

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83) und P. Flor (1986–99).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. e-mail imn@tuwien.ac.at, <http://www.oemg.ac.at/>

Redaktion:

M. Drmota (TU Wien, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
J. Wallner (TU Graz)
R. Winkler (TU Wien)

Ständige Mitarbeiter der Redaktion:

C. Binder (TU Wien)
R. Mlitz (TU Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

© 2007 Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

<http://www.oemg.ac.at/>

email: oemg@oemg.ac.at

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: sekr@oemg.ac.at

Vorstand:

R. Tichy (TU Graz): Vorsitzender
W. Schachermayer (TU Wien):
Stellvertretender Vorsitzender
M. Drmota (TU Wien):
Herausgeber der IMN
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Schriftführer
I. Fischer (Univ. Wien):
Stellvertretende Schriftführerin
H. Pottmann (TU Wien): Kassier
F. Rendl (Univ. Klagenfurt):
Stellvertretender Kassier
G. Teschl (Univ. Wien):
Web-Beauftragter (kooptiert)

Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:

L. Reich (Graz)
A. Ostermann (Innsbruck)
H. Kautschitsch (Klagenfurt)
G. Larcher (Linz)
P. Hellekalek (Salzburg)
C. Schmeiser (Wien)
W. Schlöglmann (Didaktikkommission)

Beirat:

A. Binder (Linz)
C. Christian (Univ. Wien)
U. Dieter (TU Graz)
H. Engl (Öst. Akad. Wissenschaften)
G. Gottlob (TU Wien)
P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
E. Hlawka (TU Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
R. Mlitz (TU Wien)
W. Müller (Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
N. Rozsenich (Wien)
F. Schweiger (Univ. Salzburg)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
H. Stachel (TU Wien)
H. Strasser (WU Wien)
G. Teschl (Univ. Wien)
H. Troger (TU Wien)
W. Wurm (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionvorsitzende gehören statutenmäßig dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt
(IBAN AT83-1200-0229-1038-9200,
BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques
Internationales

Nr. 205 (61. Jahrgang)

August 2007

Inhalt

<i>Vitaly Bergelson</i> : Some Historical Remarks and Modern Questions Around the Ergodic Theorem	1
<i>Walter Schachermayer und Josef Teichmann</i> : Wie K. Itô den stochastischen Kalkül revolutionierte	11
<i>Hans Humenberger und Berthold Schuppar</i> : Fünfecksfaltungen – Bauen von Dodekaedern	25
Buchbesprechungen	35
Internationale Mathematische Nachrichten	50

Die Illustration auf der Titelseite zeigt die Flussarme des Pregel im Stadtzentrum von Königsberg und die heute vorhandenen Brücken. Im Gegensatz zum 18. Jahrhundert gibt es nunmehr einen Eulerweg, bei dem jedoch Anfangs- und Endpunkt verschieden sind (siehe auch <http://maps.google.com/?ie=UTF8&om=1&t=k&ll=54.70604,20.50993&spn=0.010501,0.021865&z=16>)

Some Historical Remarks and Modern Questions Around the Ergodic Theorem

Vitaly Bergelson

Ohio State University

1 Some historical facts

In 1909–1910 P. Bohl, W. Sierpinski, and H. Weyl independently proved that for any irrational number ξ , the sequence $x_n = n\xi \pmod{1}$, $n = 1, 2, \dots$, is *uniformly distributed* (or, as it was called then, *uniformly dense*) in $[0, 1]$, meaning that for any $0 \leq a < b \leq 1$, one has

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : x_n \in (a, b)\}}{N} = b - a. \quad (0.1)$$

It was however the fundamental paper [We], published by Weyl in 1916, that gave rise to the theory of uniform distribution, which today has connections to numerous mathematical disciplines, including number theory, combinatorics, probability theory, harmonic analysis, and ergodic theory.

Weyl starts his paper by noting that a sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$ satisfies (0.1) if and only if for any function f which is periodic with period 1 and Riemann integrable on $[0, 1]$, one has

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) = \int_0^1 f \, dx. \quad (0.2)$$

The author acknowledges support received from the National Science Foundation (USA) via grant DMS-0345350. This article first appeared in 2004 in volume 1404, “Dynamics of Complex Systems” (Ed. Michiko Yuri) in the series *Kôkyûroku*, published by the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. It is reprinted here with friendly permission from the author and the publisher.

While for Weyl the relation (0.2) expresses an analytic equivalent of the fact that the sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is uniformly dense in $[0, 1]$, it is the ergodic character of (0.2) which we would like to emphasize here. Indeed, the left-hand side of (0.2) can be interpreted as a time average. (Think of $n = 1, 2, \dots$ as instances of time, x_n as the position occupied by a moving particle, and $f(x_n)$ as a result of the measurement of some parameter at time n .) The right-hand side of (0.2) is just the “space average” (which in a more general situation, when the interval $[0, 1]$ is replaced by a finite measure space $(X, \mathcal{B}, \mu)$, would be written, for a function $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, as $\frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x) d\mu(x)$).

Weyl also observes that since by the theory of Fourier series, any periodic function can be represented as a linear combination of special periodic functions of the form $e^{2\pi i m x}$, $m \in \mathbb{Z}$, one has the following convenient criterion for the equidistribution of a sequence $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$:

$$\forall m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i m x_n} = 0. \quad (0.3)$$

Applying this criterion (and simultaneously extending the discussion to higher dimensions), Weyl obtains many by now classical results, among which the following is perhaps the most popular.

Theorem 1.1. *If a real polynomial $p(t) = \alpha_k t^k + \alpha_{k-1} t^{k-1} + \dots + \alpha_0$ has the property that at least one coefficient other than α_0 is irrational, then the sequence $(p(n) \bmod 1)_{n \in \mathbb{N}}$ is uniformly distributed.*

We will return to this result in Section 2 when discussing some modern ramifications of the ergodic theorem.

It took another 15 years for the ergodic idea expressed by relation (0.2) to take on the form of the ergodic theorem.

In 1931, B. Koopman published a short paper ([K]) which amounted to a very simple but significant observation: if T is an invertible measure preserving transformation of a measure space $(X, \mathcal{B}, \mu)$, then the operator U , defined on $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ by $(Uf)(x) = f(Tx)$, is unitary. The following passage from an article by P. Halmos ([H], p. 91) gives a colorful description of the story of the inception of J. von Neumann’s ergodic theorem.

Koopman’s observation was simultaneously a challenge and a hint. If there is an intimate connection between measure preserving transformations and unitary operators, then the known analytic theory of such operators must surely give some information about the geometric behavior of the transformations. By October of 1931, von Neumann had the answer; the answer was the mean ergodic theorem.

Here is the modern formulation of von Neumann’s ergodic theorem, obtained in [N1].

Theorem 1.2. Let U be a unitary operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$. Denote by P the orthogonal projection onto the subspace $\mathcal{H}_{\text{inv}} = \{f \in \mathcal{H} : Uf = f\}$. For any $f \in \mathcal{H}$, one has

$$\lim_{N-M \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N-M} \sum_{n=M}^{N-1} U^n f - Pf \right\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Corollary 1.3. Assume that $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is a finite measure space. Let $T : X \rightarrow X$ be an invertible measure preserving transformation which is ergodic, that is, for any $A \in \mathcal{B}$ with $0 < \mu(A) < \mu(X)$, one has $\mu(A \triangle TA) \neq 0$. Then for any $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, one has

$$\lim_{N-M \rightarrow \infty} \frac{1}{N-M} \sum_{n=M}^{N-1} f(T^n x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x) dx$$

in L^1 -norm.

Remark 1.4.

1. The proofs of Theorem 1.2. and Corollary 1.3. can be found in any standard text on ergodic theory. See, for example, [P] or [Wa].
2. In [N1], von Neumann deals with a unitary $\mathbb{R}$ -action $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ induced by a continuous family of measure preserving transformations. While his notation is cumbersome and the proof is complicated by the usage of overly sophisticated machinery (such as the spectral resolution, obtained by M. Stone in [S]), it is a truly outstanding paper.

In October 1931, von Neumann communicated his result to G.D. Birkhoff, who was able to prove, (see [Bi1], [Bi2]) by an original and rather classical argument, the almost everywhere statement which, in modern terms, can be formulated as follows.

Theorem 1.5. Assume that $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is a finite measure space and let $T : X \rightarrow X$ be an invertible measure preserving transformation. For any $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, there exists a function $\bar{f} \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ such that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = \bar{f}(x) \text{ a.e.}$$

If the transformation T is ergodic, then $\bar{f} = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f(x) dx$ a.e.

Curiously enough, Birkhoff's theorem, published in two articles in PNAS (Proceedings of the National Academy of Sciences), appeared in the December 1931 issue, whereas von Neumann's paper appeared in the January 1932 issue of PNAS. It looks like Birkhoff was in a hurry: [Bi1] was submitted on November 27, 1931, and [Bi2] was submitted on December 1, 1931. Von Neumann's paper [N1] was

submitted on December 10, 1931. This controversy is (partly) explained in an account by S. Ulam ([U], p. 98).¹ In the following passage from [U], G.D. stands for Birkhoff and Johnny for von Neumann.

Von Neumann never quite forgave G.D. for having “scooped” him in the affair of the ergodic theorem: von Neumann had been first in proving what is now called the weak ergodic theorem. By a sheer virtuoso type of combinatorial thinking, Birkhoff managed to prove a stronger one, and – having more influence with the editors of the Proceedings of the National Academy of Sciences – he published his paper first. This was something Johnny could never forget. He sometimes complained about this to me, but always in a most indirect and oblique way.

The tension between von Neumann and Birkhoff can also be detected in the way they wrote about the importance and physical adequacy of their results. The reader may find the following three quotations both instructive and amusing.

(i) From [N2], which was submitted on January 21, 1932. In the text below, (1) stands for von Neumann’s norm convergence result of the uniform averages $\frac{1}{t-s} \int_s^t f(T^\tau x) d\tau$, and (2) stands for Birkhoff’s result on the almost everywhere convergence of the averages $\frac{1}{t} \int_0^t f(T^\tau x) d\tau$.

It is of interest to decide which of the two formulations, (1) or (2), corresponds to the actual physical problem of the ergodic hypothesis. It turns out that the weaker form of statement (1) is sufficient – that it, indeed, is the precise mathematical equivalent of the physical state of affairs. It is to be noted, further, that the knowledge of the spectral resolution $E(\lambda)$, which is fundamental in Koopman’s method, enables one to dominate the physical situation here completely; in particular, it furnishes a numerical estimation of the degree of convergence of the limiting process connected with the ergodic hypothesis, whereas Birkhoff’s existence proof for (2) is of a non-constructive character.

(ii) From [BiK], which was submitted on February 13, 1932. After agreeing that von Neumann’s result is “sufficient for the needs of the kinetic theory”, the authors still write on the subject of Birkhoff’s theorem:

From the viewpoint of the detailed statistics along an individual path-curve, it is fundamentally more far-reaching: in it is proved for the first time that the relative time of sojourn along almost every individual path-curve exists, a result often assumed implicitly in the writing of physicists, but never proved.

¹Added by the author for the current publication: The reader will find some additional information on this controversy in the paper by Joseph D. Zund (see [Z] in the list of references), which is based on a recently discovered letter of von Neumann.

(iii) In his American Mathematical Monthly article [Bi3], Birkhoff writes:

The integral of Lebesgue (1901), founded upon Borel measure, has been a dominating weapon in the striking advance of Analysis during the present century. Perhaps the Ergodic Theorem (1931) is destined to hold a central position in this development.

As if this were not enough, Birkhoff adds the following in a footnote:

Our discussion here deals only with the “Ergodic Theorem”, and not at all with the “Mean Ergodic Theorem” of von Neumann, which stimulated me to reconsider some old ideas, and so led me to the discovery and proof of the Ergodic Theorem, embodying a strong, precise result which, so far as I know, had never been hoped for.

While the speculations offered in [N2] and [BiK] are interesting, they are perhaps not totally convincing, especially when they address measurement and numerical estimation. We shall offer in Section 2 one more take on the question of which of the two ergodic theorems is more useful/relevant in studying physical phenomena.

2 Some questions related to modern developments

Recall that a measure space $(X, \mathcal{B}, \mu)$ is called a Lebesgue space if it is measure-theoretically isomorphic to the unit interval, equipped with the standard Lebesgue measure. The following classical theorem shows that this assumption is in no way too restrictive.

Theorem 2.1. (Cf. [R], Ch. 15, Sec. 5, Thm. 16) *Assume that μ is the completion of a finite Borel measure on a complete separable metric space X . If μ is normalized (i.e. $\mu(X) = 1$) and has no atoms, then $(X, \mathcal{B}, \mu)$ (where $\mathcal{B}$ is the completion of the algebra of Borel sets in X) is measure-theoretically isomorphic to the unit interval with Lebesgue measure.*

Assume now that $(T_v)_{v \in \mathbb{R}}$ is an ergodic continuous measure preserving flow on a Lebesgue space $(X, \mathcal{B}, \mu)$. It is not hard to show that for all but countably many $s \in \mathbb{R}$, the element $T_s = S$ is ergodic. (See for example [CFS], Ch. 12, Sec. 1, Lemma 1, or [Be1], p. 122.) Note also that since the ergodicity of the flow $(T_v)_{v \in \mathbb{R}}$ is obviously equivalent, for any real $c \neq 0$, to the ergodicity of the flow $(T_{cv})_{v \in \mathbb{R}}$, it follows that for all but countably many $s \in \mathbb{R}$, the transformation $T_s = S$ is totally ergodic, meaning that S^n is ergodic for any nonzero $n \in \mathbb{Z}$.

Consider now the following situation. In order to study the continuous averages $\frac{1}{t} \int_0^t f(T_v x) dv$, a physicist picks some $s \in \mathbb{R}$ and considers the averages of the form

$A_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x)$, where $S = T_s$. (One may think of the averages $A_N(f)$ as corresponding to the average of measurements performed at times $t = 0, 1, \dots, N-1$.) In reality, the measurements can be done only approximately at times $t = i$, $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, and so perhaps it is more natural to consider the “perturbed” averages $A_N^*(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^{n+\delta_n} x)$, where $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is an independent random sequence in a small interval $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Assuming that the flow element $S = T_s$ was chosen with some luck, i.e. that S is ergodic, our physicist would like to know whether he can expect that for large N , the averages $A_N^*(f)$ are close to $\int_X f(x) d\mu$. Note that the assumption of ergodicity of S is not unreasonable, since as was noted above, for all but countably many $s \in \mathbb{R}$, T_s is ergodic. Moreover, if the flow $(T_v)_{v \in \mathbb{R}}$ happens to be weakly mixing (which physically means that the system has no angular variables, cf. [KN]), then one can actually show that, for any nonzero $s \in \mathbb{R}$, T_s is ergodic and even weakly mixing.

The following considerations show that the answer to the question whether $A_N^*(f)$ is close to $\int_X f(x) d\mu(x)$ is quite satisfactory if one is concerned with norm convergence.

First, note that even if $A_N^*(f)$ does not converge in norm to $\int_X f(x) d\mu(x)$, the averages $A_N^*(f)$ will be close in norm to $A_N(f)$ if ε is small enough. (Just use the triangle inequality and the fact that, for any f , $\|T_v f - f\| \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0$.) Now, since S is ergodic, $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N(f) = \int_X f(x) d\mu(x)$ in norm, which implies that for all large enough N (and small enough ε) the expression $A_N^*(f)$ is close in norm to $\int_X f(x) d\mu(x)$. Moreover, this reasoning equally applies to the expressions $A_{N,M}^*(f) = \frac{1}{N-M} \sum_{n=M}^{N-1} S^{n+\delta_n} f$ for large enough $N-M$.

The following theorem says that if one is interested in norm convergence, the expressions $A_N^*(f)$ are well behaved for a *typical* sequence $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Theorem 2.2. *Let $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$ and let Π be the countably infinite cartesian power of I , equipped with the normalized product measure m_∞ induced by the Lebesgue measure m on I . Let $S = T_s$ be an ergodic element of an ergodic measure preserving flow $(T_v)_{v \in \mathbb{R}}$ acting on a Lebesgue space $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Then for any $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, the set $\mathcal{D}$ of sequences $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Pi$ for which*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^{n+\delta_n} x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

in the L^2 norm satisfies $m_\infty(\mathcal{D}) = 1$.

Theorem 2.2. should be juxtaposed with the following negative result pertaining to almost everywhere convergence.

Theorem 2.3. *Under the assumptions and notational agreements of Theorem 2.2., there exists a set $C \subset \Pi$ with $m_\infty(C) = 1$ such that for any sequence $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$, there exists a function $f \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ such that the averages $A_N^*(f)$ fail to converge almost everywhere.*

One can succinctly summarize the (mathematical) content of Theorems 2.2. and 2.3. as follows: for randomized sampling from an ergodic flow, von Neumann's ergodic theorem is more useful than that of Birkhoff. We leave it to the reader to (try to) interpret these two theorems from the point of view of their physical content.

Here are some comments of the proofs of Theorems 2.2. and 2.3.

The reason for Theorem 2.2. to hold is that one can utilize the spectral theorem in order to reduce the problem to a question on the equidistribution of a random sequence in Π . The result then follows from an application of a form of the law of large numbers.

As for Theorem 2.3, it immediately follows from the following fact proved in [BeBB].

Theorem 2.4. (See [BeBB], Thm 1.1.) *Let $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a sequence of real numbers which is linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then for any non-periodic flow $(X, \mathcal{B}, \mu, (T_v)_{v \in \mathbb{R}})$, there exists a bounded function $f \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ for which the averages*

$$A_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T_{\lambda_n} x)$$

fail to converge almost everywhere.

To see that Theorem 2.3. follows from Theorem 2.4., it is enough to observe that there exists a set $E \subset \Pi$ with $m_\infty(E) = 1$ such that for any $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, the sequence $(n + \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$.

