



# Lernendenvorstellungen zu Rechenoperationen mit Wahrscheinlichkeit

Was bleibt vom Stochastikunterricht?

Florian Stampfer, Pia Tscholl

# Erhebung

Bitte nicht wenden

# Erhebung – 2 Minuten

## Erhebung: Textaufgaben zum Thema Wahrscheinlichkeit

Bitte notieren Sie jeweils eine kurze Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur angegebenen Rechnung passt. Ergänzende Skizzen, Grafiken oder Ähnliches sind möglich. Bitte nur in die umrahmten Boxen schreiben. Dauer ca. 2 Minuten.

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.

# Erhebung – 2 Minuten

## Erhebung: Textaufgaben zum Thema Wahrscheinlichkeit

Bitte notieren Sie jeweils eine kurze Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur angegebenen Rechnung passt. Ergänzende Skizzen, Grafiken oder Ähnliches sind möglich. Bitte nur in die umrahmten Boxen schreiben. Dauer ca. 2 Minuten.

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.



Download-Link

# Erhebung – 2 Minuten

## Erhebung: Textaufgaben zum Thema Wahrscheinlichkeit

Bitte notieren Sie jeweils eine kurze Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur angegebenen Rechnung passt. Ergänzende Skizzen, Grafiken oder Ähnliches sind möglich. Bitte nur in die umrahmten Boxen schreiben. Dauer ca. 2 Minuten.

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.



Download-Link



Anonymer Upload-Link

# Grundvorstellung

# Grundvorstellung

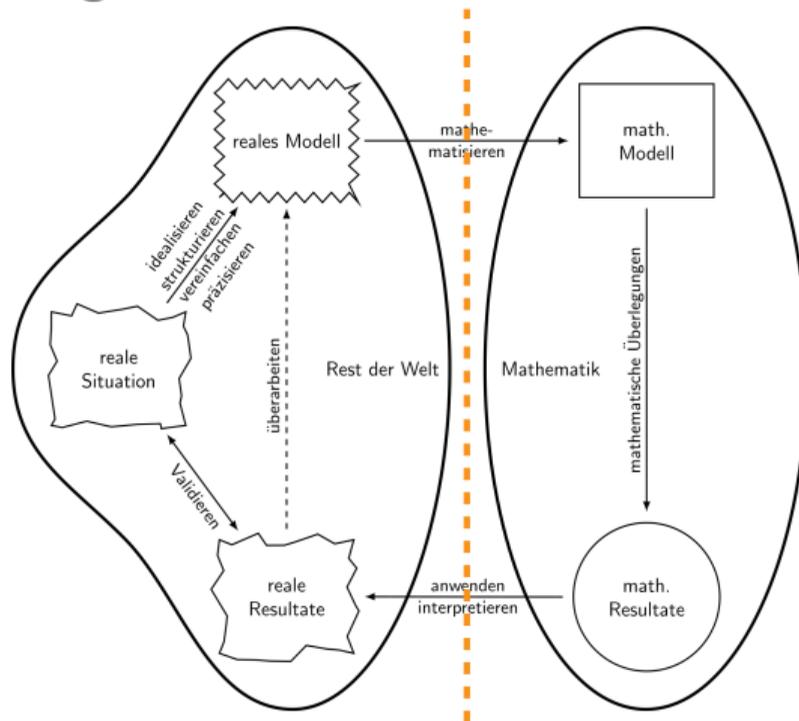
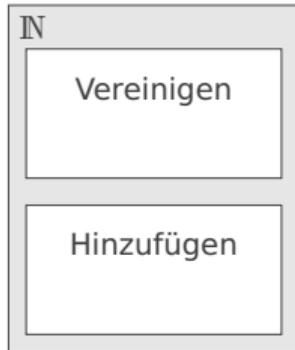


Abbildung 1: Modellierungskreislauf in Anlehnung an Blum & Leiß (2005, S. 19)

## Addition



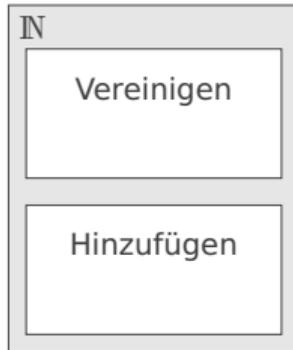
(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Grundvorstellung

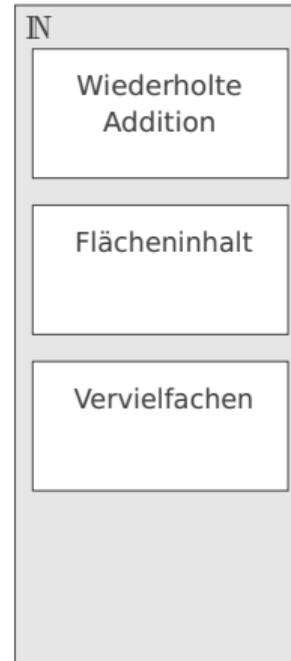
$4 + 5$

$3 \cdot 7$

## Addition



## Multiplikation



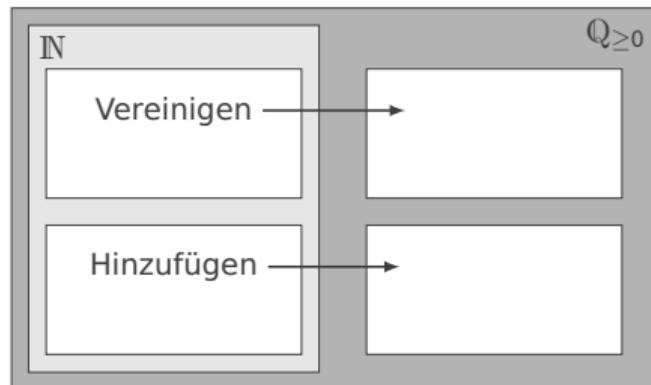
(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Grundvorstellung und deren Entwicklung

$$4 + 5 \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot 7$$

## Addition



## Multiplikation



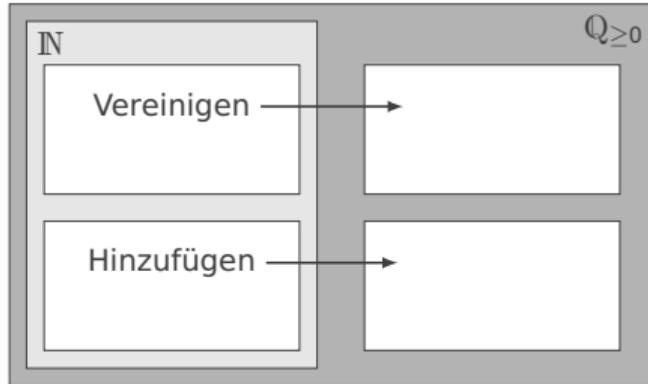
(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Grundvorstellung und deren Entwicklung

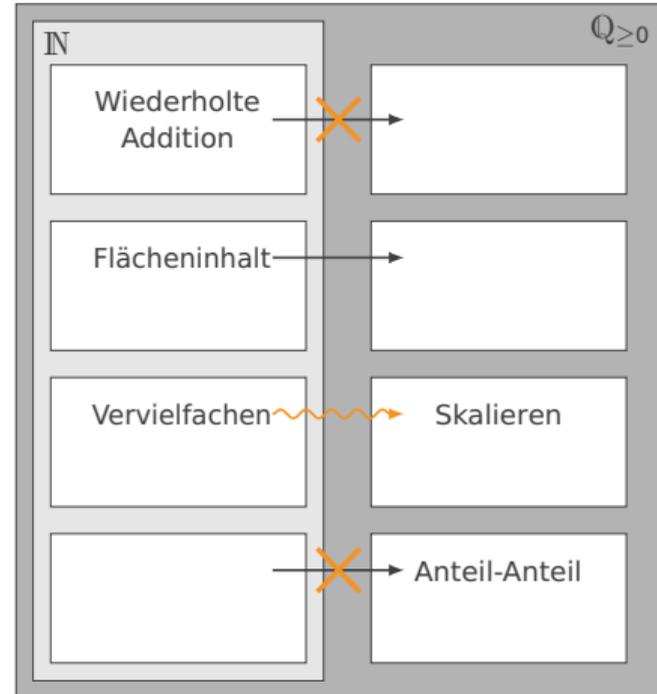
$$4 + 5 \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot 7 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

