IMN

Internationale Mathematische Nachrichten

Nr. 183

Der Satz von Hahn-Banach

W. Wunderlich und die IMN

J.P. Bourguignon zur Rolle der Mathematik

Österreichische Mathematische Gesellschaft

April 2000

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen. Jahresbeitrag: 250.– öS.

Bankverbindung: Scheckkonto Nr. 229-103-892 der Bank Austria AG, Zweigstelle Wieden, oder PSK Kto. Nr. 7823-950, Wien.

Eigentümer, Herausgeber, und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Kopitu, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926.

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 183 (54. Jahrgang) **Oktober 2001**

Inhalt

Das Titelblatt zeigt einen sogenannten *Tribar* — ein Beispiel einer zweidimensionalen Darstellung eines dreidimensional unmöglichen Gegenstandes, der aus drei Stäben gebildet wird, die ein räumliches ‘Dreieck’ mit drei rechten Winkeln bilden — erstmals beschrieben von Roger Penrose im *British Journal of Psychology*, Band 49 (1958).

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 183 (2001), 1–20

Hahns Weg zum Satz von Hahn-Banach

Harro Heuser

1 Fredholm und Hilbert

Exakt im Jahr 1900 (als Hahn gerade 21 Jahre alt war) fand die Geburtsstunde der Funktionalanalysis statt, und zwar in Form einer kleinen Arbeit von Ivar Fredholm: *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* [4]. Fredholms Ausgangspunkt war der Umstand, daß das Dirichletproblem in eine Integralgleichung der Form

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{1}$$

umgeformt werden kann.

Er wurde von Volterras Idee angeregt, eine Integralgleichung als Grenzfall eines endlichen Systems von linearen Gleichungen zu betrachten. Aber anstatt die schwere *passagio dal discontinuo al continuo* durchzuführen, führte Fredholm direkt eine Größe D (eine unendliche Reihe von Integralen) ein, die er (*à cause de l'analogie qui existe entre les équations linéaires et l'équations fonctionnelle*) die „Determinante" von (1) nannte. Das war der eigentliche Durchbruch. Mit Hilfe von D gelang es Fredholm in Kürze, eine Rohform der *Fredholm-Alternative* zu entwickeln und er konnte auf etwas mehr als einer Seite die Lösbarkeit des Dirichletproblems sicherstellen.

Hilbert erkannte sofort die Tragweite der Fredholmschen Idee. Praktisch unmittelbar darauf begann er daran zu arbeiten und publizierte zwischen 1904 und 1910 seine berühmten sechs *Mitteilungen* über lineare Integralgleichungen. Als erstes tat er das, was Fredholm vermieden hatte: er führte den Grenzprozeß von einem System linearer Gleichungen zur Integralgleichung (1) tatsächlich durch und konnte mit dieser *tour de force* die Lösbarkeitskriterien der elementaren linearen Algebra für die „transzendente" Gleichung (1) übersetzen.

Hilberts Überlegungen erfahren nun eine entscheidende Wendung. Mittels einer

ISSN 0020-7926.

orthonormalen Basis $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots\}$ von $C[a,b]$ ordnet er der Integralgleichung

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s) \qquad (K, f \text{ stetig}) \tag{2}$$

ein unendliches System von linearen Gleichungen

$$x_p = \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} x_q = y_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

mit

$$\begin{aligned} x_p &= \int_a^b \varphi(s)\Phi_p(s)\,ds, \quad k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\Phi_p(s)\Phi_q(t)\,ds\,dt \\ y_p &= \int_a^b f(s)\Phi_p(s)\,ds, \end{aligned} \tag{4}$$

zu, wobei die Reihen $\sum x_p^2$, $\sum y_p^2$, $\sum k_{pq}^2$ (wegen der Besselschen Ungleichung) konvergieren. Die Gleichungen (2) und (3) sind im folgenden Sinn äquivalent: eine stetige Lösung $\varphi(s)$ von (2) ergibt via (4) eine Lösung $(x_1, x_2, \ldots)$ von (3) mit $\sum x_p^2 < \infty$, und umgekehrt ergibt eine Lösung von (3) eine (stetige) Lösung $\varphi(s) = \sum x_p \Phi_p(s)$ von (2). So wurde Hilbert zur Untersuchung unendlicher Systeme von linearen Gleichungen (3) geführt, wobei $(y_1, y_2, \ldots)$ (in unserer Sprechweise) im l^2 liegt und Lösungen $(x_1, x_2, \ldots)$ gesucht werden, die ebenfalls im l^2 liegen.

Hilbert behandelte das System (3) mittels „Bilinearformen"

$$A(x,y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q \tag{5}$$

in unendlich vielen Variablen. (5) ist eine Kurzschreibweise für die Folge der „*Abschnitte*"

$$A_n(x,y) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p x_q \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Hilbert nennt die Bilinearform (5) *beschränkt*, falls eine Schranke M existiert, sodaß für alle „*Wertesysteme*" x, y mit $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \leq 1$, $\sum_{p=1}^{\infty} y_p^2 \leq 1$ und für alle natürlichen n die Ungleichungen

$$|A_n(x,y)| \leq M \tag{7}$$

erfüllt sind. In diesem Fall existiert für alle $x, y \in l^2$ der Grenzwert $\lim A_n(x,y)$, der auch mit $A(x,y)$ bezeichnet wird. Eine beschränkte Bilinearform ist ein (versteckter) Endomorphismus des l^2; aber dieser Gesichtspunkt linearer Abbildungen wird von Hilbert nicht wahrgenommen.

Einer der Höhepunkte der *Mitteilungen* ist die Spektraltheorie beschränkter quadratischer Formen

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q \qquad (k_{pq} = k_{qp}). \tag{8}$$

Hilberts Ausgangspunkt ist der Umstand, daß die „*Abschnitte*“ $K_{x,x}$ mittels einer orthogonalen Transformation in eine Summe von Quadraten umgeformt werden können. Beim Grenzübergang $n \to \infty$ stößt er auf ein gänzlich neues Phänomen: auf das *kontinuierliche Spektrum*. Diese erste wesentliche Abweichung vom endlichdimensionalen Fall manifestiert sich in einer Integraldarstellung für $K(x,x)$.

1912 publiziert Hilbert die sechs *Mitteilungen* in seinem klassischen Buch *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*.

2 Hahns Bericht

Im Jahr 1909 hielt der erst dreißigjährige Hahn einen eingeladenen Vortrag über lineare Integralgleichungen bei der Jahrestagung der *Deutschen Mathematiker-Vereinigung* in Salzburg. Eine ausführliche Version der ersten Hälfte wurde 1911 als *Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen* [5] publiziert. Die zweite Hälfte war ein Überblick über die Hilbertsche Methode in unendlich vielen Variablen. Sie erschien niemals, wahrscheinlich weil Hilbert sein oben erwähntes Buch 1912 publiziert hatte.

Hahns *Bericht* faßt die grundlegenden Fredholmschen Resultate über allgemeine Integralgleichungen und die Hilbertsche Eigenwerttheorie von Integralgleichungen mit symmetrischen Kernen zusammen. Andere wichtige Entdeckungen waren auch eingebunden, z.B. der Satz von Mercer, der in Deutschland vor dem *Bericht* kaum bekannt war. Im Geist Volterras, Fredholms und Hilberts [5, p. 73–74] bemerkt er:

> „Das Problem der Auflösung der [linearen] Integralgleichungen [erster und zweiter Art] ist ein transzendentes Analogon zur Auflösung linearer Gleichungssysteme. In der Tat gibt es zwei transzendente Verallgemeinerungen des Summenbegriffs: den der unendlichen Reihe und den des bestimmten Integrales, und dementsprechend zwei Arten, wie man von algebraischen Problemen auf dem Weg verallgemeinernder Analogie zu transzendenten Problemen kommen kann ... Bei der ersten Art der Verallgemeinerung wird aus dem Problem der Auflösung von *n* linearen Gleichungen für *n* Unbekannte das der Auflösung von unendlich vielen linearen Gleichungen für unendlich viele Unbekannte; bei der zweiten Art der Verallgemeinerung aber wird man auf die linearen Integralgleichungen geführt.“

Trotzdem führt Hahn im Kapitel III seines *Berichts* (wo er Hilberts Eigenwerttheorie für Integralgleichungen mit symmetrischen Kernen darlegt) Hilberts umständlichen Grenzprozeß, der von einem endlichen System linearer Gleichungen ausgeht, nicht aus, sondern verwendet statt dessen eine viel elegantere Methode, die Erhard Schmidt, ein Schüler Hilberts, („*unter Vermeidung des Grenzüberganges aus dem Algebraischen*“) in seiner Doktorarbeit (1905, publiziert in [23]) entwickelt hatte.

Ein Jahr nach seinem *Bericht* publizierte Hahn (anstelle des versprochenen Teils über die „Methode unendlich vieler Variablen“) seine Arbeit [6] *Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen*. Es hatte sich herausgestellt, daß in Hilberts Spektraltheorie (beschränkter) quadratischer Formen die mögliche Existenz eines kontinuierlichen Spektrums („*Streckenspektrum*“) das Hauptproblem war. Einerseits gab es keine „Objekte“, die in natürlicher Weise als Eigenvektoren zu den

Punkten des kontinuierlichen Spektrums dienen konnten, und andererseits stellte sich die heikle Frage nach der orthogonalen Äquivalenz von quadratischen Formen. Im endlichdimensionalen Fall gilt, daß zwei quadratische Formen genau dann orthogonal äquivalent oder „ähnlich“ sind, wenn die Eigenwerte der Form und ihre entsprechenden Vielfachheiten übereinstimmen. Im unendlichdimensionalen Fall zerstört die mögliche Existenz eines kontinuierlichen Spektrums so ein einfaches Kriterium. Ernst Hellinger, ein Schüler Hilberts, hatte diese Probleme in seiner Dissertation *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (Göttingen, 1907) behandelt. Er hatte „Eigendifferentialformen“ als Ersatz für Eigenvektoren im Fall des kontinuierlichen Spektrums eingeführt, und in diesem Kontext hatte er die „Hellinger-Integrale“

$$\int_a^b \frac{(df(x))^2}{dg(x)} \tag{9}$$

als das Supremum aller Summen der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}{g(x_i)-g(x_{i-1})} \quad (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b) \tag{10}$$

definiert, wobei f stetig, g monoton wachsend ist und f in jedem Teilintervall von $[a,b]$ konstant ist, wo g konstant ist. Hahn verfolgte zwei Ziele: erstens wollte er mit Hilfe des Lebesgueintegrals das Hellinger-Integral vermeiden und auf diese Weise Hellingers Untersuchungen vereinfachen und zweitens wollte er die Vielfachheit eines kontinuierlichen Spektrums so definieren, daß sie bei orthogonalen Transformationen invariant bleibt; dies gelang ihm durch Einführung des Begriffs von „geordneten Systemen von Eigendifferentialformen“. Sein Hauptresultat formulierte er vereinfacht dargestellt folgendermaßen:

> „Als notwendig und hinreichend für orthogonale Äquivalenz zweier beschränkter quadratischer Formen ergibt sich schließlich die Übereinstimmung der Punkt- und Streckenspektra (einschließlich der Vielfachheit) und das Bestehen gewisser Gleichungen, und zwar doppelt so vieler, als die größte im Streckenspektrum auftretende Vielfachheit beträgt.“[1]

Es scheint, als fühlte sich Hellinger (der vier Jahre jünger war als Hahn) ein wenig verletzt von Hahns Ausführungen, daß in der Theorie quadratischer Formen das Lebesgueintegral ein geeigneteres Werkzeug sei als sein eigener „*integralartiger Grenzprozeß*“, zumal er in seiner Dissertation genau das Gegenteil behauptet hatte. In seinem Referat [9] über Hahns Arbeit zögert er, die Verdienste der beiden Zugänge zu beurteilen; schließlich konzediert er doch, daß Hahns Formulierung

[1] [6], p. 161. Eine präzise Formulierung dieses Satzes findet man auf p. 224 von [6].

„eleganter“ wäre, aber im wesentlichen „identisch“ mit seinen eigenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die orthogonale Äquivalenz, *„was entgegen den leicht mißzuverstehenden Ausführungen in Hahns Einleitung hier zu bemerken erlaubt sei“*.

Hellingers und Hahns Arbeiten über die Orthogonaläquivalenz beschränkter quadratischer Formen wurden schließlich von Gelfands Theorie kommutativer Banachalgebren abgelöst.

3 Eduard Helly

Zehn Jahre verstrichen, bis Hahn seine nächste funktionalanalytische Arbeit [7] *Über Folgen linearer Operationen* veröffentlichte. Diese Arbeit war stark von Eduard Helly beeinflußt. Helly war 1921 Privatdozent an der Universität Wien geworden und Hahn ebendort ordentlicher Professor. Im selben Jahr publizierte Helly seine grundlegende Arbeit *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, von der Hahn hauptsächlich inspiriert wurde. Bei der Analyse der gängigen Theorien unendlicher Systeme von linearen Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

entdeckte Helly die enorme Bedeutung der *„konvexen Abstandsfunktion“* (Norm) auf Folgenräumen:

> „In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß der wesentliche Inhalt der [Lösbarkeitsbedingungen von E. Schmidt und F. Riesz] darin liegt, daß im Raum von abzählbar unendlich vielen Dimensionen, in welche die geometrische Interpretation des Gleichungssystems vor sich geht, eine Abstandsbestimmung vorliegt, für welche das „Dreiecksaxiom“ gilt, oder, um den Zusammenhang mit den Minkowskischen Begriffsbildungen hervorzuheben, der „Aichkörper“ ein konvexer Körper ist.“

Bis zu diesem Zeitpunkt hatten Mathematiker (mit Ausnahme des noch unbekannten Stefan Banach) immer *konkrete* lineare Räume (z.B. $C[a,b]$, l^2, L^p) betrachtet und auf ihnen *konkrete* Normen definiert. Helly ging anders vor. Er betrachtete einen *abstrakten* Folgenraum, d.h. einen unspezifizierten linearen Teilraum X des Raums $\mathbf{R}_\omega$ aller Folgen reeller Zahlen $(x_1, x_2, \ldots)$ und nahm an, daß eine *„Abstandsfunktion $D(x)$“* auf X gegeben war, die drei (axiomatisch geforderte) Bedingungen erfüllte; es waren genau jene, die wir jetzt als Normaxiome bezeichnen. Da Helly das System (11) studieren wollte, mußte er jene „Punkte“ $u = (u_1, u_2, \ldots)$ aus $\mathbf{R}_\omega$ betrachten, für die die Reihen

$$(u, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k \tag{12}$$

konvergieren. Schließlich führte ihn das Studium der Schmidt-Riesz-Theorie über lineare Gleichungen dazu, nur jene Punkte u zuzulassen, für die

$$\Delta(u) = \sup\{|(u,x)| : x \in X, D(x) = 1\} \tag{13}$$

endlich ist. Diese Punkte bilden einen linearen Teilraum U von $\mathbf{R}_\omega$, $\Delta(u)$ ist eine Halbnorm auf dem „polaren Raum“ U, und für alle $x \in X$ und $u \in U$ gilt die „fundamentale Ungleichung“

$$|(u,x)| \leq \Delta(u)D(x). \tag{14}$$

Mit anderen Worten: Helly betrachtet alle Folgen u, die via (12) ein beschränktes lineares Funktional auf X generieren (der Nachteil dieser Theorie ist, daß i.a. nicht jedes beschränkte lineare Funktional auf X auf diese Weise erzeugt wird).

Genau ein Jahr nach Hellys Pionierleistung erschien Hahns Arbeit [7]. Oberflächlich betrachtet hatte Hahns Artikel nichts mit Integralgleichungen oder unendlichen Systemen von linearen Gleichungen zu tun. Diesmal wurde er von Darstellungen von Funktionen durch singuläre Integrale und Schurs Untersuchungen über lineare Transformationen unendlicher Reihen angeregt:

> „Anläßlich eines Referats über die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Grenzwerte bestimmter Integrale (sog. s i n g u l ä r e I n t e g r a l e), die ich auf der Versammlung der Deutschen Mathematikervereinigung in Jena hielt, machte mich Herr J. S c h u r aufmerksam, daß die Theorie der singulären Integrale offenbar in enger Beziehung stehe zu seinen Untersuchungen über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. Ich habe nun versucht, eine allgemeine Theorie aufzustellen, in der sowohl die Theorie der singulären Integrale, als auch die Untersuchungen von J. S c h u r als Spezialfälle enthalten sind.“

Nichtsdestoweniger gibt es eine tiefe Beziehung zwischen Hellys Ideen und diese offenbart sich schon im Titel des ersten Abschnitts: „*Die fundamentale Ungleichung*“ — damit meint er Hellys „fundamentale Ungleichung“, aber in einem allgemeineren Zusammenhang. Hahn erkennt, daß sich Helly tatsächlich mit beschränkten Funktionalen auf abstrakten Folgenräumen beschäftigt hat und daß seine neuen Problemstellungen unter dem Blickwinkel beschränkter linearer Funktionale gesehen werden können, diesmal jedoch auf gewissen konkreten Folgen- und Funktionenräumen. An dieser Stelle mußte er bemerkt haben, daß das einzig wirklich zählende strukturelle Element all dieser Räume ihre Linearität ist, gepaart mit dem Umstand, daß sie mit einer „*Abstandsfunktion*“ im Hellyschen Sinn ausgestattet werden können. Konsequenterweise beginnt der erste Absatz seiner Arbeit mit einer seiner wichtigsten Schöpfungen: der Definition eines abstrakten normierten Raums (er nennt ihn „*linearen Raum*“). Die Norm eines Elements a bezeichnet er wie Helly mit $D(a)$. Für das Folgende setzt er ein für alle Mal voraus, daß der normierte Raum vollständig ist (also ein „Banachraum“).

4 Normierte Räume

Um Hahns Errungenschaft richtig zu würdigen, müssen wir uns an die mit Schwierigkeiten behaftete Geschichte der „normierten Räume“ erinnern. Hilbert beachtete die metrische Struktur des „Hilbertraums“ l^2 kaum; es war statt dessen sein Schüler E. Schmidt, der 1908 die kanonische „Länge“ von $A \in l^2$ definierte und sie mit $\|A\|$ bezeichnete [24]. Zwei Jahre später führe F. Riesz [14] die Mengen L^p $(1 \leq p < \infty)$ ein, wies auf ihre Linearität hin, definierte „starke Konvergenz“ (Konvergenz in der L^p-Norm) — aber scheiterte daran, das zu tun, was sich nach E. Schmidts „Geometrisierung“ von selbst ergeben hätte: er kürzte den umständlichen Ausdruck $\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ nicht mit dem bequemen Symbol $\|f\|$ ab, er nannte ihn nicht „Länge“ oder Norm von f und er interpretierte $\|f-g\|$ nicht als „Distanz“ zwischen f und g, obwohl er der Allererste gewesen war, der im Spezialfall des L^2 die kanonische Distanz gerade vier Jahre vorher definiert hatte [15]. Drei Jahre später (1913) beraubte er auch die Folgenräume l^p (in seinem berühmten Buch *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*) ihrer natürlichen Norm und Metrik. Jedoch kurz darauf wendete sich das Blatt entschieden zum Besseren, als er eine seiner einflußreichsten Arbeiten *Über lineare Funktionalgleichungen* [16] schrieb (er beendete sie 1916). In dieser großartigen Abhandlung betrachtete Riesz den „*Funktionenraum*“ $C[a,b]$, nannte das Maximum von $|f(x)|$ (eine Größe, die er immer wieder in seinem funktionalanalytischen Werk verwendete) zum ersten Mal „*Norm*“ von f, bezeichnete sie mit dem Schmidtschen Symbol $\|f\|$ und spezifizierte explizit ihre drei grundlegenden Eigenschaften (die Normaxiome). Nur diese Eigenschaften (und die Vollständigkeit von $C[a,b]$) wurden im theoretischen Teil dieser Arbeit verwendet. Er erkannte die volle Allgemeinheit seiner Methode ganz klar; er bemerkt dazu am Ende der Einleitung:

> „Die in der Arbeit gemachte Einschränkung auf stetige Funktionen ist nicht von Belang. Der in den neueren Untersuchungen über diverse Funktionalräume bewanderte Leser wird die allgemeine Verwendbarkeit der Methode sofort erkennen.“

Stellen wir uns vor, Riesz hätte seine Arbeit mit dem Satz: „Die Grundlage des folgenden ist ein abstrakter linearer Raum, ausgestattet mit einer Norm, die dieselben grundlegenden Eigenschaften wie die Maximums-Norm auf $C[a,b]$ hat“ begonnen. Nichts hätte sich in seiner Arbeit geändert, aber wir würden heute „Rieszräume“ anstelle von „Banachräumen“ studieren.

Der Begriff eines linearen Raums wurde in Italien bereits 1888 unter dem Namen *sistema lineare* durch Giuseppe Peano [13] kreiert, wurde aber in Nordeuropa nicht angenommen. Vielleicht kannte Hahn Peanos Idee, vielleicht zwang ihm die unerbittlich wiederkehrende Linearität der 23 konkreten Beispiele linearer Räume (von [7]) die Idee des „linearen Raums“ auf. Wie auch immer, schließlich und endlich kleidete Hahn Hellys abstrakte Normen mit dem aus, was sie für ein freies Leben dringend brauchten: mit einem abstrakten linearen Raum. Daher beginnt der erste Absatz der Arbeit [7] mit der Definition eines „*linearen Raums*“, womit ein normierter Raum gemeint war. Hahn griff nach dem, wonach Schmidt, Riesz und Helly getastet hatten.

5 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Helly hatte beschränkte lineare Funktionale auf einem Folgenraum X mittels eines anderen Folgenraums und der „konkreten“ Formel (12) erzeugt. Hahn ging ähnlich vor, aber in einer abstrakteren Art und Weise. Er ordnete einem normierten Raum $\mathcal{A}$ einen „polaren Raum“ $\mathcal{B}$ mittels einer „Fundamentaloperation“ $U : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathbf{R}$ zu, die in der ersten Komponente linear ist und

$$\Delta(b) = \sup_{D(a)=1} |U(a,b)| \quad \text{ist endlich für alle } b \in \mathcal{B} \tag{15}$$

erfüllt. Daraus folgt die „fundamentale Ungleichung“ (siehe (14))

$$|U(a,b)| \leq D(a)\Delta(b) \quad \text{für alle } b \in \mathcal{B}. \tag{16}$$

Mit anderen Worten: Hahn erzeugt beschränkte lineare Funktionale auf $\mathcal{A}$ mit Hilfe eines nichtspezifizierten Raums $\mathcal{B}$ und einer gleichermaßen nichtspezifizierten „Fundamentaloperation“ U. All dies wurde im Hellyschen Stil und Hellyscher Notation und Terminologie niedergeschrieben. Aber jetzt kommt etwas Neues.

Hahn nennt eine „*Operationsfolge*“ $U(a,b_n)$ $(n = 1,2,\ldots)$ beschränkt in $\mathcal{A}$, falls für jedes $a \in A$ eine Zahl $M(a)$ existiert, so daß $|U(a,b_n)| \leq M(a)$ für $n = 1,2,\ldots$ gilt. Sein erstes (und grundlegendes) Resultat ist einer der großen Sätze der Funktionalanalysis, das *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit*:

> I. Damit die Operationsfolge $U(a,b_n)$ $(n = 1,2,\ldots)$ beschränkt sei in $\mathcal{A}$, ist notwendig und hinreichend, daß die Folge $\Delta(b_n)$ beschränkt sei.

Der Beweis benützt eine Methode, die, wie Hahn bemerkt, auf Lebesgue zurückgeht und heuzutage „*die Methode des gleitenden Buckels*“ genannt wird. Der Satz selbst hatte als Vorläufer die Proposition III der Hellyschen Arbeit [10] *Über lineare Funktionaloperatoren* (1912). Dieselbe Arbeit wird noch eine wichtige Rolle in der Entstehung des Satzes von Hahn-Banach spielen.

Hahns zweiter Satz ist eine einfache Folgerung aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit:

II. Ist $U(a,b_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ eine in $\mathcal{A}$ konvergente Operationsfolge, so ist

$$V(a) = \lim_{n=\infty} U(a,b_n)$$

eine in $\mathcal{A}$ gleichmäßig stetige lineare Operation.

Natürlich muß $V(a)$ nicht unbedingt von einem $b \in \mathcal{B}$ erzeugt werden. Der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Beschränktheit eines linearen Funktionals, der von Riesz bereits vor Jahren entdeckt worden war, wurde von Hahn nicht erwähnt.

Um die Anwendung des letzten Satzes zu vereinfachen, führt Hahn den Begriff der „*Grundmenge*“ ein: eine Teilmenge $\mathcal{G}$ von $\mathcal{A}$ wird Grundmenge genannt, wenn ihre lineare Hülle dicht in $\mathcal{A}$ ist. Damit kann Hahn seinen dritten Satz (wiederum mit Hilfe des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit) beweisen:

III. Damit die in $\mathcal{A}$ beschränkte Operationsfolge $U(a,b_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ auch konvergent sei in $\mathcal{A}$, ist notwendig und hinreichend, daß sie in allen Punkten g einer Grundmenge $\mathcal{G}$ konvergent sei.

Dieser Satz führt offensichtlich zu einem Banach-Steinhaus-Satz für lineare Operationen $U(a,b_n)$. Der allgemeine Satz von Banach-Steinhaus wurde erstmals in der Arbeit *Sur le principe de la condensation des singularités* ([2], 127) von Banach und Steinhaus formuliert.

Die übrigen 89% der Hahnschen Arbeit sind 23 Anwendungsbeispielen dieser allgemeinen Sätze gewidmet. Im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 48 (1921/22) referierte Hahn selbst seine Arbeit (pp. 473–474); und schreibt nach Wiedergabe seiner Sätze mit gerechtfertigtem Stolz:

> „Diese Sätze fassen eine große Anzahl bekannter Einzeltatsachen zusammen; so enthalten sie bei geeigneter Wahl des Raumes $\mathcal{A}$ und der Maßbestimmenden $D(a)$ den bekannten Satz von Toeplitz über lineare Mittelbildungen, die weitergehenden Sätze von Kojima und I. Schur über lineare Transformationen unendlicher Reihen, die Sätze von Lebesgue über Beschränktheit und Konvergenz linearer Integraloperationen $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$, die Lebesguesche Theorie singulärer Integrale, Hahns Theorie des Interpolationsproblems. Zum Schluße wird noch ein verallgemeinerter Stieltjesscher Integralbegriff $\int_a^b f\,d\Phi$ eingeführt, bei dem die Funktion Φ nicht als von endlicher Variation vorausgesetzt wird, und es werden sowohl Folgen $\int_a^b f\,d\Phi_n$ als auch Folgen $\int_a^b \varphi_n\,df$ verallgemeinerter Stieltjesintegrale auf Beschränktheit und Konvergenz untersucht.“

Es ist übrigens kein kleines Verdienst Hahns, daß dabei eine erhebliche Zahl von Banachräumen eingeführt wurde.

Wir müssen noch einmal zu Banach zurückkehren, um eine Prioritätsfrage zu klären. Im Juni 1920 hatte der achtundzwanzigjährige Stefan Banach seine Dissertation an der Universität Lwów eingereicht. In dieser präsentierte er (dem italienischen Mathematiker Pincherle folgend) die Axiome eines abstrakten Vektorraums und die Axiome von *une opération appelée norme (nous la désignerons par le symbole* $\|X\|$*)*. Schließlich postulierte er die Vollständigkeit dieses normierten Raums: der „Banachraum" war geboren. Einer der Höhepunkte der Banachschen Dissertation ist das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für Folgen stetiger linerarer Abbildungen zwischen zwei Banachräumen; es ist allgemeiner als Hahns Satz, aber es wird mit derselben „*Methode des gleitenden Buckels*" bewiesen. Die Dissertation wurde in *Fundamenta mathematica* 3 (1922) veröffentlicht; somit erschien sie exakt im selben Jahr wie Hahns Arbeit [7]. Sie wurde auch im selben Band 48 (p. 201) des *Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik* wie Hahns Arbeit referiert. An dieser Stelle endet die Übereinstimmung. Während Hahn in seinem Referat die Bedeutung des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit hervorhob, erwähnte der Referent der Banachschen Dissertation dieses gar nicht.