Note that the conditions on the sequence $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Theorem 2.4. are met by some known “deterministic” sequences, such as $(\sqrt{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ where the p_n are distinct primes. One can show that there exists an exceptional countable set $P \subset \mathbb{R}$ such that the sequence $(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ with $\alpha \in \mathbb{R} \setminus P$ consists of linearly independent numbers. One can also show that sequences of the form $(n^r)_{n \in \mathbb{N}}$, where $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $r > 0$, also satisfy the conclusion of Theorem 2.4. The reason behind this is that while, for example, numbers of the form $\lambda_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ are linearly dependent over $\mathbb{Q}$, one can extract a subsequence $\lambda_{n_k} = \sqrt{n_k}$ such that (i) $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$, and (ii) the sequence $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ has positive density. (See [BeBB], Section 2, for more details.)

On the other hand, the following result, also proved in [BeBB], shows that one has a strong positive result involving the norm convergence.

Theorem 2.5. Let $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in (0, 1)$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ for $i \neq j$. Let $(T_v)_{v \in \mathbb{R}}$ be an ergodic measure preserving continuous flow acting on a Lebesgue space $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Then for any $f_1, \dots, f_k \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$, one has

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_1(T_{n\alpha_1}x) \dots f_k(T_{n\alpha_k}x) - \int_X f_1 d\mu \dots \int_X f_k d\mu \right\|_{L^2} = 0.$$

We will discuss now some natural problems which are suggested by the following beautiful theorem due to J. Bourgain (see [Bo1], [Bo2]).

Theorem 2.6. Let $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ be a measure preserving system and let $p(t)$ be a polynomial with integer coefficients. Then for any $p > 1$ and any $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$, the averages $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^{p(n)}x)$ converge almost everywhere.

One can check that when T is totally ergodic, for any $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$, where $p > 1$, one has

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^{p(n)}x) = \int_X f(x) d\mu(x) \text{ a.e.} \quad (0.4)$$

Indeed, one needs only to check that, when T is totally ergodic, the averages $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^{p(n)}x)$ converge to a constant in L^2 -norm. (See for example [F], Ch. 3, Sec. 4, or [Be2].)

While from the L^2 result the convergence in any L^p space, where $1 \leq p < \infty$, follows almost immediately, the question whether (0.4) holds in $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ is open (and is perhaps one of the most interesting problems in the area of almost everywhere convergence).

Here is another interesting set of problems, related to the physical interpretation of Bourgain's theorem. Assume that the transformation T in Bourgain's theorem is totally ergodic. (As we explained above, if one has an ergodic flow $(T_v)_{v \in \mathbb{R}}$, then for all but countably many s , the transformation T_s will also be totally ergodic.) For, say, a bounded and measurable function f , one will have then, for almost every x , the equality of the space average $\int f d\mu$ and the time average $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^{p(n)}x)$, taken along the polynomial sequence $p(n)$, $n = 1, 2, \dots$. What is the physical meaning of this? Why does Nature (in the case of totally ergodic transformations) work so well along the polynomials? It seems, intuitively, that the higher the degree of $p(n)$, the slower the rate of convergence should be. Can one make a mathematical theorem out of this sentiment? Note that the last question is not so simple since it is well known that "there is no speed of convergence" in Birkhoff's ergodic theorem (see, for example, [P], p. 99, Ex. 3). But can one estimate the speed of convergence (as a function of the degree of the polynomial $p(n)$) for smooth enough T and f ?

Acknowledgement. It is my pleasure to thank Professors Yoichiro Takahashi and Michiko Yuri for their excellent organization of the RIMS Symposium on Dynamics of Complex Systems, which took place in Kyoto in January of 2004. I would also like to thank Y. Pesin for many useful communications and Ronnie Pavlov for help with the preparation of this note.

References

- [Be1] V. Bergelson, Independence properties of continuous flows, *Almost everywhere convergence (Columbus, OH, 1988)*, 121–130, Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [Be2] V. Bergelson, Weakly mixing PET, *Erg. Th. and Dynam. Sys.* **7** (1987), 337–349.
- [BeBB] V. Bergelson, M. Boshernitzan, and J. Bourgain, Some results on non-linear recurrence, *J. Anal. Math.* **62** (1994), 29–46.
- [Bi1] G. Birkhoff, Proof of a recurrence theorem for strongly transitive systems, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **17** (1931), 650–655.
- [Bi2] G. Birkhoff, Proof of the ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **17** (1931), 656–660.
- [Bi3] G. Birkhoff, What is the ergodic theorem? *Amer. Math. Monthly* **49** (1942), 222–226.
- [BiK] G.D. Birkhoff and B.O. Koopman, Recent contributions to the ergodic theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **18** (1932), 279–282.
- [Bo1] J. Bourgain, On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integers, *Israel J. Math.* **61** (1988), 39–72.
- [Bo2] J. Bourgain, Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets (appendix: The return time theorem), *Publ. Math. I.H.E.S.* **69** (1989), 5–45.
- [CFS] I. Cornfeld, S. Fomin, Y. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer, 1982.
- [F] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton University Press, 1981.
- [H] P. Halmos, Von Neumann on measure and ergodic theory, *Bull. AMS* **64** (1958), 86–94.
- [K] B.O. Koopman, Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **17** (1931), 315–318.
- [KN] B.O. Koopman and J. von Neumann, Dynamical systems of continuous spectra, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **18** (1932), 255–263.
- [N1] J. von Neumann, Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **18** (1932), 70–82.
- [N2] J. von Neumann, John, Physical applications of the ergodic hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **18** (1932), 263–266.

- [P] K. Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
- [R] H.L. Royden, *Real Analysis*, Macmillan, New York, 1968.
- [S] M.H. Stone, Linear transformations in Hilbert space. III. Operational methods and group theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **16** (1930), 172–175.
- [U] S.M. Ulam, *Adventures of a Mathematician*, Charles Scribner’s Sons, New York, 1983.
- [Wa] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [We] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Ann.* **77** (1916), 313–352.
- [Z]² J.D. Zund, George Birkhoff and John von Neumann: a question of priority and the ergodic theorems, 1931–1932, *Historia Math.* **29/2** (2002), 138–156.

²reference added by the author for this publication.

Author’s address:
Vitaly Bergelson
The Ohio State University
Columbus, OH 43210 USA

Wie K. Itô den stochastischen Kalkül revolutionierte

Walter Schachermayer und Josef Teichmann

Technische Universität Wien

Der Gaußpreis 2006 wurde am Internationalen Mathematikerkongress in Madrid an den 90-jährigen Kiyoshi Itô verliehen. Der Preis, der zum ersten Mal vergeben wurde, und der aus den Überschüssen des Berliner Kongress 1998 finanziert wird, würdigt

- “outstanding mathematical contributions that have found significant applications outside of mathematics, or
- achievements that made the application of mathematical methods to areas outside of mathematics possible in an innovative way”.

Zentrales Objekt der Arbeiten von K. Itô ist die Brownsche Bewegung. Wenn Lichtstrahlen in einen dunklen Raum fallen, kann man mit freiem Auge die Staubteilchen in der Luft bei ihrem erratischen Tanz beobachten. Der Grund für diese scheinbar regellose Bewegung liegt darin, dass die kleinen Staubteilchen ständig von noch viel kleineren – für das Auge nicht sichtbaren – Teilchen angestoßen werden, wobei die Richtung dieser Stöße zufällig ist (im gegenständlichen dreidimensionalen Fall gleichverteilt über die Kugeloberfläche).

Dieses Phänomen wurde aufgrund von intensiven Beobachtungen unter dem Mikroskop von dem bedeutenden britischen Botaniker Robert Brown 1827 beschrieben; allerdings ohne die oben angegebene und aus heutiger Sicht sehr einleuchtende Begründung, und auch ohne nur den Versuch einer mathematischen Modellierung zu unternehmen.

Dies wurde dann in meisterhafter Weise von Albert Einstein in seiner Dissertation im Jahr 1905 getan. Sein Artikel [2] ist eine der drei großen Arbeiten dieses „annus mirabilis“ 1905.

Unabhängig von A. Einstein hatte der in Vorderbrühl 1872 geborene polnische Physiker Marian Smoluchowski ähnliche Ideen, die er 1906 publizierte [5].

Beide hatten allerdings bereits einen mathematischen Vorläufer, von dem sie nichts wussten: Louis Bachelier hatte in seiner Dissertation “Théorie de la spéculation” im Jahr 1900 [1] die eindimensionale Version der Brownschen Bewegung zur Modellierung von Börsenkursen benutzt. Die ökonomische Motivation ist der physikalischen – zumindest formal – ähnlich: man stellt sich vor, dass an der Börse laufend Kauf- oder Verkaufsaufträge eintreffen, die dem Börsenkurs einen kleinen Stoß nach oben oder unten geben. Die Gleichverteilungsannahme lautet in diesem eindimensionalen Fall, dass die Wahrscheinlichkeit eines Stoßes nach oben bzw. unten jeweils $\frac{1}{2}$ beträgt.

Dieses Modell erlaubte L. Bachelier, die seinen Forschungen zugrundeliegende praktische Fragestellung in sehr eindrucksvoller Weise zu beantworten, nämlich einen kohärenten Kalkül zur Bewertung von Optionen zu entwickeln. Auf dem Weg dorthin hat er eine mathematische Modellierung der Brownschen Bewegung entwickelt und wichtige Eigenschaften abgeleitet (z.B. die Verteilung des Maximums eines Brownschen Pfades, die enge Verbindung mit der Wärmeleitungsgleichung etc.).

Die präzise mathematische Behandlung der Brownschen Bewegung und der darauf aufbauenden Konzepte ist – auch aus heutiger Sicht – durchaus heikel und anspruchsvoll. Am einfachsten beginnt man mit dem elementaren Konzept der Irrfahrt (“random walk”), die gerne als das Torkeln eines Betrunknen (auf einer Linie) interpretiert wird. Fixieren wir die Raum- und Zeit-Diskretisierungen $\Delta x > 0$, $\Delta t > 0$, und eine Folge $(\varepsilon_n)_{n=1}^\infty$ von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}[\varepsilon_n = 1] = \mathbf{P}[\varepsilon_n = -1] = \frac{1}{2}$. Der stochastische Prozess X ist dann definiert als

$$X_{n\Delta t} = \Delta x \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5)$$

Anders ausgedrückt bewegt sich X in einem Zeitintervall der Länge Δt um $\pm \Delta x$. Es liegt nahe, von diesem diskreten Prozess mit $\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t = \varepsilon_t \Delta x$ zum kontinuierlichen Limes überzugehen, indem man Δt und Δx gegen Null gehen lässt. Die Formel für die Varianz von Summen von unabhängigen Zufallsvariablen zeigt unmittelbar, dass bei diesem Limes-Übergang $\Delta x \approx \sqrt{\Delta t}$ gelten muss: um nämlich einen sinnvollen Limes zu erhalten, muss der Quotient $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ bei den gewählten Verfeinerungen der Zeit- und Raum-Inkremente gegen einen endlichen Grenzwert streben. Wenn wir diesen Quotienten mit 1 normieren, erhalten wir im Limes die Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t \geq 0}$.

Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt unmittelbar, dass für jedes $t \geq 0$ die Zufallsvariable B_t normalverteilt ist, mit Mittelwert 0 und Varianz t . Etwas allgemeiner ist, für jedes $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, der Zufallsvektor $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ normalverteilt, mit Mittelwert 0 und der offensichtlichen Kovarianzmatrix. Dies genügt bereits für eine präzise Definition von B . Wie nämlich A. Kolmogoroff in den 30er-

Jahren noch gezeigt hat, lässt sich eine Theorie der stochastischen Prozesse $X = (X_t)_{t \geq 0}$ auf den endlichdimensionalen Verteilungen von $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ aufbauen.

Diese Betonung der endlichdimensionalen Verteilungen erlaubt keinen direkten Zugang zum pfadweisen Verhalten des stochastischen Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$, d.h. wie für ein festes Zufallselement ω der „Pfad“ oder die „Trajektorie“ $(B_t(\omega))_{t \geq 0}$ beschrieben werden kann. Diese dynamische Sichtweise aber war für L. Bachelier sehr naheliegend, da er an der Pariser Börse arbeitete und täglich die Kursentwicklungen „in stetiger Zeit“ beobachtete.

Es erweist sich als nützlich, formal zum infinitesimalen Analogon von (5) überzugehen, wobei wir Δt durch dt ersetzen, und Δx durch $dx = dt^{\frac{1}{2}}$:

$$dB_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Hier bezeichnet dB_t das infinitesimale Inkrement $dB_t = B_{t+dt} - B_t$ und $(\varepsilon_t)_{t \geq 0}$ ist eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}[\varepsilon_t = 1] = \mathbf{P}[\varepsilon_t = -1] = \frac{1}{2}$.

Die intuitive Interpretation von (6) besagt, dass zu jedem Zeitpunkt t eine Münze aufgeworfen wird und dementsprechend der Prozess B sich während des Intervalls $[t, t + dt]$ um $\sqrt{dt}$ hinauf- oder hinunterbewegt. Selbstverständlich ist dies alles nur eine formale, heuristische Interpretation, die, wie in der Analysis üblich, durch epsilon-delta-Argumente (oder non-standard bzw. white noise analysis) gerechtfertigt werden muss.

Die Differenzialgleichung (6) benützt die Leibniz-Notation; dies ist die einzig mögliche Notation in diesem Kontext, da der Differenzialquotient $\frac{dB_t}{dt}$ keinen direkten Sinn ergibt. Er ist ja $\varepsilon_t dt^{-\frac{1}{2}}$. Eine intuitive Interpretation der Formel $\frac{dB_t}{dt} = \varepsilon_t dt^{-\frac{1}{2}}$ wäre, dass zu jedem Zeitpunkt t der Anstieg der Kurve $t \mapsto B_t(\omega)$ entweder $+\infty$ oder $-\infty$, wobei jede Möglichkeit die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hat und für jeden Zeitpunkt t unabhängig ist. Aber da begeben wir uns schon auf sehr dünnes Eis.

Die präzise (und relativ leicht zu beweisende) mathematische Aussage dazu lautet: Für fast alle Zufallselemente ω ist der Pfad $t \mapsto B_t(\omega)$ in keinem Punkt differenzierbar. Ebenso kann man relativ leicht zeigen, dass für fast alle ω der Pfad $t \mapsto B_t(\omega)$ auf jedem Intervall $]a, b[$ mit $a < b$ unendliche Totalvariation hat.

Der Begriff der Brownschen Bewegung erlaubt es nunmehr, allgemeinere Konzepte zu definieren, indem man die Brownsche Bewegung als Baustein verwendet. Ein Itô-Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ kann durch einen stochastischen Differenzialausdruck der folgenden Bauart beschrieben werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den eindimensionalen Fall:

$$dX_t = \sigma_t dB_t + \mu_t dt. \quad (7)$$

Hier sind $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ und $(\mu_t)_{t \geq 0}$ stochastische Prozesse, die zu jedem Zeitpunkt t nur von der Vergangenheit der Brownschen Bewegung $(B_u)_{u \geq 0}$ bis t abhängen. In vielen Anwendungen sind diese Prozesse von der Form $\sigma_t = \sigma(X_t)$ und $\mu_t = \mu(X_t)$ für deterministische Funktionen $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. In diesem Fall beschreibt die Differenzialgleichung

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + \mu(X_t)dt$$

einen Markov-Prozess, da die Information über die Diffusions- und Drift-Parameter σ_t und μ_t nur vom Wert der Zufallsvariablen X_t abhängt, und nicht von deren Vergangenheit. A. Kolmogoroff konstruierte solche Prozesse durch Berechnung der endlichdimensionalen Verteilungen aus der zugehörigen partiellen Differenzialgleichung. Auch wenn man intuitiv gerne den obigen Differenzialausdruck zu Hilfe nahm, ein rigoroses Verständnis dieser Gleichung hatte man in den 30er-Jahren noch nicht. Folgende (heuristische) Überlegung und ihr bemerkenswertes Resultat unterstreichen die Notwendigkeit, dem Differenzialausdruck eine präzise mathematische Bedeutung zu geben.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine (genügend glatte) Funktion und betrachten wir, für einen gegebenen Diffusionsprozess $(X_t)_{t \geq 0}$, der (7) erfüllt, den stochastischen Prozess $(Y_t)_{t \geq 0} := (f(X_t))_{t \geq 0}$. Die Frage ist, wie der zum Prozess $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ assoziierte stochastische Differenzialausdruck der Bauart (7) lautet. Mit anderen Worten fragen wir nach der Form der Kettenregel in dem gegenwärtigen stochastischen Kontext.

Die entscheidende Beobachtung, die durch die formale Gleichung (6) insinuiert wird, besteht darin, dass $(dB_t)^2$ von der Ordnung dt ist und daher (asymptotisch) berücksichtigt werden muss: formales Quadrieren von (6) liefert die bemerkenswerte Gleichung

$$(dB_t)^2 = dt. \quad (8)$$

Um die Differenzialgleichung für $Y = f(X)$ abzuleiten, entwickeln wir das infinitesimale Inkrement $dY_t = Y_{t+dt} - Y_t$ formal in eine Taylorreihe, wobei wir erst nach dem quadratischen Glied abbrechen:

$$\begin{aligned} dY_t &= f(X_{t+dt}) - f(X_t) \\ &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2 + o(dX_t)^2. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (7) und (8) sowie Vernachlässigung aller Terme von kleinerer Ordnung als dt erhalten wir

$$\begin{aligned} dY_t &= f'(X_t)dX_t + f''(X_t)\frac{\sigma^2(X_t)}{2}dt \\ &= f'(X_t)\sigma(X_t)dB_t + \left[f'(X_t)\mu(X_t) + f''(X_t)\frac{\sigma^2(X_t)}{2} \right] dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Die zweite Zeile zeigt, dass der Differenzialausdruck für Y wieder von derselben Bauart wie (7) ist, d.h. Itô-Prozesse sind abgeschlossen unter Komposition mit (hinreichend glatten) deterministischen Funktionen f . Die erste Zeile zeigt, dass die im deterministischen Fall wohlbekannte Kettenregel $df(X_t) = f'(X_t)dX_t$ im stochastischen Kontext durch den Term $f''(X_t)\frac{\sigma^2(X_t)}{2}dt$ ergänzt werden muss.