## Addition



## Multiplikation



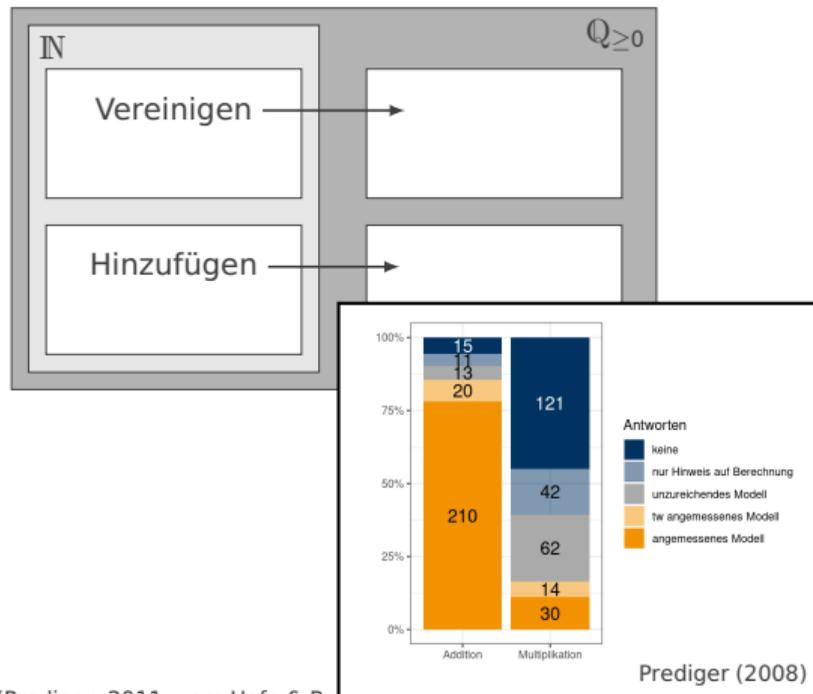
(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Grundvorstellung und deren Entwicklung

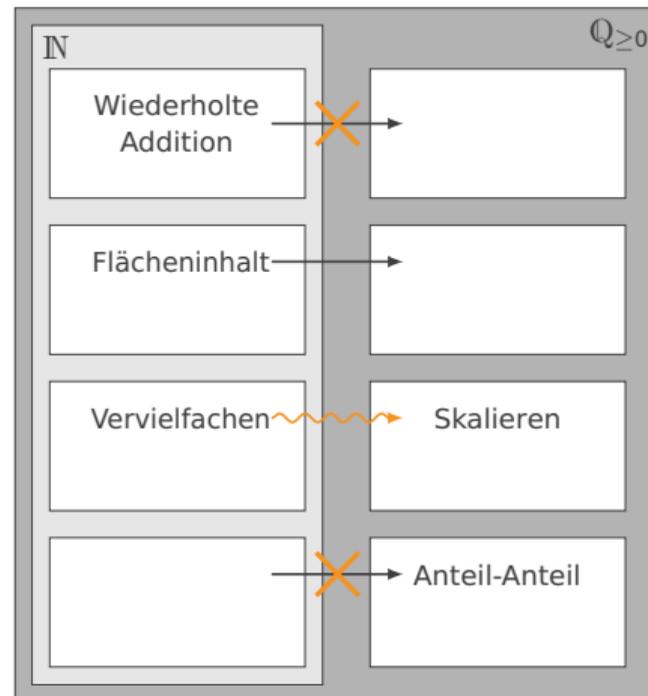
$$4 + 5 \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot 7 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

## Addition



## Multiplikation



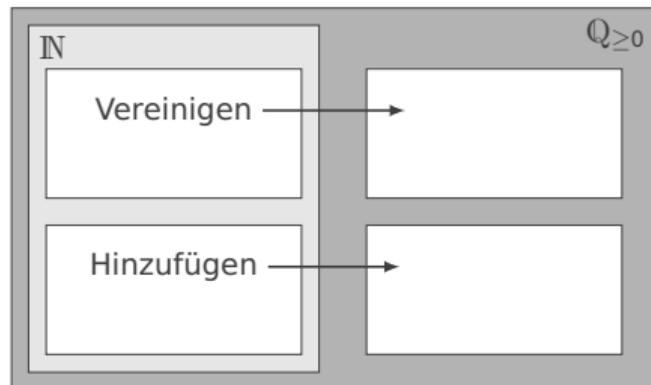
(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Grundvorstellung und deren Entwicklung

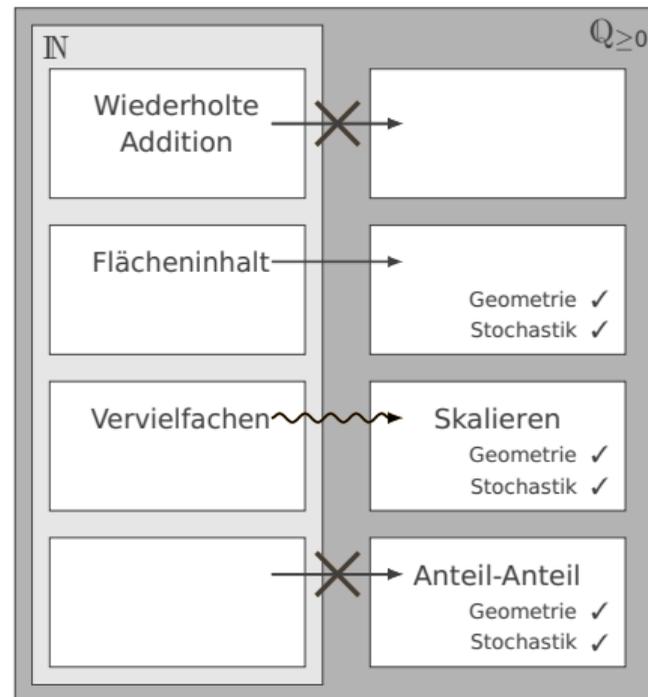
$$4 + 5 \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot 7 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

## Addition



## Multiplikation



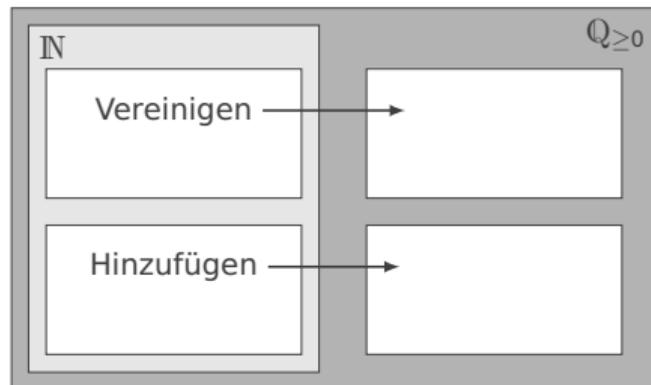
(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Grundvorstellung und deren Entwicklung

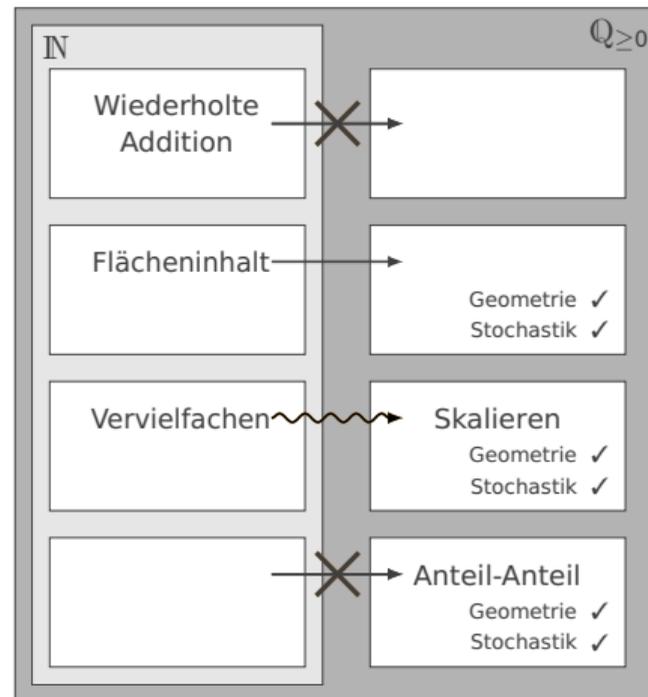
$$4 + 5 \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot 7 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