Daher können wir sagen, daß Hahn das Konzept des Banachraums und des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit zwar ein wenig später, aber unabhängig von Banach gefunden hat. Es scheint, als hätte Hahn Banachs Priorität nicht mit Freude erfüllt. Als er fünf Jahre später zum Studium beschränkter linearer Funktionale auf normierten linearen Räumen („*linearer Räume*") in seinem Meisterwerk *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen* ([8], 1927) zurückkehrte, fügte er der Vorausetzung „*Sei* $\mathcal{R}$ *ein linearer Raum*" die vielsagende Fußnote hinzu:

> „Näheres über lineare Räume: *H. Hahn*. Monatsh. f. Math. u. Physik. 32. S. 3 und insbes. *St. Banach*. Fund. math. 3. 131."

Ein Jahr später prägte Fréchet den Begriff *espace de Banach* in seinem Buch *Les espaces abstraits* (1928), und Hahns Beitrag zu diesem grundlegendem Begriff geriet in Vergessenheit.

6 Das Momentenproblem

Der Hauptsatz der Funktionalanalysis warf seine Schatten bereits vage in F. Rieszs Darstellung stetiger linearer Funktionale auf $C[a,b]$ mit Hilfe des Stieltjesintegrales (1909) voraus (im Zusammenhang mit seiner Lösung des „Momentenproblems" auf $C[a,b]$, 1909, 1911), das folgendermaßen lautet [17, 18]:

Seien Funktionen $f_i \in C[a,b]$*, Zahlen* c_i *und eine Konstante* K *gegeben. Dann existiert genau dann eine Funktion* $\alpha \in BV[a,b]$ *mit* $V(\alpha) \leq M$ *und*

$$\int_a^b f_i(x)\, d\alpha(x) = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{17}$$

wenn die Ungleichung

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i\right| \leq M \cdot \max \left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(x)\right| \tag{18}$$

für alle Zahlen μ_i und jedes n gilt.

An dieser Stelle kreuzt Helly einmal mehr den Weg. In seiner wichtigen Arbeit [10] *Über lineare Funktionaloperationen* (1912) faßte er ohne jede Bemerkung das eben erwähnte Resultat von Riesz in einem Satz zusammen, der (wegen seiner Struktur) ihm und Hahn zugerechnet wurde:

> „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine lineare Funktionaloperation [ein stetiges lineares Funktional U auf $C[a,b]$] $U(f)$ existiert, deren Maximalzahl [Norm] den Wert M nicht übersteigt, und für die
>
> $$U(f_i) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$
>
> ist, besteht darin, daß die Ungleichung
>
> $$\left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i\right| \leq M \cdot \max \left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(x)\right|$$
>
> für alle Werte von Zahlen μ_i und jedes n erfüllt ist."

Offensichtlich ist dieser Satz eine Aussage über die lineare und stetige Fortsetzung eines auf der Menge $\{f_1, f_2, \dots\}$ definierten Funktionals auf dem gesamten Raum $C[a,b]$.

Riesz [19, 20] stellte in Analogie zu (18) auch Lösbarkeitsbedingungen für das Momentenproblem in den Räumen L^p und l^p auf. Zusammen mit den (ebenfalls auf Riesz zurückgehenden) Darstellungssätzen für beschränkte Funktionale hätten diese zu einem „Fortsetzungssatz" für Funktionale auf diesen Räumen führen können. Aber in den folgenden Jahren wählte niemand diesen Weg.

Schließlich kam Helly 1921 in seiner bereits erwähnten Arbeit *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten* selbst auf diese Ideen zurück. 1913 hatte Riesz Systeme linearer Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k = c_i \quad (i = 1, 2, \dots) \tag{19}$$

studiert, wobei (in moderner Sprechweise) alle Koeffizientenfolgen $a^{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots)$ im l^q liegen und nur Lösungen $x = (x_1, x_2 \dots)$ im l^p mit $\|x\|_p \leq M$ zugelassen werden; dabei ist $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $\|x\|_p$ die l^p-Norm von x und

M eine vorgegebene Konstante. Helly erkennt, daß der Rieszsche Lösbarkeitssatz als „Fortsetzungssatz“ gesehen werden kann:[2]

> *Es gibt genau dann ein beschränktes lineares Funktional L auf l^q mit $L(a^{(i)}) = c_i$ $(i = 1,2\ldots)$ und $\|L\| = M$, wenn*
>
> $$\left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i\right| \leq M \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} \mu_i a^{(i)}\right\| \quad \textit{für alle Zahlen } \mu_i \textit{ und jedes } n \tag{20}$$
>
> *erfüllt ist.*

L ist das von den Lösungen $x = (x_1, x_2 \ldots .) \in l^p$ erzeugte lineare Funktional.
Um sich vom (l^p, l^q)-Rahmen der Rieszschen Theorie zu lösen, geht Helly, wie bereits erwähnt, von einem allgemeinen Folgenraum X mit einer nichtspezifizierten *„Abstandsfunktion“* (Norm) $D(x)$ aus und definiert einen polaren Raum U und eine polare Funktion $\Delta(u)$ auf U (siehe (13)). Nun hemmt Helly der Umstand, daß die „duale Beziehung“ $(l^q)^* = l^p$, die die Rieszsche Theorie so elegant und überzeugend macht, in seinem abstrakten (U, X)-Konzept kein Gegenstück hat. Und da er das Konzept des „dualen Raums“ weder kennt noch erahnt, gelingt ihm nur eine „Schmalspurversion“ des Rieszschen Lösbarkeitssatzes:

> *Man nehme an, daß für das System (19) (mit $a^{(i)} \in U$, $x \in X$) die Ungleichung*
>
> $$\left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i\right| \leq M \cdot \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i a^{(i)}\right) \tag{21}$$
>
> *für alle Zahlen μ_i und jedes n erfüllt ist. Weiters gebe es ein $M_1 > M$ und ein lineares Funktional L auf U mit*
>
> $$L(a^{(i)}) = c_i \quad (i = 1,2,\ldots) \quad \textit{und} \quad L(u) \leq M_1 \Delta(u). \tag{22}$$
>
> *Gilt darüber hinaus*
>
> $$L(u) = \sum_{i=1}^{\infty} u_k p_k \quad \textit{und} \quad D(p) \leq M_1 \quad \textit{für ein} \quad p \in X, \tag{23}$$
>
> *dann ist $x = p$ eine Lösung von (19).*

Daraufhin zeigt Helly, daß tatsächlich ein lineares Funktional L auf U existiert, das die Bedingung (22) erfüllt, falls U bezüglich der „Abstandsbeziehung“ $\Delta(u)$ *separabel* ist. Näher kam Helly nicht an den Satz von Hahn-Banach heran.

[2] Die folgenden beiden Sätze sind nicht wortwörtlich wiedergegeben.

7 Der Satz von Hahn-Banach

Schließlich erzielte Hahn den entscheidenden Durchbruch, der das Antlitz der Funktionalanalysis verändern sollte, und zwar sechs Jahre nach Hellys Schützenhilfe in seiner Arbeit [8] mit dem nicht vielversprechenden Titel *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*. Gewissermaßen kehrt Hahn zu seiner ersten Begegnung mit der Funktionalanalysis zurück, nämlich zur Theorie linearer Integralgleichungen zweiter Art, die in der Zwischenzeit durch Riesz in seinem bedeutsamen Werk *Über lineare Funktionalgleichungen* [21] erstaunlich bereichert und belebt worden war. In der Einleitung sagt Hahn (die grundlegende Idee der Störungstheorie vorwegnehmend):

> „Bekanntlich sind Integralgleichungen zweiter Art:
>
> $$\varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$
>
> der Untersuchung erheblich leichter zugänglich, als die Integralgleichungen erster Art:
>
> $$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt = f(s).$$
>
> Es liegt das offenbar daran, daß wir die Auflösung der Gleichung $\varphi(s) = f(s)$ vollständig beherrschen, und durch Hinzutreten des Zusatzgliedes $\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$ die für die Gleichung $\varphi(s) = f(s)$ herrschenden durchsichtigen Verhältnisse nicht allzusehr gestört werden. Es liegt also die Frage nahe: sei in irgendeinem linearen Raume, dessen Punkte wir mit x bezeichnen, ein lineares Gleichungssystem gegeben:
>
> $$u_y(x) = c_y,$$
>
> von dem wir wissen, daß es auflösbar ist; unter welchen Umständen wird man daraus auf die Auflösbarkeit des linearen Gleichungssystems
>
> $$u_y(x) + \nu_y(x) = c_y,$$
>
> schließen können? (Im Falle der Integralgleichungen bedeutet x die Funktion $\varphi(s)$ und y durchläuft alle Werte des Intervalles $[a,b]$.) Mit dieser Frage sollen sich die folgenden Zeilen beschäftigen. Als ausschlaggebend erweist sich der in §3 auseinandergesetzte Begriff der *Vollstetigkeit* des Systems der Linearformen $\nu_y(x)$ in bezug auf das System der Linearformen $u_y(x)$, der eine direkte Verallgemeinerung des von Fr. Riesz eingeführten Begriffs der Vollstetigkeit einer linearen Transformation darstellt.“

Er erkennt jetzt, daß ein System $u_y(x) = c_y$, wobei u_y eine „*Linearform*" eines allgemeinen linearen Raums ist und y eine gewisse Indexmenge durchläuft, die einzig richtige Verallgemeinerung eines endlichen Systems linearer Gleichungen ist. Auf natürliche Art und Weise sind damit Integralgleichungen auf Funktionenräumen und unendliche Systeme linearer Gleichungen eingeschlossen.

Das allgemeine Konzept einer „*Linearform*" auf einem linearen Raum ist ein zweites wesentliches Element seiner vereinheitlichenden Theorie. Definitionsgemäß ist eine „*Linearform*" f ein beschränktes lineares Funktional. Er führt die Norm von f ein, die er „*Steigung*" nennt, und bezeichnet sie nach Helly mit $\Delta(f)$.

Natürlich möchte Hahn sicher sein, daß seine sehr abstrakte Theorie „*linearer Gleichungssysteme*" $u_y(x) = c_y$ auf allgemeinen linearen Räumen nicht trivial ist, mit anderen Worten, daß auf jedem normierten Raum tatsächlich nichtverschwindende „*Linearformen*" existieren. Diese Untersuchung eröffnet er mit dem Satz:

> „Wir werden uns nun davon überzeugen, daß es in [dem linearen Raum] $\mathcal{K}$ Linearformen gibt, die nicht identisch verschwinden."

Mit diesen Worten beginnt der Höhenflug des Satzes von Hahn-Banachs.

Hahn beginnt mit einer „filettierten" Version des Riesz-Helly-Satzes, dem wir schon begegnet sind und der sich als die tiefsitzende Wurzel von Hahns großartigem Resultat erweist:

> **Satz II.** Sei $\mathcal{A}$ eine Punktmenge des linearen Raums $\mathcal{K}$, und sei $\mathcal{K}_0$ der von $\mathcal{A}$ aufgespannte lineare Raum [die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathcal{A}$]. Damit es zu der auf $\mathcal{A}$ definierten Funktion $f_0(x)$ eine Linearform $f(x)$ in $\mathcal{K}_0$ gebe, die auf $\mathcal{A}$ mit $f_0(x)$ übereinstimmt und deren Steigung $\leq M$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jede endliche Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ aus Punkten von $\mathcal{A}$ die Ungleichung bestehe:

$$|\lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2) + \cdots + \lambda_n f_0(x_n)| \leq MD(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n). \ (*)$$

Daraus leitet Hahn mittels transfiniter Induktion jenen Satz ab, der seinen Namen unsterblich machte:

> **Satz III.** Sei $\mathcal{K}_0$ ein vollständiger linearer Teilraum von $\mathcal{K}$ und $f_0(x)$ eine Linearform in $\mathcal{K}_0$ der Steigung M. Dann gibt es eine Linearform $f(x)$ in $\mathcal{K}$ der Steigung M, die auf $\mathcal{K}_0$ mit $f_0(x)$ übereinstimmt.

Natürlich ist die geforderte Vollständigkeit nicht von Belang. Unmittelbar darauf erzielt Hahn als ersten Triumph die endgültige Lösung des Riesz-Helly-Momentenproblems:

> **Satz IV.** Sei $\mathcal{A}$ eine Punktmenge des linearen Raum $\mathcal{K}$. Damit es zu der auf $\mathcal{A}$ definierten Funktion $f_0(x)$ eine Linearform $f(x)$ in $\mathcal{K}$ gebe, die auf $\mathcal{A}$ mit $f_0(x)$ übereinstimmt, und deren Steigung $\leq M$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jede endliche Linearkombination aus Punkten von $\mathcal{A}$ Ungleichung $(*)$ gilt.

Daraus ergibt sich unmittelbar der Satz

> **Satz IVa.** Ist der vollständige lineare Raum $\mathcal{K}_0$ echter Teil von $\mathcal{K}$, so gibt es eine nicht identisch verschwindende Linearform in $\mathcal{K}$, die in allen Punkten von $\mathcal{K}_0$ den Wert 0 hat.

Nur nebenbei erwähnt Hahn, daß diese Aussage die Existenz nichttrivialer „*Linearformen*" auf $\mathcal{K}$ sicherstellt (wir erinnern, daß es sein ursprüngliches Ziel war, gerade diese Tatsache sicherzustellen). Ein Blick auf den Beweis von Satz IVa liefert direkt den wichtigen

> **Satz V.** Zu jedem Punkt a $(\neq 0)$ von $\mathcal{K}$ gibt es eine Linarform der Steigung 1, die im Punkte a den Wert $D(a)$ annimmt.

All dies wird im §1 durchgeführt. Im §2 ebnet Hahn den Weg zu einer moderen Dualitätstheorie. Er betrachtet beschränkte lineare Funktionale $u = f(x)$ auf $\mathcal{K}$ als „Punkte" u, identifiziert die „Steigung" $\Delta(u)$ als „*konvexe Maßbestimmung*" (Norm) auf der Menge $\mathcal{S}$ dieser Punkte und zeigt, daß $\mathcal{S}$, ausgestattet mit dieser Norm, vollständig ist. Indem er mit $B(u,x)$ den Wert von $u \in \mathcal{S}$ an der Stelle $x \in X$ bezeichnet, erhält er Hellys „fundamentale Ungleichung" in vollendeter Form:

$$|B(u,x)| \leq \Delta(u)D(x).$$

Hahn nennt $\mathcal{S}$ (wieder Hellys Terminologie verwendend) „*den zu $\mathcal{K}$ polaren Raum*." Wir sollten daran erinnern, daß Hahns polarer Raum von anderer Qualität ist als jener von Helly, da er aus *allen* beschränkten linearen Funktionalen besteht und nicht nur aus jenen, die durch eine gewisse Formel definiert werden können. Dieser Prozeß wurde durch die bloße Abstraktheit von Hahns normierten Räumen verstärkt; in einem so „entmaterialisierten" Rahmen gibt es keine „Formeln", die Funktionale erzeugen könnten.

Dann erkennt Hahn die grundlegende Tatsache, daß die Abbildung $u \mapsto B(u,x)$ ($x \in \mathcal{K}$ fest) ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{S}$ mit „Steigung" $D(x)$ ist und daß $\mathcal{K}$ normerhaltend in den polaren Raum von $\mathcal{S}$ (d.h. in den Bidualraum von $\mathcal{K}$) eingebettet werden kann. Diese Beobachtung führte ihn zum Begriff eines reflexiven Raums („*regulären Raums*").

Wie stark Hahns Werk über „*Linearformen*" durch Helly inspiriert ist, zeigt sich auch äußerlich dadurch, daß auf diesen wegbereitenden sieben Seiten 215–221 von Hahn [8] nicht weniger als vier Mal auf Helly (und auf niemanden sonst) verwiesen wird.

Die zweite Hälfte von [8] ist dem Studium von Systemen von linearen Gleichungen der Form

$$u_y(x) + \nu_y(x) = c_y \tag{24}$$

gewidmet, wobei u_y und ν_y beschränkte lineare Funktionale auf $\mathcal{K}$ sind und y eine gewisse Indexmenge durchläuft. Indem er das Rieszsche Konzept von vollständig stetigen Transformationen auf $C[a,b]$ imitiert, führt Hahn die „vollständige Stetigkeit des Systems (ν_y) bezüglich des Systems (u_y)" ein und entwickelt unter intensiver Verwendung der grundlegenden Ideen der Rieszschen Arbeit *Über lineare Funktionalgleichungen* und an entscheidenden Stellen durch Einsatz seines Begriffs reflexiver Räume eine „Riesz-Theorie" für (24). Der Referent des *Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik* (53 (1927), p. 369) bespricht diesen fast vergessenen Teil der Hahnschen Arbeit sehr genau, andererseits verschwendet er kein Wort über Satz III, der bestimmt war, einer der wichtigsten Lehrsätze der Mathematik zu werden. *Habent sua fata libelli*; fast dasselbe kann über mathematische Sätze gesagt werden.

8 Stefan Banach

Der Gegenpart „Banach“ im Satz von „Hahn-Banach“ muß noch erklärt werden.

1923 erschien die Banachsche Arbeit [1] *Sur le problème de la mesure*. Das Kernstück war ein weitreichend verallgemeinerungsfähiger „Erweiterungssatz“ für gewisse Funktionale:

> **Théorème 16.** Si $\Omega(F)$ est un corps [Vektorraum] d’hyperfonctions contenant l’hyperfonction $F = 1$ et s’il existe une opération additive et non négative A, définie dans $\Omega(F)$,[3] il existe une operation additive et non négative $\overline{A}(X)$, définie pour t o u t e hyperfonction, et telle que $\overline{A}(X) = A(X)$, lorsque X appartient à $\Omega(F)$.

Die *démonstration* enthält bereits alle wesentlichen Elemente (auch transfinite Induktion) des sechs Jahre später von Banach geführten Beweises des Hahn-Banach-Satzes. Banach sperrte das Tor auf, öffnete es aber nicht.

Auch Mazur ging nicht so weit, als er 1927 auf dem ersten Kongreß der Polnischen Mathematischen Gesellschaft seinen Kollegen erzählte, daß das Grenzwertfunktional mittels transfiniter Induktion von konvergenten Folgen auf bloß beschränkte fortgesetzt werden könne [12]. Der Satz von Hahn-Banach war in Lwów zum Greifen nahe.

Erst 1929 griff Banach zu. Im ersten Band der *Studia Mathematica* publizierte er den kurzen Artikel [3] *Sur les fonctionnelles linéaires*.[4] Sein Théorème 2 ist fast wortgleich mit Hahns berühmtem Satz III, dem Hahn-Banach-Satz. Überdies ist der Banachsche Beweis im wesentlichen derselbe wie der Hahnsche, und es scheint, als wäre Banach genau wie Hahn durch die Riesz-Helly-Theorie des Momentenproblems stark beeinflußt gewesen: in perfekter Parallelität zu Hahn wendet er sein Théorème 2 unmittelbar zur allgemeinen Lösung des Momentenproblems an (Théorème 3, vergleiche mit Hahns Satz IV), wobei er Riesz und Helly anführt und ehrlich und ohne unpassende Bescheidenheit hinzufügt: „*Notre démonstration est très simple* ...“. Nach all diesen Parallelen ist es angebracht, darauf hinzuweisen, daß Banach unabhängig von Hahn arbeitete.

In den Händen von Banach, Schauder und Mazur zeigte der (Hahn)-Banach-Satz fast über Nacht seine ungeheure Tragweite. Jedoch, nicht weniger schnell stellte sich auch die Frage der Priorität. In einer Arbeit, die am 1. Jänner 1930 die Redaktion der *Studia Mathematica* erreichte, setzte Mazur lineare Funktionale unschuldig „*nach einem Satz von Herrn S. Banach*“ fort; Schauder tat dasselbe mit gleicher Unschuld in einer Arbeit, die an 19. April 1930 einging. Jedoch, kaum drei Monate später begann Schauder einen Satz (in den *Studia Mathematica*,

[3]Die Nichtnegativität von A bedeutet, daß $A(F) \geq 0$ für alle $F \geq 0$ aus $\Omega(F)$ ist.

[4]In diesem Artikel schreibt Banach „*fonctionnelle*“ fast durchgehend mit nur einem *n* in der Mitte.

[22, p. 188]) mit den ominösen Worten: „*Umgekehrt gibt es nach einem Erweiterungssatz des Herrn Hahn*"; in einer Fußnote fügte er nüchtern, aber durchaus mit Sympathie für seinen Mentor, dazu:

> H. Hahn, Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, Journ. f. reine und angew. Math. 157 (1927), p. 214-229; insbes. p. 217, Satz III. Vgl. auch S. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires I (1929) p. 211-216.

Nun zu Banach. Zweifellos war Banach durch die Aufdeckung Schauders von Hahns Priorität geschockt. Aber er war kein Zauderer. Am 15. Oktober 1930 erhielten die Herausgeber der *Studia Mathematica* die klare Stellungnahme:

Reconnaissance du droit de l'auteur
par
S. Banach (Lwów)

> Aprés avoir publié ma Note „*Sur les fonctionelles linéaires*" dans le t. 1 de ce journal (p. 211-216), j'ai aperçu que des résultats analogues ont étés obtenus antérieurement par M. H. Hahn et publiés dans son Mémoire „*Über lineare Gleichungen in linearen Räumen*" dans le „Journal für reine und angewandte Mathematik" Bd. 157 (1927) p. 214-229.

Banach hatte das Feuer gelöscht bevor es ausbrechen konnte.

Literatur

1. S. Banach, *Sur le probléme de la mesure*, Fund. math. **4** (1923), 7–33.
2. S. Banach, Steinhaus, *Sur le principe de la condensation des singularités*, Fund. Math. **9** (1927), 50–61,
3. S. Banach, *Sur les fonctionnelles linéaires* Studia Math. **1** (1929), 211–216.
4. I. Fredholm, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* (1900), Oeuvres complètes, Malmö, 1955, 61–68.
5. H. Hahn, *Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 20 (1911), 69–117.
6. H. Hahn, *Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen*, Monatshefte für Mathematik und Physik 32 (1912), 161–224.
7. H. Hahn, *Über Folgen linearer Operationen*, Monatshefte für Mathematik und Physik 32 (1922), 3–88.

8. H. Hahn, *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 157 (1927), 214–229.
9. E. Hellinger, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik **13** (1912), 421–423.
10. E. Helly, *Über lineare Funktionaloperationen* Sitzungsber. Wiener Akad. d. Wiss. Math.-Nat. Klasse **121 II A 1** (1912), 265–297.
11. E. Helly, *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendliche vielen Unbekannten*, Monatshefte für Mathematik und Physik **31** (1921), 60–91.
12. Mazur, *Über Summierungsmethoden* (Polnisch), Ksiega Pamiatkowa I Polskiego Zjazdu Matematycznego, Lwów, 1927. Nachgedruckt in: Supplément aux Annales de la Soc. Polonaise de Math. **41** (1929), 102–107.
13. G. Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operationi della logica deduttiva*, Torino, Bocca, 1888.
14. F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Ann. **69** (1910), 449–497.
15. F. Riesz, *Sur les ensembles de fonctions*, C. R. Paris **143** (1906), 738–741.
16. F. Riesz, *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Math. **41** (1918), 71–98.
17. F. Riesz, *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, C. R. Paris **149** (1909), 1303–1305.
18. F. Riesz, *Sur certains systèmes singulier d'èquations intégrales*, Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Sup. **28** (1911), 33–62.
19. F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarere Funktionen*, Math. Ann. **69** (1910), 449–497.
20. F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, 1913.
21. F. Riesz, *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Math. **61** (1918), 71–98.
22. J. Schauder, *Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen*, Studia Math. **2** (1930), 183–196.
23. E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, Math. Ann. **63** (1907), 433–476.
24. E. Schmidt, *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, R. C. del Circ. mat. di Palermo **25** (1908), 53–77.

Photos aus dem Besitz von Karl Sigmund.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 183 (2001), 21–22

Walter Wunderlich — Herausgeber der Internationalen Mathematischen Nachrichten von 1953 bis 1977

Hans Vogler

Eine Würdigung des Lebenswerkes von Walter Wunderlich ohne Beschreibung des Beitrages, den er für die Österreichische Mathematische Gesellschaft (ÖMG), vor allem als langjähriger Chefredakteur der Internationalen Mathematischen Nachrichten (IMN) geleistet hat, wäre grob unvollständig. Die Wiener Mathematische Gesellschaft wurde schon im Jahre 1946, also kurz nachdem Österreich seine Unabhängigkeit wieder erlangt hatte, als Fortsetzung der vor dem Krieg existierenden Wiener Mathematischen Gesellschaft neu begründet. Es war vor allem Rudolf Inzinger, damals ordentlicher Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Wien, zu verdanken, dass die wieder erstandene Mathematische Gesellschaft von allen Anfang an ganz Österreich als Wirkungskreis in Anspruch nahm und auch planmäßig internationale Kontakte suchte. Die spätere Entwicklung hat dem damaligen Ansatz Recht gegeben: eine einheitliche Mathematische Gesellschaft erwies sich als segensreich für die österreichische Mathematik. Dieser Gedanke war damals nicht unumstritten und die österreichweite Wiederbegründung verlief nicht ganz friktionsfrei. Von Anfang an plante Rudolf Inzinger ein Nachrichtenblatt der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. Es war sein Verdienst, dass es ihm gelang, der Internationalen Mathematischen Union (IMU) diese Vereinszeitung erfolgreich als Publikationsorgan anzubieten. So wurde das Nachrichtenblatt zu den Internationalen Mathematischen Nachrichten, was gewiss ein wesentlicher Umstand bei der Überwindung der Isolation der Kriegsjahre war, die zur raschen Wiederaufnahme und Verfestigung der internationalen Kontakte österreichischer Mathematiker führte.

Urplötzlich benötigten die IMN im Jahre 1953 einen neuen Chefredakteur. Walter Wunderlich erklärte sich bereit, dieses schwierige Amt zu übernehmen. Es war

ISSN 0020-7926.

ein Ein-Mann-Betrieb. Walter Wunderlich war die Verkörperung der IMN, wiewohl ihn seine Mitarbeiter am damaligen 2. Institut für Geometrie der TH Wien tatkräftig unterstützen mussten. Wunderlich sammelte Berichte ein, redigierte die Nachrichten, erstellte die Bücherliste und nahm sich besonders der Buchbesprechungen an. Immer wieder habe ich gehört, dass die Liste der neuen Bücher die IMN für den wissenschaftlichen Buchhandel ganz besonders wertvoll machte. Die Besprechungstätigkeit regte ganze Generationen des mathematischen Nachwuchses dazu an, sich in Kapitel, die über den Inhalt des Studiums weit hinaus gingen, einzulesen, ja einzuarbeiten und sich durch die preiswerten Rezensionsexemplare eine persönliche Fachbibliothek aufzubauen. Walter Wunderlich veröffentlichte die Besprechungen nicht ungeschaut. Er redigierte, glättete den Stil und bügelte sicher so manchen Fehler aus. Sehr zustatten kam Walter Wunderlich seine schier unglaubliche Arbeitskraft, seine Sprachkenntnisse, sein Stilgefühl und seine liebenswürdige Art, die ihn rasch persönlichen Kontakt mit in- und ausländischen Fachkollegen finden ließ. Aus ihnen rekrutierten sich weltweit die Korrespondenten, die die IMN mit Nachrichten aus der mathematischen Welt versorgen. So hat Wunderlichs Tätigkeit als Redakteur der IMN nicht nur zur finanziellen Basis der ÖMG beigetragen und dann die bekannten internationalen Kongresse in Österreich ermöglicht. Überall wo er auftauchte, war er gern gesehener Mittelpunkt — bei den wissenschaftlichen Veranstaltungen der Gesellschaft und bei den abendlichen geselligen Veranstaltungen.