Die Formel (9) wird als Itô-Formel oder Itô-Lemma bezeichnet. Sie ist ein ebenso fundamentales Werkzeug für die stochastische Analysis wie die „gewöhnliche“ Kettenregel für die klassische Analysis. Selbstverständlich folgen die weiteren Rechenregeln wie Produktformel, Quotientenformel etc. rasch aus der Kettenregel.

Bemerkenswert ist, dass die Berechnung des Differenzials erster Ordnung $dY_t = d(f(X_t))$ die zweite Ableitung von f ins Spiel bringt. Dies führt zu einer engen Verbindung zwischen Diffusionsprozessen einerseits und der Wärmeleitungsgleichung andererseits. Die gründliche Erforschung dieser wichtigen Querverbindung ist – neben Kiyoshi Itô – mit den Namen A. Kolmogoroff, S. Kakutani, R. Feynman, M. Kac verbunden; sie erwies sich als eine Goldmine für interessante Mathematik, z.B. in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen oder der Differentialgeometrie, die bis heute noch keineswegs erschöpft ist.

Die Tatsache, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten der Brownschen Bewegung die Wärmeleitungsgleichung erfüllen, war bereits 1900 von L. Bachelier erkannt worden, der dies in seiner Dissertation klar formulierte und bewies, aber nicht weiter ausführte. Henri Poincaré schrieb in seinem – ansonsten sehr positiven – Gutachten über diese Dissertation den geradezu prophetischen Satz: „Man könnte bedauern, dass Monsieur Bachelier diesen Teil seiner Dissertation nicht weiter ausgeführt hat.“

Zurück zur Itô-Formel (9), die wir nur heuristisch motiviert haben, wobei wir durchaus verdächtige Argumente benutzt haben, z.B. Größen der Ordnung $\sqrt{dt}$. Die Aufgabe besteht darin, den Differenzialausdrücken (7) einen präzisen mathematischen Sinn zu geben. Als ersten Schritt formen wir (7) in Integral-Form um:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_u dB_u + \int_0^t \mu_u du.$$

Das zweite Integral macht keine Schwierigkeiten und kann mit der üblichen Lebesgueschen Integrationstheorie definiert werden. Heikel ist dagegen das erste Integral, da die Pfade $(B_u(\omega))_{0 \leq u \leq t}$ keine endliche Totalvariation besitzen.

Dieses Problem bereitete bereits Norbert Wiener Kopfzerbrechen. In einer Reihe von Arbeiten beweist er in den 20er-Jahren zum ersten Mal präzise, dass ein Modell für die Brownsche Bewegung existiert, in dem die Pfade $(B_t(\omega))_{t \geq 0}$ stetig sind (eine Tatsache, die wir in den heuristischen Argumenten oben wie selbstverständlich vorausgesetzt haben). Diese Arbeiten sind der Grund dafür, dass die

Brownsche Bewegung auch Wiener-Prozess genannt wird. A. Kolmogoroff hatte übrigens die Bezeichnung Bachelier-Wiener Prozess vorgeschlagen, konnte sich damit aber nicht durchsetzen.

Was die stochastische Integration betrifft, konnte N. Wiener aber nur eine sehr eingeschränkte Antwort gegen. Er konnte zeigen, dass für einen Integranden $(\xi_t)_{t \geq 0}$, dessen Pfade $(\xi_t(\omega))_{t \geq 0}$ von beschränkter Variation sind, das stochastische Integral $\int \xi_t dB_t$ wohldefiniert werden kann. In diesem Fall ist die Situation nämlich sehr einfach: Mithilfe von partieller Integration kann das Integral $\int \xi_t dB_t$ auf das Integral $\int B_t d\xi_t$ zurückgeführt werden,

$$\int_0^T \xi_t dB_t = \xi_T B_T - \xi_0 B_0 - \int_0^T B_t d\xi_t,$$

und letzteres kann als Stieltjes-Integral interpretiert werden, wenn eben $(\xi_t)_{t \geq 0}$ von endlicher Variation ist.

Die crux ist, dass die in den Anwendungen vorkommenden Integranden typischerweise *nicht* von beschränkter Variation sind: wenn wir $\int \sigma(X_t) dB_t$ betrachten, wobei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Diffusionsprozess ist, dann ist der Integrand $(\sigma(X_t))_{t \geq 0}$ nicht von beschränkter Variation, falls die erste Ableitung von σ nicht identisch verschwindet. Die Situation scheint hoffnungslos, das Integral $\int \xi_t dB_t$ sinnvoll zu definieren, wenn für fast alle Zufallselemente ω sowohl die Funktion $t \mapsto \xi_t(\omega)$ als auch $t \mapsto B_t(\omega)$ von unbeschränkter Variation sind. Norbert Wiener hat, trotz langen und intensiven Nachdenkens, in den 20er-Jahren keine Lösung dazu gefunden.

Der Geniestreich gelang dann 1942 dem 27-jährigen K. Itô, der damals allein und isoliert im statistischen Büro der japanischen Regierung in Tokio saß. Seine Idee war, *nicht* zu versuchen, das Integral $\int \xi_t dB_t$ pfadweise für jedes Zufallselement ω und *jeden* Integranden ξ separat zu definieren, sondern es global für den gesamten Wahrscheinlichkeitsraum Ω und für eine genügend reichhaltige Klasse von Integranden zu konstruieren. Insbesondere sind die Limiten von Riemannschen Summen dann nicht mehr als „fast sicher“ zu verstehen, sondern nur mehr im L^2 . Wie so oft in der Mathematik war dabei eine Invarianzeigenschaft des stochastischen Integrals von entscheidender Bedeutung.

Hier eine Skizze der Konstruktion: Man beginnt mit „simplen“ Integranden $(\xi_t)_{t \geq 0}$, für die das Integral $\int \xi_t dB_t$ in trivialer Weise durch endliche Riemannsche Summen definiert ist. Dieser Schritt entspricht der Integration von Treppenfunktionen im üblichen Aufbau der (nicht-stochastischen) Integrationstheorie. Bis hier erfolgt die Argumentation für jedes ω separat. Der entscheidende Schritt ist dann die Frage, wie man zu einem Limes dieser „simplen“ Integranden übergehen kann. Dabei bemerkte Itô, dass für bestimmte „simple“ Integranden $(\xi_t)_{t \geq 0}$, solche nämlich, wo ξ_t nur von der Vergangenheit der Brownschen Bewegung $(B_u)_{0 \leq u \leq t}$ bis zum Zeitpunkt t abhängt, die Riemannschen Summen wieder ein Martingal definieren, so wie die Brownsche Bewegung selbst eines ist. Diese Integranden nennt man adaptiert und diese Invarianzeigenschaft gestattet es das stochastische

Integral als Isometrie zwischen zwei Hilberträumen zu verstehen.

Itô fasste, für festes $t > 0$, einen simplen, adaptierten Integranden $(\xi_u)_{0 \leq u \leq t}$ als Funktion auf $\Omega \times [0, t]$ auf und betrachtet die Integration als linearen Operator, die jedem simplen, adaptierten Integranden $(\xi_u)_{0 \leq u \leq t}$ das Integral $\int_0^t \xi_u dB_u$ zuordnet. Dieser lineare Operator geht von einem Raum von adaptierten Funktionen auf $\Omega \times [0, t]$ in einen Raum von Funktionen auf Ω . Nun versteht man $\Omega \times [0, t]$ mit dem Maß $\mathbf{P} \otimes \lambda$, wobei $\mathbf{P}$ das gegebene Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω und λ das Lebesguemaß auf $[0, t]$ ist. Nun zeigt Itô, dass der Integrations-Operator eine Isometrie bezüglich der von $L^2(\mathbf{P} \otimes \lambda)$ bzw. $L^2(\mathbf{P})$ induzierten Hilbertnormen ist. Diese fundamentale Tatsache ist erstaunlich einfach zu beweisen und lag damals quasi in der Luft: zu etwa der gleichen Zeit zeigte A. Wald, der bis 1938 an der Universität Wien in der Gruppe rund um Karl Menger tätig war, die nach ihm benannten Identitäten, die einen analogen isometrischen Zusammenhang zwischen L^2 -Normen formulieren. Mathematisch gesehen liegt der Grund für diese isometrischen Eigenschaften bezüglich geeigneter Hilbert-Normen darin, dass die Martingal-Eigenschaft bestimmten Orthogonalitäts-Relationen im Hilbertraum entspricht.

Wenn die Isometrie-Eigenschaft gezeigt ist, wird die Erweiterung des Integrals von „simplen, adaptierten“ zu möglichst allgemeinen Integranden zu einer Formalität: es genügt, den auf den simplen Integranden definierten linearen Operator auf den Abschluss dieses Vektorraums im $L^2(\Omega \times [0, t])$ zu erweitern, man spricht dann einfach von adaptierten Integranden. Adaptierte Integranden σ_t müssen nicht von beschränkter Variation sein, es genügt, dass σ_t nur von der Brownschen Bewegung bis zum Zeitpunkt t abhängt und gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

Aus heutiger Sicht scheint diese Konstruktion einfach und naheliegend. Wie immer in der Mathematik: wenn man weiß, wie es geht, ist alles ganz einfach! Aus historischer Sicht ist der Zugang von Itô aber als revolutionär zu bezeichnen (wir wählen hier bewusst dieselben Worte wie M. Yor in [7]). Jedenfalls schloss er damit das Tor zu einem neuen Gebiet der Mathematik auf: der stochastischen Analysis.

Wir möchten an dieser Stelle nicht versäumen auch auf die tragische Geschichte von Wolfgang Döblin, einem Sohn des Schriftstellers Alfred Döblin (Autor des Romans „Berlin Alexanderplatz“) hinzuweisen, der erst im Jahr 2000 zu der Bekanntheit gelangte, die er verdient.

Wolfgang Döblin, der ebenso wie Itô im Jahr 1915 geboren wurde, musste mit seiner Familie 1933 aus dem Dritten Reich über Zürich nach Paris fliehen. In Paris begann er dann Mathematik am Institut Henri Poincaré bei P. Lévy und M. Fréchet zu studieren. Bis 1939 hatte er bereits ein Dutzend kleinere Arbeiten – vor allem über Markov-Prozesse – veröffentlicht, als er in die französische Armee einberufen wurde. Während K. Itô seine Arbeiten 1942 im statistischen Büro der japanischen Regierung entwickelte, hatte Wolfgang Döblin auf der anderen Seite des Globus bereits zwei Jahre davor sehr ähnliche Ideen entwickelt, während er im

Winter 1939/40 als Telefonist in einer Kaserne in den Ardennen stationiert war. Er hielt sie in einem umfangreichen handgeschriebenen Manuskript “Sur l’équation de Kolmogoroff” fest. Diese zeitliche Koinzidenz lässt sich auf eine Gemeinsamkeit von Wolfgang Döblin und Kiyoshi Itô zurückführen: das intensive Studium der Werke von Paul Lévy.

Das Manuskript “Sur l’équation de Kolmogoroff” hinterlegte W. Döblin am 26. Februar 1940 in einem verschlossenen Kuvert (“pli cacheté”) bei der Akademie der Wissenschaften in Paris. Am 21. Juni 1940 erschoss er sich, eingekesselt von deutschen Truppen, als jüdischer Emigrant in französischer Uniform, der sich über seine Situation keine Illusionen machte.

Das “pli cacheté Nr. 11668” ruhte bis zum 18. Mai 2000 verschlossen in den Archiven der Pariser Akademie der Wissenschaften, bis nach langen Verhandlungen von Akademiemitgliedern, insbesondere durch das Engagement von Jean-Pierre Kahane, erreicht wurde, dass die überlebenden Brüder von Wolfgang Döblin die Einwilligung zur Öffnung des Kuverts gaben. Die Sensation war perfekt: In dem Artikel hatte Döblin einen Satz bewiesen, aus dem die Itô-Formel leicht ableitbar ist (zumindestens im eindimensionalen Fall). Er verwendete dabei aber völlig andere Argumente als K. Itô.

Das Manuskript von Döblin wurde von B. Bru und M. Yor in einem 2002 bei “Finance and Stochastics” erschienenen Artikel liebevoll editiert und mit vielen Kommentaren versehen [6]. Wir verweisen auf diesen sehr lesenswerten Artikel für detaillierte Informationen und wollen hier nur den Versuch wagen, den Zugang von W. Döblin mit wenigen Worten zu skizzieren. Ausgangspunkt ist wieder die Gleichung (7)

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + \mu(X_t)dt,$$

die Döblin “l’équation de Kolmogoroff” nennt. Die Idee ist, den Prozess X dieser Gleichung durch geschickte Transformationen in den Fall $\mu_t \equiv 0$ und $\sigma_t \equiv 1$, also $X_t = B_t$, überzuführen. Dass eine erfolgreiche Durchführung dieser Transformation, die den Fall eines allgemeineren Diffusionsprozesses X auf den Fall einer Brownschen Bewegung B zurückführt, “en passant” eine Kettenregel liefert, also die Itôsche Formel zeigt, ist ziemlich klar.

Döblin begann damit, den Driftterm μ_t zu eliminieren, was sich als der relativ einfachere Teil des Programms erwies. Hier konnte er mit klassischem Lebesgue-Integralen $\int \mu_t dt$ operieren und musste nicht – wie Itô zwei Jahre später – durch Einführung eines allgemeineren Integralbegriffs mathematisches Neuland betreten.

Nach diesem ersten Schritt reduziert sich das Problem auf die Betrachtung von Prozessen der Form

$$dX_t = \sigma_t dB_t. \tag{10}$$

Die entscheidende Idee Döblins, um in (10) die Situation auf den Fall $\sigma_t \equiv 1$ zurückführen, besteht darin, eine Transformation der Zeitvariablen t vorzuneh-

men.

Die Reparametrisierung der Zeit ist allerdings nicht so einfach, wie man meinen könnte, da σ_t nicht nur von der Zeit, sondern auch vom Zufallselement ω abhängt. Diese Technik wurde unter den Begriffen “stochastic time change” oder “subordination” in den 60er- und 70er-Jahren durch eine Reihe von Mathematikern und Mathematikerinnen entwickelt. Diese hatten allerdings keine Ahnung vom Inhalt des “pli cacheté Nr. 11668”. W. Döblin hat im Winter 1939/40 in einem beeindruckenden Kraftakt diese Technik im Alleingang entwickelt und konnte – so wie K. Itô zwei Jahre später – einen Differenzialkalkül für Diffusionsprozesse entwickeln.

Durch seinen Zugang der Zeittransformation konnte Wolfgang Döblin das oben skizzierte Konzept des Itô-Integrals umgehen. Für ihn ist die Lösung X der „Kolmogoroff-Gleichung“ (7) im Fall $\mu_t \equiv 0$ eine Zeit-Transformierte einer Brownschen Bewegung, was aus heutiger Sicht völlig korrekt ist.

Das Itô-Integral seinerseits musste auch etwa 15 bis 20 Jahre warten, bis es von breiteren Mathematikerkreisen wahrgenommen wurde. Dann aber wurde es rasch zum zentralen Werkzeug der stochastischen Integral- und Differenzialrechnung und deren Anwendungen. Wir möchten das an einem Beispiel illustrieren:

Wir haben oben skizziert, dass für jeden adaptierten Integranden $(\xi_u)_{0 \leq u \leq t}$ in $L^2(\Omega \times [0, t])$ das Integral $\int_0^t \xi_u dB_u$ ein wohldefiniertes Element von $L^2(\Omega)$ ist. Der Martingal-Darstellungs-Satz gibt eine Art Umkehrung an. Unter geeigneten Messbarkeitsvoraussetzungen gilt, dass für jedes $f \in L^2(\Omega)$ mit Erwartungswert $\mathbf{E}[f] = 0$ ein eindeutiger adaptierter Integrand $(\xi_u)_{0 \leq u \leq t} \in L^2(\Omega \times [0, t])$ existiert, sodass

$$f = \int_0^t \xi_u dB_u.$$

Das diskrete Analogon, d.h. der entsprechende Satz für den Fall der Irrfahrt mit T Schritten, läuft auf die simple Tatsache hinaus, dass das Haarsche System eine Orthonormal-Basis im $\mathbb{R}^{2^T}$ bildet.

Der Martingale-Darstellungs-Satz ist zum Angelpunkt der Anwendungen der stochastischen Analysis im Finanzbereich geworden, da er die Idee der „Replikation“ eines derivativen Finanztitels (z.B. einer Option) f durch dynamisches Handeln (dies entspricht dem Integranden $(\xi_u)_{0 \leq u \leq t}$) im zugrundeliegenden Basistitel formalisiert. Man weiß nicht nur, dass eine Handelsstrategie existiert, sondern man kann diese auch konkret mithilfe der Itô-Formel berechnen.

K. Itô hatte nicht im Traum an diese Anwendungen gedacht, als er vor über 50 Jahren diesen Satz bewies, wie er einmal lachend dem erstgenannten Autor versicherte. Er fügte aber hinzu, dass er sich außerordentlich darüber freut, dass seine aus rein mathematischer Neugier entwickelten Arbeiten so breite Anwendung in den verschiedensten Disziplinen finden.

Das Werk von K. Itô beschränkt sich selbstverständlich nicht nur auf die Entwicklung des stochastischen Kalküls in seinen jungen Jahren, sondern er blieb bis ins hohe Alter außerordentlich aktiv. Wir möchten hier noch zwei bemerkenswerte Themen aus seinem großen Werk skizzieren (siehe dazu den ausgezeichneten Artikel [7], wo wir auch den Titel dieses Aufsatzes entlehnt haben).

