

Das Maximumprinzip ist das stärkste Hilfsmittel, um Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der Lösungen *skalarer* elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen 2. Ordnung zu beweisen. Ganze Lehrbücher sind daher diesem Prinzip gewidmet sowie große Abschnitte in Standardlehrbüchern, z.B. M.H. Protter, H.F. Weinberger: *Maximum Principles in Differential Equations* (1967); L.E. Fraenkel: *An introduction to maximum principles and symmetry in elliptic problems* (2000); D. Gilbarg, N. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (2. Aufl. 1983).

Demgegenüber stellen die Autoren fest: “While [...] these books remain of essential importance and have been invaluable as background for the present work, neither contains an up-to-date modern treatment of the maximum principle itself.” In der Tat geht das Buch von Pucci-Serrin das Thema von Neuem an: Schwache (= distributionelle) Lösungen und Sobolewräume werden verwendet und es erfolgt “the first book presentation of the modern compact support principle and the general theory of structured elliptic inequalities.” Ohne Übertreibung kann das Buch als Juwel in der Reihe “Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications” bezeichnet werden. Den Anwendungen ist Kap. 8 gewidmet, beispielsweise auf die nichtlinearen elliptischen Gleichungen der Flächen mit vorgeschriebener mittlerer Krümmung oder der Kapillaritätsflächen. (Die klassische Harnacksche Ungleichung, p. 153, enthält einen Druckfehler.)

N. Ortner (Innsbruck)

**D. Schleicher (ed.): Complex Dynamics.** Families and Friends. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2009, xx+635 S. ISBN 978-1-56881-450-6 H/b \$ 69,-.

Wer sich über den Stand der Forschungen auf dem Gebiet der Iteration komplexer Funktionen orientieren will, dem ist dieser zu Ehren von John Hamal Hubbard herausgegebene Band sehr zu empfehlen. Er enthält 17 Kapitel, die (mit einer Ausnahme) Forschungsarbeiten sind. Darunter finden sich auch 3 bedeutende Beiträge (von Milnor, Shishikura und Thurston), die als „graue Literatur“ schon einige Zeit im Umlauf waren. Der Aufsatz von Thurston kann auch als Einführung in diese Forschungen dienen. Eine Faszination dieses Gebiets liegt ja auch darin begründet, dass sich manche Fragen (fast) elementar formulieren lassen, aber die

Beantwortung schwierig ist, wie etwa „Gibt es einen Parameterwert  $c$ , sodass das Polynom  $z^2 + c$  eine Juliamenge positiven Maßes hat?“ Zahlreiche schöne Bilder runden dieses Buch ab.

F. Schweiger (Salzburg)

### *Funktionalanalysis*

**N. P. Brown, N. Ozawa:  $C^*$ -Algebras and Finite-Dimensional Approximations.** (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 88.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008, xv+509 S. ISBN 978-0-8218-4381-9 H/b \$ 79,-.

The monograph under review presents some of the striking developments in the vast field of operator algebras and the methods underlying the recent breakthroughs on the structure of  $C^*$ -algebras and von Neumann algebras. The authors demonstrate the relevance of the approximation of operator algebras by finite-dimensional ones or the approximation of morphisms between operator algebras by linear maps that factor through finite-dimensional algebras. This theme has many facets and the authors take the reader through the most prominent classes of operator algebras from this point of view. A particular emphasis is laid on group algebras and their approximation properties, e.g. Haagerup's metric approximation property, Property T, etc.

The book starts with a brief introduction to  $C^*$ -algebras and von Neumann algebras in Chapter 1. In the first part of the monograph the basic theory is treated in Chapters 2–10 and this part closes with a list of open research problems. The second part, Chapter 11–14, deals with special topics such as Connes's uniqueness theorem for injective  $II_1$ -factors, the Haagerup property of groups and weakly exact von Neumann algebras. The third part, Chapter 15–17, provides some applications of the developed techniques and results to various problems in operator algebras and operator theory, e.g. Herrero's approximation problem. The final part of the book consists of several Appendices covering material on ultrafilters, operator spaces, lifting theorems, positive definite functions and Schoenberg's theorem, groups and graphs, and bimodules over von Neumann algebras.