Wie ein Blitz aus heiterem Himmel traf ihn im Jahre 1977 eine schwere Erkrankung. Auf ärztliches Gebot musste er seine umfangreiche Tätigkeit reduzieren. Der Vorstand der österreichischen Mathematischen Gesellschaft wollte die IMN unbedingt weiterführen. Bei der Suche eines Nachfolgers stellte sich heraus, dass es unzumutbar war, einer Einzelperson diese Arbeiten zu übertragen. So wurde ein aus drei Personen bestehendes Redaktionskomitee gegründet, aus dem sukzessive das jetzt wirkende Team hervorgegangen ist. Der Umstand, dass Wunderlichs Nachfolger keine Einzelperson, sondern eine Personengruppe war, erweist eindrucksvoll, welch ungeheure Arbeit Walter Wunderlich durch die Herausgabe der IMN durch 24 Jahre für die ÖMG leistete. Insgesamt hat er über 70 Nummern redaktionell betreut. Die Österreichische Mathematische Gesellschaft war sich dieser Verdienste voll bewusst und bescherte Walter Wunderlich im Jahre 1972 eine einmalige Auszeichnung. Er erhielt den Ehrenring der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. 1978 wurde er Ehrenmitglied der Gesellschaft. Aus persönlicher Erfahrung kann ich sagen, dass sich Walter Wunderlich über diese verdiente Auszeichnung ganz besonders gefreut hat.

Anmerkung der Redaktion: Das wissenschaftliche Werk von Prof. Walter Wunderlich wurde in den IMN 180 (April 1999, pp. 2–16) in einem Nachruf von Helmut Pottmann gewürdigt.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 183 (2001), 23–34

A Major Challenge for Mathematicians: The Underevaluation of the Role of Mathematics in Today's Society

Jean Pierre Bourguignon
Institut des Hautes Études Scientifiques

This unusual lecture came from discussions with many different people, inside and outside the research mathematical community, in particular with teachers, and the perception I developed from these. I strongly feel that mathematicians have for the most part not realized how big the demand for mathematics in the society is, and what the consequences they must draw from this fact are. The starting point is to analyse what makes mathematics special among sciences and how it is perceived by several groups of people having to deal with it in a way or another (parents, professionals, managers, mathematicians themselves as teachers or as researchers).

Elaborating on the ordinary perception of mathematics, I present what I see as *a new relationship of mathematics to society*. Detailed implications on their internal organisation are then considered, together with needs to be addressed in their development, and also in their teaching.

1 The Ordinary Perception of mathematics

1.1 Its role in basic teaching

The world around first encounters with mathematics happen in elementary schools. Indeed all countries consider that mathematics belongs to the basic train-

Nachdruck aus: Travaux mathématiques, Fascicule XI, 1999, Séminaire de mathématique de Luxembourg, Publications du Centre Universitaire de Luxembourg, p. 11–22, mit freundlicher Genehmigung von Jean-Paul Pier.

ISSN 0020-7926.

ing children must go through. The form it takes does vary from one country to the other, but basic operations on numbers are always taught, together with fundamental geometric figures. Math is also viewed everywhere as a subject of its own. In other words, from this perspective one cannot say that mathematics lies hidden.

When one digs somewhat deeper and considers the actual pedagogical practices that are put in place here and there, one realizes that, if mathematics is everywhere present as a topic, the intellectual process on which mathematics is based is not always presented in its integrality. E.g., the abstraction process, that lies at the heart of mathematics, is often hidden behind routines having their value but that are only one side of the coin. The same can be said of the research process. Math is sometimes presented as an activity in which one has to function automatically when, as mathematicians, we know how much one has to struggle to solve a problem and break it into more simple pieces. In other words, if a minimum of technicality is required in order to function in a mathematical environment, the meaning of notions one manipulates cannot be left in the background if one is to ensure a learning process with long lasting effects.

1.2 Some false evidences about mathematics

For some people, *mathematics is just the language of the quantitative*. They base their judgement on the fact that mathematics entertains a special relationship with language. Note that this opinion is also shared by some of our fellow scientists. We, mathematicians, know how wrong this statement is, how much effort goes into building concepts, establishing facts, following avenues we thought plausible at some stage but turn out to be dead ends. This well distributed belief forces us to consider more carefully how mathematics interacts with other disciplines and what is the exact nature of the mathematical models that appear more and more often (and to which we shall come back).

Second, *mathematics should be a dead subject*. Indeed, one of the most frequent questions that we, professional mathematicians, hear from laypersons, and also from media people, is: *"What can you do in a subject where everything is known?"* Of course we have so many examples that we can present to prove the contrary that we too often omit to make this point in public, and in particular to our students. In my opinion, it is of fundamental importance that they meet, as early as possible (and for me this means probably even before entering secondary school) the idea that mathematics, as other sciences, is still in the making, and that thousands of mathematicians around the world are working at solving outstanding and extremely varied problems.

In some sense, these misconceptions are encapsulated in the bad reputation of the word *"abstract"*, when it is precisely in abstracting from a situation what makes a phenomenon general that mathematics is at its best. Henri Poincaré gave what appears to me as a great definition of mathematics. For him, *"faire des mathéma-*

tiques, c'est donner le même nom à des choses différentes". From that point of view opposing *"concrete"* and *"abstract"* can be non-sense. Indeed extracting from a complex situation what constitutes its core is finally what can really make us understand how things work. We must therefore take all the time necessary to make this process explicit, and be very emphatic on the role it plays in founding mathematics. In my opinion, here lies one of the main roots of the qui pro quo that presently affects the relationship of mathematics to society.

1.3 Some other sources of misunderstanding in connection with education

A fact which in some sense puts the study of mathematics in school in the same situation as that of languages is that mathematical knowledge is built as an accumulation, with the result that the lack of understanding at a certain stage affects the ability to understand and progress later. This dependence is not felt as strongly for other disciplines such as physics, history, geography, etc.

Another aspect which is largely country-dependent is the role that mathematical performances play in the selection process at school. From that point of view, France used to be in an extreme situation because of its dual system of higher education split between the so-called "Grandes Écoles" and Universities, and the weight attributed to mathematics in the entrance competitions to the "Grandes Écoles".

1.4 A partial and brief conclusion

It is clear to me that *the image given by mathematicians to the general public*, an image that is amplified by the media, *needs to be worked at to make it more accurate*. This will require a considerable and sustained effort on the part of mathematicians.

2 What is the nature of mathematics?

In this section I would like to concentrate on a few facts that make mathematics special as a science. It is my opinion that mathematicians have not worked enough on this front, and that they are not in a good position in a number of instances to "make the case" for their needs. This implies that some more thought should be given to the objective basis for the misconceptions discussed in the previous section. Last but not least, for me it is indispensable to take a historical perspective in discussing these issues because mathematics has a long history (maybe the longest of all sciences), and also because the situation is changing very rapidly.

So what is so specific about mathematics?

2.1 A special relationship to language

To address this question one must take into account the fact that the way one expresses mathematics has evolved with time. The now well accepted idea that mathematics can be totally formalized was stated as a general paradigm only at the end of the last century. As we know, this is largely a philosophical stand and has little in common with the actual work done by almost all mathematicians and by teachers.

One can view this evolution as the culmination of *the need to use a precise language*. Since mathematicians tend to borrow their vocabulary from the ordinary language (and like this idea), we must realize that there is a price to pay for that, namely that students (and other persons) may resent it as a form of robbery (when we would rather view it as a form of poetry). I personally feel that more attention should be devoted to explaining why we do this benign looking appropriation of the common language, and why without it we would be in big trouble. In this matter, we should behave as responsible citizens, and explain what we make of common resources. After all, are we not forcing our students to live in some way double lifes, depending on whether one is talking in a mathematical context or not? This exercise is not an easy one and should be identified as such.

The constraint of expressing mathematics with an extremely well controlled language is certainly one basis for the misconception of seeing mathematics only as a language. We require so much attention to that matter, and for good reasons of course, that we should very carefully explain why and describe segments of the mathematical activity which are not affected by this practice, or even times when forcing oneself to stick too strictly to a formalized language is a handicap. For me this particular difficulty appears as well with advanced students as with beginners, and may be one of the major hurdles that young researchers have to pass.

2.2 A special link to truth

Confronted with a mathematical statement, the ultimate goal for a mathematician is to prove that it is "true". What does that mean? Of course now that mathematicians agree to work in the context of a potentially completely formalized theory, its meaning can be no other that "the statement can be deduced from the basic axioms agreed upon". In fact, if one is to address this question in the context of relations of mathematics to society, one is forced to take it in a broader, more philosophical, perspective because one has to confront it with reality. This amounts to deciding whether there is a mathematical reality of which this statement is a part, and of the statute of this reality in relation with the ordinary "sensible" reality. On this broader issue mathematicians have different views: from the "platonicists" at one end of the spectrum, who believe that they "discover" new territories and new facts of the mathematical world, to the "intuitionists" at the other end, who view mathematical constructions as purely human scaffoldings based on consensus opinions among a restricted community, in other words that mathematics is "invented". There is no doubt in my mind that the vast majority of mathematicians are closer to the platonicist viewpoint than to the other one, or at least that *"they spend a good portion of their professional time behaving as if they were"*, as André Weil once put it.

The possibility of using today results established centuries ago is another aspect of the special relation that mathematics has with truth. It gives it the possibility of transcending civilizations, and makes its transmission much easier since a priori less ideology-dependent. This founds *its claim for universality*. Of course all this is based on the role that proofs play in math, in spite of their changing appearances with time. Making this dimension accessible to students is of course the major challenge that teachers face at all levels. This gives us mathematicians special obligations towards the history of our discipline, and justifies that it be properly incorporated in our teaching, both as a documented proof of its evolution, and of the progress it made. Facts accessible in the past to a very restrictive group of great minds can be, and are, correctly assimilated today by large crowds of students because in the mean time new concepts and new techniques have been developed. Here lies for me the best antidote against the spreading of the devastating belief that mathematics is a dead subject. Let me note in passing that efforts in the direction just mentioned will also help us have stronger arguments to support our worldwide struggle to keep good libraries. To do present-day mathematics, we need access to documents that may be a century old or more, and this need will stay with us in the future.

Another consequence of the relation of mathematics to truth also worth pointing out in connection with education is the following. A person who has understood a mathematical fact becomes able to challenge his or her teacher, his or her class-mates. This experience of winning by the exercise of the mind is of the utmost importance in training critical minds and giving them access to autonomous thinking. This of course needs to be thought through in relation with the very diverse social environments in which schools are operating.

2.3 The unbelievable success story of mathematics throughout History

Mathematicians tend to be shy about their field when the History of mathematics is one of the most extraordinary success story of the human adventure. Think that at the end of the XVIIth century, precise mechanisms were designed to say something sufficiently pertinent about infinity to be able to handle major questions connected with it. This was the birth of modern analysis. Think that, in spite of formidable evidence that was imposed on mathematicians by the everyday experience, the early part of the XIXth century saw the birth of new geometries, generalizing the well established Euclidean geometry, and opened the way to a more radical broadening of the scope that enabled General Relativity to take ground. Think that major problems concerning prime numbers and diophantine equations have been solved one after the other, thanks to numerous technical and more conceptual achievements. Think that random quantities can now be properly estimated on the basis of a few precisely analysed assumptions. Many of these revolutions were the bases for major changes in the organization of society, and we come back to this later.

Why are we so shy?

3 A new relationship to society

This part is of course the most controversial since I dare to offer some perspectives for the future. It may be good to start by taking a last look at the evolution of our discipline in the XXth century, in order to identify the changes that I claim force us to go along.

3.1 Mathematics and mathematicians in the XXth century

In the XXth century, mathematics, as many other sciences, has enjoyed an unsurpassed development. Many new results have been obtained, some very spectacular such as the solution of the Fermat problem, but as you know the real change is in the finer web of results, and the extraordinary broadening and ramification of areas that transformed our discipline. At the end of the XXth century, the yearly production of research articles has reached the 60,000 mark, when in the 50s one would only count 5,000. This is undoubtedly the mechanical effect of the growth of the mathematical community throughout this century. If some 150 participants took part in the 1900 Paris congress, the century ended with the Berlin congress which hosted 4,000. Today, the number of mathematicians actively engaged in research is estimated at about 50,000. At the same time one should keep in mind that the number of biologists is now estimated at about 1 million.

In a more qualitative vein, this century witnessed the generalization of the use of the axiomatic approach. The distance it allows to take from the immediate reality surrounding us has also some drawbacks, namely that of giving some arguments to people who say that mathematics has deserted the real world. Symmetrically it also frees mathematicians from relating what they do with real life problems. Nevertheless, there is no doubt in my mind that this newly gained freedom is a fantastic advantage ... provided one does not isolate ourselves and pretend that we have nothing to say and nothing to learn from other scientists, from engineers, and from society in general.

Before leaving this question of the axiomatic method, it is important to mention that it also had an extraordinary impact on the teaching of mathematics at advanced level, allowing to teach much more quickly to a wider group of students. In that sense it greatly contributed to the development of the mathematical enterprise. The impact it had on the teaching at lower levels has been diversely appreciated but, if some experiences were really negative, the status quo was not any more acceptable for the very reasons that we are presently examining.

3.2 The coupling of mathematics with power computing tools

Already in the 70s, new means of computation appeared, in the form of powerful computers exhibiting first a fantastic number-crunching ability, but later also unexpected wonderful visualization capacities. Their development went on at an unabated pace until now.

Can one measure the various types of impact that the advent of computers had on mathematics? I propose to organize them in four families :

- with computers, one can at once *deal with huge data sets*, with the result that some problems where beforehand mathematical methods were not feasible become accessible to them; this is typical with statistical data; here, the key question is to learn how to extract relevant information from huge data sets, and this is a mathematical problem;

- *these new machines*, which handle only finitely many data by definition, *force us to have a new reflection about relations between the finite and the infinite*, about convergence of processes; one can teach a computer how to handle very large numbers, with the result of making some areas of mathematics, e.g. number theory or dynamical systems, amenable to experiments; here too, the net result is a considerable broadening of what is accessible to mathematicians; as an example, one can name cryptography, again an activity whose nature is completely mathematical;

- another facet has to do with *the capacity that machines have to repeat a simple algorithm a very large number of times*; the example of Julia sets and fractals may have been overused but we have to learn how to exploit their attractiveness and beauty in a proper way; this changed the view we have on some structures, transforming their pathological appearance into a real richness, that provided natural scientists with more models relevant for some practical situations;

- finally, the most evident aspect is of course opening new horizons to the numerical treatment of sophisticated equations, a typical example there being given by weather forecasting.

Opening new domains to mathematics, changing our views on complexity, giving new tools to mathematicians to solve their problems, the impact of new computing tools is therefore considerable, even without mentioning the very deep and mathematical problems posed by machines and by networks connecting them. This is undoubtedly one of the new frontiers of mathematics, and what was, at some stage, considered by mathematicians as a threat is in fact a great opportunity for revitalizing the discipline, and for making it relevant to many more situations.

3.3 The omnipresence of mathematical objects in the everyday life

Let us now come to what appears to me as the most important aspect of the change occuring at the end of this century, namely the omnipresence of mathematical objects in the everyday life.

This phenomenon too is connected with the new possibilities offered by computers, but other aspects of modern societies, which have no relation whatsoever with mathematics, play a major role in it. Every day we use extremely many objects incorporating in a way or another some pieces of mathematics, and often recent ones. Most of the time it is not realized, even by mathematicians, that it is indeed so because the mathematical component is not immediately visible, and to pin it down requires some thinking.

The most obvious case is of course that of pocket calculators, but computers also exhibit some impressive mathematical ability. Their use is widespread, and we are confronted with them everywhere. But there are less evident examples such as CD-players, TV-sets, cars, etc. This proliferation has been made possible thanks to the widespread use of high technology products produced cheaply.

3.4 The notion of industrial product

Today's society is dominated by the notion of industrial product. This means in particular that a lot of objects and structures surrounding us have been designed in a well defined manner. Objects have to fulfill a definite task, and their mere existence is due to the fact that a market for them has been identified. Most often this requires optimizing the object or the structure in many ways, a step involving a mathematical process which earlier would have been a purely hardware problem.

This goes further. Even if one is interested in keeping an industrial product longer than was planned by its conceptor, one will soon encounter problems because, and this is especially true for high tech ones, they very quickly become incompatible with their environment, i.e. they cannot be used any more. This compatibility problem poses at a large scale the question of keeping the memory of the past in proper form and, after what was said on this matter earlier in this text, this is no minor concern for mathematicians. The notion of an industrial product incorporates its limited life span.

3.5 Towards a communication's society

Claiming that we are entering a society dominated by communications is not original. Here, we consider the consequences of this change from our mathematical angle.

First, more informations are made available to a broader section of the public, leading most of the time to too much information. To learn how to navigate in such a world is not easy since one needs in particular to know whether a piece of information is reliable. In view of the quantity it is clear that most of the information available cannot be properly checked. If one wants citizens to have in their hands the control of the facts on which they are to base their judgements, one needs to train them already at school to do that. This makes exposure to critical reasoning the more important, and training to distinguish bias a must.

If this reliance on communications has the positive aspect of abolishing distances, it also makes us dependent on the quality of information collected by various kinds of sensors that can be taught more easily to send falsified information than our eyes, our fingers, etc.

3.6 Where is mathematics around us?

It is time to give some explicit examples of mathematics hidden around us. There is no claim for exhaustivity, and there are certainly some personal bias.

In modern societies complex systems are everywhere, up to the point that this feature can even be seen as one of their characteristics. One needs to regulate these mechanisms, and this requires a new type of knowledge that is basically mathematical. The management of such systems has very important consequences on the development of society.

3.6.1 Biological systems

Biological systems provide many examples of complex systems one has to come to grips with. Of course this domain has become one of the great adventures of the second part of the XXth century since the discovery of some fundamental mechanisms of living organisms such as DNA structure. Genomics which comes out of this requires handling huge amounts of information, some of it discrete (the digits of the 4-letter alphabet coding DNA) and some of it geometric (being able to act on the DNA requires to know very precisely the geometric accessibility to the proper sequence). Mathematical tools to deal with such problems are not obviously available, and are likely to require new mathematical developments around the question of how to structure large data sets.

3.6.2 Telecommunication systems

Telecommunication systems have already a wide impact on the way the whole society functions. Again when one considers objects through which one communicates, besides the fact that one punches numbers on a keyboard, there is no hint that there is some mathematics behind them. It looks like the chips, the laser (as in CD-ROMs) and the wires are the whole story when in reality the design of the network plays an equally important role, and this is where mathematics enters. The performance of a telecommunication network is measured through its capacity of not altering the information it carries. This can be done through error correcting codes, which encapsulate sophisticated algebraic properties, i.e. purely mathematical knowledge.

Another side of telecommunications has to do with the quantity of data to be transmitted. Given a physical system designed to carry data, it may be necessary to compress the data (typically images) in order not to exceed the capacity of the network. Designing compression and decompression algorithms is another challenging problem, in which for example wavelet theory, a truly mathematical modern adventure, had an important impact.

The Global Positioning System (GPS) is another example of a modern tool which, in order to reach the accuracy that widens its use, must incorporate very advanced mathematics. Indeed in order to improve precision from 10 meters to 10 centimeters, corrections taking care of effects accounted for by general relativity must be taken into consideration. For GPS again, optimizing the choice of satellites from which one estimates the position on the earth requires the use of sophisticated mathematics, such as discrete group theory.

Finally, there is still another side to problems posed by transmission of data, namely their security. In many cases, for one reason or another, one needs to be sure that the information is kept confidential all the way through. Encoding it is the solution, provided the code cannot be broken by a person different from the one that is supposed to receive it. Here again, one has to deal with discrete data, and discrete mathematics is a part of mathematics that, in many countries, has not been given the same priority as the a priori more noble part using real numbers.

3.6.3 Data collection and analysis

Collecting data is yet another area where we get used to new ways of functioning, and may miss the mathematics behind. Indeed, at the supermarket, we got used to not seeing any more the cashier type the price of goods we buy, thanks to the systematic use of bar codes. The net gain for the shop is not only the time saved in typing but the automatic management of the reserves. Here again the recognition process on which the barcodes system is based is purely mathematical.

3.6.4 Statistics and Polls

One can read statistics in newspapers everyday, and to be able to decipher what they say and what they do not say has become of the greatest importance in today's world. The fact that one can collect and deal with large data gives more opportunities but it is important that citizens have a basic training in this field in order to allow them to detect when one tries to manipulate them.

Other informations that one now finds regularly in news media are polls. We are exposed to a lot of them, and in this respect we can regularly have the feeling that informations drawn from them are definitely improper. Since they have become an important part of the process by which people form their opinions, they are very important to democracy. Knowing how to estimate the error margin and how polls can be falsified is therefore of the highest importance.

As you know, using appropriate rigorous mathematics, it is possible to prove whether a statistical claim is correct or not. It is probably in this area that a contribution towards critical thinking through mathematics is really possible, and at the same time indispensable.

3.6.5 Automatics and robotics

Another domain in which mathematics is relevant is automatics. Many complex systems are run using control parameters. Automatic pilot systems that run planes most of the time they fly are one family of examples of systems where control theory plays an important role.

In fact in our everyday life we are confronted with a number of automated systems: lifts, TV and telephone satellites, cars, etc.

Scheduling, i.e. the theory that makes sure that a given network will be able to provide the service it is designed for, also relies on appropriate mathematical theory. Most transport systems rely on such networks. Indeed, when one is waiting for a bus, a train or a plane, one focuses one's attention on the material carrier, but the important (but hidden) fact is that this object is part of a whole network, and as such can be where it helps one because it was elsewhere before, etc. All this relies on sophisticated "graph theory".

3.6.6 Optimisation of forms

A lot of mathematics is also hidden in optimisation of forms. Very often we are using objects whose shapes have been designed using advanced mathematical tools, most of the time by extremizing some functional. Just think of aerodynamic forms of cars or of planes to minimize air resistance, and finally to improve fuel efficiency. Many other examples could be given, which involve purely design criteria, lower production costs or improve a material strength.

An interesting example is given by the optimisation of the places where the body of a car is linked to its frame. In choosing them properly (i.e at a node of the basic harmonic vibrations of the body for example) one can limit the transmission of the car of vibrations caused by bumps on the road to the inside.

Yet another example, again taken from the car industry, has to do with the shaping of windshields, which are now most of the time curved surfaces. A difficult question is to determine the shape of the windshield when it is made flat before one "forms" it by heating it again to make it deformable.

3.6.7 Banking products and insurances

Many examples that we just presented come from different areas, and point to one fact which makes mathematics different from other sciences, namely that there is no industrial sector which can easily identify itself with the discipline.

Recently, this may have changed with the new trend taken by the banking and insurance industries. There are several reasons for this change. We already encountered one of them, namely the capacity to collect (and quickly analyse) large data sets. Another is linked to the new telecommunication possibilities, and the fact that today there is really one world financial market. Another one is deeper, and has to do with the evolution of the banking activity, which actually functions more and more like an insurance. A typical example of this change is given by derivatives and options, i.e. the promise to buy a certain good at a prize determined by a well defined mechanism based on information that will be later available. The key point is of course to estimate the risks that one takes by making such a deal. One must use sophisticated probabilistic models in order to evaluate some of the indices on which the price is based and which depend on random parameters. It should be pointed out that the kind of stochastic processes that are involved turn out not to belong to any of the standard categories that have been extensively studied in connection with processes met in the natural sciences, but rather with the general theory of stochastic processes, a body of knowledge long considered highly theoretic if not esoteric. These developments lead banks and insurance companies to hire a number of mathematicians, and gave birth to a new branch of our discipline, namely financial mathematics, in which a special training is now offered at a number of higher education institutions.

4 Final words

From all challenges concerning the image of mathematics discussed, the most serious one seems to me *to make it evident that mathematics is a science and alive*. The rest should follow.

In my opinion, *mathematicians must accept to put more consideration into and to show more curiosity for what is happening next to them.*

They also have to agree on saying more on their activity. This will require taking more initiatives towards the general public. We should be helped in that there are many mathematical products all around us. It is our duty to exhibit what is mathematical in them.

A second point that should also be of some help is that we have many opportunities to make people dream. *Mathematics still remains a great creative adventure.*

New challenges are ahead of us. The need of our discipline for great minds remains as pressing as it has been throughout History.

To achieve such goals, we also need to find appropriate ways to connect ourselves with teachers in schools. In the long run, this is the only channel through which the new trends we just presented are going to be passed on to the new generation. *The future of mathematics will lie in the hands of the younger people that our generation will prove able to attract to mathematics.*

Buchbesprechungen

Allgemeines, Sammelbände — General, Collections — Généralités, collections

J. Arndt, Ch. Haenel: Pi. Algorithmen, Computer, Arithmetik. Mit CD-ROM. Springer, Berlin u.a. 1998, XI+191 S. ISBN 3-540-63419-3 H/b DM 78,–.

Die Zahl π gehört zweifellos zu den (wenigen) Wahrzeichen der Mathematik, die allgemein (auch von Laien) mit ihr assoziiert werden. Sicher nicht zu unrecht! Denn schließlich ist π schon seit der Antike sowohl wichtig für praktische Anwendungen als auch Gegenstand mathematischer Untersuchungen. Das vorliegende Buch nimmt die Bestimmung von mehr als zehn Milliarden Dezimalstellen von π zum Anlaß, die Zahl und ihre Berechnung — in Geschichte und Geschichten — darzustellen und zu erklären, was an den verwendeten Methoden und Erkenntnissen von allgemeiner Bedeutung ist. Zu den ausführlicher behandelten Themen gehören u. a. die statistischen Eigenschaften der Ziffernentwicklung, der Zusammenhang zwischen π und dem arithmetisch-geometrischen Mittel (Gauß) sowie das schnelle Rechnen mit großen (genauen) Zahlen. Dem Buch wurde außerdem eine CD beigegeben, die weiteres Material, einige fertige Programme, sowie nützliche Pakete für High-Precision-Arithmetik und außerdem das Computeralgebra-System MuPAD enthält. — *Pi* ist ein interessantes und gut lesbares Buch, das sich keineswegs nur an Spezialisten wendet, und auch den Vergleich mit der ‚Konkurrenz‘ nicht zu scheuen braucht.

P. Schmitt (Wien)

B. Bollobás, A. Thomason (Eds.): Combinatorics, Geometry and Probability. A tribute to Paul Erdős. Cambridge University Press, 1997, XXI+562 S. ISBN 0-521-58472-8 H/b £ 60,–.

Genau zum 80. Geburtstag von Paul Erdős fand im März 1993 im Trinity College in Cambridge eine Tagung zu seinen Ehren statt. Der dazugehörige Tagungsband ist leider erst nach nach dem Tod von Erdős (20. September 1996) erschienen. So wurde neben der Tischrede von Béla Bollobás auch seine Gedenkrede am Kerpesi-Friedhof in Budapest abgedruckt.

Der Band umfaßt neben einer einleitend von Erdős verfaßten Arbeit *Some Unsolved Problems* 45 Originalbeiträge zu unterschiedlichen Fragestellungen. Der überwiegende Teil bezieht sich auf graphentheoretische Probleme, wo kombinatorische, geometrische und wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden zum Einsatz kommen. Ein Gutteil der behandelten Fragen läßt sich (wenn auch in verschiedenem Ausmaß) auf Erdőssche Problemstellungen zurückverfolgen. Erdős selbst ist Koautor von fünf Arbeiten.

Es ist mehr als ein Geburtstagsgeschenk, es ist wahrlich — wie auch der Untertitel ausdrückt — ein Tribut an das Lebenswerk eines wohl in jedem Sinn außergewöhnlichen Mathematikers.