## Addition



## Multiplikation



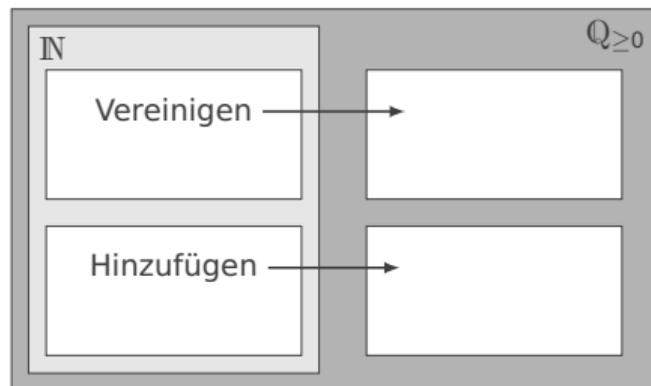
(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Grundvorstellung und deren Entwicklung

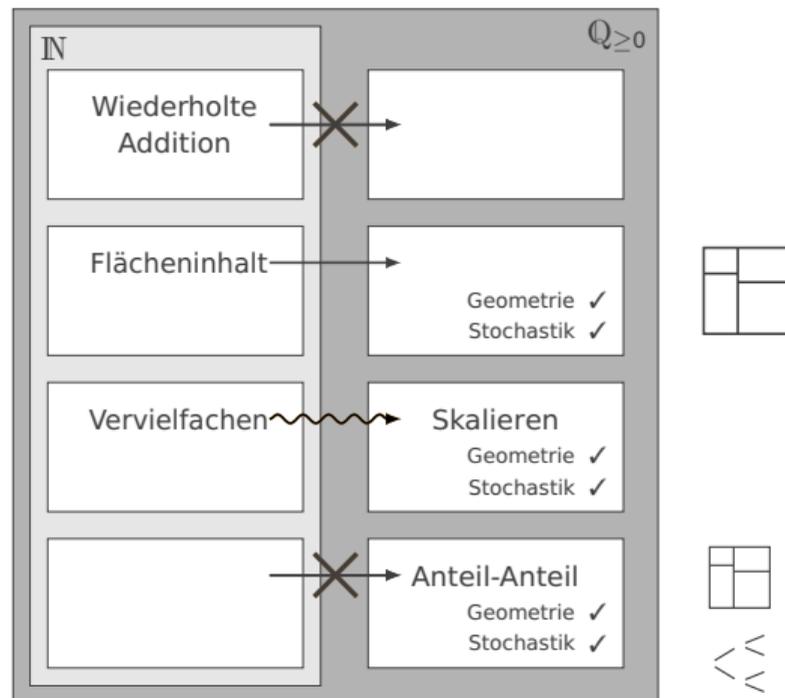
$$4 + 5 \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot 7 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

## Addition



## Multiplikation



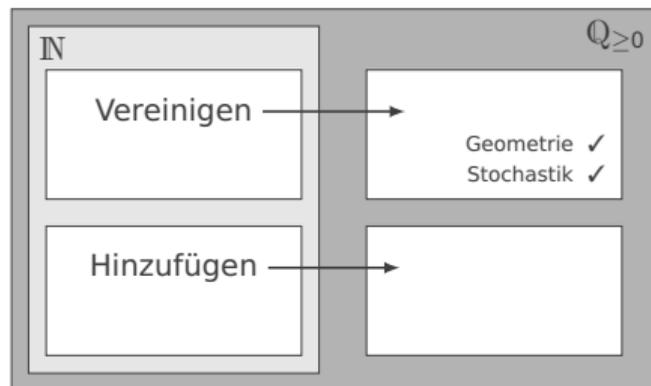
(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Grundvorstellung und deren Entwicklung

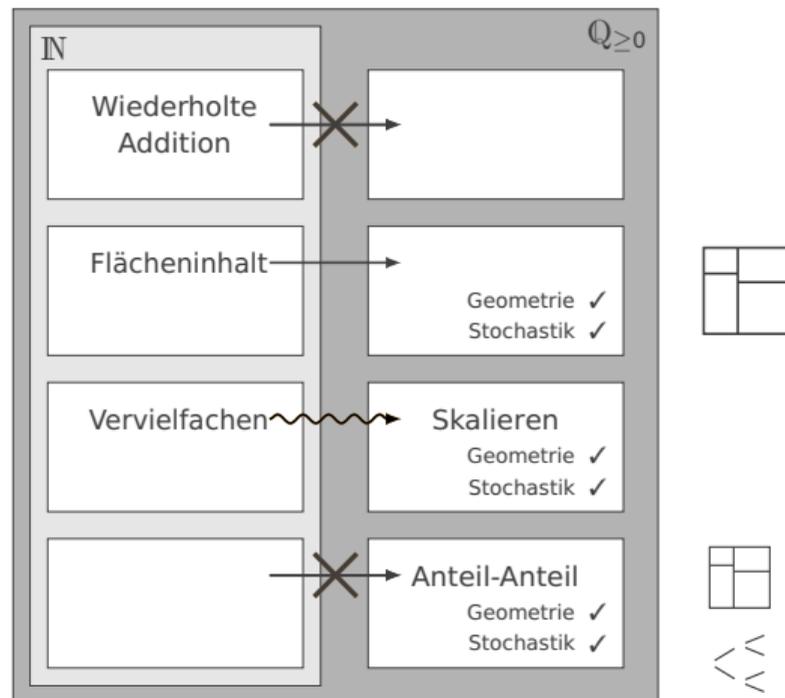
$$4 + 5 \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot 7 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

## Addition



## Multiplikation



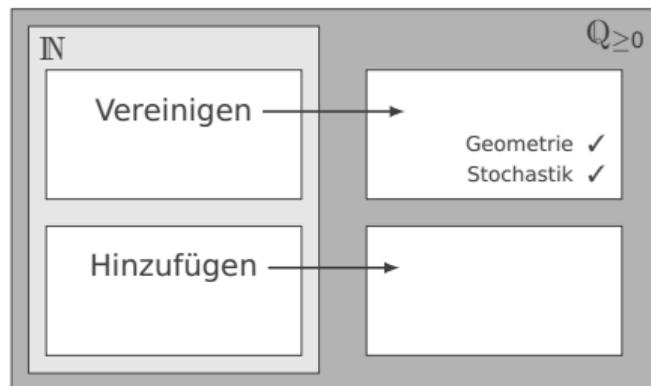
(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Grundvorstellung und deren Entwicklung