The organization of the book allows the authors to provide a solid introduction to the field accessible to graduate students and in the second and third part present the state of the art. In the reviewers opinion this excellent book will become a standard reference for beginners and experts in operator algebras.

F. Luef (Berkeley)

**B. D. MacCluer: Elementary Functional Analysis.** (Graduate Texts in Mathematics 253.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, x+207 S. ISBN 978-0-387-85528-8 H/b € 34,95.

The present textbook is a concise introduction to linear functional analysis. The topics covered are classical: Hilbert spaces, the main theorems about Banach spaces (Hahn-Banach, uniform boundedness, and open mapping/closed graph), compact operators including the Fredholm alternative, Banach and  $C^*$ -algebras, and finally the spectral theorem for bounded normal operators.

What I like about the book is its user-friendly style, the many historic remarks and comments mingled with the main text, and the wealth of nice exercises. On the other hand, a few things could be streamlined: For example, why is Zorn's lemma needed in a separable Hilbert space (Lemma 6.6)? Moreover, as a teacher of PDE courses I missed the fact that bounded sequences in reflexive Banach spaces have weakly convergent subsequences ("reflexive" is hardly touched upon and while the Banach-Alaoglu theorem is present in the chapter on Banach algebras, the connection might not be clear for a beginner).

Lebesgue integration and Lebesgue  $L^p$  spaces only appear in some examples and are assumed as prerequisites (in addition to linear algebra and basic point set topology).

In summary, it is a nice contribution to the existing literature on this subject.

G. Teschl (Wien)

### *Angewandte und numerische Mathematik*

**C. Eck, H. Garcke, P. Knabner: Mathematische Modellierung.** (Springer-Lehrbuch.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, xiv+503 S. ISBN 978-3-540-74967-7 P/b € 29,95.

Soll ein Bachelor- oder Masterstudium eine Qualifikation für Berufe in den Bereichen Naturwissenschaft und Technik sein, so ist eine gute Kenntnis von mathematischer Modellierung in diesen Bereichen wichtig. Das vorliegende Buch will – auf Vorkenntnissen der Linearen Algebra und der Analysis aufbauend – einschlägige Kenntnisse vermitteln. Bis zu einem gewissen Grad ist somit ein gutes Lehrbuch der mathematischen Physik entstanden, aber die Perspektive ist stets die Mathematik. Überwiegend sind es „klassische“ Themenstellungen (stochastische Modelle und Quantenphysik werden nicht bearbeitet) mit dem Schwerpunkt Differentialgleichungen.

F. Schweiger (Salzburg)



**M. A. Lewis, M. A. J. Chaplain, J. P. Keener, P. K. Maini (eds.): Mathematical Biology.** (IAS/Park City Mathematics Series, Vol. 14.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, x+398 S. ISBN 978-0-8218-4765-7 H/b \$ 79,-.

This book is volume 14 of a series published by the IAS/Park City Mathematics Institute (PCMI) which has its institutional home since 1993 at the Institute for Advanced Study (IAS) in Princeton. All volumes are the lecture notes from Graduate Summer Schools taking place each summer and also the topic of the Research Program and the Undergraduate Summer School taking place.

The contents of this volume cover a wide range of areas in Mathematical Biology: Introduction to Dynamics of Biological Systems, Spatial Dynamics in Ecology, Matrix Models and Population Dynamics, Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases, Topological Approaches to Biological Dynamics, Mathematical Modelling of Solid Tumour Growth: from Avascular to Vascular, via Angiogenesis and Lectures in Mathematical Neuroscience.

G. Schranz-Kirlinger (Wien)

**J. A. Trangenstein: Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations.** Cambridge University Press, 2009, xxi+597 S. ISBN 978-0-521-87727-5 H/b £ 40,-.

This is a graduate textbook with print and interactive electronic components (on CD). It is a comprehensive presentation of modern shock-capturing methods, including both finite volume and finite element methods, covering the theory of hyperbolic conservation laws and the theory of the numerical methods. The accompanying CD contains a hyperlinked version of the text which provides access to computer codes for all of the text figures.