Das erste Thema stellt eine schöne Verbindung zwischen der Stochastik und der Funktionentheorie her. Wir betrachten einen $\mathbb{C}$ -wertigen Prozess $Z_t = X_t + iY_t$, wobei X und Y zwei unabhängige reellwertige Brownsche Bewegungen sind. Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, wobei der Startpunkt Z_0 der Brownschen Bewegung $(Z_t)_{t \geq 0}$ nicht in der Menge $\{z_1, \dots, z_n\}$ enthalten ist. Dann trifft der Brownsche Pfad $(Z_t)_{t \geq 0}$ fast sicher nie auf die Punkte $\{z_1, \dots, z_n\}$, sodass es möglich ist, das komplexe Itô-Integral $\int f(Z_t) dZ_t$ zu definieren.

Ein konkretes Beispiel: Mit Hilfe dieses Integrals kann man eine stochastische Darstellung des Arguments ϑ_t der Brownschen Bewegung Z_t geben:

$$\vartheta_t - \vartheta_0 = \operatorname{Im} \int_0^t \frac{dZ_u}{Z_u} = \int_0^t \frac{X_u dY_u - Y_u dX_u}{X_u^2 + Y_u^2}.$$

Dies gestattet beispielsweise einen raschen und eleganten Beweis (mit funktionentheoretischen Argumenten) des Satzes von Spitzer über die Windungszahlen eines komplexen Brownschen Pfads,

$$\frac{2}{\log t} \vartheta_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_1,$$

d.h. die Verteilung der Zufallsvariablen $\frac{2\vartheta_t}{\log t}$ konvergiert, für $t \rightarrow \infty$, gegen die Cauchy-Verteilung C_1 .

Als zweites Beispiel wollen wir die Theorie der Exkursionen von Markov-Prozessen erwähnen, die Itô im Jahr 1970 entwickelt hat. Wir wollen sie für den Fall einer reell-wertigen Brownschen Bewegung $B = (B_t)_{t \geq 0}$ skizzieren. Die Idee besteht darin, die Brownschen Pfade $(B_t(\omega))_{t \geq 0}$ als die Gesamtheit der „Exkursionen“, d.h. ihres Verhaltens zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen, aufzufassen. Die Idee ist: wenn man die Exkursionen kennt, kann man daraus den Brownschen Pfad zusammensetzen. Etwas präziser: wir assoziieren zu jedem reell-wertigen Brownschen Pfad $(B_t(\omega))_{t \geq 0}$ die Menge $Z(\omega)$ der Nullstellen

$$Z(\omega) = \{t \geq 0 \mid B_t(\omega) = 0\}.$$

Die Menge $Z(\omega)$ hat, für fast alle ω , Lebesguemaß null und hat eine ähnliche Struktur wie die Cantor-Menge. Man kann ein sinnvolles (zufälliges) Maß auf $Z(\omega)$ definieren, indem man die „lokale Zeit“ L_t einführt, die formal gegeben ist durch

$$dL_t(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{1}_{\{|B_t(\omega)| < \varepsilon\}} dt \right).$$

Dieses Konzept wurde bereits in den 40er-Jahren von P. Lévy studiert. Die inverse Funktion von L_t

$$\tau_l = \inf\{t \mid L_t > l\}, \quad l \geq 0$$

erlaubt es, die Menge der Exkursionen zu „etikettieren“:

$$e_l(\omega) : t \mapsto B_{\tau_{l-}(\omega)+t} \mathbf{1}_{\{t < \tau_l(\omega) - \tau_{l-}(\omega)\}}.$$

Die Kenntnis der Trajektorie $(e_l(\omega))_{l \geq 0}$ mit Werten in den Exkursionen ist äquivalent zur Kenntnis des Brownschen Pfads $(B_t(\omega))_{t \geq 0}$.

Der in diesem Kontext fundamentale Satz von Itô besagt, dass der Prozess $(e_l)_{l \geq 0}$ ein Poisson-Prozess ist, allerdings mit Werten in der Menge der Exkursionen! Damit konnte Itô eine tiefe Verbindung zwischen den beiden Archetypen der stochastischen Prozesse herstellen, nämlich der Brownschen Bewegung und dem Poisson-Prozess.

Es gäbe noch viele interessante Beispiele zu nennen und viele bedeutende Gebiete anzuführen, die auf den Entdeckungen von Kiyoshi Itô aufbauten. Wir verweisen dazu auf Hans Föllmers Laudatio am ICM in Madrid [3] und natürlich auf Kiyoshi Itô's ausgewählte Werke [4], wo D. Stroock und S. R. S. Varadhan (er ist Abel-Preisträger 2007) in der Einleitung schreiben: “Everyone who is likely to pick up this book has at least heard that there is a subject called the theory of stochastic integration and that K. Itô is the Lebesgue of this branch of integration theory (Paley and Wiener were its Riemann).”

Literatur

1. L. Bachelier, Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 17 (1900).
2. A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Ann. der Phys.* (4) 17, 549–560 (1905).
3. H. Föllmer, On Kiyoshi Itô's Work and its Impact. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006, Vol. I, 109–124.
4. K. Itô, Selected Papers, edited by D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan, Springer-Verlag, 1986.
5. M. Smoluchowski, Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. *Ann. der Phys.* (4) 21, 756–780 (1906).
6. B. Bru, M. Yor, Comments on the life and mathematical legacy of Wolfgang Doeblin. *Finance Stoch.* 6 (2002), no. 1, 3–47.
7. M. Yor, Comment K. Itô a révolutionné l'étude des processus stochastiques, *Gazette des SMF* 111, Janvier 2007.

*Adresse der Autoren:
Institut für Wirtschaftsmathematik, TU Wien
Wiedner Hauptstr. 8–10/105
A 1040 Wien*

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

Editors: V. S. V a r a d a r a j a n (Managing Editor), Robert F i n n, Robert G u r a l n i c k, Kefeng L i u, Darren L o n g, Jiang-Hua L u, Sarin P o p a, Jie Q i n g, Jonathan R o g a w s k i, L.-S. Y o u n g.

The Journal is published 10 times a year with approximately 200 pages in each issue. The subscription price is \$ 340,00 per year. Members of a list of supporting institutions may obtain the Journal for personal use at the reduced price of \$ 170,00 per year. Back issues of all volumes are available. Price of back issues will be furnished on request.

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS

P. O. BOX 4163

BERKELEY, CA 94704-0163

INDIANA UNIVERSITY MATHEMATICS JOURNAL

(Formerly the Journal of Mathematics and Mechanics)

Edited by

P. Sternberg, E. Bedford, H. Bercovici, R. Glassey, M. Larsen,
K. Zumbrun.

The subscription price is \$ 175.00 for subscribers in the U.S. and Canada, and \$ 185.00 for all others. Private individuals personally engaged in research of teaching are accorded a reduced rate of \$ 80.00 per volume. The JOURNAL appears in quarterly issues making one annual volume of approximately 1200 pages.

Indiana University, Bloomington, Indiana U.S.A

Fünfecksfaltungen – Bauen von Dodekaedern

Hans Humenberger und Berthold Schuppar

Universität Wien / Universität Dortmund

Zusammenfassung Wir gehen aus von einer Faltung, die aus einem Rechteck (bei uns ein DIN A4-Blatt) ein Fünfeck macht. Variiert man das Ausgangsrechteck, so bekommt man in gewissen Fällen dabei ein regelmäßiges Fünfeck. Es zeigt sich, dass das dafür nötige Rechteck sehr nahe am DIN A-Format liegt (Abschnitte 1–4). Im Abschnitt 5 geben wir eine dazu äquivalente Faltung an, die den Vorteil besitzt, dass die dabei entstehenden regelmäßigen Fünfecke gut zum Bau eines Dodekaeders geeignet sind. Des Weiteren wird eine Bauanleitung für einen Dodekaeder-Lampenschirm aus Transparentpapier gegeben, in dessen Seitenflächen Sternfünfecke „leuchten“.

1 Ein fast regelmäßiges Fünfeck

Ausgehend von einem DIN A4-Blatt kann man durch eine einfache Faltkonstruktion ein Fünfeck herstellen, das optisch kaum von einem regelmäßigen zu unterscheiden ist, und zwar wie folgt:

- Falte zwei diagonal gegenüberliegende Ecken aufeinander (Abb. 1a). Bei den weiteren Abbildungen sind die unsichtbaren (hier gestrichelt gezeichneten) Kanten der besseren Übersichtlichkeit wegen nicht mehr eingezeichnet.
- Das entstehende Fünfeck ist achsensymmetrisch (warum?). Markiere die Symmetrieachse dieses Fünfecks durch einen Knick (Abb. 1a) und falte die beiden Hälften so, dass die kurzen Seiten des Fünfecks genau auf diese Achse zu liegen kommen (Abb. 1b).

Misst man die Seitenlängen nach, so zeigen sich Unterschiede von ca. 5 mm, selbst bei genauestem Falten. (Symmetrisch zueinander liegende Seiten sind natürlich gleich lang, sodass sich die Unterschiede nur bei den nichtsymmetrischen Nachbarseiten messen lassen.)

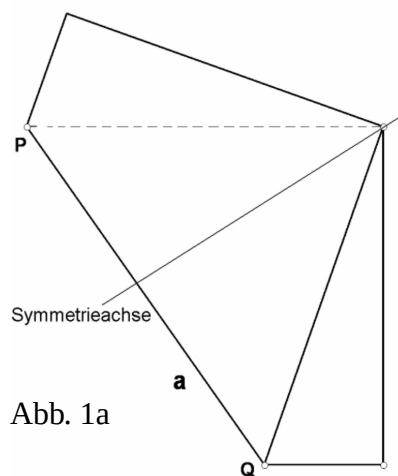


Abb. 1a

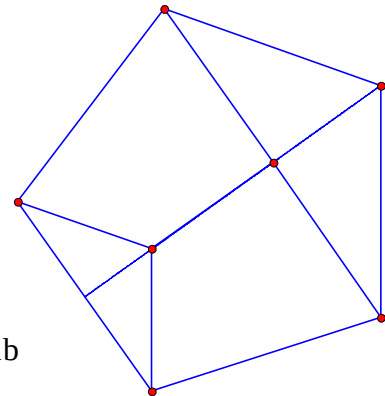


Abb. 1b

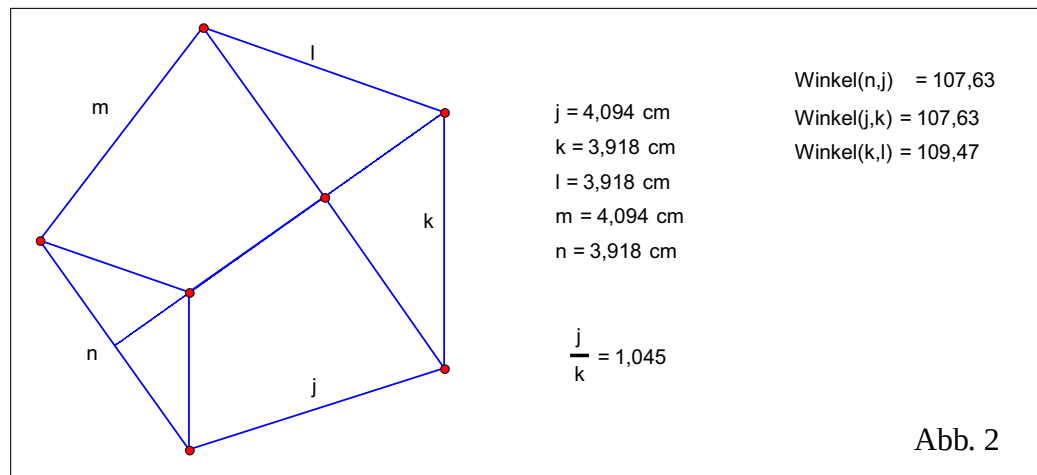


Abb. 2

Auch eine Konstruktion mit einer DGS¹ weist deutlich nach, dass die Längenmaße zweier ungleicher Seiten sich um ca. 4,5% unterscheiden. Allerdings wird deutlich, dass es offenbar drei gleich lange Seiten gibt, ebenso hat das Fünfeck vier gleich große Winkel, der einzige Ausreißer ist der Winkel zwischen den Seiten k und l . Alle fünf Winkel weichen nur geringfügig von 108° ab (Abb. 2).

Aufgabe für Leserinnen und Leser: Berechnen Sie die Seiten und die Winkel des Fünfecks! (Hinweise: dies kann algebraisch oder trigonometrisch geschehen; beim DIN A4-Blatt beträgt das Seitenverhältnis bekanntlich $\sqrt{2} : 1$).

¹„Dynamische Geometrie Software“ wie zum Beispiel *Euklid-DynaGeo*, *Sketchpad*, *GeoGebra*, *Cindarella*, *Cabri* etc. Wir haben hier *Sketchpad* verwendet. Analoges ginge aber auch mit jeder anderen DGS.

2 Andere Rechtecke, gleiche Faltung

Es stellt sich die Frage: Welche Fünfecke entstehen, wenn man die gleiche Faltkonstruktion mit anderen Rechtecken durchführt? Gibt es vielleicht Rechtecke, die zu gleichseitigen Fünfecken führen, oder zu gleichwinkligen, oder sogar zu *regelmäßigen*?

Eine DGS-Konstruktion mit variablem Seitenverhältnis für das Ausgangs-Rechteck bringt erstes Licht ins Dunkel. (Abb. 3 enthält zwei Beispiele.)

Beobachtungen:

1. Die Seite EF ist immer gleich lang wie die beiden gegenüberliegenden Seiten HC und CG .
2. Der Winkel $\angle EFG$ ist immer gleich groß wie der Winkel $\angle FGC$ (und damit auch genauso groß wie die beiden dazu symmetrischen Winkel $\angle FEH$ und $\angle EHC$).
3. Es gibt ein Rechteck, bei dem alle Seiten gleich lang sind, und in diesem Fall stimmen sogar alle Winkel überein, sodass sich tatsächlich ein *regelmäßiges* Fünfeck ergibt (Abb. 4)! Das Seitenverhältnis dieses Rechtecks beträgt laut DGS-Messung ungefähr $1,376 : 1$.

Anmerkung zu den obigen Messergebnissen von DGS-Systemen: Man kann die Figuren nicht wirklich kontinuierlich verändern, sondern natürlich nur diskret, deshalb kann man mit einem variablen Rechteck auch keine „exakte“ Gleichheit von Seiten oder Winkeln erreichen. Das angegebene Seitenverhältnis von 1,376 wurde durch Interpolation ermittelt.

Was für eine merkwürdige Zahl ist dieses Seitenverhältnis, und warum ergibt sich daraus ein regelmäßiges Fünfeck?

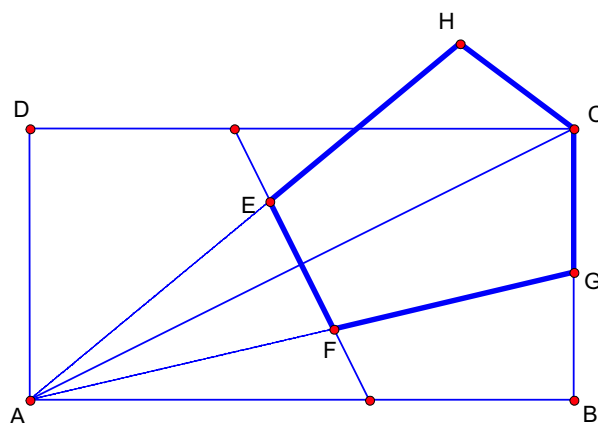


Abb. 3a

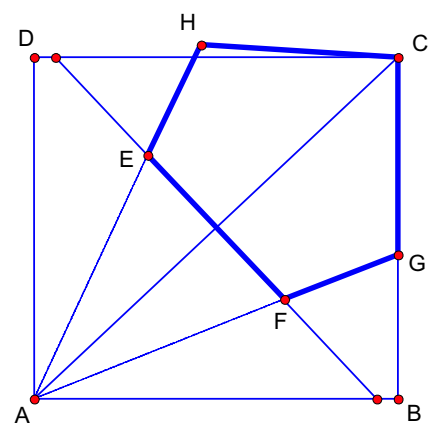
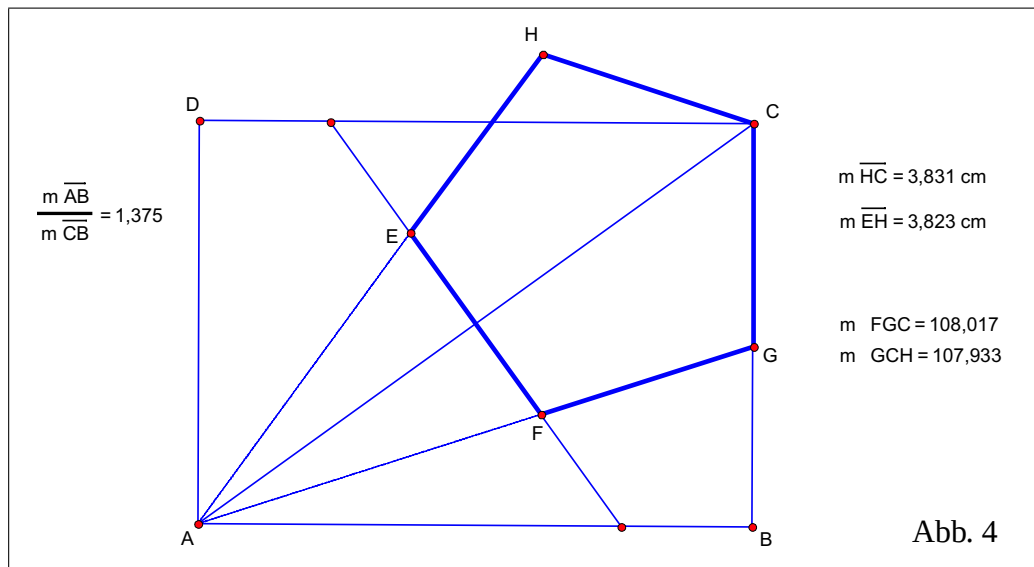


Abb. 3b



Aufgaben für die Leserinnen und Leser: Beweisen Sie die obigen Beobachtungen 1. und 2. – vgl. auch [7, S. 70f]. Tipps: Beachten Sie, dass AG laut Konstruktion die Winkelsymmetrale von $\angle BAC$ ist (warum genau?). Nun kann man auf verschiedene Arten weiterargumentieren:

- EC ist immer parallel zu FG (warum?); daraus ergibt sich zunächst $\angle EFG = \angle FGC$ und damit auch $|EF| = |CG|$ (Abb. 5a) .
- Errichten Sie die Senkrechte auf die Diagonale AC in C und schneiden Sie diese mit der Gerade AG ; der Schnittpunkt heiße K . Das Dreieck GKC ist immer gleichschenkelig (Abb. 5b). Die Tatsache $|EF| = |CK|$ kann nun auf mehrere Arten eingesehen werden: Strahlensatzfigur $AFKCL$, Parallelogramm $FKCE$, ...