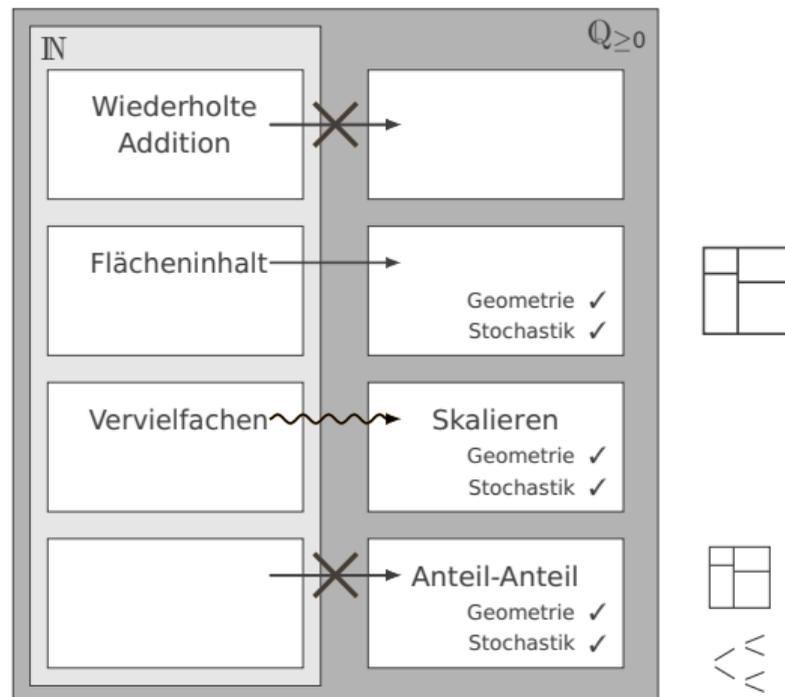
$$4 + 5 \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot 7 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

## Addition



## Multiplikation



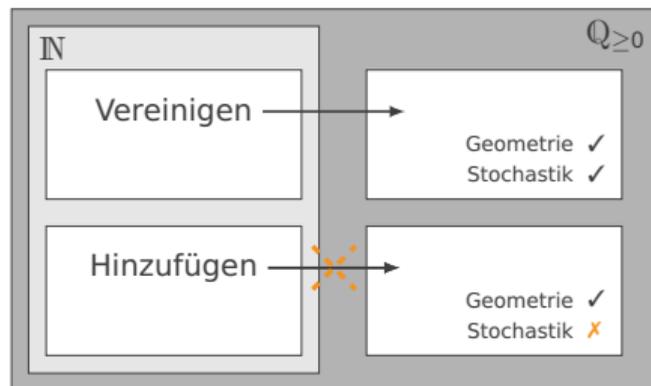
(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Grundvorstellung und deren Entwicklung

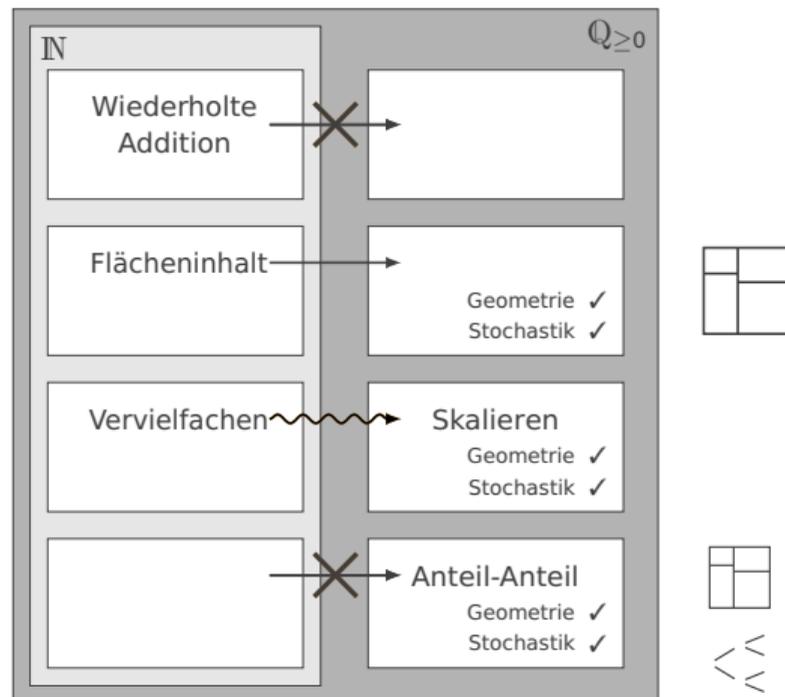
$$4 + 5 \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot 7 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

## Addition



## Multiplikation



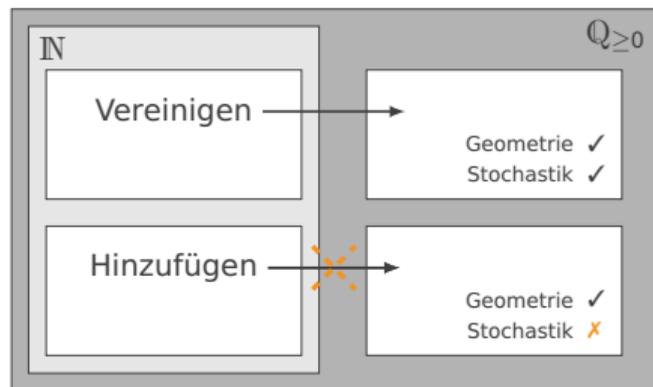
(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Grundvorstellung und deren Entwicklung

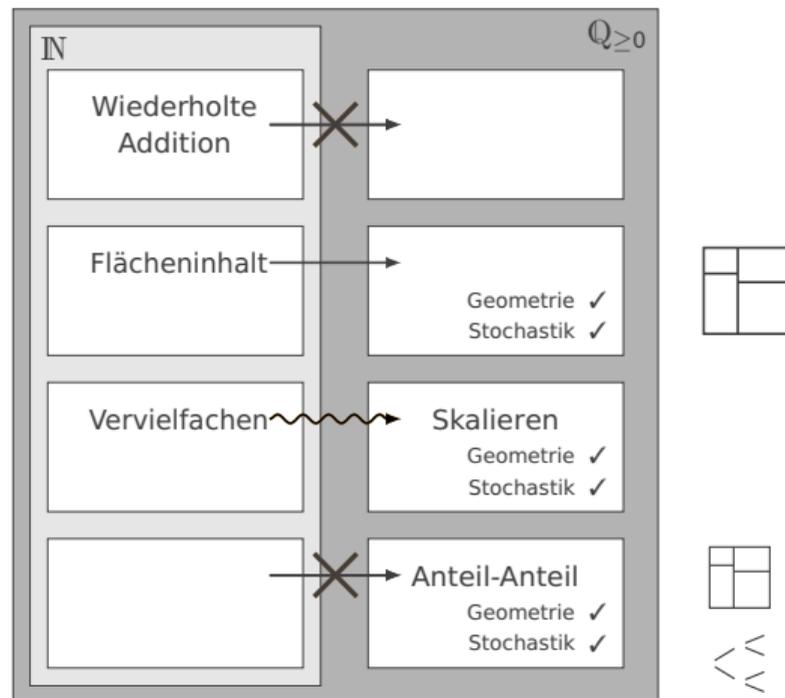
$$4 + 5 \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot 7 \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

## Addition



## Multiplikation



(Prediger, 2011; vom Hofe & Roth, 2023)

# Unsere Vermutungen

- Die Grundvorstellung des Hinzufügens wird bei Additionsaufgaben im Inhaltsbereich Stochastik nicht oder falsch verwendet.
- Die bekannten Grundvorstellungen zur Multiplikation werden im Inhaltsbereich Stochastik korrekt verwendet.

# Studie

## Testinstrument

*Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.*

*Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$  passt.*

# Studie

## Testinstrument

*Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.*

*Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$  passt.*

## Stichprobe

- $N = 110$  Studierende des Fachs „Mathematik“, Lehramt Sekundarstufe, im 4. Semester (vor stochastischer Fachausbildung)
- **Folgerhebungen:**
  - Methode des lauten Denkens ( $n = 3$ ) sowie Interviews ( $n = 3$ ) auf Basis des Testinstruments.
  - Dieselben Fragen im Inhaltsbereich Geometrie schriftlich lösen ( $n = 14$ ).