The book is divided into 8 chapters titled *Introduction to PDE, Scalar Hyperbolic Conservation Laws, Nonlinear Scalar Laws, Nonlinear Hyperbolic Systems, Methods for Scalar Laws, Methods for Hyperbolic Systems, Methods in Multiple Dimensions and Adaptive Mesh Refinement*. This very recommendable book represents a quite comprehensive treatment of the underlying topic.

G. Schranz-Kirlinger (Wien)

## Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

**E. J. Dudewicz et al. (eds.): FSDD-I: Fitting Statistical Distributions to Data, Vol. II.** Proceedings of the Symposium Fitting Statistical Distributions to Data, Auburn University, Auburn, Alabama (American Series in Mathematical and Management Sciences, Vol. 58.)<sup>1</sup> American Sciences Press, Columbus, 2008, 229 S. ISBN 0-935950-62-1 P/b \$ 235,-.

Der erste Teil wurde bereits in den IMN 211, 2009, S. 69f. besprochen. Der vorliegende Band enthält weitere elf Beiträge zur im Titel angegebenen Problematik. In drei Arbeiten steht die generalisierte Lambda-Verteilung (GL) im Mittelpunkt. *H. Shore* diskutiert einen Ansatz, der die Quantilsfunktion über ein nicht lineares Regressionsmodell mit vier Parametern beschreibt. Anhand eines Datenbeispiels wird gezeigt, dass dieser Vorschlag mit der Anpassungsgüte der GL-Verteilung vergleichbar ist. *M. Kumaran* und *V.T. Beena* geben explizite Formeln für die Momente einer abgeschnittenen Zufallsvariable gemischten Typs an, indem sie deren Darstellung durch die GL-Verteilung benutzen. Dazu werden zwei Anwendungen geboten: Bei Autoversicherungen wird der optimale Wert des Selbstbehalts ermittelt und im ein-periodischen Lagerhaltungsmanagement die optimale Bestellmenge. *W. Ning et al.* untersuchen Mischungen zweier GL-Verteilungen und vergleichen diese mit Mischungen von Normalverteilungen bzgl. der Kullback-Leibler-Distanz und eines Überlappungskoeffizienten.

In *M.M. Ali, J. Woo* und *M. Pal* werden drei schief-symmetrische Verteilungen eingeführt, die durch das sogenannte Reflexionsprinzip aus symmetrischen Verteilungen konstruiert werden. Es werden Ausdrücke für die Dichten, Verteilungsfunktionen und Momente hergeleitet und mittels der Verteilung des logarithmierten Wechselkurses des japanischen Yen zum US-Dollar (1862–2003) wird die Brauchbarkeit eines der eingeführten Modelle demonstriert. *M.S. Mulekar et al.* führen drei Maße für die Überlappung von zwei Exponentialverteilungen ein, studieren das Verhalten von Bias und Varianz der entsprechenden Schätzer durch eine Simulationsstudie und wenden Konfidenzintervalle für die Überlappung auf Überlebensraten von zwei Patientengruppen an.

*M.M. Ali, J. Woo* und *S. Nadarajah* beschäftigen sich mit einem bisher wenig erforschten Gebiet: der stochastischen Ordnung von diskreten Zufallsvariablen, basierend auf der Ausfallrate und dem Likelihoodquotienten. *T. Nishiyama* und *T. Seo* betrachten simultane Konfidenzintervalle für paarweise Vergleiche von Mittelwerts-Vektoren in multivariaten Normalverteilungen (Tukey-Kramer-Prozedur) und beweisen eine Vermutung von Tukey für vier Mittelwerts-Vektoren. Überdeckungswahrscheinlichkeiten werden mittels Monte-Carlo-Simulation ermittelt

---

<sup>1</sup>Dieses Werk ist gleichzeitig erschienen als: American Journal of Mathematical and Management Sciences, Volume 28(2008), Issue 1 and 2.

und die vorgeschlagene Prozedur auf ein reales Datenbeispiel angewendet.