Eine weitere Beobachtung: Die Höhen von E und F auf die Gegenseiten halbieren diese, und sie sind gleich lang wie die Höhe von C auf EF , d.h. so lang wie CL .

3 Analyse des Rechtecks, das zum regelmäßigen Fnfleck führt

Wir wollen erreichen, dass $\angle HCG = 108^\circ$ ist. Der Winkel wird von der Diagonale AC halbiert (Symmetrie), daher ist $\angle ACB = 54^\circ$. Somit beträgt das Seitenverhältnis des Rechtecks $|AB| : |BC| = \tan(54^\circ) = 1,37638\dots$

Diese Frage ist also grundsätzlich geklärt – wünschenswert wäre noch eine „schönere“ Darstellung, etwa als algebraischer Ausdruck (siehe Abschnitt 4).

Weiterhin folgt $\angle BAC = 36^\circ$. AG ist die Winkelsymmetrale von $\angle BAC$, also ist $\angle BAG = \angle GAC = 18^\circ$, somit $\angle AGB = 72^\circ$ und $\angle FGC = 108^\circ$. Wir haben in Abschnitt 2 schon gesehen, dass allgemein die Fnfekswinkel bei E , F , G und H gleich groß sind. Damit beträgt jeder Winkel im Fnfleck 108° (Abb. 6).

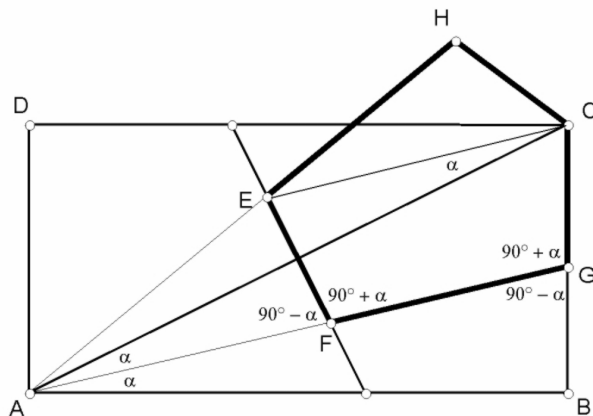


Abb. 5a

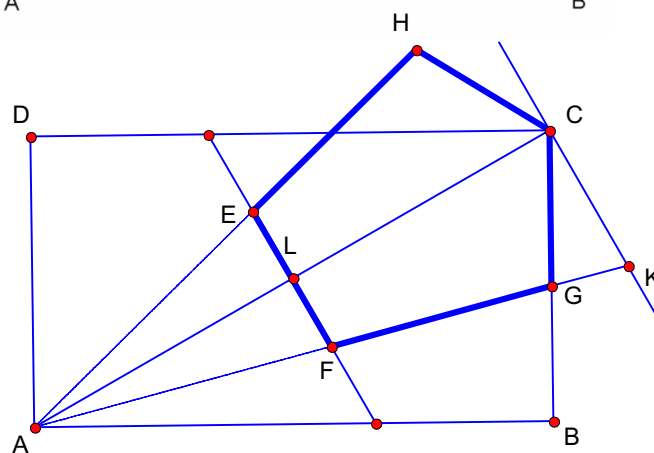


Abb. 5b

Für die Seiten des Fünfecks reicht es zu zeigen, dass $|FG| = |GC|$ ist (wegen der Symmetrie und wegen Beobachtung 1. aus Abschnitt 2). Nach Konstruktion ist EF die Streckensymmetrale von AC , also ist das Dreieck AFC gleichschenkelig. Die Basiswinkel betragen 18° (s.o.); daraus folgt:

- $\angle FCG = \angle ACB - \angle ACF = 54^\circ - 18^\circ = 36^\circ$
- $\angle CFG = \angle EFG - \angle EFC = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ$.

Somit ist das Dreieck FGC ebenfalls gleichschenkelig, und daraus folgt die Behauptung.

Die Form dieses Rechtecks weicht in der Tat nicht sehr stark vom DIN A-Format ab (dessen Seitenverhältnis ist 1,414...); geht man von der Breite des DIN A4-Blattes aus (diese beträgt ca. 210 mm), dann ergibt sich die Länge unseres Rechtecks zu ca. $1,376 \cdot 210 \text{ mm} = 289 \text{ mm}$, und das sind nur 8 mm weniger als die Länge des DIN A4-Blattes! Schneidet man also vom DIN A4-Blatt an einer Schmalseite einen 8 mm breiten Streifen ab, so kann man mit dem Rest-Rechteck ein ziemlich genaues *regelmäßiges* Fünfeck falten.

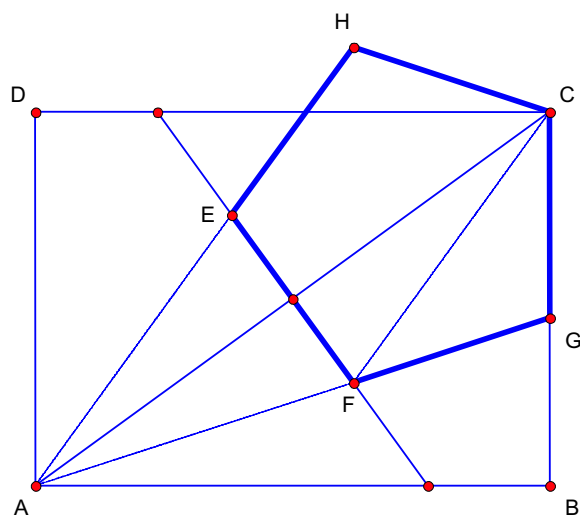


Abb. 6

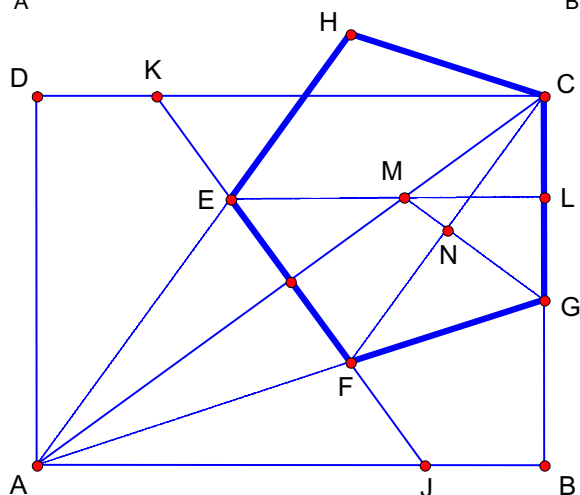


Abb. 7

4 Der Goldene Schnitt und andere Verhältnisse in der Faltfigur

Oberflächlich betrachtet kann man auf den Linien der Faltfigur keinen Goldenen Schnitt entdecken, auch keine Konstellation, die an die Standard- oder an andere geläufige Konstruktionen des Goldenen Schnitts erinnert. Bei genauerem Hinschauen entdeckt man jedoch wegen der typischen Winkel von 36° , 72° und 108° eine Fülle von (spitzen und stumpfen) Goldenen Dreiecken, ebenso andere typische Streckenverhältnisse, unter anderem eine einfache Darstellung für das Seitenverhältnis $\tan(54^\circ)$ des Ausgangsrechtecks.

Beispielsweise ist das Dreieck AFE gleichschenkelig mit Basiswinkeln von 72° , also ein spitzes Goldenes Dreieck mit der Fünfeckseite s als Basis, und der Schenkel

AF ist gleich lang wie die Fünfeckdiagonale d . AG wird also von F im Goldenen Schnitt geteilt.

Ebenso ist leicht zu sehen, dass $\triangle KFC$ gleichschenkelig ist und somit KF von E im Goldenen Schnitt geteilt wird. Manchmal sind weitere Hilfslinien hinzuzufügen, z. B. ist $\triangle ACK$ gleichschenkelig mit Basiswinkeln von 36° , also ein stumpfes Goldenes Dreieck, und somit steht die Diagonalenlänge $|AC|$ zu $|KC|$ (bzw. $|AK|$) im Verhältnis des Goldenen Schnitts.

Die Leserinnen und Leser sind eingeladen bzw. aufgefordert, in Abb. 7 weitere Paare von Streckenlängen zu finden, die im Verhältnis des Goldenen Schnitts zueinander stehen!

Nun zu einem algebraischen Ausdruck für $\tan(54^\circ)$: Dreiecke mit 54° -Winkeln gibt es in der Figur reichlich, z. B. $\triangle CLM$ und $\triangle CGN$. Aus dem ersten ergibt sich

$$\cos(54^\circ) = \frac{|LC|}{|CM|} = \frac{s/2}{r},$$

wobei $r = |CM|$ der Umkreisradius des Fünfecks ist. Bekanntlich gilt: $\frac{s}{r} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Aus dem zweiten Dreieck erhält man

$$\begin{aligned} \sin(54^\circ) &= \frac{|NC|}{|CG|} = \frac{d/2}{s} \implies \tan(54^\circ) = \frac{\sin(54^\circ)}{\cos(54^\circ)} \\ &= \frac{d/s}{s/r} = \frac{1 + \sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}} = \dots = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

5 Regelmäßige Fünfecke zum Bau eines Dodekaeders

Das konkrete Bauen und Basteln von Objekten kommt im Mathematikunterricht i.A. ohnehin immer zu kurz (von der Grundschule bis zum Studium). Im Folgenden möchten wir zwei Möglichkeiten kurz darstellen, mit ganz wenig Material und Aufwand jeweils ein schönes und ansprechendes Objekt zu basteln.

Dodekaeder: Wenn man von einem Rechteck ausgeht, das Diagonalwinkel von 54° bzw. 36° hat (siehe oben: von der längeren Seite eines DIN A4-Blatts ca. 8 mm – bei einem A5-Blatt nur ca. 5,5 mm – abschneiden), so kann man durch eine andere Faltung² ein Fünfeck falten, das zum Bau eines Dodekaeders besser geeignet ist: es hat nämlich stabile „Taschen“, in die die „Ohren“ von Nachbarfünfecken

²Diese ist übrigens *äquivalent* zur obigen: d.h. sie liefert ein zum obigen *ähnliches* Fünfeck, auch bei anderen Diagonalwinkeln; dies kann man z. B. dadurch sehen, dass man im Fünfeck von Abb. 1a in den Punkten P und Q im rechten Winkel zu a ein Dreieck abzeichnet bzw. abschneidet. Vom Restfünfeck mit 2 rechten Winkeln kann man relativ leicht zeigen, dass es *ähnlich* zu jenem von Abb. 12 ist. Die zugehörige detaillierte Begründung sei den Leserinnen und Lesern überlassen.

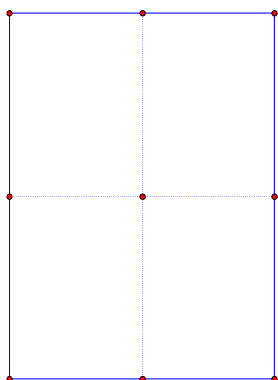


Abb. 8

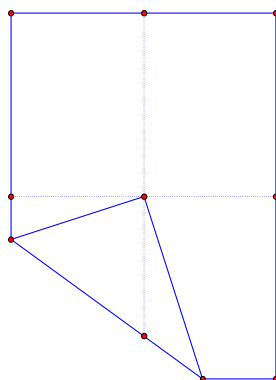


Abb. 9

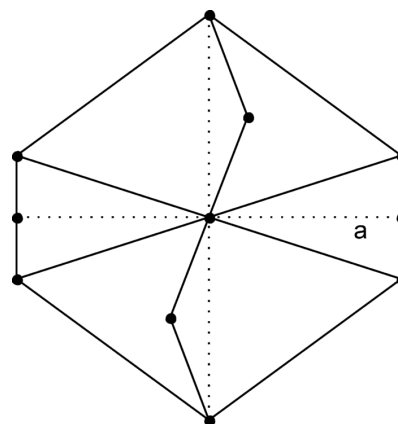


Abb. 10

gesteckt werden können – vgl. auch [2, S. 80f]³, [4, S. 53f] oder [5, S. 46, 50f, 87].⁴

Man beginnt mit der Faltung des Mittelkreuzes (Abb. 8) und faltet nun jede Ecke (im oder gegen den Uhrzeigersinn) zum Mittelpunkt (Abb. 9: Beginn etwa links unten, gegen den Uhrzeigersinn weiter; die Ecken bleiben beim Mittelpunkt, sie werden nach dem Entstehen der Faltlinie nicht wieder zurückgefaltet). Es entsteht dabei eine Figur mit Symmetrieachse a (Abb. 10).

Nun kann die Figur noch an a zusammengeklappt werden: Dabei kann der abgefaltete Teil der rechts unten liegenden Ecke *hinter* jenen der links oben liegenden gegeben werden, sodass die beiden Klapphälften etwas „ineinander verkeilt“ sind, was die zusammengeklappte Figur relativ stabil macht (Abb. 11, 12) und „Taschen“ entstehen lässt – siehe unten. Schließlich werden die beiden Punkte A und B so auf die Mittellinie m gefaltet, dass die dabei entstehenden Kanten AP bzw. BP' parallel zur „Grundlinie“ a sind (Abb. 13). Diese Faltung ist anders als die vorherigen: sie kann nicht ganz genau vorgenommen werden, sondern muss nach gutem *Augenmaß* für Parallelität erfolgen.

Dabei entsteht ein regelmäßiges Fünfeck mit „Taschen“ entlang QP und QP' und zwei „Ohren“ (wenn die letzten beiden Faltungen wieder teilweise „zurückgenommen“ werden). Baut man davon 12 Exemplare, so kann man daraus ein sehr stabiles Dodekaeder bauen, indem man diese 12 Fünfecke zusammensteckt: dabei werden die Ohren immer geeignet in Taschen von Nachbarfünfecken gesteckt. Allein darin kann eine reizvolle Aufgabe für Schülerinnen und Schüler bestehen, nämlich herauszufinden und zu beschreiben, wie man hier vorgehen kann. Was

³In [4, S. 54] wird geschrieben, dass die Idee von dort stamme. In [5, S. 46] heißt es aber, dass die Grundidee von [3, S. 111–113] käme. Wo diese Idee wirklich zum ersten Mal auftauchte, entzieht sich (offenbar nicht nur) unserer Kenntnis.

⁴Dort findet sich auf S. 50–51 ein zugehöriges Arbeitsblatt, das auch mit einigen didaktischen Kommentaren versehen ist – z. B. Anregungen für Gruppenarbeiten im Unterricht.

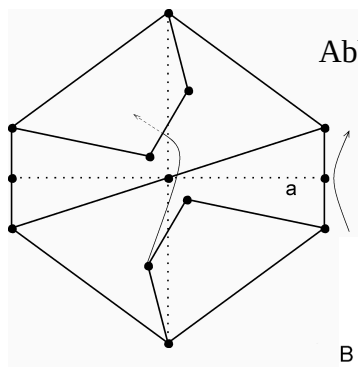


Abb. 11

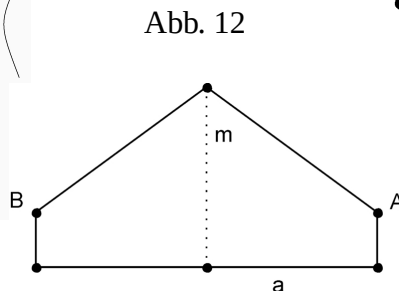


Abb. 12

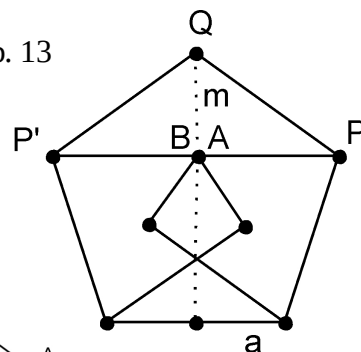


Abb. 13

sollte man beachten? Kann man dabei etwas falsch machen? Wenn ja, was?

Bemerkungen. Wenn man bei den 12 Blättern verschiedene Papierfarben nimmt, entsteht ein farblich besonders ansprechendes Dodekaeder.

Eine Begründung, dass bei dieser Faltung (ausgehend von einem Rechteck mit Diagonalwinkeln von 54° und 36°) wirklich ein regelmäßiges Fünfeck entsteht, findet sich z. B. in [5, S. 87].