M. Drmota (Wien)

M. Criton: Les jeux mathématiques. (Que sais-je ? 3220) Presses Universitaires de France, Paris, 1997, 126 S. ISBN 2-13-048109-4 P/b FF 42,–.

C'est une histoire courte mais systématique des jeux (= récréations) mathématiques, avec beaucoup d'exemples. "Le but de cet essai est de mettre l'accent sur un loisir de l'esprit ignoré du plus grand nombre, mais riche d'une très longue tradition qui se perpétue depuis presque quatre millénaires : celles de divertissements à caractère mathématique ou logique."

P. Schmitt (Wien)

C. Fadiman (Ed.): Fantasia Mathematica. Being a set of stories, together with a group of oddments and diversions, all drawn from the universe of mathematics. Copernicus, an imprint of Springer-Verlag, New York, 1997, XIX+300 S. ISBN 0-387-94931-3 P/b DM 29,90.

This is the reprint of an anthology (first published in 1958) of literary texts — stories (mostly science fiction), anecdotes, essays, poems, and excerpts — related to mathematics. In his introduction, the editor erroneously claims (or merely pretends to claim?) that the "stories are suitable not for mathematicians, who will be bored by their naïveté," and (correctly) continues "but for non-mathematicians capable of being amused or surprised by the devious connections between the imagination and what would appear to be a discipline of the utmost rigor. You will not learn much mathematics from them — they are intended to amuse or tease rather than to instruct." (Postscriptum: Why aren't there more — and more recent — collections like this?)

P. Schmitt (Wien)

D. Gale: Tracking the Automatic Ant and Other Mathematical Explorations. A collection of Mathematical Entertainments Columns from The Mathematical Intelligencer. Springer Verlag, 1998, XI+241 S. ISBN 0-387-98272-8 H/b DM 59,–.

David Gale edited the *Mathematical Entertainments* column (and wrote most of it) for six years (from 1991 to 1996). This volume contains the complete collection of these articles. (The title refers to a cellular automation, the *ant*, which is one of the featured topics.) The essays prove that it is possible to speak about interesting mathematics to a quite general audience, avoiding tedious or complicated technicalities: “Although the book does not attempt to read like a novel. My hope is that in dipping into its pages, the reader will find things that are entertaining, yes, but also illuminating.” Of course, the contents of this book are easily available in the journal, but, in this case, the whole is more than just the mere union of its parts – it gains an additional quality (making it easy to discover connections and common ‘plot lines’) which is apparent when browsing in this book. (Well, of course, browsing the issues of the *Intelligencer* has a special quality, too, not shared by the book :-) But this is another story!)

P. Schmitt (Wien)

R. L. Graham, J. Nešetřil (Eds.): The Mathematics of Paul Erdős I+II. (Algorithms and Combinatorics 13+14.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997, I: XVI+399 S. ISBN 3-540-61032-4 H/b DM 148,–. II: XVI+577 S. ISBN 3-540-61031-6 H/b DM 148,–.

Dieser außergewöhnliche Sammelband ist dem wohl außergewöhnlichsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts gewidmet, nämlich Paul Erdős und seiner Mathematik.

Es sollen alle Aspekte seines ca. 60-jährigen Wirkens abgedeckt werden, und das ist meiner Meinung nach sehr gut gelungen.

Das zweibändige Werk beginnt mit einem empfehlenswerten über 40 Seiten langen Artikel über das Erdőssche Leben und Werk von Béla Bollobás. Nach einem kurzem biographischen Umriß wird auf seine mathematischen Hauptergebnisse eingegangen, vom Satz von Erdős-Kac zu seinen Beiträgen zum elementaren Beweis des Primzahlsatzes, vom Satz vom iterierten Logarithmus zur Ramsey-Theorie, von der extremalen Graphentheorie zu Zufallsgraphen, und vieles andere mehr.

Die weiteren Beiträge werden in sieben Abschnitte gegliedert, die ersten drei füllen den 1. Band: I. Early Days (5 Beiträge), II. Number Theory (13), III. Randomness and Applications (7), IV. Combinatorics and Graph Theory (12), V. Ramsey and Extremal Theory (7), VI. Geometry (8), VII. Infinity (6). Der zweite Band schließt mit einer Analyse der Statistik der Koautoren von Erdős (verfaßt von J. W. Grossmann) und einer Liste seiner Veröffentlichungen bis 1996.

Viele Beiträge beginnen mit persönlichen Eindrücken und Erinnerungen an Erdős. Damit gewinnt man meiner Meinung nach einen weit besseren Eindruck über die Arbeitsweise von Erdős, als wenn *nur* von seinen Resultaten und Problemstellungen berichtet worden wäre. Es ist wahrscheinlich unmöglich, das vorliegende

Werk systematisch durchzuarbeiten, die Fülle an Fakten ist einfach zu groß. Man wird aber durch die ungeheure Vielfalt zum Schmökern eingeladen. Es ist wirklich ein gelungenes Buch, ich wüßte nicht, wie man der Erdősschen Mathematik besser gerecht werden hätte können.

M. Drmota (Wien)

M. M. Holzbaur, U. D. Holzbaur: Die wissenschaftliche Arbeit. Leitfaden für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Informatiker und Betriebswirte. Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1998, VIII+118 S. ISBN 3-446-19427-4. P/b DM 29,80.

Im Vorwort erklären die Autoren ihre Absicht: „Dieser Leitfaden soll dem wissenschaftlich Arbeitenden, insbesondere jungen Akademikern und ihren Betreuern, einen Anhaltspunkt für die Bearbeitung einer Arbeit und die Erstellung der schriftlichen Ausarbeitung geben.“ Abgesehen davon, daß ich daran zweifle, daß dieses Ziel (noch dazu in der behaupteten Allgemeinheit!) durch ein Buch erreicht werden kann, weist dieses Skriptum auch bei bescheidenerer Zielsetzung — als Sammlung von nützlichen Definitionen, Tabellen, Checklisten, Hinweisen und ähnlichem — erhebliche Mängel auf. Nur zwei Beispiele:

(1) Zum Stichwort *Formalismus* (Seite 22f.) wird als Beispiel der Begriff *Inverse in einer Gruppe* eher verwirrend (und wirr) als klärend (und vorbildhaft) behandelt.

(2) TEX wird an drei Stellen nebenbei — und ohne erklärende Hinweise! — erwähnt: Je einmal „LATEX“ als Hilfsmittel für die Erstellung von Literaturverzeichnissen (Seite 36) und Gliederungsschemata (Seite 83), und ein anderes Mal „das System TEX, LATEX und EMTEX“ als gutes System für „zweistufige Verarbeitung“ (Seite 99). Wer nicht ohnehin schon Bescheid weiß, kann damit nichts anfangen!

Außerdem gibt es keinen Index, und das Literaturverzeichnis ist ebenfalls wenig hilfreich.

P. Schmitt (Wien)

H. Walser: Symmetrie. Einblicke in die Wissenschaft — Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1998, 106 S. ISBN 3-8154-2513-1 P/b DM 22,80.

Der Eindruck von Symmetrie im alltäglichen Leben — ein vager Begriff! — ist gut dazu geeignet, mathematische Ideen einem breiten Leserkreis nahezubringen, und wird entsprechend oft als Ausgangspunkt gewählt. Auch das vorliegende Bändchen tut dies: „Mir geht es vor allem darum, ‚das Auge zu schärfen‘ für die eigene Wahrnehmung der Symmetrie in unserer Umwelt. Es wird auch gezeigt, wie Symmetrie als arbeitsmethodisches Hilfsmittel eingesetzt werden kann.“ Die behandelten Themen sind: Bild im Bild (Fraktale), Spiegelung am Kreis (und Verallgemeinerungen), Schwerpunkte von Figuren, Parkette (Überlagerung von

Gittern und ein Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes durch Zerlegung), die Idee der ‚Mitte', sowie Symmetrie in der Sprache (Palindrome).

P. Schmitt (Wien)

Logik und Grundlagen — Logic, Foundations — Logique et fondements

G. Sambin, J. M.Smith (Eds.): Twenty-five Years of Constructive Type Theory. Proceedings of a Congress Held in Venice, October 1995. (Oxford Logic Guides 36.) Clarendon Press, Oxford, 1998, VIII+283 S. ISBN 0-19-850127-7 H/b $ 115,–.

1970 begann *Per Martin-Löf,* eine „intuitionistische Typentheorie" als konstruktives Fundament der Mathematik zu entwickeln. Mittlerweile trägt sie seinen Namen und hat nicht nur großen Einfluss auf die Grundlagenforschung der Mathematik gewonnen, sondern auch immer mehr Anwendungen in Informatik und Linguistik erzielt. Das vorliegende Buch entstand weitgehend aus ausgewählten Tagungsbeiträgen der Jubiläumskonferenz, veröffentlicht aber auch erstmals Martin-Löfs Arbeit "An intuitionistic theory of types" aus dem Jahr 1972. Die anderen 14 Beiträge überdecken — der Anwendbarkeit der Theorie entsprechend — ein weites Spektrum: maschinelle Beweisverifikation (*de Bruijn*, *Pollack*), Normalisierung (*Coquand*, *Tait*), sprachliche Erweiterungen (*Betarte/Tasistro*, *Sambin/Valentini*, *Valentini*), konstruktiver Beweis des (Helly-)Hahn-Banach-Theorems unter Verwendung der formalen Topologie (*Cederquist/Coquand/Negri*), Konstruktion von Programmen aus Spezifikationen (*Mäenpää*), Beziehungen zur klassischen Logik (*Baratella/Berardi*, *Nour*), Identität (*Hofmann/Streicher*), Universen (*Palmgren*), Wohlordnungen (*Setzer*).

P. Teleč' (Wien)

A. N. Whitehead, B. Russell: Principia Mathematica to *56. (Cambridge Mathematical Library), Cambridge University Press 1997, XLVI+410 S. ISBN 0-521-62606-4 P/b £ 32,50.

Dies ist ein weiterer unveränderter, unkommentierter Nachdruck der Ausgabe von 1962 mit den im Titel erwähnten Kapiteln aus dem 1. Band der Principia Mathematica, nämlich "Part I. Mathematical Logic" und "Part II. Prolegomena to Cardinal Arithmetic, Section A. Unit Classes and Couples" sowie den Appendices A (The Theory of Deduction for Propositions containing Apparent Variables) und C (Truth-Functions and others).

P. Telečc (Wien)

Kombinatorik und Graphentheorie — Combinatorics and Graph Theory — Combinatoire, théorie des graphes

Fan Chung, R. Graham R.: Erdős on Graphs. His Legacy of Unsolved Problems. A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 1999, XIII+142 S. ISBN 1-56881-111-X P/b $ 25,–..

Erdős war dafür berühmt, Probleme zu stellen. Das ehrgeizige Ziel des vorliegenden Buches ist es, die offenen Erdősschen graphentheoretischen Probleme zusammenzustellen, über ihre Geschichte zu berichten und den aktuellen Stand der Forschung darzustellen. Es ist dies übrigens eine deutlich erweiterte Version eines Artikels von Fan Chung, der vom *Journal of Graph Theory* angeregt und dort auch veröffentlicht wurde.

Herausgekommen ist eine äußerst wertvolle und ausgezeichnet recherchierte Sammlung von graphentheoretischen Problemen, die sicherlich als Ausgangspunkt und Referenz für zahlreiche weitere mathematische Arbeiten dienen wird.

Das Buch ist in die Themenkreise “Ramsey Theory”, “Extremal Graph Theory”, “Coloring, Packing, and Covering”, “Random Graphs and Graph Enumeration”, “Hypergraphs” und “Infinite Graphs” gegliedert. Das Buch schließt mit teilweise erstveröffentlichten persönlichen Erinnerungen von Andy Vázsonyi, der Erdős seit seinen Jugendtagen in Budapest kannte, aber kein professioneller Mathematiker wurde.

Das Buch ist jedem graphentheoretisch interessierten Leser wärmstens zu empfehlen und sollte als Nachschlagwerk in keiner mathematischen Bibliothek fehlen.

M. Drmota (Wien)

J. D. Lamb, D. A. Preece (Eds.): Surveys in Combinatorics, 1999. (London Mathematical Society Lecture Notes Series 267.) Cambridge University Press, 1999, X+298 S, 12 Abbildungen. ISBN 0-521-65376-2 P/b £ 24,95..

Dieses Buch enthält Ausarbeitungen der “Richard Rado Lecture” sowie aller acht Hauptvorträge, welche 1999 bei der 17th British Combinatorial Conference in Canterbury, England, gehalten wurden. Im einzelnen handelt es sich um die folgenden Beiträge: *W. T. Tutte,* The Coming of the Matroids; *S. Ball,* Polynomials in Finite Geometries; *C. J. Colbourn, J. H. Dinitz, and D. R. Stinson,* Applications of Combinatorial Designs to Communications, Cryptography, and Networking; *M. Dyer and C. Greenhill,* Random Walks on Combinatorial Objects; *K. Metsch,* Bose-Burton Type Theorems for Finite Projective, Affine and Polar Spaces; *J. Pach,* Geometric Graph Theory; *R. Thomas,* Recent Excluded Minor Theorems for Graphs; *C. Thomassen,* Parity, Cycle Space, and K_4-Subdivisions in Graphs; *N. C. Wormald,* Models of Random Regular Graphs.

Platzgründe stehen einer eingehenderen Einzelbesprechung der hervorragenden (mit ausführlichen Literaturangaben versehenen) Artikel entgegen. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß mit diesem Tagungsband ein wertvoller Überblick über den aktuellen Forschungsstand in verschiedenen Teilgebieten der Kombinatorik vorliegt. Allen daran Interessierten kann das Buch nachdrücklich empfohlen werden.

A. R. Kräuter (Leoben)

J. Matoušek, J. Nešetřil: Invitation to Discrete Mathematics. Oxford University Press, 1998, XV+410 S. ISBN 0-19-850207-9 P/b \$ 35,–, ISBN 0-19-850208-7 H/b \$ 79,–..

This introduction to (selected topics of) discrete mathematics is also meant as an introduction to mathematics, its spirit, its way of thinking, and its methods. ("...we believe that discrete mathematics is especially suitable for such a first immersion into mathematics, ... ") It is written in a clear style ("We try to present arguments in full and to be mathematically honest with the reader. When we say that something is easy to see, we really mean it.") at a leisurely pace—brevity is not an issue (for some results several proofs are given). It—or parts of it—can therefore be used as an early (or even as a first) course, or for self-study. The choice of topics includes classical problems of combinatorics (such as counting, partitions, block designs) and graph theory (trees, spanning trees), finite projective planes, and important methods such as double counting, probabilistic proofs, and generating functions. Naturally, algorithmic aspects are also discussed, but the authors "have intentionally avoided overburdening the text with computer science terminology and examples".

P. Schmitt (Wien)

Algebra und Zahlentheorie — Algebra and Number Theory — Algèbre et théorie des nombres

G. Harman: Metric Number Theory. (London Mathematical Society Monographs, New Series 18.) Clarendon Press, Oxford, 1998, XVIII+297 S. ISBN 0-19-850083-1 H/b £ 75,–..

Metrische Zahlentheorie hat ihre Wurzeln in verschiedenen Bereichen der Mathematik, die aber mannigfache Querverbindungen zueinander aufweisen: diophantische Approximationen, Ziffernentwicklungen, Kettenbrüche, Gleichverteilung und anderes. Es ist daher verwunderlich, dass es seit Koksmas Ergebnisbericht „Diophantische Approximationen“ aus dem Jahre 1936 keine umfassende Darstellung dieses Gebietes gegeben hat (wohl aber für einzelne Teilbereiche). Diese

Lücke wird nun durch das vorliegende ausgezeichnete Buch geschlossen. Die Monographie von Harman präsentiert zahlreiche Ergebnisse mit einem fast 300 Titel umfassenden Literaturverzeichnis, welches im Text des Buches kommentiert wird, und ist zugleich eine gute Einführung in dieses Gebiet. Für weite Teile des Buches sind Grundkenntnisse der Maßtheorie und der Zahlentheorie ausreichend. Das Buch ist aber so geschrieben, dass man durchaus angeregt wird, sich weitere notwendige Kenntnisse — vor allem aus der Zahlentheorie und der Fourieranalyse — anzueignen. Viele Ergebnisse (darunter auch die schönen Resultate über diophantische Approximation mit eingeschränkten Nennern und Zählern) werden wohl das erste Mal in einer zusammenfassenden Darstellung dargeboten. Das vorliegende Buch wird für dieses Gebiet sicherlich ein Standardwerk der nächsten Jahre sein.

F. Schweiger (Salzburg)

W. Kaup, K. McCrimmon, H. P. Petersson (Eds.): Jordan Algebras. Proceedings of the Conference held in Oberwolfach, Germany, August 9–15, 1992. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1994, IX+339 S. ISBN 3-11-014251-1 H/b DM 198,–.

The prime example of a Jordan algebra is the algebra of matrices with the product $AB+BA$. They play an important role in Quantum Mechanics, there are may connections to finer points in the classification of Lie algebras, and symmetric spaces can be treated with the help of Jordan algebras in a very transparent way. All these connections and more are mentioned in these proceedings of a conference held in Oberwolfach which contains 14 articles, one of them by a Fields medallist. These are:

Allison: Structurable algebras and the construction of simple Lie algebras.
Dorfmeister: Algebraic systems in differential geometry.
Faraut: Fonctions spéciales sur une algèbre de Jordan.
Faulkner: Geometry and algebraic structures.
Friedman: Bounded symmetric domains and the JB^*-triple structure in physics.
Loos: Recent results on finiteness conditions in Jordan pairs.
Rodriguez Palacios: Jordan structures in Analysis.
Petersson: Max Köcher's work on Jordan algebras.
Petersson, Racine: Albert algebras.
Russo: Structure of JB^* triples.
Strade: The classification of simple Lie algebras over algebraically closed fields with positive characteristic.
Upmeier: Jordan algebras, complex analysis and quantization.
Walcher: Algebraic structures and differential equations.
Zelmanov: On linear groups and Lie algebras over arbitrary rings.

P. Michor (Wien)

S. Mac Lane: Categories for the Working Mathematician. Second Edition. (Graduate Texts in Mathematics 5.) Springer, New York u.a. 1998, XII+314 S. ISBN 0-387-98403-8 H/b DM 119,–.

For almost three decades this monograph (first published in 1971) has served as a very useful introduction to category theory, and it is likely to continue to do so. For this second edition it was slightly updated and extended (two new chapters of 37 pages: on symmetric monoidal categories and braided monoidal categories (and the coherence theorems for them), and on structures in categories (2-categories and higher-dimensional categories)).

P. Schmitt (Wien)

Y. Motohashi (Ed.): Analytic Number Theory. (London Mathematical Society Lecture Note Series 247.) Cambridge University Press, 1997, IX+382 S. ISBN 0-521-62512-2 P/b £ 27,95..

Das vorliegende Buch ist der Tagungsband des *39th Taniguchi International Symposium on Mathematics* über *Analytic Number Theory*, das im Mai 1996 in Kyoto stattfand. Allein die Liste der Hauptvortragenden (*E. Bombieri, P. D. T. A. Elliott, J.-H. Evertse, J. Friedlander, A. Granville, K. Hashimoto, A. Ivić, H. Iwaniec, M. Jutila, Y. Kitaoka, Y. Motohashi, M. R. Murty, P. Sarnak, H.-P. Schlickewei, R. Tijdeman, M. Waldschmidt, T. D. Wooley*) zeugt vom außerordentlich hohem Niveau dieser Tagung, das sich auch in diesem Tagungsband widerspiegelt.

Er besteht aus 24 Einzelbeiträgen mit den unterschiedlichsten Themen (Theorie der Riemannschen Zetafunktion, Exponentialformen, Goldbachproblem, Transzendenz, Diophantische Gleichungen, Modulformen), die aber auch für Nichtspezialisten gut zu lesen sind. Beispielsweise gibt der Artikel von *A. Ivić* über "On Some Results Concerning the Riemann Hypothesis" einleitend eine ausgezeichnete Einführung in die Theorie der Riemannschen Zetafunktion und die Bedeutung der Riemannschen Vermutung.

Insgesamt kann dieser Band sowohl Spezialisten als auch zahlentheoretisch Interessierten wärmstens empfohlen werden.

M. Drmota (Wien)

D. Ramakrishnan, R. J. Valenza: Fourier Analysis on Number Fields. (Graduate Texts in Mathematics 186.) Springer, New York u.a. 1999, XXI+350 S., ISBN 0-387-98436-4 H/b DM 79,–.

Wie der Titel des Werkes schon zum Ausdruck bringt, werden die zentralen Konzepte der Harmonischen Analysis für die Zahlentheorie nutzbar gemacht. Dabei wird ein weiter Bogen durch wesentliche Gebiete der modernen Mathematik gespannt, wobei sowohl algebraische, topologische als auch maßtheoretische Sichtweisen zu ihrem Recht kommen.

Dieser Aufgabe entsprechend decken die ersten drei der insgesamt sieben Hauptkapitel Bereiche ab, die man sonst nicht unbedingt in zahlentheoretisch orientierten Büchern sucht.

Das erste Kapitel (Topological Groups, 45 Seiten) befasst sich vor allem mit dem Haarschen Maß (der Rieszsche Satz über die Existenz eines Maßes zu vorgegebenem Funktional wird ohne Beweis verwendet) und der Struktur proendlicher Gruppen. Das zweite Kapitel (Some Representation Theory, 40 Seiten) stellt die Darstellungstheorie lokalkompakter Gruppen mit ihrem funktionalanalytischen Hintergrund dar. Das dritte Kapitel (Duality for Locally Compact Abelian Groups, 46 Seiten) ist der Pontrjaginschen Dualität gewidmet.

Erst danach treten die zahlentheoretischen Anwendungen der Harmonischen Analysis in den Vordergrund. Im vierten Kapitel (The Structure of Arithmetic Fields, 48 Seiten) besticht zunächst eine wunderschöne Darstellung der Klassifikation der lokalkompakten Körper mit Hilfe des Moduls eines Körperelements. Es folgen Erweiterungen lokaler Körper, Stellen und Vervollständigungen globaler Körper und Verzweigungen. Im fünften Kapitel (Adeles, Ideles, and the Class Groups, 34 Seiten) stehen die lokalkompakten Gruppen der Adele und Idele im Mittelpunkt. Dabei wird zunächst die Konstruktion eingeschränkter direkter Produkte zugrundegelegt, und erst spät wird die Klassengruppe eingeführt. Kapitel 6 (A quick tour of Class Field Theory, 29 Seiten) präsentiert den Dichtesatz von Tschebotarew und das Artinsche Reziprozitätsgesetz ohne Beweis, der Satz von Kronecker-Weber wird dann bewiesen. Das siebente und letzte Kapitel (Tate's Thesis and Applications, 72 Seiten) stellt Themen wie ζ-Funktionen, den Riemann-Rochschen Satz, die Dirichletsche Formel für die Klassenzahl etc. im hier dargestellten Kontext dar. Speziell sei auch auf die Übungsaufgaben verwiesen, welche jedem Kapitel angeschlossen sind, die beim letzten Kapitel aber besonders ausführlich geraten sind und auch die Skizze für einen Beweis des im Haupttext unbewiesenen Tschebotarewschen Dichtesatzes enthalten.

In zwei Anhängen (A über Normierte Räume, 11 Seiten, und B über Dedekindsche Ringe, 13 Seiten) werden noch einige Grundlagen bereitgestellt.

Das Buch zeigt in beeindruckender Weise die Verwobenheit klassischer mathematischer Disziplinen auf. Vermutlich wird es nur wenige Spezialisten geben, die durch seine Lektüre keine Erweiterung ihres Horizonts erwarten dürfen. Dementsprechend sollte es in keiner einschlägigen Bibliothek fehlen.

R. Winkler (Wien)

C. R. Vaughan: The Hardy-Littlewood method. Second Edition. (Cambridge Tracts in Mathematics 125.) Cambridge University Press, 1997, XIII+232 S. ISBN 0-521-57347-5 H/b £ 35,–.

Die 1981 erschienene erste Auflage dieses bekannten Lehrbuches enthält eine Darstellung der Hardy-Littlewood'schen Methode in ihrer klassischen Form. Dabei werden unter anderem folgende Fragestellungen der additiven Zahlentheorie im Detail behandelt: Das Waringsche Problem, das Goldbachsche Problem, die Frage der Darstellbarkeit einer natürlichen Zahl als Summe eines Quadrates, einer dritten und einer fünften Potenz einer natürlichen Zahl, ein Satz von Birch über die ganzzahligen Lösungen einer additiven homogenen Gleichung in vielen Unbekannten, und ein Satz von Davenport und Heilbronn über die Lösungen einer Diophantischen Ungleichung. Nicht aufgenommen wurden die Ergebnisse von W. Schmidt über Schranken von Lösungen homogener Diophantischer Gleichungen und Ungleichungen sowie Verallgemeinerungen der Methode auf algebraische Zahlkörper.

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten Auflage in zwei Punkten. Erstens wurde sie durch ein Kapitel ergänzt, welches die im Laufe der letzten zehn Jahre erschienenen Arbeiten von T. D. Wooley zum Waringschen Problem behandelt. Zweitens wurde das Kapitel fünf über den Vinogradovschen Mittelwertsatz auf den neuesten Stand des Wissens gebracht. Insbesonders enthält es jetzt eine auf Wooley zurückgehende Verschärfung des Vinogradovschen Mittelwertsatzes.

W. Müller (Graz)

H. Weyl: Algebraic Theory of Numbers. (Princeton Landmarks in Mathematics), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998, IX+223 S. ISBN 0-691-05917-9 P/b $ 19,95..

“These are the authentic notes of a course on Theory of Numbers given in Princeton during the year 1938–1939; I say authentic because they were written down by the lecturer himself.” With these words Hermann Weyl introduced his exposition to algebraic number fields including (axiomatic) divisibility theory and *p*-adic numbers. It was the first volume in the Princeton *Annals of Mathematics Studies*, and it has become a classic. (Even more: a classic which still may serve as an introduction.) And, therefore, it is certainly commendable that Princeton University Press keeps it available. (It is a sad fact that, nowadays, even good books often are out of print after only a few years!) However, is it unfair to expect (demand) more editorial care than shown by an unchanged photomechanic reprint of the original edition (a typoscript)? Given today’s TEXnical possibilities, a new and nicely typeset edition (with at least a few comments by today’s experts) would have easily been possible, wouldn’t it?

P. Schmitt (Wien)

Geometrie, Topologie — Geometry, Topology — Géométrie, Topologie

L. M. Batten: Combinatorics of finite geometries. Second Edition, Cambridge University Press 1997, XIV+193 S. ISBN 0-521-59993-8 P/b £ 16,95, ISBN 0-521-59014-0 H/b £ 45,00..

Dieses Buch ist eine überarbeitete Fassung der 1986 erschienenen ersten Auflage. Es ist eine ausgezeichnete und gründliche Einführung in die Theorie der endlichen Geometrien, speziell der affinen und projektiven Räume. Begonnen wird mit „fastlinearen Räumen", das sind Paare (P,L) von „Punkten" und „Geraden", wobei jede Gerade zumindest zwei Punkte hat und je zwei Punkte auf höchstens einer Geraden liegen. Falls jede Gerade genau zwei Punkte hat, erhält man natürlich gerade die (ungerichteten) Graphen. Zentral ist der Begriff der Zusammenhangszahl $c(p,l)$, der Anzahl aller Geraden durch p und einen Punkt von l (dabei sei p nicht auf l). Einige der Formeln, die üblicherweise für taktische Konfigurationenn bewiesen werden, gelten schon auf dieser Stufe. Ist $c(p,l)$ stets die Anzahl der Punkte auf l, so spricht man von einem linearen Raum; Spezialfälle davon sind die affinen und die projektiven Räume. Viele weitere geometrische Begriffe können über diese Zuammenhangszahlen charakterisiert werden. Ist zum Beispiel $c(p,l)$ stets gleich $|l|$ oder 1, so erhält man genau die „polaren Räume". Ganz neu ist ein Kapitel über „blocking sets", das sind Mengen B von Punkten in fastlinearen Räumen (P,L) mit der folgenden Eigenschaft: für jede Gerade l ist $0 < |l \cap B| < |l|$. Diese haben interessante Anwendungen in der Spieltheorie, dem Design statistischer Experimente und der Kryptologie. Viele Beispiele laden zur aktiven Mitarbeit ein. Es ist ein Vergnügen, in diesem Buch zu lesen.