Für das NP-schwere Rundreiseproblem mit beschränkter Transportkapazität und Zeitfenstern gibt es viele Heuristiken. *M. Barkaoui et al.* schlagen einen genetischen Algorithmus vor, der verschiedene Schlüsselkonzepte so kombiniert, dass die resultierende Prozedur Verbesserungen gegenüber konkurrierenden Verfahren bringt. Dies wird anhand von Vergleichen mit Referenzproblemen auch aufgezeigt. *H.-I. Huang et al.* betrachten ein Warteschlangensystem mit mehreren Jobs und nicht unterbrechender Priorität, wobei die Ankunfts- und Bedienraten der Jobs unscharf (fuzzy) sind. Die Brauchbarkeit des Modells wird durch ein numerisches Beispiel untermauert. *A. Choudhury* leitet für eine Warteschlange mit einem Schalter und ungedulden Kunden die Verteilung verschiedener Systemgrößen her und listet die dazugehörigen Fortran-Programmcodes auf. *J.D. Stamey et al.* entwickeln ein hierarchisches Bayes-Modell für Populationen aus der verallgemeinerten Poisson-Verteilung und selektieren daraus jene Populationen, welche die höchste Auftretensrate besitzen. Bei zwei realen Datensätzen werden die gesuchten Wahrscheinlichkeiten durch die Markov-Chain-Monte-Carlo-Methode approximiert.

Die Beiträge sind vielfältig in der Methodik und behandeln Themen, die für Leser mit Kenntnissen aus stochastischer und statistischer Modellierung interessant sein könnten.

E. Stadlober (Graz)

**S. Sheffield, T. Spencer (eds.): Statistical Mechanics.** (IAS/Park City Mathematics Series, Vol. 16.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, xii+360 S. ISBN 978-0-8218-4671-1 H/b \$ 75,-.

Dieses Buch ist eine Zusammenstellung von Vorlesungen, die im Rahmen einer Sommerschule im Juli 2007 in Park City gehalten wurden. Es richtet sich damit insbesondere an fortgeschrittene Studierende mit solidem Grundwissen in Analysis und Wahrscheinlichkeitstheorie.

In 5 umfangreichen Kapiteln, verfasst von hochkarätigen Experten, wird der Leser in verschiedene Gebiete der statistischen Mechanik eingeführt: (1) Im ersten Kapitel, *Lectures on the Renormalisation Group* von David C. Brydger, werden Gittermodelle und deren Konvergenz behandelt, was etwa am Beispiel Coulomb-Gas erläutert wird. (2) Alice Guionnet präsentiert bedeutende Resultate aus der Theorie der Zufallsmatrizen, wie etwa den Satz von Wigner über die Grenzverteilung der Eigenwerte. (3) Im dritten Abschnitt von Richard Kenyon geht es um Dimer-Modelle, insbesondere auf quadratischen und hexagonalen Gittern. (4) Gregory F. Lawler behandelt die sogenannte Schramm-Loewner-Evolution, einen stochastischen Prozess, der etwa als Grenzwert selbstvermeidender Irrfahrten auftritt. (5) Wendelin Werner führt schließlich im abschließenden Kapitel in zweidimensionale Perkolation ein.

Die Statistische Mechanik ist eng mit verschiedensten Bereichen der Mathematik verknüpft, wie etwa Funktionalanalysis, Kombinatorik oder Wahrscheinlichkeitstheorie. Dieses Werk kann daher durchaus einer breiten mathematischen Leserschaft empfohlen werden, insbesondere allen, die sich sowohl für Mathematik als auch für Physik begeistern können.

S. Wagner (Stellenbosch)

### *Elementar- und Schulmathematik*

**G. Hinrichs: Modellierung im Mathematikunterricht.** (Mathematik Primar- und Sekundarstufe.) Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008, xi+348 S. ISBN 978-3-8274-1938-5 P/b € 22,-.

Obwohl Mathematik eine Grundlage unserer technologisch orientierten Kultur ist, wird sie oft nicht als Teil einer heute sinnvollen Allgemeinbildung geschätzt. Der Mathematikunterricht muss sich daher mit diesem Sachverhalt, von Mogens Niss als „Relevanzparadoxon“ bezeichnet, auseinandersetzen. Ein Vorschlag dazu ist, mathematisches Modellieren als spielerischen Umgang mit dem Ernst mathematischer Anwendungen einzusetzen. Neben didaktischen Grundsatzfragen bietet das Buch eine reiche Palette konkreter Vorschläge für alle Schulstufen und eine gut gegliederte Übersicht über weitere Unterrichtsvorschläge. Als Werkzeug wird vor allem Tabellenkalkulation herangezogen. Man kann hoffen, dass sich viele Lehrer und Lehrerinnen mit dem Thema Modellieren auseinandersetzen, welches allerdings neben mathematisch fachlichen Grundlagen eine gewisse Flexibilität im Umgang mit anderen Fachgebieten voraussetzt. Der Schlüssel für guten Unterricht ist aber eine gute Ausbildung und eine angemessene Fortbildung!