# Motivation für die Studie

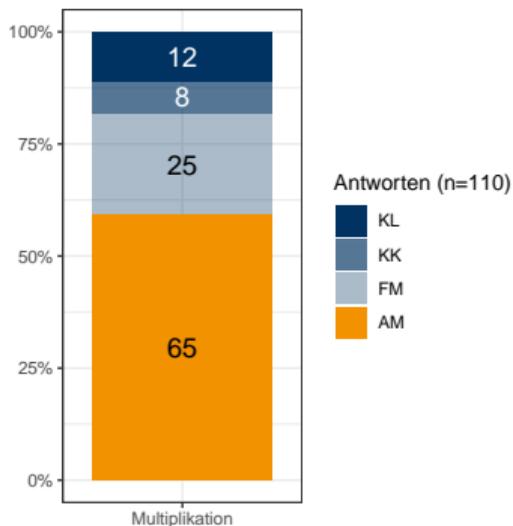
- Warum Rechenoperationen mit Wahrscheinlichkeiten?
  - Beobachtung, dass Addition und Multiplikation verwechselt werden (Fischnaller, 2021)
  - Intuitiver Zugang notwendig, da ab Schuljahr 2026/27 in der Sek 1 (RIS Lehrpläne AHS, 2023)

# Motivation für die Studie

- Warum Rechenoperationen mit Wahrscheinlichkeiten?
  - Beobachtung, dass Addition und Multiplikation verwechselt werden (Fischnaller, 2021)
  - Intuitiver Zugang notwendig, da ab Schuljahr 2026/27 in der Sek 1 (RIS Lehrpläne AHS, 2023)
- Warum Lehramtsstudierende?
  - Tieferes Verständnis der Schulmathematik als Fundament für mathematikdidaktisches Wissen, was wiederum ein guter Prädiktor für guten Mathematikunterricht ist (Kunter et al., 2011)

# Ergebnisse: Multiplikation

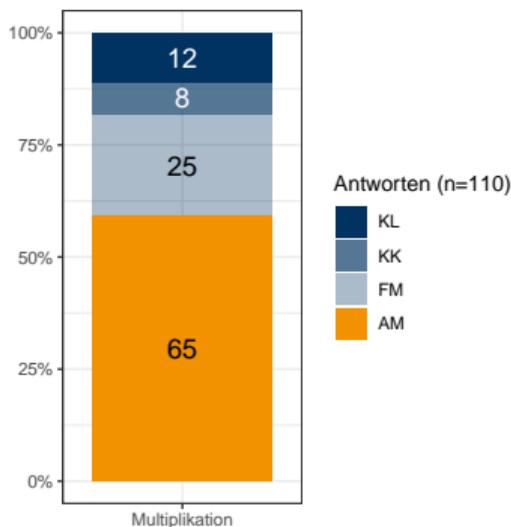
Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$  passt.



- **AM: Angemessenes Modell**
  - Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge zweier aufeinanderfolgender Zufallsexperimente
- **FM: Fehlerhaftes Modell**
  - Zwar stochastischer Kontext, aber fehlerhafte Geschichte
- **KK: Kein stochastischer Kontext**
- **KL: Keine Lösung**

# Ergebnisse: Multiplikation

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$  passt.

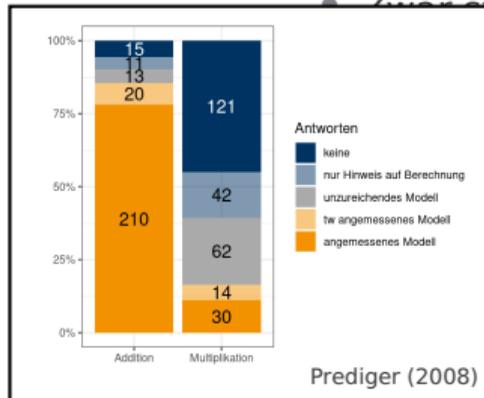


- **AM: Angemessenes Modell**

- Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge zweier Ereignisse aufeinanderfolgender Zufallsexperimente

- **FM: Fehlerhaftes Modell**

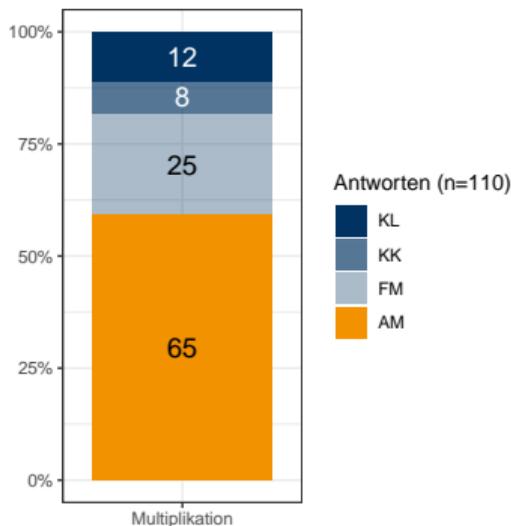
- Zuordnen in stochastischer Kontext, Fehlerhafte Geschichte



Lösung

# Ergebnisse: Multiplikation

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$  passt.



- **AM: Angemessenes Modell**
  - Wahrscheinlichkeit der Schnittmenge zweier aufeinanderfolgender Zufallsexperimente
- **FM: Fehlerhaftes Modell**
  - Zwar stochastischer Kontext, aber fehlerhafte Geschichte
- **KK: Kein stochastischer Kontext**
- **KL: Keine Lösung**

# Angemessenes Modell Multiplikation ( $n = 65, 60\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$  passt.

In einem Sack sind 2 rote Kugeln und 2 grüne. In einem weiteren Sack ist nur noch eine rote Kugel und 3 grüne. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zuerst aus dem ersten Sack eine rote Kugel zu ziehen und dann aus dem zweiten Sack eine grüne?

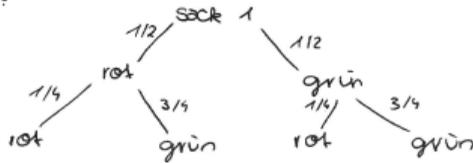


Abbildung 2: Person 36, Box 2

# Angemessenes Modell Multiplikation ( $n = 65, 60\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$  passt. In einem Sack sind 2 rote Kugeln und 2 grüne. In einem weiteren Sack ist nur noch eine rote Kugel und 3 grüne. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zuerst aus dem ersten Sack eine rote Kugel zu ziehen und dann aus dem zweiten Sack eine grüne?

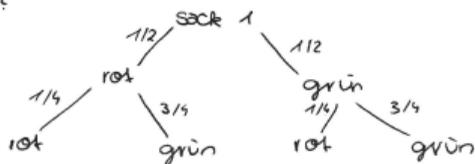


Abbildung 2: Person 36, Box 2

		Zug 1	
		Rot	Grün
Zug 2	Rot	1/8	1/8
	Grün	3/8	3/8

# Angemessenes Modell Multiplikation ( $n = 65, 60\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$  passt. In einem Sack sind 2 rote Kugeln und 2 grüne. In einem weiteren Sack ist nur noch eine rote Kugel und 3 grüne. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zuerst aus dem ersten Sack eine rote Kugel zu ziehen und dann aus dem zweiten Sack eine grüne?

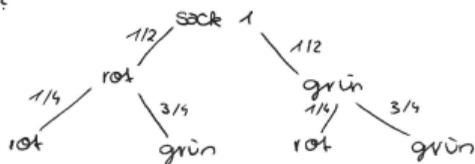
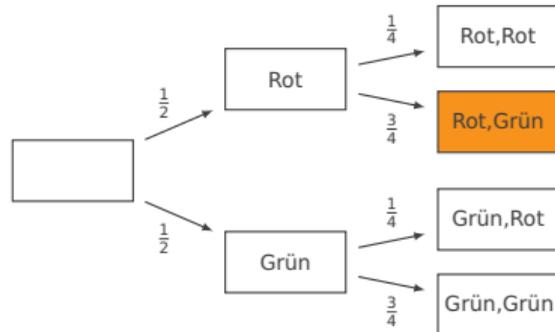


Abbildung 2: Person 36, Box 2

		Zug 1	
		Rot	Grün
Zug 2	Rot	1/8	1/8
	Grün	3/8	3/8



# Fehlerhaftes Modell Multiplikation ( $n = 24, 22\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$  passt.

$\frac{1}{2}$  /  $\frac{1}{2}$   
rot grün  
 $\frac{1}{4}$  /  $\frac{3}{4}$   $\frac{1}{4}$  /  $\frac{3}{4}$   
rot grün rot grün

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$   
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$   
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$   
mind. 1 rot

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass du bei zwei mal  
ziehen ohne zurücklegen mindestens einmal eine rote  
Kugel ziehst.