G. Pilz (Linz)

R. Bix: Conics and Cubics. A Concrete Introduction to Algebraic Curves. With 148 Illustrations. (Undergraduate Texts in Mathematics.) Springer, New York u.a. 1998, X+289 S. ISBN 0-387-98401-1 H/b DM 98,–.

Der hier gebotene Einstieg in die Algebraische Geometrie beschränkt sich auf die ebenen algebraischen Kurven der Ordnungen zwei und drei. In dem Bestreben, auf mathematische Vorkenntnisse des Lesers weitgehend zu verzichten, ist das Werk ganz auf amerikanische Verhältnisse zugeschnitten. Die Determinanten werden erst auf Seite 214 eingeführt — und auch nur für dreireihige Matrizen. Und die Bedingung für die Lösbarkeit eines homogenen Systems linearer Gleichungen wird auf Seite 249 hergeleitet.

Daß der Autor trotzdem bis zum Beweis des Satzes von Bézout kommt, zu den Normalformen der Kubiken und zur Addition von Punkten auf einer nichtrationalen Kubik, ist erstaunlich, und darin liegt zweifellos die Stärke dieses Lehrbuches.

Es ist dies also kein Nachschlagewerk zur Algebraischen Geometrie; dazu fehlen einfach zu viele wichtige Begriffe wie z.B. „rational“. Aber es wird demonstriert, auch anhand von rund 300 Beispielen, wie weit man mit elementarster analytischer Geometrie in die Theorie der ebenen algebraischen Kurven vordringen kann.

H. Stachel (Wien)

D. A. Brannan, M. F. Esplen, J. J. Gray: Geometry. Cambridge University Press, 1999, XI+497 S., ISBN 0-521-59193-7 H/b £ 50,–, ISBN 0-521-59787-0 P/b £ 18,95.

Vorweg gesagt und trotz der folgenden kritischen Anmerkungen liegt ein im Wesentlichen gutes Buch vor. Geometrische Grundkenntnisse scheinen heutzutage auch in Mathematikerkreisen in solch geringem Maße vorhanden, dass jeder Versuch, Geometriewissen zu vermitteln, an sich schon einen beachtlichen Wert darstellt. Diesem Bonus stehen allerdings nicht wenige Figuren gegenüber, die eines Geometriebuches unwürdig sind. Über manche inhaltliche und methodische Oberflächlichkeit dieses in England verfassten Lehr- und Lernbuches über „Geometrie vom KLEINschen Standpunkt“ muss der Leser ebenfalls tolerant hinwegsehen und sich mit der im Vorwort getroffenen Feststellung: „Geometry is having a revival!“ tröstlich stimmen lassen.

Inhaltlich basiert das Buch auf Geometrie-Kursen der “Open University/BBC London” für Mathematiker. Dabei wird als methodischer Leitgedanke die KLEINsche Auffassung von Geometrie als Invariantentheorie einer (klassischen) Gruppe angekündigt. Zu Anfang wird jenes Material zusammengetragen, das vor einer Generation (auch in Großbritannien) noch zum Schulstoff gehörte: Kegelschnitte und ihre elementargeometrischen Eigenschaften. Sie liefern die Grundgegenstände, die dann vom affinen und später vom projektiven Standpunkt erneut betrachtet werden. Diese Vorgehensweise benützt in allen Stufen der Betrachtung entsprechende Koordinatensysteme und die arithmetischen Modelle $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}P^2$, so dass sich die Frage: „Wie kommen die Zahlen in die Geometrie?“ nie stellt. Mit dieser Beschränkung wird die ebene projektive Geometrie auch nicht axiomatisch betrieben, sondern über die Zentralprojektion im Anschauungsraum hergeleitet und nur elementargeometrisch behandelt. Immerhin kann man mittels explizit vorgerechneter Beispiele den praktischen Umgang mit projektiven Koordinaten und Kollineationsmatrizen lernen, was Anwendern ebener projektiver Geometrie genügen dürfte.

Die Kapitel über nichteuklidische Geometrie werden durch einen Abschnitt über Inversions- und MÖBIUS-Geometrie vorbereitet. Dass dabei die zur konform abgeschlossenen GAUSSschen Zahlenebene gehörige komplexe projektive Gerade mit einer komplexen Ebene verwechselt wird (vgl. die Kapitelüberschrift “Transformations of the Complex Plane”, S. 211), ist allerdings keine lässliche Sünde mehr, vor allem im Hinblick auf das eingangs angekündigte methodische Programm „KLEINscher Standpunkt"! Trotz ausführlicher analytischer Behandlung der MÖBIUS-Transformationen, u. a. mittels vorgerechneter Beispiele, wird nirgends darauf Bezug genommen, dass es sich (i. W.) um Projektivitäten in der komplexen projektiven Geraden handelt.

Die Gegenüberstellung der ebenen Affinitäten und der MÖBIUS-Transformationen hinsichtlich der Angabe durch zugeordnete Tripel ist vom projektiven, also dem KLEINschen, Standpunkt in der angegebenen Weise nicht möglich und irreführend.

Nichteuklidische Geometrie — und hier ist zunächst nur die ebene hyperbolische Geometrie gemeint — wird mittels des kreisgeometrischen Modells (Geraden sind die im Inneren einer Kreisscheibe u liegenden Orthogonalkreisbögen des ‚absoluten' Randkreises der Scheibe) eingeführt. Demgemäß werden hyperbolische Kongruenzen mit MÖBIUS-Transformationen gekoppelt, anstatt sie im KLEINschen Sinn mit Projektivitäten auf dem absoluten Kreis u in Verbindung zu bringen.

Die elliptische (ebene) Geometrie wird konsequent „sphärische Geometrie" genannt. (Die beigefügten Globusskizzen weisen alle üblichen Darstellungsfehler auf.) Das zusammenfassende Überblickkapitel "The KLEINian View of Geometry" ist mit kaum fünfzehn Seiten unzureichend.

In zwei Appendices werden „Gruppen" und „Vektorräume" schlagwortartig und zum Haupttext passend vorgestellt. Im dritten Appendix werden auf über 100 Seiten die Lösungen der zu den einzelnen Kapiteln gestellten Aufgaben ausführlich wiedergegeben.

Das Layout des Buches besticht durch gute Textgliederung und einen breiten Rand, der ergänzende Bemerkungen enthält. Leider sind die Figuren, wie schon bemängelt, häufig fehlerhaft und unästhetisch.

Das Buch wird dem Geometrie Unterrichtenden eine interessante Übungsaufgabenquelle sein und ihn in methodischer Hinsicht herausfordern, es besser zu machen. Der Geometrie Lernende sollte mit dem Buch möglichst nicht sich selbst überlassen sein. Er wird aber jedenfalls einige wesentliche Grundinformationen über Geometrie erhalten und vor allem (durch die vielen instruktiven Aufgaben) damit umgehen lernen.

G. Weiß (Dresden)

S. Dineen: Multivariate Calculus and Geometry. With 109 Figures. (Springer Undergraduate Mathematics Series.) Springer, London u.a. 1998, XII+262 S. ISBN 3-540-76176-4 P/b DM 49,–..

"Multivariate Calculus" wird im vorliegenden Band der Springer Undergraduate Mathematics Series nicht als Wissenschaft für sich vorgestellt, sondern als Werkzeug zur Behandlung der (elementaren) Differentialgeometrie. Das Buch knüpft also die Verbindung zwischen Linearer Algebra und Analytischer Geometrie einerseits und grundlegenden Kapiteln der Analysis.

Es ist für Studienanfänger konzipiert, denen es die Grundbegriffe der Differentialgeometrie der Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^3$ nahe bringt. Ausführliche, aber nicht weitschweifige Erklärungen und die Orientierung an elementarer geometrischer Anschauung vermitteln zentrale mathematische Bildungsgüter, auf denen dann der zweite Studienabschnitt leicht aufbauen kann.

Das Buch sollte für alle jene Lehramts- und Mathematik-Studenten Pflichtlektüre sein, in deren Ausbildungsplänen keine oder bloß geringe Geometrieanteile vorgesehen sind. Mit Aufgabenlösungen und ausführlichem Index ausgestattet, ist das Buch auch zum Selbststudium bestens geeignet.

Ein Wermutstropfen: Die meisten der vielen für Anschaulichkeit sorgen sollenden Schrägriss-Skizzen sind geometrisch grundfalsch. (Horrorbeispiele sind z.B. 12.13, 14 und 17.1.) Dass generell trotz (oder wegen?) aller heute einsetzbarer automatischer Zeichenhilfen ein solcher Verfall an Visualisierungskultur statthat, ist beklagenswert. Mit diesem Mangel steht das vorliegende, didaktisch hervorragend aufgebaute Buch allerdings nicht allein.

G. Weiß (Dresden)

G. N. Frederickson: Dissections: Plane & Fancy. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, XI+310 S. ISBN 0-521-57197-9 H/b £ 19,95..

"A geometric dissection is a cutting of one or more figures into pieces that can be rearranged to form other figures." Dissection problems usually are classified as 'recreational' mathematics and, of course, dealing with them is fun. However, it also is a good training in problem solving, and it is 'serious' mathematics, as well, albeit of a subject for which (so far?) no systematic theory exists.—First of all, this delightful monograph (for "anyone who has had a course in high school geometry and thought that regular hexagons were rather pretty") includes an extensive collection of ingenious examples of dissection problems and methods (of plane figures and of solids), as they have been discovered by puzzle authors, by amateurs, and by mathematicians, but it also brings some systematic order to a diverse subject, tells about its history, and provides an extensive bibliography.

P. Schmitt (Wien)

R. Goodman, N. R. Wallach: Representations and Invariants of the Classical Groups. (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 68.) Cambridge University Press, 1998, XVI+685 S. ISBN 0-521-58273-3 H/b £ 65,–.

This monumental volume can be considered as the modern, updated account of the theory that was the topic of Hermann Weyl's famous "The Classical Groups. Their Invariants and Representations" (Princeton University Press, 1946). It covers the structure theory and representation theory of classical groups and their Lie algebras, the corresponding invariant theory, homogeneous spaces and symmetric spaces, applications to dual pairs or knot polynomials, to mention just the most important items. In the presentation of the material, a dual viewpoint is taken, analytic and algebraic, as classical groups (over $\mathbb{C}$) can be seen either as complexifications of compact Lie groups or as special cases of reductive algebraic groups. The exposition is extremely careful and always well-motivated. Numerous examples and exercises complement the body of the book. With its wealth of material covered, this book will be *the* reference book on these topics for the next decades. Besides, numerous courses, on different levels, can be taught from this book, particularly as it is almost self-contained, prerequisites from Algebraic Geometry, Linear and Multilinear Algebra, Associative Algebras and Lie Algebras, Manifolds and Lie Groups being provided in extensive appendices.

Ch. Krattenthaler (Wien)

W. B. R. Lickorish: An Introduction to Knot Theory. With 114 Illustrations.p (Graduate Texts in Mathematics 175.) Springer, New York u.a. 1997, X+201 S. ISBN 0-387-98254-X H/b DM 89,–.

A (mathematical) knot is a 1-dimensional "string" lying in (ordinary) 3-dimensional space. The theory of knots is a topical subject (with applications in molecular biology, equilibrium statistical mechanics, and quantum field theory). There are several recent introductions among which the curious reader may choose. This monograph offers a well-written exposition which is essentially self-contained (relative to a moderate level of mathematical maturity) and logically complete (except for some technicalties from piecewise linear topology). The emphasis is on proof (as opposed to an intuitive treatment): "One can take the view that the object of mathematics is to *prove* that certain things are true. That object will here be pursued."

P. Schmitt (Wien)

H. Lüneburg: Die euklidische Ebene und ihre Verwandten. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1999, VIII+207 S., ISBN 3-7643-5685-5 P/b öS 364,–..

Das vorliegende Buch ist aus sieben Studienbriefen ("Grundlagen der Geometrie") der Fernuniversität Hagen entstanden. Der Autor verfolgt das Ziel, die euklidische Ebene im weiteren Umfeld der affinen und projektiven Ebenen vorzustellen.

Wir fassen im folgenden die Überschriften sowie — stichwortartig — den wesentlichen Inhalt der einzelnen Kapitel zusammen:

1. Projektive und affine Ebenen. Axiomatik, Dualitätsprinzip, Kollineationen, Desarguesscher Satz.

2. Desarguessche Ebenen. Translationsebenen, projektive Ebenen über Rechtsvektorräumen, Hauptsätze.

3. Papposche Ebenen. Korrelationen mit zwei Geraden aus absoluten Punkten (Satz von Herzer), projektive Kollineationen, Doppelverhältnis, Kennzeichnung der Projektivitäten nach von Staudt.

4. Polaritäten und Kegelschnitte. Polaritäten endlicher Ebenen, Darstellung von Polaritäten durch Sesquilinearformen, Staudtsche und Steinersche Definition der Kegelschnitte, Satz von Pascal, Satz von B. Segre, Knoten eines Ovals.

5. Teilverhältnisse und Orthogonalität in affinen Ebenen. Teilverhältnisse (in Translationsebenen), Orthogonalität (in papposschen Ebenen), thaletische Orthogonalitätsrelationen, pythagoräische Körper.

6. Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte. Euklidische Körper, innere, quasiinnere und äußere Punkte eines Kegelschnitts, Kegelschnitte in affinen Ebenen, Kreise, Achsen, Brennpunkte.

7. Die reelle Ebene. Zwischenbeziehung, angeordnete Körper, desarguessche angeordnete affine Ebenen, Stetigkeit.

Die hier aus Platzgründen nur grob skizzierte Stoffauswahl zeigt wohl schon deutlich, auf welchem Weg sich der Autor der reellen euklidischen Ebene nähert; der Titel des Werkes „…und ihre Verwandten“ ist treffend gewählt. Die Diskussion des „Umfeldes“ der reellen euklidischen Ebene soll zu einem tieferen Verständnis für eben diese Ebene führen.

Methodisch ist der gewählte Zugang dadurch gekennzeichnet, daß sehr früh die beiden Hauptsätze der projektiven Geometrie hergeleitet werden. Somit können ab dem Ende von Kapitel 2 die schlagkräftigen Methoden der linearen Algebra eingesetzt werden, wovon der Autor auch reichlich Gebrauch macht. So unterscheidet sich das vorliegende Werk methodisch wesentlich etwa von den Bänden „Geometrie projektiver Räume I, II“ von H. Brauner, wo ein ähnlicher Zugang mit weitgehend synthetischen Überlegungen gewählt wurde. Ein weiterer Unterschied zu den genannten Werken ist, daß die Raumgeometrie fast völlig unberücksichtigt bleibt.

Das Buch ist abschnittsweise reich illustriert; bloß zu den Kegelschnitten gibt es keinerlei Figuren. Das ist schade, denn gerade hier könnten Bilder wesentlich bei der Lektüre dieses schönen Buches weiterhelfen.

H. Havlicek (Wien)

P. Petersen: Riemannian Geometry. With 60 Illustrations. (Graduate Texts in Mathematics 171.) Springer, New York u.w. 1998, XVI+432 S. ISBN 0-387-98212-4 H/b DM 89,–.

Das als Graduate Text herausgegebene Buch ist eine hervorragende Ergänzung zu Werken gleichen Titels (etwa M. P. do Carmo (1993), J. Jost (1995)) von denen es sich im Aufbau und Darstellung unterscheidet. Es setzt zwar enge Vertrautheit mit Begriffsbildungen aus dem weiteren Umfeld der Differentialgeometrie voraus, ist aber im Stil so ansprechend verfasst, dass es vermutlich auch den dem Sachgebiet fern stehenden Leser in seinen Bann ziehen wird. Die Ausführungen sind knapp, aber präzise und führen von den grundlegenden Definitionen bis hin zu erstmalig lehrbuchartig aufbereiteten neuesten Resultaten.

Den Kapiteln vorangestellte einführende Kommentare erläutern den methodischen Zugang. Jedes Kapitel enthält auch gezielte Hinweise auf weiterführende oder vertiefende Literatur. Nachgestellte Abschnitte mit Übungsaufgaben runden den umfangreichen Stoff ab. Zu mancher der Aufgaben könnte der Leser Lösungshinweise vermissen.

Eine nach dem vorliegenden Buch gehaltene Lehrveranstaltung mit üblichem Wochenstundenausmaß könnte man etwa aus den Kapiteln 1 (Riemannian Metrics), 2 (Connections, Curvature), 5 (Geodesics and Distance) zusammenstellen, wobei natürlich die Kapitel 3 (Hyperbolic Space, Complex Projective Space) und 4 (Hypersurfaces) auszugsweise herangezogen werden müssten. Die Kapitel 7 (Bochner Technique) und 8 (Symmetric Spaces and Holonomy) könnten „Ausblicke“ beisteuern. Die übrigen Abschnitte 6, 9–11 (Comparison Geometry) befassen sich mit Themen (Ricci Curvature, Gromov-Hausdorff Convergence, Sectional Curvature Comparison), die dann in Seminaren behandelt werden könnten (Critical Point Theory, Betti Numbers, Homotopy Finiteness). Anhang A (de Rham Cohomology) wird hier als Vorbereitung dienen müssen.

Der Anhang B (Frame Bundles) vergleicht den Cartan'schen Kalkül mit dem im Buch verwendeten Tensorkalkül.

Im Anhang C (Spinors) wird der Bezug zur mathematischen Physik hergestellt. Alles in allem: der Autor hat ein ganz hervorragendes Buch geschrieben.

G. Weiß (Dresden)

Ch. Zong: Strange Phenomena in Convex and Discrete Geometry. Edited by J. J. Dudziak. (Universitext.) Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1996, X+158 S. ISBN 0-387-94734-5 brosch. DM 44,–.

Convex and discrete geometry is a rather intuitive subject. Many of its problems can be explained to the famous layman in a few minutes. However, solving these problems often is extremly hard. Moreover, surprisingly some of the commonly believed conjectures, have (often quite recently) turned out not to be true. “The purpose of this book is to present just some of the most famous problems . . . which possess such incredible answers.”

The seven chapters include Borsuk's problem on covering a body by smaller bodies, finite packings of balls (the sausage conjecture), translative tiles which are not lattice tiles, the kissing and blocking numbers of convex bodies, properties of most convex bodies (in the category sense), the Busemann-Petty problem on projections, and Dvoretzky's theorem on the existence of cross-sections which are ε-balls (i.e., nearly balls).

The monograph is a well-written introduction (for a general mathematical audience) to (selected topics of) a fascinating subject.

P. Schmitt (Wien)

Analysis — Analysis — Analyse

G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy R: Special Functions. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 71.) Cambridge University Press, 1999, XVI+664 S., ISBN 0-521-62321-9 H/b £ 55,–.

Paul Turán hat einmal die Bemerkung gemacht, dass man spezielle Funktionen besser als „nützliche Funktionen" bezeichnen sollte, da sie unzählige Anwendungen besitzen. In den letzten dreissig Jahren hat die Theorie der speziellen Funktionen u. a. durch überraschende kombinatorische Interpretationen einen neuen Aufschwung genommen, der vor allem mit den Namen Schützenberger und Foata verknüpft ist. Die Autoren beschränken sich in diesem Buch vor allem auf die hypergeometrischen Funktionen und Reihen, deren Bedeutung zuerst von Gauss klar erkannt wurde. Zum Verständnis der hypergeometrischen Funktionen sind die Gammafunktion und die Betaintegrale wesentlich, mit welchen dieses Werk beginnt. Einen ganz kleinen Einblick in den behandelten Stoff bieten die Kapitelüberschriften: 1. The Gamma and Beta Functions, 2. The Hypergeometric Functions, 3. Hypergeometric Transformations and Identities, 4. Bessel Functions and Confluent Hypergeometric Functions, 5. Orthogonal Polynomials, 6. Special Orthogonal Polynomials, 7. Topics in Orthogonal Polynomials, 8. The Selberg Integral and Its Applications, 9. Spherical Harmonics, 10. Introduction to q-Series, 11. Partitions, 12. Bailey Chains. Dieses großartige Werk enthält eine Fülle von Stoff, der von wichtigen wohlbekannten und auch einigen fast vergessenen alten Resultaten bis zu überaus interessanten neuen Entwicklungen führt.

Die Autoren weisen darauf hin, dass die Welt der Formeln, die bis zum 19. Jahrhundert in der Mathematik eine dominierende Rolle spielte, durch die Welle der Abstraktheit, die das 20. Jahrhundert überschwemmte, außer Mode kam und teilweise in Vergessenheit geriet. So meinte Hardy, dass Ramanujan 100 Jahre zu spät gekommen sei, und Littlewood, dass die Zeit der Formeln endgültig vorüber wäre. Das vorliegende Buch, das überaus wertvolle historische Bemerkungen und viele konkrete Beispiele und Aufgaben enthält, wird aber sicher — zusammen mit den neueren Entwicklungen auf dem Computersektor und dem algorithmischen Zugang zur Mathematik — eine entscheidende Rolle dabei spielen, dass die Welt der Formeln wieder zu neuem Leben erwachen wird.

J. Cigler (Wien)

St. K. Berberian: Fundamentals of Real Analysis. With 31 Figures. (Universitext.) Springer, New York u.a. 1999, XI+479 S. ISBN 0-387-98480-1 P/b DM 99,–.

Der Verfasser hat bereits eine Reihe ausgezeichneter Lehrbücher verfaßt, die teils schon zu Klassikern geworden sind, z. B. “Measure and Integration” (1965). Das vorliegende Werk stellt die Ausarbeitung von Vorlesungen über reelle Funktionen dar, die der Autor 1985/86 gehalten hat. Dementsprechend sind Inhalt und Gestaltung ausgefallen: Die Kapitel sind abwechslungsreich gestaltet, mit Blick auf das Wesentliche, und mit didaktisch sinnvollen Redundanzen und Wiederholungen; so entwickelt der Autor die Maßtheorie zunächst auf der Zahlengeraden, später erst abstrakt, ebenso zunächst die Theorie metrischer und erst dann die allgemeiner topologischer Räume u. dgl.

Der Inhalt umfaßt Kapitel über Grundlagen (Mengenlehre, reelle Zahlen, Kardinal- und Ordinalzahlen), das Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}$, Topologie, Maß und Integral in abstrakten Räumen, Differentiationstheorie (dieses Thema wird recht ausführlich behandelt: es enthält u. a. den Fundamentalsatz für das Lebesguesche Integral, Lebesgue-Zerlegung von Funktionen beschränkter Variation und das Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit), Funktionenräume (vor allem L^p und $\mathbb{C}$ mit komplexwertigen Funktionen), Produktmaße, die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ mit einem Picardschen und einem Peanoschen Existenzsatz und einige weitere Fragen der Maßtheorie (Hahn-Jordansche Zerlegung, Satz von Radon-Nikodym, Faltung und Integraloperatoren).

Der Text ist flüssig geschrieben, bringt gute Motivationen und Argumente, ausreichend Übungsmaterial und kann, insbesondere dank der gelungenen Stoffauswahl, als moderne Einführung in die Maßtheorie und reelle Analysis bestens empfohlen werden.

W. Wertz (Wien)

K. Bichteler: Integration — A Functional Approach. (Birkhäuser Advanced Texts, Basler Lehrbücher.) Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1998, VIII+193 S. ISBN 3-7643-5936-6, 0-8176-5936-6 H/b sfr 68,–..

Dieses Buch bietet eine Einführung in die Maß- und Integrationstheorie über den Daniellschen Zugang. Der Verfasser behandelt zunächst das Riemannsche Integral und charakterisiert Riemann-integrierbare Funktionen mit Hilfe des „Jordanschen Mittels“ (im wesentlichen das obere Riemannsche Integral von Beträgen von Funktionen). Dieser Zugang ermöglicht eine völlig analoge Definition des Lebesgueschen Integrals mittels sog. Daniellscher bzw. Daniell-Stoneschen Mittel. Die folgenden Kapitel entwickeln die weitere Theorie: Meßbarkeit von Funktionen, Integrale komplex- und vektorwertiger Funktionen, Baire- und Borel-Funktionen, eine ausführliche Theorie der L_p-Räume, Produkträume, Faltung, Satz von Radon-Nikodym und die Differentiation von Integralen. Ein abschließender Abschnitt enthält Lösungen für die zahlreichen im Text verteilten Aufgaben.

Wenngleich der eingeschlagene Zugang in seinen Grundlagen gewinnend wirkt, so ergeben sich die Ergebnisse jedoch nicht umsonst: Die Tücke liegt eben wieder in den technischen Einzelheiten, deren Bewältigung nicht immer gut gelungen ist. Immer wieder finden sich ungewöhnliche oder von der üblichen Terminologie abweichende Definitionen (z.B. wird „Mittel" gänzlich abweichend von der gängigen Literatur benützt), die Gleichsetzung von Indikatorfunktionen mit den sie definierenden Mengen verwirrt letztlich die Begriffe und wird dem Leserkreis, an den sich das Buch richtet, wohl eher unnötige Schwierigkeiten bereiten. Die nahezu mit Sendungsbewußtsein vorgetragene Abgrenzung vom geometrisch-abstrakten Zugang zur Maßtheorie (wie bei Halmos) durch Überbetonung des funktionalen Integralbegriffes wirkt insgesamt nicht überzeugend.

Mit der Maßtheorie vertraute Leser werden den vorgelegten Zugang gewiß zu schätzen wissen, ob sich das Buch aber als Einführung in die reelle Analysis eignet, sei dahingestellt.

W. Wertz (Wien)

E. B. Saff, V. Totik: Logarithmic Potentials with External Fields. With 18 Figures. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 316.) Springer Verlag, Berlin u.a. 1997. XV+505 S. ISBN 3-540-57078-0 H/b DM 158,–.

Das vorliegende Buch gibt eine Einführung in die Theorie gewichteter logarithmischer Potentiale. Im Gegensatz zum klassischen ungewichteten Fall treten hier völlig neue Phänomene auf: etwa muß das Maß extremaler Energie nicht mehr nur den Rand des zugrundeliegenden Gebietes als Träger haben.

Nach einer konzisen Einführung in die klassische Theorie werden gewichtete Potentiale eingeführt und die wesentliche Eigenschaften derselben abgeleitet. Danach werden Anwendungen einerseits potentialtheoretischer Natur und andererseits aus der Approximationstheorie und der Theorie der orthogonalen Polynome gegeben.

Hier sei noch ein Auszug aus der Liste der in dem Buch behandelten Probleme angegeben:

— Asymptotik von Orthogonalpolynomen auf unbeschränkten Intervallen,

— asymptotisches Verhalten von Fekete-Punkten,

— numerische konforme Abbildung,

— gewichtete Approximation,

— Padé-Approximation,

— Konvergenzraten für die Bestapproximation gewisser transzendenter Funktionen durch rationale Funktionen.

P. Grabner (Graz)

R. P. Kanwal: Linear Integral Equations. Second Edition. Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 1997, IX+318 S. ISBN 0-8176-3940-3, 3-7643-3940-3 geb. sfr 124,–.