F. Schweiger (Salzburg)

**A. Koepsell, D. Tönnies: Dynamische Geometrie im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I.** Aulis Verlag Deubner, Köln, 2007, 222 S. ISBN 978-3-7614-2720-0 P/b € 24,-.

Dieses Schulbuch stellt sehr viele interessante Beispiele zur ebenen Geometrie in dynamisch visualisierter Form unter dem Gesichtspunkt der für den mittleren Schulabschluss geforderten mathematischen Kompetenzen zusammen. Als dynamische Lösungssoftware wird *Euklid DynaGeo* von Roland Mecheling verwendet, aber natürlich können die Aufgaben auch mit anderer 2D-Software behandelt werden. Auf der beiliegenden CD-ROM finden sich einerseits 7 einschlägige Free-ware-Programme, insbesondere die Sharewareversion von *Euklid DynaGeo*, und andererseits zu 125 Aufgabenstellungen der ebenen Geometrie mit im *geo*-Format dynamisch visualisierten Lösungen insgesamt 54 ausgearbeitete Arbeitsblätter im

*doc-* und *pdf*-Format. Zusammen mit den präzisen Lösungsanleitungen liegt ein für Lehrerinnen und Lehrer des Mathematikunterrichts in der 5.–8. Schulstufe sehr empfehlenswertes Schulbuch vor.

P. Paukowitsch (Wien)

## **PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS**

V. S. Varadarajan (Managing Editor), Vyjayanthi Chari, Robert Finn, Kefeng Liu, , Darren Long, Jiang-Hua Lu, Alexander Merkurjev, Sarin Popa, Jie Qing, Jonathan Rogawski.

The Journal is published 12 times a year with approximately 200 pages in each issue. The subscription price is \$ 450,00 per year. Members of a list of supporting institutions may obtain the Journal for personal use at the reduced price of \$ 225,00 per year. Back issues of all volumes are available (price on request).

**PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS**  
**P. O. BOX 4163, BERKELEY, CA 94704-0163**



# Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

## Brief des Vorsitzenden

Liebe Kolleginnen und Kollegen!

Ich möchte mich Ihnen als neuer Vorsitzender der ÖMG kurz vorstellen. In der ÖMG bin ich seit 10 Jahren aktiv tätig, von 2000–2007 war ich Herausgeber der IMN und von 2008–2009 Stellvertretender Vorsitzender. Seit 1986 arbeite ich als Mathematiker an der TU Wien, derzeit bin ich Vorstand des Instituts für Diskrete Mathematik und Geometrie und leite (gemeinsam mit Peter Grabner aus Graz) das Nationale Forschungsnetzwerk des FWF „Analytische Kombinatorik and Probabilistische Zahlentheorie“.

Wie Sie alle wissen, müssen die Universitäten aufgrund der allgemeinen wirtschaftlichen Lage weitere Einsparungen hinnehmen. Es ist zu befürchten, dass auch die Mathematik davon betroffen sein wird, obwohl es wichtig wäre, gerade in schwierigeren Zeiten grundlagenorientierte Fächer vermehrt zu fördern, da diese einen wesentlichen Parameter für die Innovationskraft des Landes darstellen. Die Schweiz wäre dazu ein gutes Beispiel und Vorbild. Trotz dieser zu erwartenden Probleme bin ich optimistisch, dass sich die Mathematik in Österreich insgesamt relativ gut entwickeln wird können. Sie ist gut aufgestellt und war gerade in den letzten Jahre immer wieder erfolgreich, wenn man etwa die START- und Wittgensteinpreise als Indiz dafür heranzieht.