Abbildung 3: Person 59, Box 2

# Fehlerhaftes Modell Multiplikation ( $n = 24, 22\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$  passt.

$\frac{1}{2}$  /  $\frac{1}{2}$   
 rot / grün  
 $\frac{1}{4}$  /  $\frac{1}{4}$  /  $\frac{1}{4}$  /  $\frac{1}{4}$   
 rot grün rot grün

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$   
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$   
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$   
 mind. 1 rot

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$   
 100%

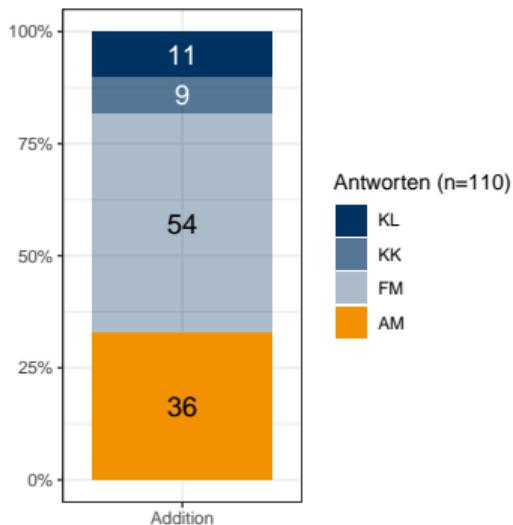
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass du bei zwei mal ziehen ohne zurücklegen mindestens einmal eine rote Kugel ziehst.

Abbildung 3: Person 59, Box 2

		Zug 1	
		Rot	Grün
Zug 2	Rot	1/8	1/8
	Grün	1/8	1/8
	Andere	1/4	1/4

# Ergebnisse: Addition

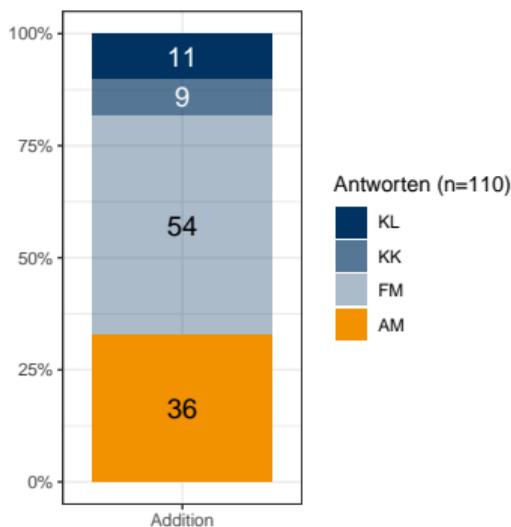
Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.



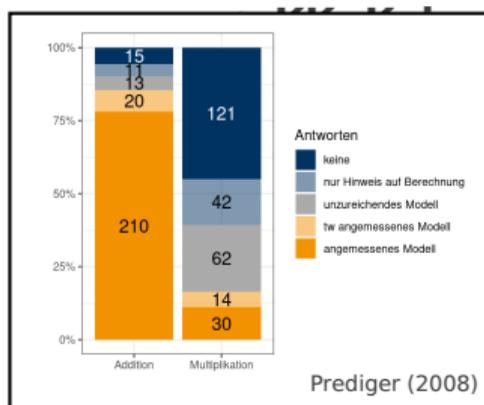
- **AM: Angemessenes Modell**
  - Diskunkte Zerlegung, „+“ verstanden als disjunkte Vereinigung
- **FM: Fehlerhaftes Modell**
  - Zwar stochastischer Kontext, aber fehlerhafte Geschichte
- **KK: Kein stochastischer Kontext**
- **KL: Keine Lösung**

# Ergebnisse: Addition

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.



- **AM: Angemessenes Modell**
  - Diskunkte Zerlegung, „+“ verstanden als disjunkte Vereinigung
- **FM: Fehlerhaftes Modell**
  - Zwar stochastischer Kontext, aber fehlerhafte Geschichte

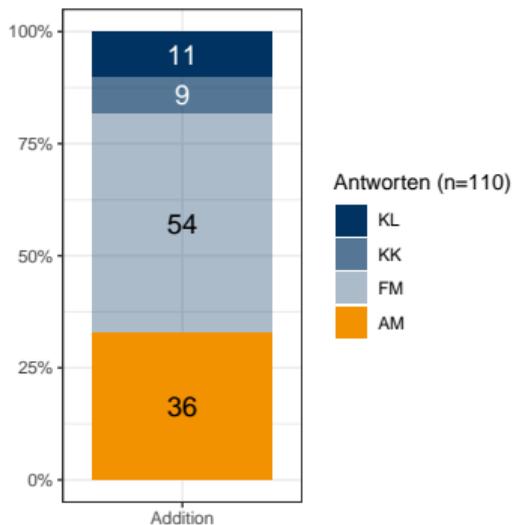


stochastischer

Lösung

# Ergebnisse: Addition

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.



- **AM: Angemessenes Modell**
  - Diskunkte Zerlegung, „+“ verstanden als disjunkte Vereinigung
- **FM: Fehlerhaftes Modell**
  - Zwar stochastischer Kontext, aber fehlerhafte Geschichte
- **KK: Kein stochastischer Kontext**
- **KL: Keine Lösung**

# Angemessenes Modell Addition ( $n = 36, 33\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$  passt.

In einem Sack sind 12 Kugeln. 3 davon sind weiß, 8 sind schwarz und eine ist blau.  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand blind eine weiße oder schwarze Kugel zieht?

Abbildung 4: Person 5, Box 1

# Angemessenes Modell Addition ( $n = 36, 33\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.

In einem Sack sind 12 Kugeln. 3 davon sind weiß, 8 sind schwarz und eine ist blau.  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand blind eine weiße oder schwarze Kugel zieht?

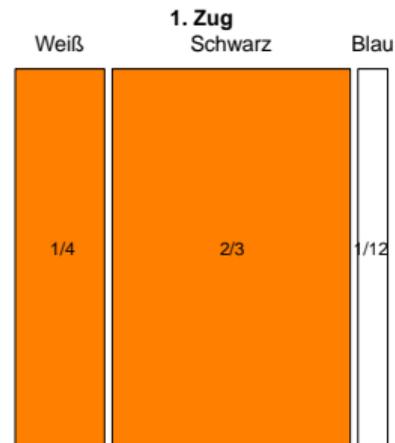
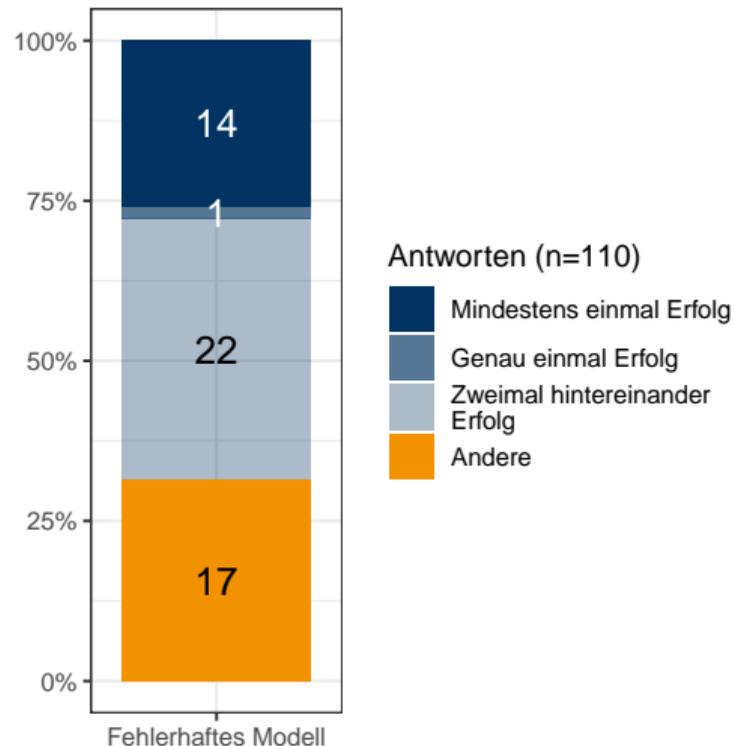