Die vorliegende zweite Auflage ist gegenüber der ersten um eine Reihe von Beispielen vermehrt und enthält auch etwas mehr Material zu den Integralgleichungen vom Cauchy-Typ auf der reellen Geraden. Auch ist die Bibliographie aktualisiert worden. Es handelt sich bei dem Werk um ein Lehrbuch zur Einführung in wesentliche Fragestellungen und Methoden des Gebietes. So werden Integralgleichungen mit separablen Kernen, die sukzessive Approximation, die klassische Fredholm-Theorie, Anwendungen auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, symmetrische Kerne, singuläre Integralgleichungen, die Methode der Integraltransformationen, gemischte Randwertprobleme und Perturbationsmethoden behandelt. Das Buch ist überaus klassisch angelegt und enthält viele klassische physikalische Anwendungen wie zum Beispiel im Bereich der Elektrostatik, der Hydrodynamik, Elastizitätstheorie und Theorie der Streuung. Das Buch erscheint sehr geeignet als Lehrbuch für eine einführende Vorlesung in die klassischen Integralgleichungen, vor allem für Physiker und Techniker. Es ist wegen seiner guten Lesbarkeit auch zum Selbststudium zu empfehlen.

P. Zinterhof (Salzburg)

L. A. Sakhnovich: Spectral Theory of Canonical Differential Systems. Method of Operator Identities. (Operator Theory, Advances and Applications, Vol. 107.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1999, VI+202 S., ISBN 3-7643-6057-7, 0-8176-6057-7 H/b öS 1300,–.

Dieses in der Serie „Operator Theory: Advances and Applications“ erschienene Buch beschäftigt sich mit der Spektraltheorie sogenannter kanonischer Systeme von Differentialgleichungen. Dazu gehören - nach passenden Umformungen - etwa Sturm-Liouville- und Dirac-Gleichungen, ebenso Krein-Systeme und die Gleichung der schwingenden Saite. Die hier entwickelte Theorie wird sowohl auf die oben genannten Beispiele wie auch auf einige nichtlineare Probleme, die nichtlineare Schrödinger-Gleichung, die Korteweg-de Vries-Gleichung oder die sinh-Gordon-Gleichung angewandt.

Das vorliegende Werk ist thematisch in drei Abschnitte gegliedert. Im ersten Teil, den Kapiteln 1 bis 3, werden Faktorisierungen von operatorwertigen analytischen Funktionen behandelt. Der zweite Abschnitt, bestehend aus den Kapiteln 4 bis 11, bildet den Hauptteil des Buches. In ihm werden die Spektraleigenschaften eines kanonischen Systems untersucht. Eine besonders wichtige Rolle spielt dabei die Matrixspektralfunktion, ein matrixwertiges Analogon zum Titchmarsh-Weyl-Koeffizienten z.B. eines Sturm-Liouville Problems. Großes Gewicht hat bei diesen

Betrachtungen das inverse Spektralproblem. Im letzten Teil, der nur aus dem Kapitel 12 besteht, wird schließlich die entwickelte Theorie auf die eingangs erwähnten nichtlinearen Probleme angewandt.

Das Buch wird in erster Linie für den auf dem Gebiet wissenschaftlich tätigen Mathematiker von Interesse sein. Viele der dargestellten Ergebnisse sind zum ersten Mal in Buchform erschienen. Entsprechend ist auch die Darstellung relativ kurz gehalten. Manchmal ist, wie bei matrixwertigen Problemen erfahrungsgemäß unvermeidlich, die Notation etwas unübersichtlich und schwierig lesbar. Trotz der — natürlichen — Schwierigkeiten bei der Darstellung der durchwegs tiefliegenden Ergebnisse gelingt es dem Autor, die Grundideen klar herauszuarbeiten.

H. Woracek (Wien)

H. H. Schaefer, H. P. Wolff: Topological Vector Spaces. Second Edition. (Graduate Texts in Mathematics 3.) Springer Verlag, New York u.a. 1999, XI+346 S. ISBN 0-387-98726-6 H/b DM 119,–.

Die ursprüngliche Ausgabe des Buches von Helmut Schaefer (Universität Tübingen) ist im Jahre 1966 erschienen, hat seither fünf Auflagen erlebt und ist zu einem Standardwerk geworden. Dank seiner ausgezeichneten Anordnung, Stoffauswahl und präzisen Darstellungsweise ist diesem Werk ein solcher Erfolg beschieden. Gemeinsam mit M.P. Wolff hat nun Schaefer eine Neuausgabe verfaßt, die im wesentlichen einen Neudruck des Bewährten darstellt, erweitert um ein Kapitel über C^*-Algebren.

Der Inhalt des Buches: ein Überblick über Mengen, Topologie und lineare Algebra; Kap. I: Allgemeine Theorie der topologischen Vektorräume; Kap. II: Lokalkonvexe Vektorräume, einschließlich normierter Räume, spezielle Klassen wie tonnelierte und bornologische Räume, Trennungssätze; Kap. III: Lineare Abbildungen, einschließlich topologischer Tensorprodukte und nuklearer Abbildungen; Kap. IV: Dualitätstheorie mit ausführlicher Erörterung schwacher Topologien und damit zusammenhängender Fragen; Kap. V: Ordnungsstrukturen: reelle und komplexe geordnete Vektorräume, Ordnungstopologie, geordnete topologische Vektorräume, stetige Funktionen auf kompakten Räumen; Kap. VI: C^*- und W^*-Algebren: Gelfand-Theorem, Ordnungsstruktur von C^*-Algebren, positive Linearformen, Darstellungen von C^*-Algebren und die Spezialfälle der W^*- und v.Neumann-Algebren. Ein Anhang behandelt Spektraleigenschaften positiver Operatoren.

Als die erste Fassung von Schaefers Buch geschrieben wurde, standen neben dem Werk von Dunford und Schwartz (Linear Operators I und II) nur Bourbakis (recht mühsam lesbares) “Espaces vectoriels topologiques” und Köthes „Topologische lineare Räume I“ als Monographien zur Verfügung; für die beiden letztgenannten Werke bestanden zumindest im anglo-amerikanischen Raum schon sprachliche Barrieren, sodaß eine englischsprachliche Gesamtdarstellung gewiß willkommen war. Aber auch heute noch kann das vorliegende Buch als einführendes Lehrbuch für das Gebiet der topologischen linearen Räume bestens empfohlen werden, wenngleich in den bald 35 Jahren seit seiner Entstehung etliche gute Monographien erschienen sind.

W. Wertz (Wien)

Differentialgleichungen — Differential Equations — Équations différentielles

G. Evans, J. Blackledge, P. Yardley: Analytic Methods for Partial Differential Equations. With 25 Figures. (Springer Undergraduate Mathematics Series.) Springer Verlag, Berlin u.a. 1999, XII+299 S. ISBN 3-540-76124-1 P/b DM 59,–.

Der Terminus ‘Analytical Methods’ im Titel bezieht sich darauf, dass analytische (im Gegensatz zu numerischen) Lösungsverfahren für konkrete Klassen linearer partieller Differentialgleichungen behandelt werden — unter Verzicht auf rigorose Lösungstheorie.

Damit ist der Anspruch des Buches auch schon charakerisiert: Es ist ‚praxisbezogen‘ in dem Sinn, dass die relevanten Lösungsmethoden (Stichworte: Separation der Variablen, Charakteristikenmethode, Integraltransformationen, Green’sche Funktionen) vorgestellt und anhand zahlreicher im Detail durchgerechneter Beispiele illustriert werden. Zu kritisieren ist allerdings, dass im Text bei der Diskussion der konkreten Methoden, etwa im Kapitel über die Separation von Variablen, zum Teil eine nicht vorhandene Strenge vorgetäuscht wird, insofern als eine formal als unendliche Reihe erhaltene Darstellung schlicht und einfach als Lösung bezeichnet wird. Auch wenn man es als Autor nicht auf strenge Lösungstheorie abgesehen hat, so sollte man dem unerfahrenen Leser doch bewusst machen, dass da und dort eigentlich noch etwas zu beweisen wäre.

Die Fülle des gebotenen Materials stellt eine der wesentlichen Stärken des Buches dar. Auf Grund seiner ‚Praxisorientiertheit‘ eignet es sich als Begleittext und Aufgaben-Spender in der anwendungsorientierten Mathematik-Ausbildung.

Speziell zu erwähnen ist der Abschnitt über Green’sche Funktionen, der besonders ausführlich geraten ist.

W. Auzinger (Wien)

G. Evans, J. Blackledge P. Yardley: Numerical Methods for Partial Differential Equations. With 55 Figures. (Springer Undergraduate Mathematics Series.) Springer Verlag, Berlin u.a. 1999, XII+290 S. ISBN 3-540-76125-X P/b DM 59,–.

Dieser Band ergänzt das Buch 'Analytical Methods for Partial Differential Equations' derselben Autoren (vgl. die vorangehende Besprechung). Die Intention ist ganz ähnlich, d.h. die Betonung liegt auf konkreten Algorithmen für konkrete (lineare) Problemklassen.

Im inhaltlichen Aufbau wird (nach einem eher knapp ausgefallenen Einleitungkapitel) einserseits nach Problemtypen und anderseits nach methodischen Zugängen (Finite Differenzen, Charakteristikenverfahren, Finite Elemente) unterschieden. Die Finite-Elemente-Methode wird (was didaktisch sinnvoll ist) zunächst für gewöhnliche Differentialgleichungen eingeführt und begründet. Der Stoff wird duchwegs an Hand detailliert vorgerechneter Beispiele vermittelt.

Das Niveau ist 'undergraduate', aber in nicht sehr sinnvoller Weise. Zum ersten werden Konvergenz- und Genauigkeitsfragen so gut wie überhaupt nicht angesprochen. Weiters ist zu sagen: Manche wichtige Algorithmen einmal per Hand durchzurechnen mag didaktisch sinnvoll sein; in dem Buch überwiegen jedoch Beispiele und Übungsaufgaben dieser Art; praxisrelevante Lösungsalgorithmen der Numerischen Linearen Algebra und der Einsatz mathematischer Software kommen eher zu kurz.

Positiv zu werten ist die Ausführlichkeit, mit der auf Finite Elemente eingegangen wird (inkl. 3D und Randelemente-Methode).

Beispiel-Material für eine einschlägige Übung findet man hier in großer Fülle.

W. Auzinger (Wien)

W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung. Sechste, überarbeitete und erweiterte Auflage. Mit 52 Abbildungen. (Springer-Lehrbuch.) Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996, XIII+347 S. ISBN 3-540-59038-2 brosch. DM 38,–.

Bewährte Lehrbücher wie diese Einführung in den Standardstoff (Jahrgang 1972) altern gut. Im Laufe der Jahre gewinnen sie durch kleine Verbesserungen an Reife und werden durch Ergänzungen und Erweiterungen abgerundeter.

P. Schmitt (Wien)

Funktionentheorie — Complex Analysis — Théorie des fonctions des variables complexes

K. Jänich: Funktionentheorie. Eine Einführung. Fünfte Auflage. Mit 100 Abbildungen. (Springer Lehrbuch.) Springer Verlag, Berlin u.a. 1999, IX+123 S. ISBN 3-540-66152-2 P/b DM 32,–.

Die Tatsache, daß Jänichs Einführung in die Funktionentheorie nunmehr in fünfter, nahezu unveränderter Auflage vorliegt, spricht für ihre große Brauchbarkeit und ihre ausgereifte Form. Der Besprechung der dritten Auflage von H. Begehr (Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete 774.30002) ist eigentlich nichts hinzuzufügen. Wiederholt sei die Betonung der Hinweise zu den in der vierten Auflage noch vermehrten Übungsaufgaben, durch welche sich das Buch in hervorragender Weise auch zum Selbststudium eignet.

U. Gamer (Wien)

S. Lang: Complex Analysis. Fourth Edition. With 139 Illustrations. (Graduate Texts in Mathematics 103.) Springer Verlag, New York u.a. 1999, XIV+485 S., ISBN 0-387-98592-1 H/b DM 129,–.

Das vorliegende Werk ist die vierte Auflage der seit langem bekannten und geschätzten Einführung des Autors in die komplexe Analysis. Es bleibt der allgemeinen Ansicht, daß es sich hierbei um eines der besten modernen Lehrbücher handelt, nichts hinzuzufügen.

Bei der Auswahl des Stoffes hält sich der Autor an den klassischen Aufbau der komplexen Analysis. Das Buch ist in drei Teile gegliedert. Im ersten Teil werden grundlegende Begriffe wie Potenzreihen, der Cauchysche Integralsatz, der Residuensatz und konforme Abbildungen behandelt. Daneben findet sich auch ein Kapitel über harmonische Funktionen. Im zweiten Teil werden das Schwarzsche Spiegelungsprinzip, der Riemannsche Abbildungssatz und das Prinzip der analytischen Fortsetzung behandelt. In den dritten Teil wurden einige ausgewählte Gebiete aufgenommen: die Jensensche Formel, die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler, elliptische Funktionen und die Theorie der Gamma- und Zetafunktion. Als besonders schönen Abschluß findet man den eleganten Beweis des Primzahlsatzes von D. J. Newman.

Dem Autor gelingt es in seinem bekannten Stil, die grundlegenden Gedanken sehr klar herauszuarbeiten und zu vermitteln. Das selbstständige „Entdecken“ von Ideen wird auch durch eine Vielzahl von gut ausgewählten Übungsaufgaben gefördert. In diesem Zusammenhang mag es interessant sein, daß der Autor die Herausgabe eines Lösungsheftes angekündigt hat.

Das Buch eignet sich hervorragend sowohl zum Selbststudium als auch als Grundlage für eine ein- und weiterführende Lehrveranstaltung. Hierbei ist nur zu vermerken, daß eine gewisse Stoffauswahl (insgesamt zählt das Buch immerhin knappe 500 Seiten) sicher nötig ist.

Es bleibt ein einziger Kritikpunkt anzubringen: die Theorie der Riemannschen Flächen und damit natürlich das gesamte Gebiet der analytischen Fortsetzung wird ein wenig stiefmütterlich behandelt. Als Entschuldigung sollte man jedoch die schon oben erwähnte Seitenanzahl im Kopf behalten.

H. Woracek (Wien)

T. Needham: Visual Complex Analysis. Clarendon Press, Oxford 1997, XXIII+ 592 S. ISBN 0-19-853447-7 H/b £ 32,95.

This textbook, a broad (first) introduction to complex analysis, stands out for two reasons. The first one is already announced by the title: the book is lavishly illustrated, much more than usual, and the many clear pictures serve an explicit didactical purpose: "The present book openly challenges the current dominance of purely symbolic logical reasoning by using new, visually accessible arguments to explain the truths of elementary complex analysis." The second reason is (also) hinted at in the statement above: the author has chosen an unusual, but interesting, approach inspired by Newton's ideas of a 'geometric calculus' (that "is the mathematical engine that propels the brilliant physics of Newton's *Principia*"). Of course, this does not imply that the text is old-fashioned. On the contrary. It was not only produced using a computer (for text and pictures), the author also indicates repeatedly how computers "may be used to check existing ideas about the construction of the world, or as a tool for discovering new phenomena which then demand new ideas for their explanation", but, nevertheless, "the entire book can be fully understood without *any* use of a computer".—Thus this book offers a stimulating and (very) interesting alternative approach to complex analysis. It can be recommended both to teachers (even if they do not want to switch completely) and students (e.g., as supplementary reading).

P. Schmitt (Wien)

Angewandte und numerische Mathematik — Applied Mathematics, Numerical Analysis — Mathématiques appliquées, analyse numérique

Y. Cherruault: Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant. (Mathématiques.) Presses Universitaires de France, Paris, 1998, XI+299 S. ISBN 2-13-048978-8 P/b FF 168,–.

Mit *Modellen und mathematischen Methoden für die Wissenschaften vom Lebendigen* legt der Autor — Inhaber des ersten Lehrstuhles der Biomathematik in Frankreich — die erste Monographie über dieses Gebiet in französischer Sprache vor. Unter Modellen hat man sich nicht die mathematische Beschreibung bestimmter Vorgänge vorzustellen; nur die Lungenfunktion wird explizit als naturwissenschaftliches Modell mit Hilfe von Gesetzen und Bilanzgleichungen behandelt und durch sechs partielle Differentialgleichungen beschrieben. Ansonsten bleibt es bei der gelegentlichen Erwähnung biologischer oder pharmakologischer Vorgänge.

Im Mittelpunkt stehen die auf solche Erscheinungen anwendbaren mathematischen Methoden vor allem im Hinblick auf Parameteridentifikation und Simulation. Breiten Raum nimmt die vom Verfasser entwickelte und von seinen Mitarbeitern am MEDIMAT verfeinerte Methode ALIENOR der globalen Optimierung ein. Es handelt sich dabei um die Suche nach dem Minimum einer Funktion von n Variablen, welche mit Hilfe einer verallgemeinerten Spirale auf eine Funktion einer Variablen zurückgeführt wird. Ein weiterer Schwerpunkt ist die Dekompositionsmethode von G. Adomian.

Der Text wird ergänzt durch Prüfungsaufgaben der Jahre 1994–96 an der Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Leider fehlt ein Index, und die Gleichungen sind durch zahlreiche Druckfehler entstellt.

U. Gamer (Wien)

R. F. Curtain, H. Zwart: An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. With 29 Illustrations. (Texts in Applied Mathematics 21.) Springer-Verlag, New York u.a. 1995, XVIII+698 S. ISBN 0-387-94475-3 geb. DM 88.00.

Systemtheoretische Begriffe wie Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit sollen in diesem Buch, soweit möglich, von endlichdimensionalen dynamischen Systemen auf unendlichdimensionale übertragen werden, ebenso der Begriff der optimalen Steuerung. Dabei legen die Autoren Wert auf eine Synthese der beiden klassischen Ausgangspunkte Zustandsraum und Frequenzbereich. Als Zustandsraum wird in diesem Problembereich ein Hilbertraum verwendet; bis auf gewisse Ausnahmen wird stets vorausgesetzt, daß Eingangs-und Ausgangsoperatoren beschränkt sind. Die Ergebnisse werden so aufbereitet, daß sie auf die in Anwendungen auftretenden partiellen Differentialgleichungen und Funktionaldifferentialgleichungen anwendbar sind. Neben den klassischen linear-quadratischen Kontrollproblemen wird das robuste Kontrolldesign studiert; in diesem Zusammenhang werden Hankeloperatoren und das Nehari-Problem eingeführt. Alle systemtheoretischen Konzepte werden an physikalischen Modellen illustriert, etwa der Diffusionsgleichung, der Wellengleichung, an anderen in den Anwendungen wichtigen partiellen Differentialgleichungen und Differentialgleichungen mit verzögertem Argument. Das Buch besteht aus 9 Kapiteln. Zuerst wird die Halbgruppentheorie als Grundlage für den Zustandsraum entwickelt. Anwendungen auf abstrakte Differentialgleichungen folgen. Die Kapitel 5 und 6 verallgemeinern die klassische Systemtheorie auf unendlichdimensionale Systeme in einem Hilbertraum. Anschließend wird eine Faktorisierung für nichtrationale Übertragungsmatrizen entwickelt. Die Schlußkapitel beschäftigen sich mit der Theorie des robusten Kontrolldesign samt Anwendungen.

G. Kern (Graz)

G. B. Dantzig: Linear Programming and Extensions. (Princeton Landmarks in Mathematics and Physics.) Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998, XVI+627 S. ISBN 0-691-05913-6 P/b $ 29,95.

Erstmals liegt dieser Klassiker der linearen Optimierung, der auch im Springer Verlag in deutscher Übersetzung erschien, nach 10 Auflagen in einer Taschenbuchausgabe vor. Es handelt sich dabei um den unveränderten Nachdruck der ersten Auflage von 1963, wobei lediglich einige Referenzen erneuert wurden. Nach wie vor ist dieses klassische Werk eine Quelle von Ideen, Beispielen und Algorithmen, wenngleich die stürmische Entwicklung der letzten zwei Jahrzehnte Vieles veränderte und zahlreiche neue Ideen, wie etwa die Inneren-Punkte-Verfahren, einbrachte. Aus diesem Grund ist dieses Buch auch vor allem von historischem Interesse. Die glänzende Präsentation des Stoffes ist jedoch auch heute noch beachtenswert.

R. Burkard (Graz)

H. J. Dirschmid: Höhere Mathematik. Matrizen und Lineare Gleichungen. Manz Verlag Schulbuch in Verlagsgemeinschaft mit Bohmann Buchverlag — Fortis FH — Bildung Sauerländer, Wien, Köln, Aarau, Bern, 1998, VI+720 S. ISBN 3-7068-0593-6 H/b öS 676.–..

Das Buch gliedert sich in 6 Kapitel mit den Überschriften: Vektoren, Matrizen, Die Eigenwertaufgabe für Matrizen, Matrizennumerik, Lineare Vektorräume, Lineare Gleichungen. Jedes Kapitel schließt mit einer großen Anzahl von Übungsbeispielen, deren Lösung am Ende des Buches angegeben sind. Ein Index schließt den Band ab.

Die Darstellung ist sehr ausführlich und breit. So umfaßt beispielsweise das Kapitel „Matrizennumerik“ 144 Seiten, und das Kapitel „Lineare Gleichungen“ behandelt sowohl lineare Matrizengleichungen als auch Systeme von linearen Differenzen- und Differentialgleichungen und lineare Randwertaufgaben.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen für Studenten der Elektrotechnik entstanden und richtet sich an Anwender mathematischer Methoden. Ihnen sei dieses Buch empfohlen.

P. Dörfler (Leoben)

J. Herzberger: Übungsbuch zur Numerischen Mathematik. Typische Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen zur Numerik und zum Wissenschaftlichen Rechnen. (Vieweg Mathematik.) Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1998, X+132 S. ISBN 3-528-06948-1 P/b DM 29,80.

Das Buch enthält eine gute Auswahl von Übungsaufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen zu Standardkapiteln einer einführenden Vorlesung in Numerik, wobei jedem Paragraphen eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse und Formeln vorangestellt ist.

Chr. Nowak (Klagenfurt)

M. W. Müller, M. D. Buhmann, D. H. Mache, M. Felten (Eds.): New Developments in Approximation Theory. 2^{nd} International Dortmund Meeting (IDoMAT) ’98, Germany, February 23–27, 1998. (International Series of Numerical Mathematics, Vol. 132.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1999, 344 S. ISBN 3-7643-6143-3, 0-8176-6143-3 H/b öS 1300,–.

Im Februar 1998 wurde in Dortmund das 2^{nd} International Dortmund Meeting on Approximation Theory (IDo MAT 98) abgehalten. Der vorliegende Band enthält die 20 referierten Beiträge dieses Treffens.

Anstelle einer Liste dieser Beiträge möge ein Zitat aus dem Vorwort einen inhaltlichen Überblick geben:

The papers cover topics such as radial basic functions, bivariate spline interpolation, multilevel interpolation, multivariate triangular Bernstein bases, Padé approximation, comonotone polynomial approximation, weighted and unweighted polynomial approximation, adaptive approximation, approximation operators of binomial type, quasi interpolants, generalized convexity and Peano kernel techniques.

Eine Liste der Tagungsteilnehmer beschließt diesen recht interessanten Tagungsband.

P. Dörfler (Leoben)

B. N. Parlett: The Symmetric Eigenvalue Problem. (Classics in Applied Mathematics 20.) SIAM, Philadelphia, 1998, XXIV+398 S. ISBN 0-89871-402-8 P/b $ 48,–.

This SIAM edition is an unabridged, corrected reproduction of the book first published by Prentice-Hall Inc., 1980.

Chr. Nowak (Klagenfurt)

Shu-fang Xu: An Introduction to Inverse Algebraic Eigenvalue Problems. Peking University Press, Beijing — Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1998, V+301 S., ISBN 7-301-03602-7/O · 405, 3-528-06684-9 H/b, DM 108,–.

Inverse algebraische Eigenwertprobleme befassen sich, vereinfacht formuliert, mit der Bestimmung von Matrizen aus gegebenen Spektraldaten. Derartige Fragestellungen spielen eine wichtige Rolle in zahlreichen Anwendungsbereichen wie Kontrolltheorie, Strukturmechanik, Geologie und Molekularspektroskopie, um nur einige zu nennen. Ziel des vorliegenden Buches ist es, den Leser in systematischer Weise mit den wichtigsten Entwicklungen der letzten Jahre auf dem genannten Gebiet vertraut zu machen. Obwohl ein inverses algebraisches Eigenwertproblem vordergründig ein Problem der Matrizennumerik ist, ist es nicht immer möglich, geeignete Lösungszugänge ausschließlich mit Methoden aus diesem Gebiet zu finden; vielmehr benötigt man auch Hilfsmittel aus verschiedenen anderen Bereichen (lineare Kontrolltheorie, kombinatorische Topologie, Analysis reeller vektorwertiger Funktionen und Homotopietheorie). Diese werden hier in der benötigten Ausführlichkeit dargestellt, wodurch anderenfalls erforderliche Querverweise auf andere Literatur auf ein Minimum beschränkt werden können. Bezüglich der Themenauswahl ist zu bemerken, daß es der Autor aufgrund der Vielfalt der in der Literatur auftretenden inversen algebraischen Eigenwertprobleme nicht für sinnvoll hielt, *alle* Gesichtspunkte (unter gleichzeitiger Wahrung des Einführungscharakters) in einem Band zu behandeln; stattdessen beschränkte er sich auf vier typische Problemklassen. Um einen vorläufigen Eindruck vom Inhalt des Buches zu vermitteln, seien die Kapitelüberschriften angeführt: 1. Preliminaries, 2. Jacobi matrix inverse eigenvalue problems, 3. Pole assignment problems, 4. Additive and multiplicative inverse eigenvalue problems, 5. Nonnegative matrix inverse eigenvalue problems. Kapitel 1 präsentiert grundlegende Definitionen, Sätze und Zusammenhänge, die im späteren Text laufend verwendet werden. Die Kapitel 2 bis 4 sind alle ähnlich aufgebaut: beginnend mit der Vorstellung des jeweiligen inversen Eigenwertproblems folgt die Frage nach der Lösbarkeit, eine Sensitivitätsanalyse sowie eine ausführliche Behandlung der numerischen Methoden. Neben der Präsentation der theoretischen Grundlagen wird das Hauptaugenmerk auf die Besprechung effizienter und stabiler Algorithmen gelegt (Lanczos-Methode und Householder-Spiegelung in Kapitel 2; Schur-Methode, Methode der invarianten Unterräume und QR-Methoden in Kapitel 3; Newton-Methode und

Homotopie-Methode in Kapitel 4). Im Mittelpunkt von Kapitel 5 steht der kleinste erreichbare Spektralradius; dabei werden ebenso bedeutende wie aktuelle Forschungsergebnisse in die Betrachtungen mit einbezogen. Die vorerwähnten Algorithmen werden stets durch sorgfältig aufbereitete numerische Beispiele illustriert. Jedes Kapitel schließt mit zahlreichen Anmerkungen und Literaturhinweisen, deren Hauptzweck es ist, historische Entwicklungen bewußt zu machen, aber auch kurz auf Themen zu verweisen, die im Haupttext aus Konzeptgründen nicht (im Detail) behandelt werden konnten. Besonders hervorzuheben ist das umfassende Literaturverzeichnis mit rund 250 Zitaten. Den Schluß des Bandes bildet ein ausführliches Sachverzeichnis. Das Buch kann allen an einer soliden Einführung in inverse Eigenwertprobleme Interessierten nachdrücklich zum Studium empfohlen werden.

A. R. Kräuter (Leoben)

Informatik — Computer Science — Informatique

B. Birkeland: Calculus and Algebra with Mathcad 8.. Studentlitteratur, Lund, 1999, 190 S., ISBN 91-44-01008-7 P/b SEK 326,–.

Ein Buch, das durchschnittlich auf drei Seiten einen Druckfehler hat, muss oberflächlich wirken. Das vom Norweger B. Birkeland verfasste und vom schwedischen Studentlitteratur-Verlag herausgegebene Tutorial ist so ein Buch.

Es sollte Studenten des ersten Studienabschnittes den Einstieg in eine spezielle Mathematik-Software, eben Mathcad 8, erleichtern. Dabei wird offenbar vorausgesetzt, dass der Nutzer dieses Buches schon über diese Software und das zugehörige Handbuch verfügt.

Das Buch bietet jedenfalls keine Hilfe bei der eventuell zu treffenden Entscheidung für Mathcad gegenüber Maple oder Mathematica®.