Eine ganz andere Herausforderung für die Mathematik in Österreich betrifft den Schulbereich. Neben der Umstellung auf die Zentralmatura wird die Lehramtsausbildung reformiert. Ganz abgesehen von der Problematik, wie die Aufgaben künftig auf Pädagogische Hochschulen und Universitäten aufgeteilt sein werden, werden in den nächsten Jahren viele Junglehrerinnen und -lehrer für das Schulfach Mathematik gesucht werden. Der Altersmedian der Mathematiklehrer ist bereits über 55 Jahre. Eine Möglichkeit, dieser Problematik zu begegnen, wäre, auch Diplommathematikern – eventuell mit einer kurzen Zusatzausbildung – eine Schulkarriere zu ermöglichen. Ganz allgemein wäre meines Ermessens eine höhere Durchlässigkeit zwischen Schulen und dem übrigen Wirtschaftsleben begrüßenswert.

Im Bezug zur Schulmathematik freut es mich, Ihnen ankündigen zu können, dass die ÖMG ein neues Service anbietet. Auf Initiative von Prof. Gilbert Helmbert

(Innsbruck), gibt die ÖMG ab jetzt einen „Mathe-Brief“ heraus, der Lehrerinnen und Lehrern regelmäßig fachliche Anregungen zur Verfügung stellen wird. Die ÖMG-Webseite <http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/index.html> unterstützt diese Bemühungen. Wer Interesse hat, kann den „Mathe-Brief“ per email abonnieren.

Ich möchte Sie alle herzlich zur weiteren Mitarbeit in der ÖMG einladen und ersuche Sie um Ihr Engagement für unser Fach! Ich freue mich über Anregungen und stehe auch gerne für ein Gespräch zur Verfügung.

Mit besten Grüßen,

Michael Drmota (Vorsitzender der ÖMG)

### **Gedenktafel für Johann Radon in Děčín**

Am 28. November 2009 wurde am Geburtshaus des Mathematikers Johann Radon (1887–1956) in Děčín (Tetschen, Tschechische Republik) auf Initiative der Stadt Děčín eine Gedenktafel enthüllt. Die zweisprachig gehaltene Tafel erwähnt, dass Radon Rektor der Universität Wien war und die Computertomographie begründet hat.

Die eigentliche Enthüllung wurde vom Bürgermeister der Stadt Děčín gemeinsam mit Radons Tochter, Dr. Brigitte Bukovics, vorgenommen, die auf Initiative des Österreichischen Kulturinstituts in Prag und des Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (RICAM) dazu eingeladen worden war. Nach der Enthüllung fand in der Burg Tetschen ein zweistündiges Kolloquium statt, wo über Radons Biographie und über die Radontransformation vorgetragen wurde

Es ist erwähnenswert, dass ein wesentlicher Grund für das Errichten einer Gedenktafel dieser Art ist, dass sich die tschechischen Stellen vermehrt darum bemühen, ihre deutschsprachige Geschichte in Erinnerung zu rufen. Frau Dr. Bukovics hat in ihren abschließenden Dankesworten darauf indirekt Bezug nehmend erwähnt, dass sich ihr Vater so eine Ehrung nicht erwartet hätte.

Michael Drmota

### **Festkolloquium für Ludwig Reich**

Am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen der Karl-Franzens-Universität Graz (KFUG) fand am 29. Jänner 2010 ein von Harald Fripertinger, Wolfgang Prager und Jens Schwaiger organisiertes Festkolloquium aus Anlass des 70. Geburtstags von em.o.Prof. Dr. *Ludwig Reich* statt. Die Schar der Gäste, die