Abbildung 4: Person 5, Box 1

# Fehlerhaftes Modell Addition, weitere Unterteilung

- 54 von 110 (49%) fehlerhaft
- Davon 37+4 (76%) mehrstufiges Zufallsexperiment gewählt



# „Mindestens einmal Erfolg“ ( $n = 14, 26\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.

In einem Sach befinden sich 4 rote und 6 blaue Kugeln 2 grüne  
Sie ziehen (mit Zurücklegen).  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie nach 2  
mal ziehen mindestens eine rote Kugel ziehen

Abbildung 5: Person 33, Box 1

# „Mindestens einmal Erfolg“ ( $n = 14, 26\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.

In einem Sack befinden sich 4 rote und 6 blaue Kugeln 2 grüne  
Sie ziehen (mit Zurücklegen).  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie nach 2  
mal ziehen mindestens eine rote Kugel ziehen

		Zug 1	
		Rot	Nicht rot
Zug 2	Rot	1/9	2/9
	Nicht rot	2/9	4/9

Abbildung 5: Person 33, Box 1

# „Genau einmal Erfolg“ ( $n = 1, 2\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.

Bastian hat ~~10~~<sup>12</sup> Kuchen & ~~10~~<sup>12</sup> Donuts gebacken.

Davon sind ihm ~~3~~ Kuchen & ~~8~~ Donuts nicht gelungen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass entweder ein Kuchen oder ein Donut nicht gelingen.

Abbildung 6: Person 73, Box 1

# „Genau einmal Erfolg“ ( $n = 1, 2\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$  passt.

Bestian hat ~~10~~<sup>12</sup> Kuchen & ~~10~~<sup>12</sup> Donuts gebacken.  
Davon sind ihm ~~3~~ Kuchen & ~~8~~ Donuts nicht gelungen.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass entweder ein Kuchen oder ein Donut nicht gelungen.

Abbildung 6: Person 73, Box 1

		Kuchen	
		Gelungen	Nicht gelungen
Donut	Gelungen	1/4	1/12
	Nicht gelungen	1/2	1/6

# „Zweimal hintereinander Erfolg“ ( $n = 19 + 3, 35\% + 6\% = 41\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.

~~Die Wahrscheinlichkeit für ein Gewinn bei einem Spiel beträgt 25%.  
Beim zweiten Spiel gewinnt ein Spieler im Schnitt 2 von 3 Spielen.  
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit insgesamt zu gewinnen?~~

Du gehst ins Casino und spielst zwei Spiele: Beim ersten Spiel hast du eine Gewinn-Wahrscheinlichkeit von 25%.  
Beim zweiten Spiel gewinnt ein Spieler im Schnitt 2 von 3 Spielen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit insgesamt zu gewinnen.

Abbildung 7: Person 89, Box 1

# „Zweimal hintereinander Erfolg“ ( $n = 19 + 3, 35\% + 6\% = 41\%$ )

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$  passt.

~~Die Wahrscheinlichkeit für ein Gewinn ist  $\frac{1}{3}$  und für eine Niederlage  $\frac{2}{3}$ .  
Beim ersten Spiel hast du eine Gewinn-Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{3}$ .  
Beim zweiten Spiel hast du eine Gewinn-Wahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{3}$ .  
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass du zweimal hintereinander gewinnst?~~

Du gehst ins Casino und spielst zwei Spiele: Beim ersten Spiel hast du eine Gewinn-Wahrscheinlichkeit von 25%.  
Beim zweiten Spiel gewinnt ein Spieler im Schnitt gerade 2 von 3 Spielen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit insgesamt ~~noch~~ zu gewinnen.

Abbildung 7: Person 89, Box 1

		1. Spiel	
		Gewinn	Niederlage
2. Spiel	Gewinn	1/6	1/2
	Niederlage	1/12	1/4

# „Zweimal hintereinander Erfolg“ – Bemerkenswert

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an  
entweder eine 6, 7 oder 8 eines  
12-seitigen Würfels zu würfeln und  
eine 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10 ~~oder~~ oder 11 zu würfeln,  
~~bei~~ mit <sup>anderem</sup> einem 12-seitigen Würfeln. Lösung:

$$\begin{aligned} P(\{6, 7, 8\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11\}) &= \\ P(\{6, 7, 8\}) + P(\{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11\}) &= \frac{3}{12} + \frac{8}{12} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Abbildung 8: Person 89, Box 1

# „Zweimal hintereinander Erfolg“ – Bemerkenswert

Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  passt.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an  
entweder eine 6,7 oder 8 eines  
12-seitigen Würfels zu würfeln und  
eine 1,2,3,4,5, 9, 10 ~~oder~~ oder 11 zu würfeln,  
mit einem <sup>anderen</sup> 12-seitigen Würfeln. Lösung:  

$$P(\{6,7,8\} \cup \{1,2,3,4,5,9,10,11\}) =$$

$$P(\{6,7,8\}) + P(\{1,2,3,4,5,9,10,11\}) = \frac{3}{12} + \frac{8}{12}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$$

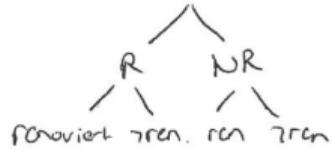
Abbildung 8: Person 89, Box 1

		Würfel 1		
		6,7,8	1-5,9-11	12
Würfel 2	6,7,8	1/16	1/6	1/48
	1-5,9-11	1/6	4/9	1/18
	12	1/48	1/18	1/144

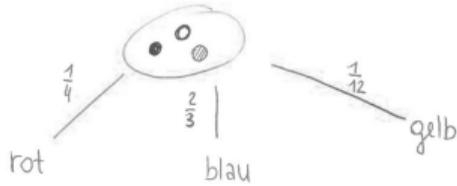
# Erklärungsansätze

- Addition und Multiplikation werden prototypisch an den Pfadregeln im Baumdiagramm „algorithmisch“ gelernt
  - Wenig inhaltliche Vorstellungen
  - Beide Rechenoperationen werden „gleichwertig“ behandelt
- Die Vorstellung der Addition als „Hinzufügen“ ist sehr dominant
  - Hinzufügen von Zufallsexperimenten und nicht – wie sinnvoll – die Vereinigung disjunkter Ereignisse
  - Das Baumdiagramm wird dafür als dominante Darstellungshilfe herangezogen

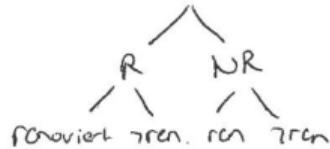
# Vorsichtige Evidenzen für unsere Erklärungsansätze



$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 60 = 15$$
$$\frac{2}{3} = \frac{12}{3} \cdot 60 = 40$$

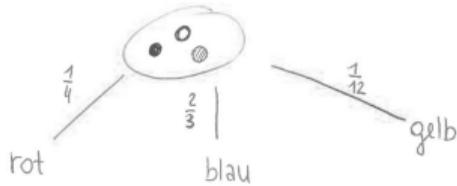


# Vorsichtige Evidenzen für unsere Erklärungsansätze



$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 60 = 15$$

$$\frac{2}{3} = \frac{12}{3} \cdot 60 = 40$$



P\_LD\_N\_Z117: „Was mir als erstes in den Sinn kommt, ist ein Baumdiagramm.“

P\_I2\_N\_Z11: „Das Erste, was mir eigentlich im Kopf gekommen ist, ist die Zeit in der Schule [. . .]. Und dann ist es weiter eigentlich direkt zur Baumdiagramm, das dann so immer im Kopf irgendwie erstellt worden ist.“

P\_I3\_N\_Z83: „Ich war im Kopf bei Wahrscheinlichkeit und dann ist das Baumdiagramm eines der grundlegenden Sachen [. . .]. [. . .] Entlang vom Baumdiagramm hat man genau gesehen, wie die Addition durchgeführt werden muss.“



# Was steht im Lehrplan? (RIS Lehrpläne AHS, 2023)

1. Klasse: **Lösen einfacher Abzählaufgaben**, auch mithilfe von **Baumdiagrammen**

2. Klasse: **Arbeiten mit relativen Anteilen und relativen Häufigkeiten** in zweistufigen, allenfalls dreistufigen Situationen, insbesondere mithilfe von **Baumdiagrammen**.