Es stellt sich überhaupt die Frage, zu welchem Zweck es geschrieben wurde. Der Neuling wird u. a. eine Symbolübersicht vermissen, der mit anderer Software Vertraute eine Beschreibung der Vorzüge von Mathcad 8 gegenüber vergleichbarer Software, und der mit früheren Versionen von Mathcad Arbeitende wird immer dann auf das Handbuch verwiesen, wenn es um das „Ausreizen“ des Programmes geht. In diesem Sinne könnte man die zweite (bessere) Hälfte des Werkes noch als Formel- und Algorithmensammlung für Differentialgeometrie, Differentialgleichungen und Lineare Algebra bzw. als Aufgabensammlung benutzen. Dafür ist aber der Preis (ca. 520,– S) nicht gerechtfertigt.

G. Weiß (Dresden)

K. Devlin, D. Rosenberg: Language at Work. Analyzing Communication Breakdown in the Workplace to Inform Systems Design. (CSLI Lecture Notes 66.) CSLI Publications, Stanford, California, 1996, VII+212 S. ISBN 1-57586-051-1 P/b £ 12,95, ISBN 1-57586-050-3 H/b £ 35,–.

This monograph is the result of joint research by a social scientist (specializing in ethnography and linguistics: Duska Rosenberg) and a mathematician (specializing in logic: Keith Devlin). Its starting point is the following practical problem: "A familiar scenario … is for a company to introduce a new computer system to improve its information management, only to discover that, far from making things better and more efficient, the new system causes an array of problems that had never arisen with the old way of doing things. … Why does this happen?" The object is "to analyze the way language is used to convey information" using a (newly developed) "analytic technique called 'layered formalism and zooming' (LFZ analysis)" in order to help "the systems designer faced with the task of designing an information system to support the acitivity of people in the workplace". In order to explain their formalism (*situation theory*) they use a famous example (Harvey Sacks, 1972) consisting of the two sentences: "*The baby cried. The mother picked it up.*" (But, paraphrasing a well-known quote by R. W. Hamming, they stress that *"the purpose of formalization is insight, not a formal system"*.) As a case study from practice they discuss a specific type of document, the 'problem report form', used by a British computer manufacturer.—This (research) monograph is a very carefully written and detailed exposition of work in progress ("We are aware that our work raises as many questions as it resolves, perhaps more.") and will be stimulating reading for all interested in language, particularly if they are also interested in (new) applications of mathematical thinking.

P. Schmitt (Wien)

H. Möller: Algorithmische Lineare Algebra. (Mathematische Grundlagen der Informatik. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1997, X+389 S. ISBN 3-528-05528-6 P/b DM 58,–.

Das Buch enthält folgende Kapitel: Eliminationsalgorithmus, Vektorräume, lineare Ungleichungssysteme, lineare Abbildungen, Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren. Das Wort „algorithmisch" im Titel bedeutet nicht, daß es sich um eine Einführung in die numerische lineare Algebra handelt. Nach dem Vorbild des Buches "Linear Algebra and Applications" von Gilbert Strang, Theorie und Anwendungen zu kombinieren, wird Theorie mit Bezug auf Anwendungen entwickelt. Der Autor setzt sich das Ziel, Ergebnisse konstruktiv herzuleiten.

Chr. Nowak (Klagenfurt)

D. Nowottny: Mathematik am Computer. Mit 63 Abbildungen. Springer Verlag, Berlin u.a. 1999, X+259 S. ISBN 3-540-66058-5 P/b DM 49,90.

Der Stoff dieses Bandes entspricht (aus heutiger Sicht) ziemlich genau den Grundkenntnissen im Umgang mit mathematischer Software, die am Beginn eines Mathematik-Studiums vermittelt werden sollten. Konkret vorgestellt werden die Programmsysteme LaTeX, `MATLAB` und `Maple`, die in ihrem jeweiligen Anwendungsbereich (Text- und Formelsatz, numerisches und symbolisches Rechnen) als de facto-Standard bezeichnet werden können.

Zu allen drei Themen werden Einführungen geboten, naturgemäß ohne Anspruch auf Vollständigkeit. Die Auswahl und Gliederung des Stoffes vermittelt jedoch einen sehr guten Überblick. Neben den zahlreichen Beispielen im Text findet sich auch eine Sammlung von Übungsaufgaben, teilweise mit Lösungen (Anhang). Weitere Abschnitte enthalten eine Befehlsübersicht, eine Einführung in das Arbeiten unter `UNIX` und Vorschläge für vertiefende Aufgaben.

Das Buch ist als ergänzende Unterlage zu einschlägigen Lehrveranstaltungen sehr zu empfehlen und ist auch für Studierende anderer technischer Fachrichtungen geeignet - ein verlässlicher Begleiter zur selbständigen Erarbeitung des Stoffes am Computer.

W. Auzinger (Wien)

J. Richter-Gebert, U. H. Kortenkamp: The Interactive Geometry Software Cinderella. With 126 Figures and a CD-ROM. Springer Verlag, Berlin u.a. 1999, X+143 S. ISBN 3-540-14719-5 P/b DM 98,60.

Das Buch ist in erster Linie ein vorbildliches Referenzwerk zur mitgelieferten Software Cinderella, einem der leistungstärksten Programme aus dem Bereich „Dynamische Geometrie“. Anhand zweier instruktiver Beispiele (Satz von Pappos, Koppelgetriebe) werden die einfache Handhabung und die Intention dieser Software beschrieben, wobei auch der geometrische Hintergrund ansatzweise durchleuchtet wird. Die Stärken (automatisches Überprüfen von geometrischen Sachverhalten, simultanes Konstruieren in verschiedenen Geometriemodellen, Unterstützung nichteuklidischer Geometrien,...) des auf allen Java-fähigen Plattformen installierbaren Programms Cinderella und der einfache Export ins Internet machen es dem Benutzer leicht, auch komplizierte geometrische Sachverhalte rasch zu visualisieren.

A. Asperl (Wien)

Wirtschaftsmathematik — Mathematics of Economy — Économétrie

K. Wolfsdorf: Versicherungsmathematik. Teil 1: Personenversicherung. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. Mit zahlreichen Abbildungen, Tabellen und Aufgaben. (Teubner Studienbücher Mathematik.) B. G. Teubner, Stuttgart, 1997, XIII+415 S. ISBN 3-519-12072-0 P/b DM 54,80.

In dieser 2. Auflage wurden gesetzliche Neuerungen (EU) berücksichtigt und der Druck modernisiert. Die Stoffauswahl ist sehr gelungen und bietet eine ausgewogene Mischung aus exakten mathematischen Überlegungen und praxisorientierten Aufgabenstellungen, welche sehr ausführlich besprochen werden. Als sehr verdienstvoll muß man die Präsentation einer Vielzahl von Algorithmen bezeichnen, die die computergestützte Lösung konkreter versicherungstechnischer Aufgaben ermöglichen. Das Buch ist mit einer zwei- bis dreisemestrigen Mathematikausbildung auf Universitätsniveau gut zu lesen und zu verstehen. Es zeigt auf, wie praktisch und praxisbezogen (auch abstrakte) Mathematik sein kann!

J. Schwaiger (Graz)

Mathematische Physik — Mathematical Physics — Physique mathématique

S. Albeverio, J. Jost, S. Paycha, S. Scarlatti: A Mathematical Introduction to String Theory. Variational problems, geometric and probabilistic methods. (London Mathematical Society Lecture Note Series 225.) Cambridge University Press, 1997, VIII+135 S. ISBN 0-521-55610-4 P/b £ 22,95.

Die String-Theorie ist ein Gebiet, in welchem heute Physik und Mathematik am fruchtbarsten zusammentreffen. Gewisse ihrer Aspekte sind reine Spekulation, welche aber zum Teil zu äußerst fruchtbaren mathematischen Ergebnissen geführt hat, manches aber lässt sich mathematisch durchaus exakt fassen.

Dieses Buch ist eine Einführung in gewisse mathematische Teilgebiete der Variationsrechnung, der Riemannschen Differentialgeometrie und der probabilistischen Analysis auf Mannigfaltigkeiten, welche Teile der Stringtheorie auf feste mathematische Grundlagen stellen.

Der Ausgangspunkt ist eine Quantisierung des Plateau-Problems für Minimalflächen. Die behandelten Themen sind die folgenden: Plateau-Problem. Topologische und metrische Strukturen auf Abbildungsmannigfaltigkeiten. Harmonische Abbildungen. Cauchy-Riemann-Operatoren. Zeta-Funktionen und die Hitzekern-Determinante eines Operators. Die Faddeev-Popov-Prozedur. Determinantenbündel und ihre Chern-Klassen. Gauss'sche Maße. Quantisierung durch Funktional-Integrale. Polyakov-Maße. Formale Lebesgue-Maße auf Hilbert-Räumen. Gauss'sche Integration über den Raum der Einbettungen. Korrelations-Funktionen.

P. Michor (Wien)

T. Frankel: The Geometry of Physics. An Introduction. Cambridge University Press, 1997, XXII+654 S. ISBN 0-521-38334-X H/b £ 65,–.

Frankels 654 Seiten starkes Werk bietet nicht bloß eine gelungene Übersicht über das mathematische Rüstzeug der Physik, sondern unterweist den Leser auch im praktischen Umgang mit diesen Werkzeugen.

Rund um die (zunächst klassische) Differentialgeometrie werden äußere Differentialformen, Differentialtopologie, Liegruppen, Faserbündel und Chern-Formen abgehandelt und zur Beschreibung von Phänomenen u.a. der Hydrodynamik, Thermodynamik, Elastizität, des Elektromagnetismus und der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie eingesetzt. Weitere Einsatzgebiete sind Spinortheorie und Dirac-Gleichung, Eichfelder und Yang-Mills-Felder, Betti-Zahlen und Homotopiegruppen. Einige Spezialthemen der Mechanik sind in einen „Anhang“ verlegt. Der Zugang zu den abstrakteren Stoffgebieten wird durch eine breite Einführung und die sehr auf geometrische Anschauung bedachte Behandlung von Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^3$ erschlossen.

Adressaten dieses herausragenden Buches sind Mathematiker, Physiker, aber auch Ingenieure mit Bezug zur Differentialgeometrie. Für den fortgeschrittenen Studenten ist das Erarbeiten des Stoffes auch im Selbststudium möglich.

Das Buch wäre perfekt, wenn nicht auch hier fehlerhafte Figuren den Gesamteindruck trüben würden.

G. Weiß (Dresden)

Yu. I. Manin: Gauge Field Theory and Complex Geometry. Translated from the Russian by N. Koblitz and J. R. King. With an Appendix by S. Merkulov. Second Edition. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 289.) Springer Verlag, Berlin, u.a. 1997, XII+346 S. ISBN 3-540-61378-1 H/b DM 174,–.

Das vorliegende Werk entstand aus Vorlesungen des Autor an der Universität Moskau. Das russische Original ist 1984 erschienen. Die erste Auflage der Übersetzung ist 1988 erschienen und wurde auch in den IMN besprochen. Die hier vorliegende 2. Auflage ist korrigiert und um einen Anhang erweitert, der von Sergei Merkulov geschrieben wurde, mit eigener Bibliographie.

Die Eichfeldtheorie mit Strukturgruppe $SU(2)\times U(1)$ ist wohl die heute akzeptierte Erklärung der elektroschwachen Wechselwirkung. Die Quantenchromodynamik der Quarks und Gluonen wird durch die Eichfeldtheorie mit Strukturgruppe

$SU(3)$ beschrieben und ist trotz mancher Unzulänglichkeiten wohl auch akzeptiert.

Das Werk ist für Mathematiker geschrieben; es ist eine Einführung in einige mathematische Probleme, die durch die Quantenfeldtheorie motiviert sind. Es bleibt auf der Ebene der klassischen Feldtheorie und behandelt nicht die Probleme der zweiten Quantisierung. Stark betont werden hingegen der komplex-analytische und algebraisch-geometrische Hintergrund der Theorie und die supersymmetrischen Versionen. Aufbau und Inhalt kann man vielleicht am besten den Kapitelüberschriften entnehmen:

1. Grassmannians, connections, and integrability.
2. The Radon-Penrose transform.
3. Introduction to superalgebra.
4. Introduction to supergeometry.
5. Geometric structures of supersymmetry and gravitation.

Der Anhang ("Recent developments" von Sergei A. Merkulov) skizziert neue Entwicklungen in der Twistor-Theorie und in der Geometrie von Super-Mannigfaltigkeiten.

P. Michor (Wien)

Wahrscheinlichkeistheorie — Probability Theory — Théorie des probabilités

G. Grimmett: Percolation. Second Edition. With 121 Figures. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 321.) Springer Verlag, Berlin u.a. 1999, XIII+444 S., ISBN 3-540-64902-6 H/b DM 159,–.

Dies ist die zweite Auflage des erfolgreichen Werkes von Grimmett; die erste Auflage erschien im Jahr 1989. Perkolation ist eines der wichtigsten modernen Gebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie, ein Bereich, wo „reine" Mathematik einerseits, Motivierung oder Anwendung (in der statistischen Physik, theoretischen Chemie, usw.) einander besonders nahe sind. Die Perkolationstheorie wurde in den 1950er Jahren von Hammersley und Koautoren begründet. Die einfachsten Fragestellungen sind die folgenden: gegeben sei ein unendlicher, zusammenhängender Graph, typischerweise das d-dimensionale Zahlengitter Z^d, sowie eine Zahl p zwischen 0 und 1. Jede Kante ist, unabhängig von allen anderen, mit Wahrschinlichkeit p „offen" und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ „geschlossen". Die offenen Kanten erzeugen einen zufälligen Teilgraphen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein gegebener Punkt in einer unendlichen Komponente des Zufallsgraphen liegt? Für welche Parameter p gibt es unendliche Komponenten? Hierauf gründen sich viele weitere interessante Problembereiche. Neben vielen experimentellen und heuristischen Untersuchungen, vor allem im Bereich der statistischen Physik, hat sich auch eine schöne, schwierige und moderne mathematische Theorie herausgebildet. Grimmett ist einer ihrer bedeutendsten Vertreter. Der erste Autor eines Buches über „mathematische“ Perkolation war Kesten (1982), ihm folgte die erste Auflage des vorliegenden Buches, die sich — ebenso wie die jetzige zweite — durch ihre Lesbarkeit und übersichtliche Organisation auszeichnet. In dieser 2. Auflage wurde das Material neu organisiert und durch viele neue Resultate bereichert, wobei sich der Autor nach wie vor auf Perkolation in Z^d beschränkt — erst in den allerletzten Jahren hat ja das Studium der Perkolation auf anderen Graphenklassen einen atemberaubenden Aufschwung genommen. Ein wichtiges und schönes Buch über ein aktuelles Forschungsgebiet, der Rezensent ist froh, es in seine Sammlung aufzunehmen.

W. Woess (Graz)

F. Harten, A. Meyerthole, N. Schmitz: Prophetentheorie. Prophetenungleichungen, Prophetenregionen, Spiele gegen einen Propheten. (Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik.) B. G. Teubner, Stuttgart, 1997, VIII+210 S. ISBN 3-519-02737-2 P/b DM 54,–.

In der Theorie der stochastischen Prozesse ist ein *Prophet* ein Spieler, der den gesamten Verlauf (also auch die Zukunft) eines Prozesses kennt, und daher einem normalen Spieler — dessen Stop-Regel nur vom bisher beobachteten Verlauf (der Vergangenheit) abhängen kann — gegenüber im Vorteil ist. Die ersten Prophetenungleichungen — die diesen Vorteil abschätzen — wurden 1977/78 von Krengel und Sucheston aufgestellt. Diese Monographie ist eine Einführung in die damit begründete Theorie einschließlich der Behandlung von entsprechenden Zwei-Personen-Nullsummenspielen mit einem Propheten.

P. Schmitt (Wien)

Einführungen und Elementarmathematik — Intorductory, Elementary Mathematics — Ouvrages introductoires et mathématiques élémentaires

D. C. Arney et al.: Principles and Practice of Mathematics. COMAP. (Textbooks in Mathematical Sciences.) Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1997, XI+686 S. ISBN 0-387-94612-8 H/b DM 98,–.

This is the textbook for a course intended as a replacement for first-year calculus at US colleges. According to the authors, it "is a revolutionary text" which "proposes a radically new introductory course". In my view, the terms 'radically' and 'revolutionary' are an exaggeration (perhaps not in the US?); the guiding principles, however, are certainly universally valid: "The course content stresses the breadth of mathematics, discrete and continuous, probabilistic as well as deterministic, algorithmic and conceptual. We emphasize applications that are both real and immediate. And the text includes topics from modern mathematics that are currently homeless in the undergraduates curriculum." Thus the authors hope to promote "a wider understanding of what mathematics is all about, including some of its most modern ideas and applications", and avoid that students may see "little or no mathematics more modern than the eighteenth century".—The result of these efforts is an interesting textbook which may stimulate both teachers and authors of schoolbooks.

P. Schmitt (Wien)

E. Berlekamp, T. Rodgers (Eds.): The Mathemagician and Pied Puzzler. A Collection in Tribute to Martin Gardner. A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 1999, X+266 S., ISBN 1-56881-075-X H/b \$ 34,–.

From 1957 to 1982, Martin Gardner wrote a monthly column on "Mathematical Games" in *Scientific American*, but even after his retirement, his prolific output has continued. With his work he has brought "more mathematics, to more millions, than anyone else" (John Conway). The 38 articles in this volume, contributions to *C4G1* (the first *Gathering for Gardner*, Atlanta 1993), naturally reflect his interests which "extend well beyond the traditional realm of mathematics. His writings have featured mechanical puzzles as well as mathematical ones, Lewis Carroll, and Sherlock Holmes. He has had a life-long interest in magic, including tricks based on mathematics, on sleight of hand, and on ingenious props".—It is a treasure chest.

P. Schmitt (Wien)

J. L. Heilbron: Geometry Civilized. History, Culture, and Technique. Clarendon Press, Oxford, 1998, VIII+309 S. ISBN 0-19-850078-5 H/b £35,–, ISBN 0-19-850690-2 P/b £ 24,–.

Diese Einführung in die Elementargeometrie ist in vielerlei Hinsicht bemerkenswert: Der Autor ist ein „gelernter“ Historiker mit einem besonderen Interesse an Geometrie. Für ihn geht die faszinierende historische Entwicklung der Geometrie Hand in Hand mit dem Entstehen der Zivilisation. In dem wunderschön illustrierten Werk wird die Nützlichkeit geometrischen Wissens ebenso aufgezeigt wie dessen wissenschaftstheoretische Bedeutung, die von Euklids „Elementen“ ihren Ausgang genommen hat.

So manches ist unkonventionell in diesem Werk: Das beginnt schon mit dem ersten Satz “We owe geometry to the tax collector”. Aber auch das Eingehen auf indische und chinesische Entwicklungen und auf die islamische Ornamentik fällt auf, ebenso die Zusammenstellung der Figuren, wo neben den Maßwerken gotischer Kathedralen die Kleeblattschlingen von Autobahnauffahrten genauso zu finden sind wie die kreisförmig zertrampelten Weizenfelder aus England um 1987. Zu erwähnen ist ferner die doch enge inhaltliche Beschränkung. Es fehlen Hinweise auf die nichteuklidische Geometrie wie auch auf die abbildungsgeometrische Sicht.

Das Buch wendet sich nicht nur an Geometer und an historisch interessierte Mathematiker. Auch der Lehrer findet eine Fülle von Anregungen wie etwa zur Geschichte der Zahl π und dazu noch viele motivierende Beispiele für den Unterricht. Dank des ansprechenden Äußeren gäbe dieses Buch auch ein schönes Geschenk für den oben angesprochenen Personenkreis ab.

H. Stachel (Wien)

K. Jänich: Lineare Algebra. Siebente Auflage. Mit zahlreichen Abbildungen. Springer Verlag, Berlin u.a. 1998, XII+271 S. ISBN 3-540-64535-7 P/b DM 39,90..

An Einführungen in die lineare Algebra besteht kein Mangel. Der potentielle Leser hat die Qual — aber damit auch die Chancen — der Wahl. Die Einführung von Klaus Jänich — erstmals 1979 (nach Vorlesungen von 1970/71) veröffentlicht, 1991 mit Hilfe von TEX optisch wesentlich verbessert und nun schon in siebenter Auflage — hat jedenfalls den Test der Zeit bestanden. Sie ist kein Lehrbuch, das nach Vollständigkeit und Allgemeinheit strebt, sondern eine ‚Vorlesung zum Lesen ‘, geschrieben in einem flüssigen Stil, bei dem das Wichtige hervorgehoben und motiviert wird, um so den Einstieg in das Mathematik-Studium zu erleichtern.

P. Schmitt (Wien)

I. Lehmann, W. Schulz: Mengen — Relationen — Funktionen. Eine anschauliche Einführung. (mathematik-abc für das Lehramt.) B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1997, 136 S. ISBN 3-8154-2115-2 P/b DM 26,80.

Dieses Buch führt elementar in die Grundbegriffe der Mengenlehre ein, soweit diese für den Gymnasialunterricht bedeutsam sein können. Es besteht aus drei Kapiteln: 1. Mengen; 2. Relationen; 3. Funktionen, wobei die letzten beiden weitgehend voneinander unabhängig gestaltet sind.

Der Mengenbegriff in Kap. 1 fußt auf der Cantorschen Definition, geht aber rasch zum Russellschen Stufenaufbau über. Logische Zeichen, elementare Mengenalgebra (einschließlich kartesischer Produkte, Venn- und Hasse- Diagramme, Zerlegungen). Kap. 2 erklärt den Begriff der Relationen, Pfeildiagramme und bringt 18 verschiedene Definitionen für spezielle Relationen, von reflexiv und symmetrisch bis zu trichotom und bitotal, ferner Ordnungs- und Äquivalenzrelationen. Kap. 3 führt den Funktionsbegriff naiv ein und erläutert ihn erst dann als spezielle Relation. Augenmerk wird vor allem auf reelle Funktionen gelegt, verschiedene Typen solcher Funktionen sowie die Cauchysche Funktionalgleichung behandelt.

Die Verfasser folgen einem „Zwei Seiten-Konzept", das fortlaufend auf der linken Seite die Theorie entwickelt und auf der rechten zugehörige Beispiele bringt. Dies führt zu einer großen Anzahl von Beispielen und auch gelösten Übungsaufgaben, die für die Unterrichtspraxis gewiß viel brauchbares Material liefern.

Der Text ist genau durchgearbeitet und wird sich Lehrern sicherlich in mancher Hinsicht als hilfreich erweisen. Dennoch lauert in der oft starken Symbolisierung eine didaktische Gefahr, auf welche die Verfasser im Vorwort auch hinweisen. Einige Punkte sollen aber kritisch erwähnt werden: Der Begriff der Aussageform (anstatt einfach des Prädikats) in Zusammenhang mit der Cantorschen Mengendefinition macht die Darstellung wohl schwerer verständlich, ohne einen ersichtlichen Vorteil zu bringen; manche Einschränkungen sind nicht einsichtig (z.B. die der Abzählbarkeit bei Satz 2.17); die Terminologie weicht öfter von der üblichen ab (z.B. „zweiwertige Funktion" bis hin zum Unwort „Zahl-Zahl-Funktion"). Ansprechend hingegen sind die häufigen etymologischen Hinweise.

Lehrer, die das Thema in einen größeren Zusammenhang stellen können, werden das Buch gut verwenden können, in die Hände von Schülern sollte es nicht geraten, um sie von einer allzu formalistischen Auffassung der Mathematik zu bewahren.

W. Wertz (Wien)

J. M. Muller: Elementary Functions. Algorithms and Implementation. Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 1997, XV+204 S. ISBN 0-8176-3990-X, 3-7643-3990-X H/b sfr 98,–.

Das Buch beschäftigt sich mit klassischen und neueren Methoden, die Werte elementarer Funktionen computergerecht zu berechnen. Nach einer Einführung in die Computerarithmetik, in der auch redundante Zahlensysteme besprochen werden, erfährt der Leser etwas über klassische Algorithmen zur Berechnung der Werte elementarer Funktionen (polynomiale Approximation, Tabellenmethoden). Es folgen einfache und kompliziertere Methoden, deren Ziel es ist, bei der Berechnung nur Additionen und Multiplikationen mit der Grundzahl (Shift-and-Add) zu verwenden, wobei aber vorgespeicherte Tabellen herangezogen werden. Das Buch ist für Leser, die erfahren wollen, wie der Computer tatsächlich rechnet, sehr interessant. Dem ausführlichen Literaturverzeichnis kann man wertvolle Hinweise entnehmen.

J. Schwaiger (Graz)

Internationale Mathematische Nachrichten

World Mathematical Year 2000

Die Internationale Mathematische Union (IMU) hat das Jahr 2000 zum *World Mathematical Year* (WMY 2000) erklärt. Dabei wird die IMU u.a. durch die UNESCO unterstützt.

Das WMY 2000 wird in zahlreichen Ländern durch spezielle Tagungen begangen. Nähere Information findet man unter *http://www.elib.zib.de/IMU/wmy/*

3ecm Barcelona 2000

Der *3rd European Congress of Mathematics* findet vom 10. bis 14. Juli 2000 in Barcelona statt.

Die Anmeldung kann im Internet auf der Seite

http://www.iec.es/3ecm/

oder unter der Adresse: Societat Catalana de Mathemàtiques, Institut d'Estudis Catalans, Carrer del Carme, 47, E-08001, Barcelona erfolgen.

Informationen: *http://www.iec.es/3ecm/*.

Weitere Aktivitäten der EMS

17.–22. Juni: EURESCO Conference in Mathematical Analysis at Castelvecchio Pascoli (Italy) on 'Partial Differential Equations and their Applications to Geometry and Physics' — Kontaktadresse: e-mail *euresco@esf.org*.

3.–7. Juli: ALHAMBRA 2000. A joint Mathematical European-Arabic Conference in Granada (Spain) — Kontaktadresse: Ceferino Ruiz, e-mail *ruiz @ugr.es*. Informationen: *http://www.ugr.es/∼alhambra2000*.

22.–27. September: EURESCO Conference in Number Theory and Arithmetical Geometry at Obernai (near Strasbourg), (France) on 'Motives and Arithmetic' — Kontaktadresse: e-mail *:euresco@esf.org*.

22.–27. September: EURESCO Conference in Geometry, Analysis and Mathematical Physics at San Feliu de Guixols (Spain) on 'Analysis and Spectral Theory' — Kontaktadresse: e-mail *euresco@esf.org*.

Herbst 2000: Diderot Mathematical Forum on 'Mathematics and Telecommunication' — Kontaktadresse: Jean-Pierre Bourguignon, e-mail *jpb@ihes.fr*.

D. Gabor Centenary Conference

In der Zeit vom 29.–31. Mai 2000 wird am Institut für Mathematik der Universität Wien die internationale *D.Gabor Centenary Conference* abgehalten, zu Ehren des am 5. Juni 1900 geborenen ungarisch-stämmigen Nobelpreisträgers (für seine Entdeckung der Holographie) Dennis Gabor. Der inhaltliche Schwerpunkt dieser von der Numerical Harmonic Analysis Group NuHAG am ESI (Erwin Schrödinger Institut bzw. Univ. Wien) veranstalteten Fachtagung ist die sogenannte Gabor-Analysis (Zeit-Frequenz Methoden, lokale Fourier Analysis, coherent states, Gabor Reihen-Darstellungen und deren Anwendungen).

Nähere Informationen sind bei den Organisatoren Dr. Norbert Kaiblinger (e-mail *kaibling@tyche.mat.univie.ac.at*) bzw. Prof. Hans G. Feichtinger (e-mail *fei@tyche.mat.univie.ac.at*) bzw. auf der NuHAG WWW-page unter

http://tyche.mat.univie.ac.at

zu finden.