gekommen waren, um Ludwig Reich zu gratulieren, sprengte fast den Hörsaal, sie kamen natürlich aus Graz und Leoben, aber auch von weit her: aus Innsbruck und Wien, aus Hamburg und München, Debrecen und Opava (Troppau). Es war vor allem ein Treffen alter Freunde und Kollegen aus dem internationalen Kreis der an Funktionalgleichungen interessierten Mathematiker. Diese Forschungsrichtung hat der Jubilar an der KFUG etabliert und fast vier Jahrzehnte lang durch eigene Forschung, Ausbildung und Förderung von Schülern sowie durch intensive internationale Vernetzung gepflegt. In Graz ist diese Schule heute, nachdem Reich selbst und Detlef Gronau aus Altersgründen ausgeschieden sind, nur noch durch die Veranstalter dieser Feier vertreten, von denen zwar Schwaiger und Prager feste Stellen an der Universität haben; doch für den dritten, Harald Fripertinger, hat die Universität, an der er *sub auspiciis praesidentis rei publicae* promovierte und sich auch habilitierte, nie einen Platz im Dienststellenplan gefunden. Wie die Besetzungspolitik der letzten Jahre an der KFUG zeigt, soll diese Arbeitsrichtung hier offenbar dem Aussterben überlassen werden.

*Jens Schwaiger* begrüßte im Namen der Veranstalter die Teilnehmer; daran schlossen sich kurze Grußworte des Rektors der Universität Graz, Prof. Dr. Alfred Gutschelhofer, sowie von Robert Tichy als Vertreter des ÖMG-Vorsitzenden Michael Drmota. Das Programm des Kolloquiums bestand aus folgenden Beiträgen, deren Autoren durchwegs Ludwig Reich zum „Doktorvater“ hatten:

*Arnold Kräuter* (Leoben) würdigte ausführlich und inhaltsreich Leben und Werk des Jubilars und hob auch seine langjährige Tätigkeit als Herausgeber der international führenden Fachzeitschrift für Funktionalgleichungen, *Aequationes Mathematicae*, hervor;

*Wojciech Jabłoński* (Rzeszów) präsentierte unter dem Titel “Iteration groups in formal power series” einen Überblick über ein Forschungsgebiet, das den Jubilar seit frühen Jahren beschäftigt und in dem er gemeinsam mit dem Vortragenden in jüngster Zeit zahlreiche Fortschritte erzielt hat;

*Harald Fripertinger*, Musiker ebenso wie Mathematiker, gab zum Abschluss eines jener Flötensolo-konzerte, mit denen er seit vielen Jahren immer wieder Veranstaltungen der Forschungsgruppe um Ludwig Reich künstlerisch belebt, diesmal unter Vorführung neuer Spieltechniken, bei denen auch erfahrene Musikfreunde nur staunen konnten. Abschließend lud der Jubilar die Festgäste ins benachbarte Uni-Café zu einem Buffett, mit dem diese „Familienfeier“ im doppelten Sinn ihren würdigen Abschluss fand.

Peter Flor

## **Hans Troger 1943–2010**

Die Technische Universität Wien trauert um Hans Troger, Professor am Institut für Mechanik und Mechatronik. Er ist am Montag, den 22. Februar 2010 verstorben.

Hans Troger, geboren am 11. März 1943, studierte an der TU Wien Maschinenbau. 1970 promovierte er zum Dr.techn. In den 1970er Jahren arbeitete er als Assistent am Institut für Mechanik. 1977 habilitierte er sich für Mechanik an der TU Wien. 1979 wurde er als Ordentlicher Professor für Mechanik an das Institut für Mechanik berufen. Von 1985 bis 1987 war er Dekan der Fakultät für Maschinenbau, von 1987 bis 1991 Prodekan.

Hans Troger war als Forscher und Lehrer nicht nur an der TU Wien sehr angesehen, sondern wurde auch international immer wieder angefragt. Er war unter anderem Gastprofessor an den Universitäten in Metz, Pavia, La Sapienza in Rom, an der TU Hamburg-Harburg, an der University of Illinois Urbana-Champaign und an der Ponticia Universidade Catolica in Rio de Janeiro.

Prof. Hans Troger erhielt zahlreiche Auszeichnungen und Ehrungen, wie 1974 den Förderungspreis für junge Wissenschaftler durch die Österreichische Akademie der Wissenschaften anlässlich des fünfzigjährigen Bestehens des Springer-Verlages Wien, 1990 das Ehrendoktorat der TU Budapest, 1993 die Wahl zum korrespondierenden und 2002 zum wirklichen Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften; die Liste schließt mit dem Schrödingerpreis 2000 der Österreichischen Akademie der Wissenschaften.