Lampenschirm: Eine andere spannende Möglichkeit, mit Fünfecken zu basteln, wird z.B. in [8, S. 283f] oder in einem Schweizer Schulbuch [1, S. 44f] für die 5. Schulstufe dargestellt: Aus Transparentpapier wird ein Lampenschirm aus 10 Fünfecken (keine Grund- und Deckfläche!) hergestellt, in denen jeweils das innere Sternfünfeck jeder Fläche nur einfach belegt ist, der Rest doppelt (Abb. 14). Daher leuchten diese Sterne, wenn man eine Lampe hineinstellt, heller als ihre Umgebung – eine nette Idee insbesondere zu Weihnachten! Die entscheidende Idee besteht darin, die Seitenmittelpunkte der Bau-Fünfecke einzuzichnen und

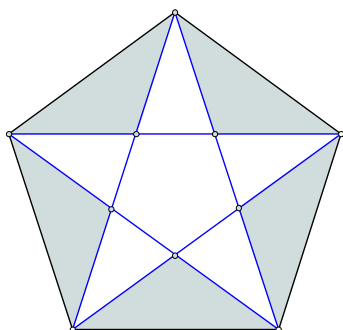


Abb. 14

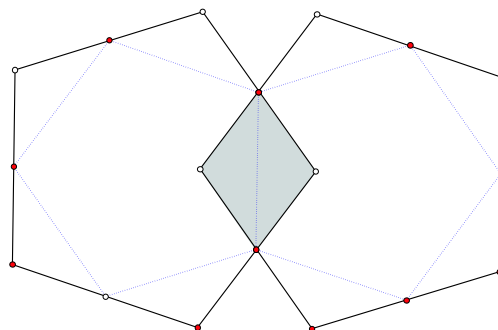


Abb. 15

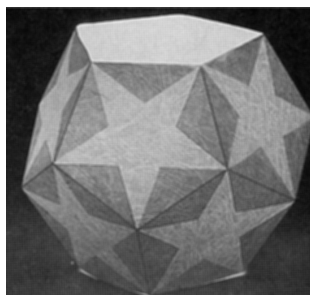


Abb. 16

zwei benachbarte Bau-Fünfecke jeweils mit 2 Seitenmittelpunkten übereinanderzulegen und zusammenzukleben (Abb. 15).

Die gestrichelten Fünfecke in Abb. 15 entsprechen dem Fünfeck in Abb. 14. D. h. die Seitenmittelpunktfünfecke der ursprünglichen Bau-Fünfecke (Rohmaterial) sind die Seitenflächen des entstehenden Dodekaeders (warum ergeben sich im Inneren genau diese Sternfünfecke?). Das Resultat sieht aus wie in Abb. 16.

Literatur

1. Affolter, W., u.a. (2005): Das Zahlenbuch 5. Klett und Balmer & Co. Verlag, Zug.
2. Brill, D. (1996): Brillant Origami. A Collection of Original Designs. Japan Publ. Tokyo, New York.
3. Kkenneway, E. (1992): Origami komplett. Augustus, Augsburg.
4. Lörcher, G. A. (1999): Platonische Körper falten. In: Der Mathematikunterricht **45** (1999), 3, 50–63.
5. Lörcher, G. A. und H. Rümmele (1995): Körper falten. RAA Hauptstelle Essen, Reihe: Handlungsorientierte Geometrie, Heft 3.
6. Maier, P. H. (2003): Körper und Raum – die dritte Dimension: Ein Lehrbuch der Polyedergeometrie und eine Klassifikation konvexer Polyeder. Franzbecker, Hildesheim.
7. Walser, H. (1993): Der Goldene Schnitt. Teubner, Leipzig.
8. Wittmann, E.-Ch. (1987): Elementargeometrie und Wirklichkeit. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.

Anschrift der Verfasser:

Hans Humenberger, Fakultät für Mathematik der Universität Wien, Nordbergstraße 15, A 1090 Wien. e-mail Hans.Humenberger@univie.ac.at

Berthold Schuppar, IEEM, FB Mathematik der Universität Dortmund, D 44221 Dortmund. e-mail Berthold.Schuppar@math.uni-dortmund.de

Buchbesprechungen

<i>L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré</i> : Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures (J. TEICHMANN)	36
<i>J. Borwein, D. Bailey</i> : Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century (A. PANHOLZER)	37
<i>L. Capogna, C. E. Kenig, L. Lanzani</i> : Harmonic Measure (P. GRABNER)	38
<i>G. L. Cohen</i> : A Course in Modern Analysis and Its Applications (J. HERTLING)	39
<i>M. Drmota, P. Flajolet, D. Gardy, B. Gittenberger (eds.)</i> : Mathematics and Computer Science III (A. PANHOLZER)	39
<i>E. J. Dudewicz, B. L. Golden, S. N. Mishra, Z. Govindarajulu (eds.)</i> : 25th Anniversary of the T. L. Saaty Prize and of the J. Wolfowitz Prize (E. STADLOBER)	40
<i>S. Hildebrandt</i> : Analysis 1 (H. PRODINGER)	42
<i>K. Jänich</i> : Vektoranalysis (J. TEICHMANN)	43
<i>G. Da Prato</i> : Kolmogorov Equations for Stochastic PDEs (J. TEICHMANN)	43
<i>H. Sahai, M. M. Ojeda</i> : Analysis of Variance for Random Models (E. STADLOBER)	44
<i>F. Sauvigny</i> : Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik 2 (N. ORTNER)	46
<i>B. Simon</i> : Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1+2 (J. TEICHMANN)	46
<i>K. Zhu</i> : Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball (N. ORTNER)	48

L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré: Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures. (Lectures in Math., ETH Zürich.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2005, VII+333 S. ISBN 3-7643-7293-1 P/b € 35,20.

The authors Luigi Ambrosio, Nicola Gigli and Giuseppe Savaré in their book “Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures” deal with the notion of gradient flows on spaces without the usual concepts of differentiable maps. The first part is devoted to the general theory. In the second part the general theory is applied to Wasserstein spaces, i.e., metric spaces of probability measures, where conceptual gradient flows gained much attention in the realm of optimal transport theory (Otto Calculus). The book is based on a *Nachdiplom* course taught by the first author at ETH Zürich in 2001.

The general theory (part 1) is developed from the notion of weak upper gradients, which makes perfect sense on metric spaces, and the notion of curves of maximal slope. Existence of curves of maximal slope is studied by a variational formulation of the implicit Euler scheme. Questions of well-posedness, uniqueness or continuous dependence on initial data of curves of maximal slope are also considered. Most important for applications are metric spaces, where additionally constant speed geodesics are given. On such metric spaces gradient flows of geodesically convex functions (i.e., functions which are convex along geodesics) are considered. The first part ends with results on the generation of contraction semigroups and certain error estimates.

The second part of the book deals with (metric) spaces of probability measures and the important notions from optimal transport theory. It is well known that probability measures on complete connected Riemannian manifolds M , where the p -th moment of the metric exist, form a complete metric space, the Wasserstein- p -space, with respect to the metric

$$d_p^p(\mu, \nu) = \inf_{\pi} \int_{M \times M} d(x, y)^p \pi(dx, dy).$$

Here the infimum is taken over all measures π with marginals μ, ν on the first and second component, respectively, and $p \geq 1$. The Wasserstein- p -metric encodes weak convergence of measures together with convergence of moments up to order p , and corresponds to an optimal transport from μ to ν with cost functional d^p . Additionally the theory of optimal transport allows the notion of geodesics on Wasserstein spaces. Here the results from the first part on geodesically convex functionals apply and yield a general framework for so-called Otto Calculus (see the seminal article [108] of F. Otto and C. Villani). Several interesting examples are explained, for instance how to understand the Fokker-Planck equation as a gradient flow on Wasserstein-2-space.

This very recommendable book is of high interest for PhD students and researchers in optimal transport or PDE theory.

J. Teichmann (Wien)

J. Borwein, D. Bailey: Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century. A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2004, X+288 S. ISBN 1-56881-211-6 H/b \$ 45,—.

Das vorliegende Buch ist der erste Band eines zweibändigen Werkes über „experimentelle Mathematik“, welches in J. Borwein, D. Bailey und R. Girgensohn: “Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery” (erschienen im gleichen Verlag) seine Fortsetzung findet.

Unter experimenteller Mathematik wird hier grob gesprochen das Sich-Zunutze-Machen der experimentellen Möglichkeiten verstanden, die sich durch die Computertechnologie für die mathematische Forschung bieten. Die Autoren sprechen gar von einem „Labor“, das ähnlich anderen Wissenschaftsdisziplinen nun durch den Computer auch dem Mathematiker zur Verfügung steht, „um zu experimentieren“, also um beispielsweise Muster oder Zusammenhänge aufzuspüren, um Hypothesen zu testen oder auch zu widerlegen oder um Hinweise für einen formalen Beweis einer Vermutung zu erhalten. Dieser experimentelle Ansatz in der Mathematik ist nicht neu, wie die Autoren anhand von Beispielen (z.B. bei C. F. Gauß, A. de Morgan und F. Klein) aufzeigen, aber durch die Verwendung moderner Soft- und Hardware bieten sich ungleich mehr Möglichkeiten.

Ziel dieses Buches ist es, mittels ausgewählter Beispiele die Bedeutung der experimentellen Mathematik für die moderne Mathematik aufzuzeigen. Aufgrund des Arbeitsgebietes der Autoren entstammen diese Beispiele vor allem der Analysis und Zahlentheorie (es finden sich aber auch Ausflüge in andere Gebiete, wie beispielsweise die Geometrie und Kombinatorik) und finden sich in den Kapiteln 2 (Experimental Mathematics in Action), 3 (Pi and Its Friends), 4 (Normality of Numbers), 5 (The Power of Constructive Proofs I) und 6 (Numerical Techniques I). Daneben finden sich in den Kapiteln 1 (What is Experimental Mathematics?) und 7 (Making Sense of Experimental Mathematics) neben einer Einführung und Motivation auch historische Bemerkungen und philosophische Betrachtungen zur Rolle der experimentellen Mathematik.

Zwei „Glanzlichter“ der experimentellen Mathematik, wo die Autoren wesentlich beteiligt waren, seien hier explizit erwähnt. 1996 präsentierten D. Bailey, P. Borwein und S. Plouffe einen Algorithmus, der es erlaubt, direkt eine beliebige Stelle in der Binärentwicklung (oder Hexadezimalentwicklung) von π zu berechnen, ohne auf die vorangegangenen Stellen zurückgreifen zu müssen. Dieser Algorithmus beruht auf einer Formel für π , die erst gefunden wurde, nachdem mit Hilfe eines numerischen Algorithmus, der eine Beziehung der Art $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ mit ganzen Zahlen $a_1, \dots, a_n$ für vorgegebene reelle Zahlen $x_1, \dots, x_n$ „aufspürt“ (der sogenannte PSLQ integer relation algorithm), danach gesucht wurde. Die Schwierigkeit war hier natürlich das Auffinden einer geeigneten Formel, welches durch das genannte numerische Verfahren in einer mehrwöchigen rechenintensiven Suche gelang, wohingegen der anschließende analytische Beweis der Gültigkeit der

Formel nicht kompliziert ist. Ein weiteres Beispiel ist das Auswerten einer Reihe von sogenannten Euler-Summen (auch Euler-Zagier-Summen genannt) als Ausdrücke, die nur bekannte mathematische Konstanten, wie z.B. π , ζ -Funktionswerte oder Polylogarithmen, etc. enthalten. Eine Vielzahl der 1994 von D. Bailey, J. Borwein und R. Girgensohn präsentierten Beziehungen wurde zuerst „numerisch“ (also mittels des PSLQ-Algorithmus) entdeckt und erst hinterher analytisch gezeigt.

Am Ende der Kapitel 1–6 finden sich neben interessanten zusätzlichen Bemerkungen vor allem eine große Anzahl an Aufgaben verschiedener Schwierigkeitsgrade, die den Leser selbst zum Experimentieren anregen sollen.

Insgesamt ein sehr empfehlenswertes Buch, bei dem sich der Leser durch die leider zahlreichen Druckfehler (beispielsweise sind bei über 100 Referenzen die Verweise nicht korrekt, sondern sind um 1 bzw. 2 Einträge im Literaturverzeichnis verschoben) keinesfalls die Lust am Lesen (und Experimentieren!) nehmen lassen sollte.

A. Panholzer (Wien)

L. Capogna, C. E. Kenig, L. Lanzani: Harmonic Measure. Geometric and Analytic Points of View (University Lecture Series, Vol. 35). American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005, X+155 S. ISBN 0-8218-2728-6 P/b \$ 35,–.

Das vorliegende Buch beschäftigt sich mit geometrischen und analytischen Eigenschaften harmonischer Maße von zusammenhängenden Gebieten im $\mathbb{R}^n$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dann ist das klassische Dirichlet-Problem

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = f$$

für beschränkte stetige Funktionen f auf $\partial\Omega$ eindeutig lösbar. Die Lösung lässt sich nach dem Maximumprinzip und dem Darstellungssatz von Riesz durch

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(y) d\omega^x(y)$$

darstellen. Das dadurch gegebene *harmonische Maß* ω^x und seine genauen Eigenschaften waren das Thema einer Vortragsreihe von Carlos Kenig an der University of Arkansas im Jahr 2000, auf der dieses Buch beruht.

Besonderes Augenmerk wird dem Zusammenhang zwischen Glattheitseigenschaften des Randes $\partial\Omega$ und geometrischen Eigenschaften des Maßes ω^x , wie etwa Verdoppelungseigenschaften oder absolute Stetigkeit bezüglich des Oberflächenmaßes auf $\partial\Omega$ (sofern vorhanden) gelegt. Das Buch gibt einen konzisen Einblick in neueste Entwicklungen in diesem Grenzgebiet zwischen Potentialtheorie und geometrischer Maßtheorie.

P. Grabner (Graz)

G. L. Cohen: A Course in Modern Analysis and Its Applications. (Australian Mathematical Society Lecture Series 17.) Cambridge University Press, 2003, XIII+333 S. ISBN 0-521-81996-2 H/b £ 60,—, ISBN 0-521-52627-2 P/b £ 24,95*.

Der erste Abschnitt "Prelude to Modern Analysis" bietet eine übliche Einführung. Der zweite Abschnitt "Metric Spaces" führt in die Konvergenz in einem metrischen Raum, in Vollständigkeit und in Unterräumen eines metrischen Raumes ein. Der dritte Abschnitt "The Fixed Point Theorem and its Applications" behandelt Abbildungen zwischen metrischen Räumen, den Fixpunktsatz und "Perturbation mappings", worunter die Approximation einer nichtlinearen Abbildung durch lineare Abbildungen zu verstehen ist. Der vierte Abschnitt über "Compactness" präsentiert den Satz von Ascoli und Anwendungen auf die Approximationstheorie. Der fünfte Abschnitt über „Topologische Räume“ umfasst abgeschlossene und kompakte Mengen, Stetigkeit in topologischen Räumen, Homomorphismen und Zusammenhang. Der sechste Abschnitt über "Normed Vector Spaces" enthält unter anderem Approximationstheorie, Tschebyschefftheorie und den Weierstraßschen Approximationssatz. Der siebente Abschnitt "Mappings on Normed Spaces" zeigt neben Funktionalen und inversen Abbildungen auch Anwendungen auf Integralgleichungen und numerische Analysis sowie unbeschränkte Abbildungen. Der achte Abschnitt "Inner Product Spaces" behandelt unter anderem Approximation nach der Methode der kleinsten Quadrate und den Rieszschen Darstellungssatz. Der neunte Abschnitt "Hilbert Space" definiert den adjungierten Operator, Separabilität, vollständige orthonormale Mengen, verallgemeinerte Fourierreihen und den Hilbertraum-Isomorphismus. Das Buch enthält zahlreiche Aufgaben mit Lösungen und gelöste Beispiele.

J. Hertling (Wien)

M. Drmota, P. Flajolet, D. Gardy, B. Gittenberger (eds.): Mathematics and Computer Science III. Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities. (Trends in Mathematics.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2004, XV+555 S. ISBN 3-7643-7128-5 H/b € 118,80.

Dieser Tagungsband enthält insgesamt 54 Arbeiten der im September 2004 an der TU Wien abgehaltenen internationalen Konferenz "Third Colloquium on Mathematics and Computer Science. Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities".

Diese alle zwei Jahre stattfindende Konferenz beschäftigt sich mit Fragen an der Nahtstelle zwischen Mathematik und Informatik, wobei eine besondere Akzentuierung in Richtung diskrete Wahrscheinlichkeitsmodelle und ihre Bedeutung in der Analyse von Algorithmen und Datenstrukturen gesetzt wird. Weitere Anwendungen, beispielsweise das Studium von Zufallsgraphen, Zufallsbaummodellen, kombinatorischen Stochastischen Prozessen (z.B. diskrete Irrfahrtsmodelle) und Verzweigungsprozessen, finden sich aber auch in der mathematischen Statistik, der Informationstheorie und der mathematischen Logik.

Die im Tagungsband enthaltenen Arbeiten sind den folgenden 7 Themenkreisen zuzuordnen: *Kombinatorik und zufällige Strukturen*: Darunter fallen insbesondere kombinatorische Studien von Parametern in diskreten Zufallsmodellen wie z.B. für Permutationen und Partitionen. *Graphentheorie*: Hier sind insbesondere Analysen von wichtigen Größen (wie z.B. Matchings, spannende Bäume) in Zufallsgraphenmodellen zusammengefasst. *Analyse von Algorithmen*: Darunter fallen vor allem ‘Average case’-Analysen, also Studien zum durchschnittlichen Verhalten von wichtigen Kenngrößen in Algorithmen, wie beispielsweise für ‘bin packing’-Probleme, für die Datenkomprimierung oder zum Auswerten von Entscheidungsbäumen. *Bäume*: Hier sind Arbeiten zur Analyse von Zufallsbaummodellen zusammengefasst, welche häufig als Datenstrukturen bzw. bei bestimmten Algorithmen verwendet werden, wie z.B. Suffix trees, binäre Suchbäume oder Galton-Watson-Bäume. *Wahrscheinlichkeitstheorie*: In der Analyse von diskreten Zufallsmodellen oder bei der „Average-case“ Analyse von Algorithmen spielen probabilistische Methoden eine bedeutende Rolle. Hier sind beispielsweise Arbeiten zu Fragmentationsmodellen, Lösen von bestimmten stochastischen Fixpunktgleichungen oder Parametern in Folgen geometrisch verteilter Zufallsvariablen enthalten. *Kombinatorische Stochastische Prozesse*: Darunter fallen als prominenteste Vertreter diverse diskrete Irrfahrtsmodelle, wie z.B. Irrfahrten auf Graphen oder Gruppen. *Anwendungen*: Hier sind eine Reihe von Arbeiten mit verschiedenen Anwendungsgebieten, wie z.B. in der Kodierungstheorie oder der mathematischen Logik, zusammengefasst.