4. Klasse:

- Darstellen, Ergänzen und Interpretieren von absoluten und relativen Häufigkeiten in Kreuztabellen, insbesondere in **Vierfeldertafeln**.
- Wiederholen und Festigen: **Erstellen** und Interpretieren von **Baumdiagrammen**; Ermitteln und Interpretieren von Laplace-Wahrscheinlichkeiten;
- **Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten** (auch mithilfe von **Baumdiagrammen**); Interpretieren solcher Wahrscheinlichkeiten.

# Was steht im Lehrplan? (RIS Lehrpläne AHS, 2023)

1. Klasse: **Lösen einfacher Abzählaufgaben**, auch mithilfe von **Baumdiagrammen**

2. Klasse: **Arbeiten mit relativen Anteilen und relativen Häufigkeiten** in zweistufigen, allenfalls dreistufigen Situationen, insbesondere mithilfe von **Baumdiagrammen**.

4. Klasse:

- Darstellen, Ergänzen und Interpretieren von absoluten und relativen Häufigkeiten in Kreuztabellen, insbesondere in **Vierfeldertafeln**.
- Wiederholen und Festigen: **Erstellen** und Interpretieren von **Baumdiagrammen**; Ermitteln und Interpretieren von Laplace-Wahrscheinlichkeiten;
- **Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten** (auch mithilfe von **Baumdiagrammen**); Interpretieren solcher Wahrscheinlichkeiten.

6. Klasse: Mit **Wahrscheinlichkeiten rechnen** können (**Baumdiagramme**; **Additions- und Multiplikationsregel**)

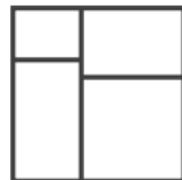
8. Klasse: **Additionsregel und Multiplikationsregel für Wahrscheinlichkeiten anwenden und interpretieren**, Situationen mit Hilfe von **Baumdiagrammen** darstellen und diese Darstellungen interpretieren, den Begriff bedingte Wahrscheinlichkeit kennen und verständlich einsetzen

Anm: „Einheitsquadrat“ kommt explizit nur im Inhaltsbereich Geometrie, nicht aber in der Stochastik vor

# Unsere Vorschläge

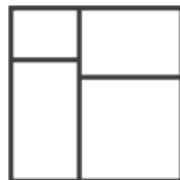
- **Tragfähige Visualisierungen** verwenden:
  - Einheitsquadrat statt Baumdiagramm
    - Addition und Multiplikation kann gut visualisiert werden, Multiplikation knüpft an die Flächeninhaltsvorstellung an
    - Anknüpfungspunkte an Balken- und Streifendiagramme
    - Anknüpfungspunkte an das Rechnen mit und Visualisieren von bedingten Wahrscheinlichkeiten
- **Tragfähige numerische Darstellungen** für Wahrscheinlichkeiten, z.B. natürliche Häufigkeiten, verwenden
- **Sprachbildung im Fachunterricht** (und-oder; mindestens, höchstens, genau einmal [. . . ] Erfolg) ernst nehmen, vor allem in Bezug auf die Vorstellung der Addition als Vereinigung
- **Pfadregeln mit „Sinn“ füllen**, nicht nur algorithmisch lernen . . .

# Unsere Vorschläge

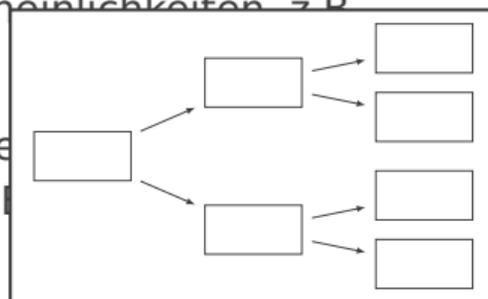


- **Tragfähige Visualisierungen** verwenden:
  - Einheitsquadrat statt Baumdiagramm
    - Addition und Multiplikation kann gut visualisiert werden, Multiplikation knüpft an die Flächeninhaltsvorstellung an
    - Anknüpfungspunkte an Balken- und Streifendiagramme
    - Anknüpfungspunkte an das Rechnen mit und Visualisieren von bedingten Wahrscheinlichkeiten
- **Tragfähige numerische Darstellungen** für Wahrscheinlichkeiten, z.B. natürliche Häufigkeiten, verwenden
- **Sprachbildung im Fachunterricht** (und-oder; mindestens, höchstens, genau einmal [. . . ] Erfolg) ernst nehmen, vor allem in Bezug auf die Vorstellung der Addition als Vereinigung
- **Pfadregeln mit „Sinn“ füllen**, nicht nur algorithmisch lernen . . .

# Unsere Vorschläge



- **Tragfähige Visualisierungen** verwenden:
  - Einheitsquadrat statt Baumdiagramm
    - Addition und Multiplikation kann gut visualisiert werden, Multiplikation knüpft an die Flächeninhaltsvorstellung an
    - Anknüpfungspunkte an Balken- und Streifendiagramme
    - Anknüpfungspunkte an das Rechnen mit und Visualisieren von bedingten Wahrscheinlichkeiten
- **Tragfähige numerische Darstellungen** für Wahrscheinlichkeiten  $z.B.$  natürliche Häufigkeiten, verwenden
- **Sprachbildung im Fachunterricht** (und-oder; mindestens genau einmal [...] Erfolg) ernst nehmen, vor allem in Verbindung mit der Vorstellung der Addition als Vereinigung
- **Pfadregeln mit „Sinn“ füllen**, nicht nur algorithmisch lernen ...



# Diskussionsfragen

- Welche Grundvorstellungen möchte man in Bezug auf Rechenoperationen im Inhaltsbereich Stochastik aktivieren?
- Wie kann das im Unterricht gelingen?
- Alternative Visualisierungen?
- Sprachbildung im Stochastikunterricht: Und, oder, mindestens, genau?

# Literatur

- Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *Mathematik lehren*, 128, 18–21.
- Verordnung des Bundesministers für Bildung, Wissenschaft und Forschung, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der Volksschule und Sonderschulen, die Verordnung über die Lehrpläne für Minderheiten-Volksschulen und für den Unterricht in Minderheitensprachen in Volksschulen in den Bundesländern Burgenland und Kärnten, die Verordnung über die Lehrpläne der Mittelschulen und die Verordnung über die Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen geändert werden; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht, BGBl. II Nr. 1/2023 (2023). <https://www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/II/2023/1/20230102>
- Fischnaller, N. (2021). *Diagnostische Aufgaben im Bereich Stochastik zur Vorbereitung auf die Mathematik-Matura* [Masterarbeit]. Innsbruck.
- Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Waxmann.
- Prediger, S. (2008). Discontinuities for Mental Models - A Source for Difficulties with the Multiplication of Fractions. In D. De Bock, B. D. Søndergaard, B. A. Gómez, & C. L. Cheng (Hrsg.), *Proceedings of ICME-11 – Topic Study Group 10, Research and Development of Number Systems and Arithmetic* (S. 29–37).
- Prediger, S. (2011). Why Johnny Can't Apply Multiplication? Revisiting the Choice of Operations with Fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6(2, 2), 65–88. <https://doi.org/10.29333/iejme/262>
- vom Hofe, R., & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. *Mathematik lehren*, 236, 2–7.