Darüber hinaus war Hans Troger als Mitherausgeber der Zeitschriften *Acta Mechanica*, *meccanica*, *Int. J. Bifurcation and Chaos* und *Nonlinear Dynamics* tätig. Seine Forschungstätigkeit kreiste u.a. um Stabilitätstheorie, Dynamik, Differentialgleichungen mit einem Fokus auf Ingenieurs-Anwendungen. Mit Hans Troger verliert die Technische Universität Wien einen ihrer profiliertesten Lehrer und Wissenschaftler und das Institut einen beliebten Kollegen.

# Neue Mitglieder

**Christian Dombacher**, Dipl.-Ing. Mag. – Nikolaus Lenaug. 8, 2232 Deutsch-Wagram. geb. 1972. Studium Wirtschaftsinformatik/Verwaltungsinformatik (1991–1995) und Technische Mathematik/Statistik (2004–2008), seit 1999 selbständiger Unternehmer im Bereich IT/Telekommunikation/Statistik. email *c.dombacher@telecomm.at*.

**Christina Brigitte Drab**, Dipl.-Ing. Dr. – Altenbergstrasse 69, 4040 Linz. geb. 1977. 1995–2001 Studium der Technischen Mathematik, seit 2002 wissenschaftliche Mitarbeiterin bei Kompetenzzentrum Industriemathematik/Math-Consult GmbH.

**Clemens Koppensteiner**, Dipl.-Ing. – Berthold Brecht Gasse 6, 2353 Guntramsdorf. geb. 1985. 2004–2009 Studium Technische Mathematik an der TU Wien, 2009/10 Studium Mathematics part III, Cambridge. email *me@caramdir.at*.

**Clemens Müllner** – Pasettistrasse 72/15, 1200 Wien. geb. 1990. ÖMG-Preisträger. email *clemens.mue@hotmail.com*.

**Katharina Ölsböck** – Bachgasse 8, 3430 Staasdorf. geb. 1991. 2009 Matura am BRG Tulln, Schülerpreis der ÖMG. email *katharina.oelsboeck@telew.at*.

**Martin Riedler**, Dipl.-Ing. – Heriot-Watt University, Department of Mathematics, EH14 4AS Edinburgh. geb. 1982. 2002–2008 Studium Technische Mathematik an der TU Wien, Diplomarbeit in stochast. Numerik, seit 2008 Ph.D. Scholarship in Edinburgh (Mathematical Neuroscience – Mathematical Biology). email *mgr2@hw.ac.uk*.

**Karl Rupp** – Eslarngasse 27/19, 1030 Wien. Ab 2003 Studium der Technischen Mathematik und Elektrotechnik an der TU Wien, 2006/07 Master-Course Computational Mathematics with Modelling, Brunel University London, 2009 Abschluss des Studienzweigs Mikroelektronik und Beginn des Doktoratsstudiums. email *me@karlrupp.net*.

**Claudia Isabella Scheimbauer**, Dipl.-Ing. – Rigistrasse 28, 8006 Zürich. geb. 1986. seit 2009 wissenschaftliche Mitarbeiterin und Doktorandin an der ETH Zürich bei G. Wüstholtz. email *claudia.scheimbauer@math.ethz.ch*.

**Horst Walluschek-Wallfeld** – Leechgasse 80, 8010 Graz. geb. 1939. email *horst.walluschek-wallfeld@gmx.at*.

**Christoph B. Winkler**, Dipl.-Ing. – Schwenkgasse 14/5, 1200 Wien. geb. 1984. 2009 Abschluss des Studiums Technische Mathematik an der TU Wien, seit 2009 wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Univ. Wien. email *christoph.winkler@univie.ac.at*.

**INDIANA UNIVERSITY MATHEMATICS JOURNAL**  
(Formerly the Journal of Mathematics and Mechanics)

Edited by

R. Glassey, E. Bedford, H. Bercovici, N. Katz, M. Larsen,  
P. Sternberg, V. Turaev, K. Zumbrun.

*For institutions, the print and online subscription rates are \$400.00 and \$320.00. Individual subscribers' fees are \$100.00 and \$50.00, respectively. The JOURNAL appears in 6 annual issues averaging more than 500 pages each.*

**Indiana University, Bloomington, Indiana U.S.A**