Insgesamt gibt dieser schön zusammengestellte Tagungsband einen recht guten Einblick in und Überblick über ein aktuelles Forschungsgebiet.

A. Panholzer (Wien)

E. J. Dudewicz, B. L. Golden, S. N. Mishra, Z. Govindarajulu (eds.): 25th Anniversary of the T. L. Saaty Prize and of the J. Wolfowitz Prize. New Advances and Applications by Prize Winners (American Series in Mathematical and Management Sciences, Vol. 52).² American Sciences Press, Columbus, 2004, IV+194 S. ISBN 0-935950-56-7 P/b \$ 235,-.

Thomas L. Saaty (1926–) ist an der University of Pittsburgh tätig und hat sich mit angewandten Fragestellungen aus dem Bereich des Operations Research beschäftigt, wo er sich speziellen Anwendungen der Graphentheorie, Spieltheorie und Entscheidungstheorie gewidmet hat. Mit dem nach ihm benannten Preis werden angewandte Arbeiten ausgezeichnet.

Jacob Wolfowitz (1910–1981) stammt aus Warschau und hat an mehreren Universitäten in den USA und Israel gewirkt. Er war einer der Pioniere der Mathematischen Statistik, der sich mit einem breiten Spektrum an grundlegenden Problemen auseinandergesetzt und viele berühmte Schüler hervorgebracht hat. Seine

²Dieses Werk ist gleichzeitig erschienen als: American Journal of Mathematical and Management Sciences, Volume 24 (2004), issues 3 and 4.

bekanntesten Doktoranden waren wohl A. Wald (Sequentialanalyse) und J. Kiefer (Entscheidungstheorie). Die Jacob Wolfowitz Preise werden hervorragenden theoretischen Arbeiten zugesprochen.

Der vorliegende Band enthält neue Arbeiten von Preisträgern beider Kategorien. *H. Hyakutake* beschäftigt sich mit multiplen Vergleichen bei wiederholten Messungen. Dabei werden die Effekte von mehreren Behandlungsgruppen und einer Kontrollgruppe durch nichtlineare Funktionen modelliert. Für die Differenzen der Maxima jeder Behandlungsgruppe mit dem Maximum der Kontrollgruppe werden simultane Konfidenzintervalle konstruiert. *P.F. Zantek* und *B.L. Golden* gehen von einem multiplen Problem aus, wo mehrere Entscheidungsträger Bewertungen von Alternativen in Form eines Rankings vornehmen. Für die Identifikation von auffällig abweichenden Entscheidungen werden ein multivariater Test, basierend auf dem Maximum von Hotellings T^2 Statistik und eine visuelle Prozedur vorgeschlagen, die anhand bekannter Beispiele aus der Literatur evaluiert werden.

A. Kowalski und *E. Rudiuk* definieren die Korrelation von Zufallsvariablen mit finitem p -ten Moment über die sogenannte Quantilsnorm und leiten eine explizite Formel für Bernoulli-Variable her. Es wird gezeigt, dass die Zufallsfehler genau dann unabhängig sind, wenn ihre Indikatoren unkorreliert sind. Asymptotische Eigenschaften des Erwartungswertes der Länge von Pfaden stationärer elliptischer Prozesse in diskreter Zeit, die über einem festen Niveau u bleiben, werden von *M. Tanaka* und *K. Shimizu* behandelt. Die Größenordnung des Erwartungswertes bei einem stationären Gaussprozess (in stetiger oder diskreter Zeit) ist bekanntlich $O(1/u)$ für u genügend groß. Die Autoren zeigen, dass der Erwartungswert für stationäre Prozesse mit verallgemeinerter Laplace- oder Logistik-Verteilung in diskreter Zeit von der Ordnung $O(1/\sqrt{u})$ ist.

T. Srinivastava studiert die Rekonstruktion von Bildern, die durch Computertomographie erzeugt und durch einen räumlichen stochastischen Prozess modelliert werden. Es wird eine lineare Beziehung zwischen dem erwarteten quadratischen Fehler und dem Kovarianzkern des stochastischen Prozesses hergestellt. Der Kovarianzkern wird aus den rekonstruierten Bildern geschätzt und zur Fehlerschätzung herangezogen. Simulationen mit bestimmten Klassen von Prozessen demonstrieren, dass die so gewonnenen Fehlerschätzungen innerhalb einer akzeptablen Bandbreite des aktuellen Fehlers liegen.

S. Nadarajah und *S. Kotz* konstruieren sechs univariate schiefe Verteilungen mit Hilfe von Laplace-Kernen und geben Ausdrücke für die p -ten Momente sowie die charakteristischen Funktionen an. Graphische Illustrationen, Quantifizierungen der Wertebereiche von Schiefe und Kurtosis und die Anwendung auf Wechselkursdaten runden den Artikel ab. In einer zweiten Arbeit wird der vorliegende Ansatz auf bivariate Verteilungen erweitert. Mittels eines Pearson-Typ II-Kerns und der Technik der marginalen Ersetzung werden – entsprechend zum univariaten Fall – sechs schiefe bivariate Verteilungen vorgestellt.

H.D. Sherali, *J. Desai* und *T.S. Glickman* beschäftigen sich mit der Zuordnung

von Ressourcen zu bestimmten Notfallschutzmaßnahmen, um Risiken nach einer Katastrophe zu entschärfen. Das Modell ist ein nicht-konvexes Programm. Dieses wird auf ein lineares Programm reduziert, das durch ein branch-and-bound-Verfahren, dessen Konvergenz zu einem globalen Optimum sichergestellt ist, bearbeitet wird. Computerresulate eines hypothetischen Problems unter unterschiedlichen Szenarien und mehreren branch-and-bound-Strategien werden präsentiert und mit den Ergebnissen aus einer kommerziellen Software verglichen. Die entsprechenden Computercodes sind im Anhang aufgelistet.

Die Artikel beinhalten spezielle angewandte und theoretische Fragestellungen, die für Fachleute aus dem Bereich des Operations Research und der Statistik interessant sein könnten.

E. Stadlober (Graz)

S. Hildebrandt: Analysis 1. Zweite, korrigierte Auflage. Mit 76 Abbildungen. (Springer Lehrbuch.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, XVII+486 S. ISBN 3-540-25368-8 P/b € 24,95.

Es gibt viele Lehrbücher über Analysis: gefällige, wie das von Richard Courant, das dem modernen Menschen vielleicht nicht rigoros genug ist, und etliche, die ich nicht nennen will, die ich mir als Student kaufte, weil sie deutsch und erschwinglich waren, die aber die Schönheit der Mathematik verschleiern.

Die heutige Studentin hat es leichter. Hildebrandts Werk ist ein empfehlenswertes Werk (es gibt auch einen zweiten Teil). Der kenntnisreiche Autor zeigt, dass er auch Geschmack hat! Dem Internet entnehmen wir, dass der 1936 Geborene die DDR verließ und schließlich in Bonn 2001 emeritiert wurde.

Die Auswahl des Stoffes (nur wenig über Reihen, was Hildebrandt eher in der Funktionentheorie diskutiert) ist subjektiv gefärbt, aber in sich stimmig. Die 4 Abschnitte lauten: Grundlagen der Analysis – Der Begriff der Stetigkeit – Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung – Differentialgleichungen und Fourierreihen.

Der Klappentext spricht von einem Leitfaden für eine zwei- oder dreisemestrige Analysis-Vorlesung. Das halte ich für ein Missverständnis; das stimmt wohl, wenn man beide Bände insgesamt sieht.

Ein sehr gefälliges und empfehlenswertes Buch: Für die Studenten als Begleitlektüre oder zum Selbststudium, und für die Dozenten vielleicht als Grundlage (ganz oder als Teil) von Grundvorlesungen!

H. Prodinger (Univ. Stellenbosch)

K. Jänich: Vektoranalysis. Fünfte Auflage. Mit 110 Figuren, 120 Testfragen und 52 Übungsaufgaben. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, XII+275 S. ISBN 3-540-23741-0 P/b € 19,95.

Das seltene Vergnügen, einen deutschsprachigen mathematischen Text zu verfassen, verknüpfe ich mit der Aufgabe, Klaus Jänichs Lehrbuch zur Vektoranalysis zu rezensieren. Über dieses Buch wurde bereits viel des Lobes geschrieben, dem ich mich sehr gerne anschließe. Das vorliegende Buch ist die 5. Auflage. Im Vergleich zu vorhergehenden Auflagen wurden kleinere Fehler korrigiert, aber keine größeren Veränderungen vorgenommen. Dem Lob hinzufügen kann ich nur einige Betrachtungen als Vortragender einer Vorlesung, die sich unter anderem auf Klaus Jänichs Buch stützte.

So wie ich als Student mit viel Freude Klaus Jänichs Aufbau der Anfangsgründe der Differentialgeometrie – wie den Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit oder des Tangentialraumes – nachvollzogen habe, genoss ich es als Vortragender, darauf zurückzugreifen. Die Definitionen (von Tangentialvektoren) des Geometers, Physikers und Algebraikers bringen – so wie für mich als Student – immer noch ein Knistern in die Vorlesung, und man kann viel dazu erzählen, vom Ricci-Kalkül bis zur Algebraisierung der Geometrie.

Die neuen Begriffe, Tests und Übungsaufgaben eines Kapitels greifen jeweils so reibungslos ineinander, dass man den Verständnisfortschritt buchstäblich miterleben kann.

So gelangt man zügig zum Satz von Stokes und der Hodge-de Rham'schen Theorie. Als Vortragender wünscht man sich an diesem Punkt mehr davon, muss sich aber von nun an selbst in der schweren Kunst der Vermittlung à la Jänich versuchen. Beim Frobeniusschen Satz, der Einführung von Lieschen Gruppen, der Hamiltonschen Mechanik oder der unendlichdimensionalen Geometrie kann man es probieren bzw. auf weiterführende Werke wechseln.

Es ist natürlich erst mit über dieses Buch hinausgehenden Begriffen möglich, moderne Problemstellungen zu formulieren bzw. moderne Motivationen aus der jüngeren Mathematik zu präsentieren. Dies bleibt auch die einzige Schwachstelle von Klaus Jänichs ausgezeichnetem Buch: der Bezug zur aktuellen Differentialgeometrie liegt jenseits der Ziele seines Textes.

J. Teichmann (Wien)

G. Da Prato: Kolmogorov Equations for Stochastic PDEs. (Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona). Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2004, IX+182 S. ISBN 3-7643-7216-8 P/b € 35,20.

The book “Kolmogorov Equations for Stochastic PDEs” is an elaboration of courses taught by Giuseppe Da Prato at the *Centre de Recerca Matemàtica* (CRM) in Barcelona in 1997. The field of stochastic partial differential equations (SPDEs) deals with stochastic differential equations on infinite-dimensional state spaces.

Particular for this book (as for other textbooks co-authored by G. Da Prato) is the consequent use of the language of strongly continuous semigroups in the foundations of the subject. As milestones and motivating applications, reaction-diffusion equations, the stochastic Burger's equation, and the two-dimensional Navier-Stokes equation are worked out.

It is well known that interesting infinite-dimensional systems with stochastic terms often are of the following delicate form

$$dX_t = (AX_t + F(X_t))dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

where F, σ are typically well-behaved (say Lipschitzian) nonlinearities on a Hilbert space H , W_t is a cylindrical Brownian motion, and A is an unbounded operator. This in particular means that the drift term of this system is neither continuous with respect to the state variable X , nor globally defined on H . This phenomenon is a generically infinite-dimensional one and has no finite-dimensional counterpart. However, it is obvious that unbounded drift terms pose problems for the associated stochastic processes.

Examples are the previously mentioned Navier-Stokes systems, or Burger's equation, where A is the Laplacian. In mathematical finance – another area where SPDEs appear – the shift semigroup and its generator $A = \frac{d}{dx}$ are typical. In both cases the generator is neither continuous nor globally defined on the respective Hilbert space of functions.

Due to this feature a new concept of solution, the so-called mild solutions, are introduced. Mild solutions do not solve the naive integral equation associated to the previous differential expression, but a slightly more general variation-of-constants formula (Duhamel's formula). In case A is bounded, this reduces to the classical strong concept. In the present book mild solutions are introduced, and the expected existence and uniqueness results are proved.

In the sequel the theory is exemplified (as in the finite dimensional situation) in the Ornstein-Uhlenbeck setting, where invariant measures are considered, and log-Sobolev or Poincaré inequalities are proved. These natural questions for SPDEs can be pushed surprisingly far in the presented setting.

The book is – as usual – well written and provides a clear and concise introduction to the field of SPEs on a graduate or research level.

J. Teichmann (Wien)

H. Sahai, M. M. Ojeda: Analysis of Variance for Random Models. Vol. II: Unbalanced Data. Theory, Methods, Applications, and Data Analysis. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2005, XXV+480 S. ISBN 0-8176-3229-8 H/b € 107,80.

Dies ist der zweite Band eines Werkes über die Theorie und Anwendung von linearen Modellen mit zufälligen Effekten. Der erste Band behandelt in 8 Kapiteln den einfacheren Fall balancierter Daten. Band II beginnt in den Kapiteln

9 und 10 mit den Grundlagen der Matrizentheorie und dem allgemeinen linearen Modell sowie einer Zusammenstellung von allgemeinen Resultaten bezüglich der Schätzung von Varianzkomponenten. Dabei wird eine Reihe von klassischen Schätztechniken dargestellt: Henderson's Verfahren (I–III), Methode der Zellenmittelwerte (ANOVA), Maximum Likelihood und restringierte Maximum Likelihood Methode. Diese werden ergänzt durch die weniger gebräuchlichen Schätzer vom Stein-Typ und Hodges-Lehmann-Typ und durch formale Bayes-Schätzer.

Kapitel 11 bis 17 widmen sich speziellen Modellen (einfache Varianzanalyse (VA), zweifache VA mit und ohne Wechselwirkung, dreifache und höhere VA, zweifache, dreifache hierarchische Klassifikation und den allgemeinen Fall der r -fachen hierarchischen Klassifikation). Diese Kapitel weisen alle dieselbe Struktur auf. Zuerst wird das mathematische Modell in Form eines Effektmodelles eingeführt, dann werden die Darstellungen der Quadratsummen und die Formeln für die Erwartungswerte der mittleren Quadratsummen angegeben. Die weiteren Abschnitte beinhalten Schätzmethoden für die Varianzkomponenten, die Varianz der Schätzer, Konfidenzintervalle für Varianzkomponenten und Quotienten von Varianzkomponenten und enden schließlich mit Hypothesentests. Zusätzlich werden Beispiele mit realen Daten für einen numerischen Vergleich von Methoden und Softwarepaketen zur Verfügung gestellt. Jedes Kapitel schließt mit Übungsaufgaben (ohne Lösungen) und einer spezifischen Literaturliste ab. Sehr häufig wird auf detaillierte Herleitungen verzichtet. In diesen Fällen wird der Leser aber auf die Originalarbeiten verwiesen.

Der Anhang besteht aus den Kapiteln A bis O. Er enthält die grundlegenden theoretischen und methodischen Resultate zur Entwicklung von nicht-balancierten Modellen mit zufälligen Effekten und einen Überblick von Prozeduren, die in gängigen Softwarepaketen (SAS, SPSS, BMDP, S-Plus, GenStat, Bugs) angeboten werden. Eine allgemeine Literaturliste, ein Autoren- und Sachindex beschließen das Buch.

Aufgrund der Fülle des Materials werden gemischte Modelle (Modelle mit zufälligen und festen Effekten), die in der Praxis eine wichtige Rolle spielen, nicht behandelt. Der Band stellt aber eine umfassende Quelle der methodischen Entwicklungen von zufälligen Modellen mit unbalancierten Daten dar. Die Autoren bevorzugen einen klaren Schreibstil mit ausführlichen Erklärungen von anspruchsvollen Inhalten. Die Monographie eignet sich hervorragend als Ausgangspunkt für Spezialseminare oder als Grundlage für eigene Arbeiten mit den diskutierten Modellansätzen.

E. Stadlober (Graz)

F. Sauvigny: Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik 2. Funktionalanalytische Lösungsmethoden. Unter Berücksichtigung der Vorlesungen von E. Heinz. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, XII+350 S. ISBN 3-540-23107-2 P/b € 34,95.

Dargestellt wird eine Existenz- und Eindeigkeitstheorie elliptischer Gleichungen 2. Ordnung in n Variablen einerseits und nichtlinearer elliptischer Systeme in 2 Variablen andererseits, die in der Differentialgeometrie (z.B. Rellichsches Flächensystem, abgebildet auf der vorderen Umschlagseite) und in der Funktionentheorie auftreten. Zur Lösung werden angewendet: die Kontinuitätsmethode (J. Leray, J. Schauder, Topologie et équations fonctionelles. Ann. Ec. Norm. Sup. 51 (1934), 45–78) und die topologische Methode in Räumen differenzierbarer und hölderstetiger Funktionen, sowie die Variationsmethode („schwache Lösung“) in Sobolewräumen. Die Darstellung beruht wesentlich auf G. Hellwig, Partielle Differentialgleichungen (Teubner, Stuttgart, 1960) und auf Vorlesungen von E. Heinz über partielle Differentialgleichungen (Göttingen, 1973–1976). Dementsprechend wird das Auslangen mit „einfachen Hilfsmitteln der Funktionalanalysis“ gefunden (Hellwig, Vorwort), die ergänzend zu Band I in 2 Kapiteln („Operatoren im Banachraum“, „Lineare Operatoren im Hilbertraum“) zusammengestellt sind.