István Vincze 1912–1999

Professor István Vincze died on April 18, 1999 after a long illness. He war born in Szeged, Hungary, on February 26, 1912. After his graduation from the University of Szeged in 1935, he worked for a Hungarian Insurance Company until 1945. The second world war interrupted his career. After the war we worked for the Ministry of Education and later joined the Mathematical Institute of the Hungarian Academy, where he was one of the founders under the direction of the late Alfréd Rényi. He was the Head of Statistics Department until his retirement in 1980 and during 1949–1964 he served also as Deputy Director of the Institute. He was also a Professor in Statistics at the Eötvös Loránd University, Budapest. A number of generations has learned statistics from him and he was considered as one of the main experts in both Theory and Practice of Statistics. Though in early stage of his research activity he was interested in Geometry, a subject on which he wrote several papers, including joint papers with Erdős, he made significant contributions to several branches in Statistics, such as Nonparametric Statistics, Empirical distributions, Cramér-Rao inequality, Information Theory, etc. He is author of more than 100 research papers and 10 books.

During his academic life István Vincze organized many important conferences in statistics and was member of the editorial board of several statistical and mathematical journals.

He was awarded a number of honors in his life, including the Hungarian State Prize in 1966 and the Gauss Ehrenplakette in 1978.

He had good connections with Austrian colleagues. There are Austrian mathematicians among his coauthos, he frequently visited the Universities in Vienna and was one of the main organizers of Pannonian Symposiums on Mathematical Statistics, a joint symposium of Austria and Hungary. Austrian colleagues also visited him frequently in the Mathematical Institute.

István Vincze will be remembered by the statistical community for his warmth, his humanity and his friendliness.

(Endre Csáki, Budapest)

Brouwer-Medaille

George Lusztig (MIT) wurde 1999 mit der Brouwer-Medaille für seine Arbeiten in der Algebra (Deligne-Lusztig-Charaktere, Kazhdan-Lusztig-Polynome, positive Matrizen etc.) ausgezeichnet.

Die Brouwer-Medaille wird alle drei Jahre für hervorragende Leistungen in einem speziellen mathematischen Gebiet von der Niederländischen Mathematischen Gesellschaft vergeben.

(Notices AMS)

Leibniz-Preis

Joachim Cuntz (Universität Münster, BRD) erhielt 1999 den mit 1.5 Mio. DM dotierten Gottfried Wilhelm Leibniz-Preis, der von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) verliehen wird. Cuntz arbeitet über C^*-Algebren und K-Theorie.

(Notices AMS)

Cantor-Medaille

Volker Strassen (Universität Konstanz, BRD) wurde von der Deutschen Mathematiker Vereinigung (DMV) mit der Cantor-Medaille für seine Arbeiten in der Wahrscheinlichkeitstheorie, der algebraischen Komplexitätstheorie und der Theoretischen Informatik ausgezeichnet.

(Notices AMS)

Wolf-Preise

Raoul Bott (Harvard University, Cambridge, USA) und *Jean-Pierre Serre* (College de France, Paris) erhalten dieses Jahr gemeinsam den mit 100.000 $ dotierten Wolf-Preis für Mathematik.

Der folgende Artikel, der auch eine Würdigung der beiden Preisträger enthält, stammt von Antreas P. Hatzipolakis.

Hungarian-born Professor Raoul Bott, 76, is cited for his "deep discoveries in topology and differential geometry and their applications to Lie groups, differential operators, and mathematical physics." He received his Ph.D. in Science from the Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, USA, after graduating in Engineering from McGill University, Canada. He has been Professor at Harvard University since 1959, he also taught at the Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, and at the University of Michigan, USA, and the Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES), in France.

Bott, who started his career as an electrical engineer, has been one of the leading figures in differential geometry, developing into one of the most influential geometers of our times. His more recent works have centered around surprising applications of geometry to mathematical physics (and vice versa), particularly to the theory of strings. "Through his publications, his students, and his personal qualities, he has significantly influenced the mathematics of our times," stated the Jury. He is a member of the National Academy of Sciences, USA, and of the London Mathematical Society.

Professor Jean-Pierre Serre, 73, is recognized for his "many fundamental contributions to topology, algebraic geometry, algebra and number theory, and for his inspirational lectures and writing." He graduated from the Ecole Normale Superieure, Paris and received his Ph.D. in 1951 from the Sorbonne. Serre has been Professor at the College de France since 1956. "He is a mathematician of great versatility, who has had an enormous influence on an astonishingly wide range of subjects, throughout the entire second half of the 20th century: algebraic topology, complex and algebraic geometry, group theory, and number theory." "He has also inspired generations of mathematicians through his lectures, books and courses, each of which is a gem of mathematical exposition and clarity," it was said. Professor Serre is a member of the Academy of Sciences of France, the National Academy of Sciences, USA, the Societe Mathematique de France and the London Mathematical Society.

The Wolf Foundation was established by the late German-born inventor, diplomat and philanthropist, Dr. Ricardo Wolf. A resident of Cuba for many years, he became Fidel Castro's ambassador to Israel, where he lived until his death in 1981. Five annual Wolf Prizes have been awarded since 1978, to outstanding scientists and artists, "for achievements in the interest of mankind and friendly relations among peoples, irrespective of nationality, race, color, religion, sex, or political view." The prizes, of \$100,000 in each area, are given every year in four out of five scientific fields, in rotation: Agriculture, Chemistry, Mathematics, Medicine and Physics. In the Arts, the Prize rotates among Architecture, Music, Painting and Sculpture. To date, a total of 186 scientists and artists from 19 countries have been honored.

Former Wolf Prize Laureates in Mathematics have included Robert Langlands of the Institute for Advanced Study, Princeton; Andrew Wiles, Yakov G. Sinai and Elias M. Stein, Princeton University; Joseph B. Keller, Stanford University; and Laszlo Lovasz, Yale University.

The 2000 Wolf Prizes will be conferred by the President of the State of Israel, Mr. Ezer Weizman, at a special ceremony, at the Knesset (parliament) in Jerusalem, on Sunday, May 21, 2000.

(A. P. Hatzipolakis)

Internationale Konferenz über Schulmathematik TU Wien, 29.–30. November 1999

Am 29. und 30. November 1999 fand an der Technischen Universität Wien die 7. Internationale Konferenz über Schulmathematik statt. Thema der Tagung war Schulmathematik und fächerübergreifender Unterricht. In 4 Arbeitsgruppen wurden Referate und Diskussionen zu folgenden Problemkreisen durchgeführt:

- Fächerverbindender Unterricht in der Sekundarstufe I vor dem Hintergrund des neuen Lehrplans.
- Fächerübergreifender Unterricht Mathematik - Physik in der Sekundarstufe II
- Wirtschaftsmathematik als Thema für fächerübergreifenden Unterricht
- Anwendungen der Mathematik im Bereich Technik und Naturwissenschaften als Themen für fächerübergreifenden Unterricht (und Matura)

Darüber hinaus gab es Plenarvorträge von Prof. Dr. A. Posamentier, City University New York, und Dr. H. Hauptman, ein Mathematiker, der den Noberlpreis für Chemie erhielt.

(Manfred Kronfellner, Wien)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Mitteilungen des ÖMG-Vorsitzenden

Mit Freude nehme ich das Angebot des neuen IMN-Herausgebers an, regelmäßig in den IMN eine Kolumne zu aktuellen Fragen zu schreiben. Der folgende Text wird, hoffe ich, nicht typisch für meine kommenden Beiträge sein. Es handelt sich um eine sehr persönliche Stellungnahme zum Artikel: *Karl Mayrhofer, 1899–1969* von Wolfgang Wertz, der in den IMN Nr. 182 (Dez. 1999), S. 17–21 erschienen ist.

Wenn mein Kollege Wertz glaubt, daß die wissenschaftlichen Leistungen seines Lehrers Karl Mayrhofer eine Festschrift verdienen, so ist das seine Sache. Aber wenn die IMN, das Organ der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, seinen Artikel in dieser Form abdrucken, ruft das meinen entschiedenen Widerspruch hervor. Wenn ich vor Erscheinen davon gewußt hätte, so wäre ich als Vorsitzender zurückgetreten. Jetzt ist es dafür zu spät. Ich muß aber dazu Stellung nehmen, auch wenn das bedeutet, auf Kollisionskurs zu gehen mit dem Autor, Wolfgang Wertz, und dem verantwortlichen Herausgeber, Peter Flor, die ich beide übrigens seit 35 Jahren gut kenne.

Ich habe mich immer verwehrt gegen das Cliché von einem Österreich, das es mit den dunklen Seiten seiner Vergangenheit nicht so ernst nimmt. Hier aber findet es leider Bestätigung. Es wird nirgendwo klar gesagt, daß Karl Mayrhofer bereits vor dem Anschluß illegaler Nationalsozialist war. In der Biographie wird lediglich schamhaft erwähnt, daß nach 1945 eine harte Zeit für ihn anbrach, und er 'aus formalen Gründen' durch das Verbotsgesetz zehn Jahre lang seinen Beruf als Universitätsprofessor nicht ausüben konnte. Gelernte Österreicher wissen natürlich, was das heißt (wenngleich ich z.B. mir unter 'formalen Gründen' wenig vorstellen kann: es wird ja nicht um Beistrichfehler gehen). Die Internationalen Mathematischen Nachrichten werden aber nicht nur von gelernten Österreichern gelesen. Im Ausland schlägt uns derzeit eine Welle des Mißtrauens entgegen. Jede Geschichtsaufbereitung wird kritisch geprüft. Die Mayrhofer-Festschrift kommt da gerade zurecht, um grassierende Vorurteile zu bekräftigen.

Natürlich ist der Artikel durch den 100. Geburtstag Mayrhofers motiviert und hat nichts mit der derzeitigen politischen Entwicklung zu tun. Aber durch diese Entwicklung wird er besonders gefährlich für unseren Ruf. Die IMN sollen internationale wissenschaftliche Kontakte fördern und können auch in Paris, Princeton und Jerusalem gelesen werden — und übrigens auch in Berlin. Die schonungslose Offenheit, mit der sich die DMV ihrer eigenen Vergangenheit gestellt hat, etwa beim Internationalen Mathematikerkongress 1998, kontrastiert exemplarisch mit der ‘behutsamen Ausleuchtung’ des Wertzschen Artikels.

Zahlreiche österreichische Mathematiker wurden durch das nationalsozialistische Regime um ihre berufliche Existenz gebracht, manche (wie etwa Tauber) auch um ihr Leben. 1937, als Mayrhofer Parteigenosse wurde, konnte er nichts vom Horror der Vernichtungslager ahnen, aber er von Bücherverbrennungen und den Nürnberger Rassegesetzen muß er gewußt haben. In diesem Licht wirkt der Nekrolog, den er auf Hans Hahn schrieb, nicht wie jener Ausbund an Zivilcourage, als welchen ihn Wertz darstellt. Viele Österreicher — so etwa, um nur in Mayrhofers Wirkungsstätte in der Strudlhofgasse zu bleiben, Menger, Gödel, Helly und jüngere Kollegen wie Taussky, Wald und Alt — sie alle suchten damals verzweifelt nach Möglichkeiten, das Land zu verlassen, um sich und ihre Familien zu retten. Mayrhofer aber reiste nach Deutschland, um einer Bewegung beizutreten, die sich ihrer rassistischen und geistesfeindlichen Absichten lauthals rühmte.

Ich bin mir wohl bewußt, der ‘Gnade der späten Geburt’ teilhaftig zu sein. Ich bin mir auch keineswegs sicher, ob ich in dieser schrecklichen Zeit die Kraft gehabt hätte, richtig zu handeln. Aber es gab ein richtig und ein falsch! Mayrhofer handelte falsch, wie so viele andere auch, und wer über ihn schreibt, soll das nicht verschweigen oder — was besonders peinlich wirkt — durch ein persönliches Leumundszeugnis nachbessern. Ich kann allerdings bestätigen — schließlich saß ich damals neben Wolfgang Wertz im großen Hörsaal — daß Mayrhofer nach der Aufhebung des Berufsverbots nicht über Politik und Vergangenheit in seinen Vorlesungen sprach. Ich bezweifle, ob dies für jene Mathematiker, die das NS-Regime verfolgt und vertrieben hat, einen großen Trost darstellt.

Die ÖMG ist kein politischer Verein, aber hier wäre jedes Verschweigen, Beschönigen oder achselzuckende Hinnehmen auch eine politische Aussage, und zwar eine, die ich nicht akzeptieren kann. Aber vielleicht bewirkt der Anlaßfall eine offene und ausführliche Auseinandersetzung mit der Geschichte der österreichischen Mathematik in dieser dunklen Zeit. Nichts soll hier ausgelassen werden — vom Wirken des Naziemporkömmlings Anton Huber als Vorstand in der Strudlhofgasse bis hin zum Tod des greisen Alfred Tauber in Theresienstadt.

Karl Sigmund

Ergänzende Bemerkungen von Prof. Leopold Schmetterer zum Artikel „Karl Mayrhofer, 1899–1969“ von Wolfgang Wertz (IMN 182, pp. 17–21)

Im Folgenden möchte ich einige Ergänzungen zum Artikel von Herrn Wertz in den Internationalen Mathematischen Nachrichten der ÖMG notieren.

Ich verstehe die Besorgnis von Herrn Kollegen Sigmund über die Darstellungsweise dieses Artikels.

Die Ausführungen von Herrn Wertz gehen in vieler Hinsicht parallel mit dem Inhalt meines Vortrags, den ich anlässlich der von Herrn Reichel im Jahre 1997 im mathematischen Institut der Universität Wien initiierten Veranstaltung für Karl Mayrhofer gehalten habe. Allerdings habe ich damals mit deutlichen Worten festgehalten, dass Mayrhofer seit 1937 ein illegales Mitglied der NSDAP war.

Meine folgenden Hinweise beziehen sich auf einige wenige Bemerkungen, da es mein schlechter Gesundheitszustand nicht erlaubt, allzuviele Details zu berücksichtigen. Überdies erscheint es mir nur sinnvoll, die Ausführungen von Herrn Wertz für solche Zeitabschnitte zu ergänzen, die etwa 50 Jahre zurückliegen und daher Herrn Wertz nicht bekannt sein können. 1945 wurde Mayrhofer entlassen und 1947 zwangspensioniert. In diesem Jahr wurde auch die Besetzung eines offenen Ordinariats am Mathematischen Institut der Universität Wien nach der Berufung von J. Radon auf ein Ordinariat im Jahr 1946 spruchreif. Es erübrigt sich zu erwähnen, dass die Berufung Radons, eines der berühmtesten Mathematikers von höchstem internationalem Ansehen und seine 10-jährige Tätigkeit bis zu seinem Tode 1956 für die österreichische Mathematik ungemein segensreich waren. Im Zusammenhang mit der Besetzung der erwähnten zweiten Lehrkanzel wurde in der damaligen philosophischen Fakultät der Name Mayrhofer diskutiert. Er kam aber nicht zum Zuge. Die Fakultät sah allein schon aus wissenschaftlichen Gründen keinen Anlass, ihn zurückzuberufen. Der Name des damaligen jungen Dozenten Hlawka hatte, wie mehrere ausländische Gutachten ergaben, bereits eine derartige Ausstrahlung, dass Hlawka 1948 zum Ordinarius ernannt wurde.

In diesem Zusammenhang sei auch noch darauf hingewiesen, dass Mayrhofer E. Hlawka, der keinerlei Neigung zeigte, sich einer der NSDAP nahestehenden Organisationen anzuschließen, nicht nur im Zeitraum 1939–45 als Assistent bestellte, sondern ihn sogar 1944 habilitierte mit der so berühmt gewordenen Arbeit. Ich war als Gegner des Regimes in diesem Zeitraum im Mathematischen Institut bekannt. Mayrhofer stellte sich schützend vor mich und ermöglichte sogar meine Anstellung als wissenschaftliche Hilfskraft im Jahre 1940.

1957 erhielt ich, damals schon in Hamburg, einen Ruf auf die durch den Tod von Radon vakant gewordene Lehrkanzel und auf die ebenso durch das Ableben von Duschek freigewordene Lehrkanzel auf der damaligen Technischen Hochschule in Wien. Ich lehnte beide Rufe ab und damit war auch die Berufung Mayrhofers, dessen Lehrverbot 1954 aufgehoben war, auf die Lehrkanzel im Mathematischen Institut der Universität Wien ermöglicht.

Leopold Schmetterer

Leopold Vietoris — Erneuerung des Doktordiploms zur 80. Wiederkehr der Promotion. 17. März 2000

Photo: H.-C. Reichel

Mit Sicherheit zählt Prof. Dr. Dr. h.c. Leopold Vietoris (geb. 4.6.1891) zu den bedeutendsten Mathematikern Österreichs, Europas, ja der Welt! Man wird kaum ein Topologie-Buch finden, das seinen Namen nicht erwähnt.

Vietoris' wesentlichste Leistungen liegen auf dem Gebiet der — wie man heute sagt — Algebraischen Topologie und bei den grundlegenden Begriffen und Methoden der Allgemeinen (bzw. Mengentheoretischen) Topologie. Seine Arbeiten trugen (in den 20er Jahren) sogar wesentlich zur Entstehung und Ausformung dieses Gebietes bei. Auch zu den philosophischen Grundlagen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes hat er beigetragen, und besondere Würdigung verdienen auch seine praxisorientierten Arbeiten zur differentialgeometrisch fundierten Orientierung des Bergsteigers im Gelände, zur Festigkeitslehre des alpinen Schis und zur Physik der Blockgletscher.

Dennoch aber: seine Hauptleistungen liegen auf dem Gebiet der Topologie. Schon seine Dissertation über 'Stetige Mengen' (er promovierte 1920 in Wien nach

Kriegsdienst und italienischer Gefangenschaft) war ein wesentlicher Beitrag zu den Grundlagen der damals im Entstehen begriffenen Topologie. Das Trennungsaxiom der Regularität, der Filterbegriff (und dazu äquivalent der Begriff der Moore-Smith-Folgen), die bekannte Verschärfung des (Fréchetschen) Kompaktheitsbegriffes u.v.a.m. gehen letztlich auf ihn zurück (so hat er — wohl als erster — Filterbasen unter dem Namen ‘Kranz’ studiert). Die Topologie gewisser Räume abgeschlossener Teilmengen eines Raumes X trägt heute noch seinen Namen. Nach seiner Habilitation in Wien widmete er sich mehr kombinatorisch-topologischen Methoden, dies wohl als Folge seines dreisemestrigen Forschungsaufenthaltes bei L.E.J. Brouwer in Amsterdam.

Trotz aller Weiterentwicklungen und Verallgemeinerungen ist der Name Vietoris aus der Algebraischen Topologie nicht wegzudenken. Und er wird dort — etwa in der Homologietheorie — tatsächlich auch heute noch verwendet! Es wird kaum einen (fortgeschrittenen) Studierenden geben, der im Lauf des Studiums nicht wenigstens einmal von Vietoris gehört hat.

Als ich gestern im Zug nach Innsbruck fuhr, rezensierte ich eine eben jetzt in den USA erschienene Arbeit; auf Seite 4 tauchten Vietories-Topologien auf. Das mag zwar ein Zufall gewesen sein, überraschend freilich ist es nicht.

Hier ist nicht der Ort, eine ausführliche Würdigung seiner Person und seiner Leistung zu geben (derartige Arbeiten sind unter anderen von Herrn Kollegen Reitberger und von anderen zahlreich publiziert und der Name Vietoris findet sich auch in allen einschlägigen Lexika berühmter Mathematiker). Statt dessen möchte ich mit einer Anekdote schließen, die zwar von Johann Radon (1887–1956), einem ebenso berühmten österreichischen Mathematiker, handelt, und die im Institut der Universität Wien spielt, die aber — mutatis mutandis — genauso gut an der Universität Innsbruck, der (seit 1930) ‘Heimat’ Prof. Vietoris’, angesiedelt sein könnte, und die Situation in Analogie gut charakterisiert. Diese Anekdote wurde mir von Prof. Schmetterer berichtet.

Als ein Student aus den USA in den 50er Jahren an der Türe des Arbeitszimmers J. Radons vorüberging, bemerkte er interessiert, daß hier ein Mathematiker mit einem so berühmten Namen arbeitete. Nach Aufklärung, daß es sich um *den* Radon handelt, den er aus seinem Studium kennt, meinte er verwundert, daß *dieser* Radon doch schon vor langer Zeit gelebt haben muß, zumal sein Name in den Büchern ja bereits als ‘klassisch’ geführt würde und auch grundlegend bekannte Dinge dessen Namen trügen.

Leopold Vietoris, der 1919 auch die Lehramtsprüfung abgelegt und danach ein Jahr im Schuldienst verbracht hat, ist — soviel ich weiß — immer noch mathematisch interessiert und tätig.

Die Universität Wien ist stolz darauf, Ihnen, Herr Kollege, das Erneuerungsdekret der Promotionsurkunde überreichen zu dürfen.

Hans-Christian Reichel

Surveys on Mathematics for Industry

Der Springer-Verlag Wien bietet allen Mitgliedern der ÖMG die Zeitschift *Surveys on Mathematics for Industry* zum Sonderpreis von jährlich öS 504,– (+ öS 100,– Versandkosten) anstelle des regulären Preises von öS 2980,– an.

Kontaktadresse: e-mail *silvia.schilgerius@springer.at*

Stellenausschreibungen für Mathematiker

Die ÖMG betreibt auf ihrer homepage

http://radon.mat.univie.ac.at/∼oemg/

eine Jobbörse. Unter der Adresse

http://www.luchsinger-mathematics.ch/jobs/math.html

findet man weitere Stellenangebote für Mathematiker.

Druckfehlerberichtigung

In den IMN 182, p. 14, ist der Hilbertsche *Zahlbericht* fälschlicherweise als *Zahlbegriff* bezeichnet worden.

Persönliches

Seit Januar 2000 ist Prof. *Hans G. Feichtinger* (Institut für Mathematik der Universität Wien) der hauptverantwortliche Chef-Herausgeber für das *Journal of Fourier Analysis and Applications*, welches er vom Gründungsherausgeber, Prof. John Benedetto (MD/USA) im siebenten Jahr seines Bestehens übernommen hat. Nähere Informationen über dieses noch relativ junge Journal findet man unter

http://www.birkhauser.com/jfaa

Neue Mitglieder

Paolo Boggiatto, Prof. — geb. 1961, 1986 Laurea in Matematica, 1993 Dottorato in Matematica, 1993–98 Forscher an der Univ. Torini, 1998-99 Prod. Uni Basilicata, seit 1999 Prof. Univ. Torino, Universitá di Torino, Dip. di Matematica, Via C. Alberto 10, I-10123 Torino. e-mail *Boggiatto@dm.unito.it*.

Alfio Borzi, Mag. Dr. — Viktor Kaplang. 21, A-8045 Graz. geb. 1965 in Catania. 1983–88 Diplomstudium Theor. Physik Univ. Catania, 1988–93 PhD Mathematik SISSA Triest, 1993–95 Univ.Ass. Num. Math. Oxford Univ. Computing Lab., 1996–97 Spar AG Salzburg/AVL List GmbH, seit 1998 Vertr.Ass. Inst. f. Math. (Numerik und Modellierung) Univ. Graz, Heinrichstr. 36, A–8010 Graz.

Andrea R. Hofer, Mag. — Severing. 8/2, A-1090 Wien. geb. 1971. Diplomstudium Psychologie, Diplomstudium Statistik u. Mathematik. e-mail *andrea_r_hofer@hotmail.com*.

Norbert Kaiblinger, Dr. — geb. 1968. Studium Mathematik-Physik Lehramt und Mathematik Diplom, 1999 Promotion mit Auszeichnung. Forschungsass. am Inst.f.Math., Univ. Wien, Strudlhofg. 4, A-1090 Wien. e-mail *kaibling@tyche.mat.univie.ac.at*.

Johannes Gmainer, Dipl.Ing. Dr. — Hauptstr. 71, A-2354 Sarasdorf. geb. 1972. 1996 Dipl.Ing. TU Wien, 1997-99 Projektmitarbeiter (Veronese varieties over fields with non-zero characteristic), 1999 Dr.techn. TU Wien, seit 1999 Vertragsass. Inst. f. Math. u. Statistik, Montanuniv. Leoben, Franz-Josefstr. 18, A-8700 Leoben. e-mail *Johannes.Gmainer@unileoben.ac.at*.

Erich Harasko, Dipl.Ing. — Mappesg. 7/1/4, A-2320 Schwechat. geb. 1931. Physikstudium TU Wien, Otik-Werke Reichert, Ass. f. Elektrotechnik HTL Wien X, seit 1962 Software-Entwicklung Siemens AG., ab 1974 Dienststellenleiter, ab 1984 “Wissenschaftlicher Referent” im Bereich “Programm- und Systementwicklung”, seit 1992 in Pension.

Lisa Heersink — Pointnerg. 16/1, A-8010 Graz. geb. 1976. Studium Techn. Math. TU Graz, seit 2000 Studienass. am Inst. f. Math. und angew. Geometrie Montanuniv. Leoben, Franz-Josefstr. 18, A-8700 Leoben. e-mail *Heersink@g3809u.unileoben.ac.at*.

Petra Mutzel, Prof.Dr. — geb. 1964. 1990 Diplom Math. Univ. Augsburg, Dr.rer.nat. Univ. Köln, Habilitation in Informatik Univ. d. Saarlandes, seit 1999 Professur f. Algorithmen und Datenstrukturen TU Wien, Institut f. Computergraphik, Favoritenstr. 9–11, A-1040 Wien. e-mail *mutzel@apm.tuwien.ac.at*.

Oliver Dietmar Pfeiffer, Dipl.Ing. — geb. 1976. 1999 Dipl. Ing. TU Graz, Mitarbeiter am FWF-Projekt bei Prof. Kirschenhofer, Inst. f. Math. u. angew. Geometrie, Montanuniv. Leoben, Franz-Josefstr. 18, A-8700 Leoben. e-mail *pfeiffer @unileoben.ac.at*.

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

Sekretariat:

TU Wien, Wiedner Hauptstr. 8–10, Inst. 1182, A-1040 Wien.
Tel. (+43)1-58801-11823

Vorstand des Vereinsjahres 2000:

K. Sigmund (Univ. Wien): Vorsitzender.
H. Engl (Univ. Linz): Stellvertreter.
M. Drmota (TU Wien): Herausgeber der IMN.
W. Woess (TU Graz): Schriftführer.
P. Michor (Univ. Wien): Stellvertretender Schriftführer.
I. Troch (TU Wien): Kassierin.
W. Schachermayer (TU Wien): Stellvertretender Kassier.

Vorsitzende der Landessektionen:

L. Reich (Univ. Graz)
O. Loos (Univ. Innsbruck)
H. Kautschitsch (Univ. Klagenfurt)
J. B. Cooper (Univ. Linz)
P. Zinterhof (Univ. Salzburg)
H. Kaiser (TU Wien)

Beirat:

H. Bürger (Univ. Wien)
C. Christian (Univ. Wien)
U. Dieter (TU Graz)
P. M. Gruber (TU Wien)
H. Heugl (Wien)
E. Hlawka (TU Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
R. Mlitz (TU Wien)
W. G. Nowak (U. Bodenkultur Wien)
A. Plessl (Wien)
B. Rossboth (Wien)
N. Rozsenich (BMBWK Wien)
H. Stachel (TU Wien)
H. Stasser (WU Wien)
R. F. Tichy (TU Graz)
H. Troger (TU Wien)
H. K. Wolff (TU Wien)

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: 250.– öS.

Bankverbindung: Kto. Nr. 229-103-892 der Bank Austria AG, Zweigstelle Wieden, oder PSK Kto. Nr. 7823-950, Wien.

Wir bitten unsere ausländischen Mitglieder, bei Überweisungen die Zweckbestimmung ‘Mitgliedsbeitrag’ anzugeben und den Betrag so zu bemessen, daß nach Abzug der Bankspesen der Mitgliedsbeitrag der ÖMG in voller Höhe zufließt.

http://www.mat.univie.ac.at/∼oemg/