Unzutreffend ist die Beschreibung im Klappentext: „Dieses zweibändige Lehrbuch stellt das *Gesamtgebiet* der partiellen Differentialgleichungen – vom elliptischen, parabolischen, hyperbolischen Typ – in zwei und mehreren Veränderlichen vor.“ So fehlt beispielsweise die Theorie hyperbolischer Gleichungen und Systeme, wie sie im 20. Jahrhundert entwickelt wurde (und in Lehrbuchform u.a. in M. Schechter, Modern Methods in Partial Differential Equations, Mc Graw Hill, New York, 1977, zu finden ist). Dass die „Welt“ der partiellen Differentialgleichungen viel umfassender ist, ist auch an den 4 Grundlehrenbänden von L. Hörmander oder an den Büchern von F. Trèves, J.L. Lions-E. Magenes, J. Chazarain-A. Piriou und S. Mizohata zu sehen.

Wenig Beispiele und kaum motivierende Beschreibungen führen zur Frage, warum gerade die vom Autor getroffene Stoffauswahl wichtig sein sollte.

N. Ortner (Innsbruck)

B. Simon: Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1+2. Part 1: Classical Theory. Part 2: Spectral Theory. (AMS Colloquium Publications, Vol. 54, Part 1+2.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005, XXV+466+XXI+578 S. ISBN 0-8218-3757-5 (Set) H/b \$ 149,–.

As a non-specialist in the theory of orthogonal polynomials, who is reminded once a week to study this field of mathematics due to its far-reaching applications, I am reviewing these books with great pleasure. A very recommendable introduction to the two parts is provided by Barry Simon himself in Section 1.1.

Barry Simon's impressive two books are called "Orthogonal Polynomials on the

Unit Circle”, subtitled “Classical Theory” and “Spectral Theory” for the first and second part, respectively. The books are in fact one “large book broken in two” published 65 years after Gábor Szegő’s 1939 book “Orthogonal Polynomials” by the same publisher. Splitting long papers in two with successive numberings is a tradition in the subject going back to I. Schur and G. Szegő and being respected by Barry Simon as well.

The theory of orthogonal polynomials on the unit circle (OPUC) deals with probability measures μ on the unit circle $\partial\mathbb{D}$, which have infinite support. We can consider $L^2(\partial\mathbb{D}, d\mu)$, which contains the polynomials as dense subset of functions. The Gram-Schmidt procedure leads to polynomials Φ_n of degree n , for $n \geq 0$, with leading coefficient 1, i.e.

$$\Phi_n(z) = z^n + \text{lower order},$$

such that the functions $\phi_n = \frac{\Phi_n}{\|\Phi_n\|}$ constitute an orthonormal basis. This allows us to formulate Szegő’s fundamental recurrence for the polynomials Φ_n :

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \overline{\alpha_n}\Phi_n^*(z)$$

with parameters $\alpha_0, \alpha_1, \dots \in \mathbb{D}$, i.e. $|\alpha_i| < 1$. Here Φ_n^* denotes the reversed polynomial defined by $\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi_n(\frac{1}{z})}$. Verblunsky’s Theorem then asserts the exciting statement that the map $\mu \mapsto (\alpha_n)_{n \geq 0}$ is one-to-one between the set of probability measures with infinite support and the set of sequences in $\mathbb{D}$. The α_n are called Verblunsky coefficients. Barry Simon presents five different proofs of Verblunsky’s Theorem!

The main question in OPUC are relations between the Verblunsky coefficients on the one hand and μ on the other, such as Geronimus’ Theorem, Szegő’s (strong) Theorem, Baxter’s Theorem and Rakhmanov’s Theorem. The latter for instance states that if there is a nonvanishing absolutely continuous part of μ , then $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. In all cases several different proofs are presented. These beautiful theorems, which give a taste of both the books’ style and OPUC lead to many interesting applications, which are listed here without further comments: stationary stochastic processes, Schur functions and H^∞ , Toeplitz determinants and matrices, random matrix theory, spectral theory of Schrödinger operators (one door, where Barry Simon entered), unitary operators, geophysical scattering, a model in solid-state physics, generating functions in combinatorics, orthogonal polynomials on the real line. Several extensions have been considered, and are presented in the books. With respect to Schrödinger Operators, part 2 is the first book on general spectral theory covering the last 15 years of research in this field.

These very recommendable books on this amazing subject are complemented by interesting historical remarks and an extensive bibliography of about 1.119 items. I believe that similar to Gábor Szegő’s work there will be more than one edition of the books.

Who is interested in an extensive, profound and funny specialist's review of Barry Simon's books might want to read Paul Nevai's, which was published in the Bulletin of the AMS and can also be found on Barry Simon's webpage.

J. Teichmann (Wien)

K. Zhu: Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball. (Graduate Texts in Mathematics 226.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, X+271 S. ISBN 0-387-22036-4 H/b € 69,95.

Untersucht werden Räume holomorpher Funktionen in der Einheitskugel von $\mathbb{C}^n$, die zur p -ten Potenz integrierbar sind bezüglich eines gewichteten Volumsmaßes (Bergman spaces), sowie Besov- und Lipschitzräume holomorpher Funktionen (weitere Bloch- und Hardy Räume). Untersuchung der Elemente solcher Räume heißt: Angabe von Integraldarstellungen sowie Charakterisierung durch Eigenschaften ihrer Ableitungen, Zerlegung in Atome. Weiters werden die Interpolationsräume dieser Räume, deren Duale und Multiplikatoren angegeben.

Die Einheitskugel wird gewählt, da sie die Untersuchung durch "straight forward formulas without much fuss" gestattet. Im etwas umfassenderen Enzyklopädieartikel von A.B. Aleksandrov ("Function Theory in the Ball", in: *Several Complex Variables II* (eds.: G.M. Khenkin, A.G. Vitushkin, Springer, Berlin, 1994, pp. 107–178; ohne Beweise) wird die Verwendung der Einheitskugel motiviert als "The simplest example of a pseudoconvex domain with smooth boundary and the simplest bounded classical domain".

Ausgangspunkt ist W. Rudins Grundlehrenband "Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$ " (Springer, 1980), über welchen die Ergebnisse jedoch weit hinausreichen (Zerlegung in Atome und BMO kommen dort noch nicht vor). Zhu's Darstellung ist bestechend klar und systematisch – eine wertvolle Weiterführung seiner eindimensionalen Darstellungen in "Operator Theory in Function Spaces" (M. Dekker, 1990) und "Theory of Bergman Spaces" (mit H. Hedenalm, B. Korenblum, Springer, 2000).

N. Ortner (Innsbruck)

SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS

Join the thousands of mathematics educators throughout the world who regularly read SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS — the leader in its field since 1902. The journal is published eight times a year and is aimed at an audience of high school and university teachers. Each 96 page issue contains ideas that have been tested in the classroom, news items to research advances in mathematics and science, evaluations of new teaching materials, commentary on integrated mathematics and science education and book reviews along with our popular features, the mathematics laboratory and the problem section.

The institutional subscription rate for foreign subscribers is US\$ 46,— per year (surface mail), US\$ 96,- per year (air mail).

Orders should be addressed to

**School Science and Mathematics, Dr. Donald Pratt
Curriculum and Foundations, Bloomsburg University
400 E Second Street, Bloomsburg, PA 17815, USA**

Internationale Mathematische Nachrichten

Fifth European Congress of Mathematics in Amsterdam, July 14–18, 2008

The Fifth European Congress of Mathematics (5ECM) will be organized in Amsterdam, from 14–18 July, 2008, under the auspices of the European Mathematical Society. This congress is the fifth in a series of successful four-yearly European congresses that cover the whole range of the mathematical sciences, from pure to applied. The series started in Budapest, in 1992, followed by meetings in Paris (1996), Barcelona (2000), and Stockholm (2004). The ECM congresses alternate with the IMU world congresses, organized every $(2 \bmod 4)$ year.

Next year's ECM congress will be organized under the special patronage of the Koninklijk Wiskundig Genootschap (Royal Dutch Mathematical Society, KWG), and will include the yearly meeting of the members of KWG. The 5ECM Local Organizing Committee consists of Andre Ran (Free University Amsterdam, chairman), Herman te Riele (CWI Amsterdam, secretary), and Jan Wiegerinck (University of Amsterdam, treasurer).

An outstanding Scientific Committee with representatives from all over Europe, chaired by Lex Schrijver (CWI and University of Amsterdam), has composed an interesting scientific program consisting of ten Plenary lectures, three (also plenary) Science lectures, about thirty (parallel) invited lectures, and twenty-one (parallel) Minisymposia. In addition, ten Prize lectures will be presented by outstanding young European mathematicians, selected by a Prize Committee chaired by Rob Tijdeman (Leiden University).

The ten Plenary lectures will be presented by

- *Luigi Ambrosio* (Scuola Normale Superiore di Pisa),
- *Christine Bernardi* (Université Paris VI),
- *Jean Bourgain* (IAS Princeton),
- *Jean-Francois Le Gall* (ENS & Université Paris VI),
- *Francois Loeser* (ENS Paris),
- *Laszlo Lovasz* (Eötvös Lorand University, Budapest),
- *Matilde Marcolli* (Max Planck Institut Bonn),
- *Felix Otto* (Universität Bonn),
- *Nicolai Reshetikhin* (Univ. of California, Berkeley), and

– *Richard Taylor* (Harvard University, Cambridge);

The three Science lectures will be presented by

- *Ignacio Cirac* (Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching), on Quantum Information Theory,
- *Tim Palmer* (ECMWF Reading), on Climate Change, and
- *Jonathan Sherrat* (Heriot-Watt University), on Mathematical Biology.

The topics and the organizers of the Minisymposia are the following:

- *Advances in Variational Evolution* (A. Mielke, U. Stefanelli)
- *Algebra in Optimization* (J. Draisma, M. Laurent)
- *Applications of Noncommutative Geometry* (G. Cornelissen, K. Landsman)
- *Applied Algebraic Topology* (M. Farber)
- *Combinatorics of Hard Problems* (J. Diaz, O. Serra, J. Nešetřil)
- *Coupled Cell Networks* (P. Ashwin, A. Dias, J. Lamb)
- *Discrete Structures in Geometry and Topology* (D. Feichtner-Kozlov)
- *Galois Theory and Explicit Methods* (B. de Smit)
- *Global Attractors in Hyperbolic Hamiltonian Systems* (A. Comech, A. Komech)
- *Graphs and Matroids* (B. Gerards, H. van der Holst, R. Pendavingh)
- *Hypoellipticity, Analysis on Groups and Functional Inequalities* (W. Hebisch, B. Zegarlinski)
- *Mathematical Challenges in Cellular Systems* (F. Bruggeman, M. Peletier)
- *Mathematical Logic* (P. Koepke, B. Lowe, J. van Oosten)
- *Mathematical Finance* (H. Schumacher, P. Spreij)
- *Mathematics of Cryptology* (R. Cramer)
- *Representation Theoretical Methods and Quantization* (S. Caenepeel, J. Fuchs, A. Stolin, C. Schweigert, F. van Oystaeyen)
- *Rough Path Theory* (P. K. Friz)
- *Singular Structures in Variational PDEs* (M. Roeger, M. Peletier)
- *Spectral Problems and Hilbert Spaces of Entire Functions* (J. Bruna, H. Hedenmalm, K. Seip, M. Sodin)
- *Spectral Theory* (E.B. Davies, T. Weidl, F. Klopp, T. Hoffmann-Ostenhof)
- *Weak Approximations of Stochastic Differential Equations* (D. Crisan).

Special activities, organized by the KWG, are the Brouwer medal ceremony (an event organized every three years in memory of the Dutch mathematician L.E.J. Brouwer, consisting of a laudatio, a lecture and a medal presentation, followed by a reception), a historical lecture on Brouwer's life and work (by Dirk van Dalen), and the so-called Beeger lecture (an event organized every two years in memory of the Dutch high-school teacher and mathematician N.G.W.H. Beeger, with a talk on algorithmic and/or computational number theory). The names of the Brouwer and Beeger lecturers will be announced later.

For more information on the conference, such as grants, up-to-date information on the program, and for registration, please visit our website at <http://www.5ecm.nl>.

The organizers are proud that the EMS has selected Amsterdam to be the host city for its fifth congress, and we look forward to meeting you all next year in Amsterdam. Do not miss this opportunity to learn about the latest developments in mathematics, to meet old friends, and make new acquaintances, while enjoying a charming city with many ‘do-not-miss-this’ sights!

The 5ECM Local Organizing Committee

Johann Radon Lectures 2007/08

Festsaal der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, 1010 Wien, Dr. Ignaz Seipel-Platz 2.

17. Oktober 2007, 18:15 Uhr: *Pierre-Louis Lions* (College der France, Paris).
Moderator: Peter Markowich (Cambridge).
21. November 2007, 18:15 Uhr: *Peter Deuflhard* (Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin): Mathematik im Dienst der modernen Medizin. Von der Krebstherapie zur Mund-Kiefer-Gesichtschirurgie.
Moderator: Peter Schuster (Präsident der ÖAW).
5. Dezember 2007, 18:15 Uhr: *Martin Nowak* (Harvard University).
Moderator: Karl Sigmund (Uni Wien, ÖAW).
9. Jänner 2008, 18:15 Uhr: *Paul Embrechts* (ETH Zürich).
Moderator: Walter Schachermayer (TU Wien, ÖAW).
5. März 2008, 18:15 Uhr: *Frank Natterer* (Universität Münster): Röntgen, Radon und kein Ende.
Moderator: Heinz Engl (Uni Wien, ÖAW).
9. April 2008, 18:15 Uhr: *Ingrid Daubechies* (Princeton University).
Moderator: Heinz Engl (Uni Wien, ÖAW).

(Österreichische Akademie der Wissenschaften)

Abel Prize 2007

On 22 May 2007, the King of Norway presented the Abel Prize for 2007 to *Srinivasa S.R. Varadhan* Courant Institute of Mathematical Sciences, New York. S.S.R. Varadhan presented his Abel lecture on 23 May, followed by lectures by G. Papanicolaou, O. Zeitouni and T. Lyons.

See: <http://www.abelprisen.no/en/>

(IMU)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Persönliches (Korrektur)

Herr emer. Univ.Prof. Dr. DDr.h.c.mult. *Edmund Hlawka* erhielt das Große Goldene Ehrenzeichen mit Stern für Verdienste um die Republik Österreich.

In den IMN 204 wurde irrtümlich „Ehrenkreuz“ geschrieben. Die Redaktion bittet für diesen Fehler um Nachsicht.

Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2008

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2008 wieder zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2006 oder 2007 eine Diplomarbeit bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Diplomarbeiten ist ein Abschluss eines Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Doktoratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlossenen Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten Mathematiker bzw. Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2008 bei mir einlangen und folgende Unterlagen enthalten:

1. Ein Exemplar der als besonders hoch qualifiziert bewerteten mathematischen Diplomarbeit bzw. Dissertation;
2. zwei begründete Bewertungen dieser Diplomarbeit bzw. Dissertation;
3. einen Lebenslauf des Kandidaten bzw. der Kandidatin einschließlich kurzer Beschreibung des Studienablaufes.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachtungskommission die Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500,— € dotiert. Jeder Preisträger erhält eine Urkunde.

Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird sie (er) auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Robert F. Tichy

Adresse:

o.Univ.-Prof. Dr. Robert F. Tichy
Institut für Mathematik der TU Graz,
Steyrergasse 30
8010 Graz

Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2008

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2008 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematiker oder Mathematikerinnen, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind. Ein wesentlicher Teil der Arbeiten muss in Österreich erbracht worden sein.

Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten habilitierten Mathematiker bzw. Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2008 bei mir einlangen und folgende Unterlagen enthalten:

1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung;
2. Publikationsliste;
3. wissenschaftlicher Lebenslauf.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine Begutachtungskommission den Preisträger oder die Preisträgerin aus. Der Preis ist mit 1.000,– € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird der Preisträger oder die Preisträgerin eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten.

Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er oder sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Robert F. Tichy

Adresse:

o.Univ.-Prof. Dr. Robert F. Tichy
Institut für Mathematik der TU Graz,
Steyrergasse 30
8010 Graz



ÖAW

Österreichische Akademie
der Wissenschaften

StadT  Wien

Ausschreibung

Aus Anlass des 150-jährigen Bestehens der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (ÖAW) hat die Stadt Wien den *Jubiläumsfonds der Stadt Wien für die Österreichische Akademie der Wissenschaften* gegründet.

Der Jubiläumsfonds fördert in diesem Jahr Forschungsprojekte zum Thema *Computational Science*, die von Wiener WissenschaftlerInnen aus den Fachbereichen der Naturwissenschaften, der Mathematik, der Informatik sowie allen Angewandten Wissenschaften initiiert und/oder in Wiener Forschungseinrichtungen durchgeführt werden. Projekte können eingereicht werden, die sich mit rechnergestützten Forschungen befassen und die durch mathematische Modellbildung, Entwicklung von Algorithmen und Simulation komplexe Zusammenhänge erforschen.

Computational Science Einreichtermin 15.9.2007

Es werden zwei Forschungsprojekte in der Höhe von jeweils max. € 70.000 gefördert. Bewerbungen sind an das Generalsekretariat des Jubiläumsfonds zu richten:

Generalsekretär Univ.-Prof. Dr. Hubert Ch. Ehalt,
Friedrich Schmidt-Platz 5, 1082 Wien

Informationen und Bewerbungsrichtlinien

- Im Generalsekretariat des Jubiläumsfonds:
Mag. Angelika Lantzberg, T 4000-88742, Lantzberg@wissfonds.wien.at
- In der Abteilung für Stipendien & Preise der ÖAW:
Dr. Lottelis Moser, T 51581-1207, Lottelis.Moser@oeaw.ac.at
- Auf der Homepage der ÖAW: www.oeaw.ac.at