

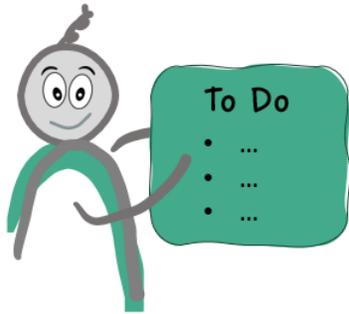


Wahrscheinlich gewinne ich!

Mit einfachen Überlegungen aus der
Wahrscheinlichkeitsrechnung über das
Gewinnen von Spielen nachdenken.

Monika Musilek

Wahrscheinlich gewinne ich!



- Wozu im Mathematikunterricht spielen?
- Welche Spiele eignen sich für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1?
- Wie kann ich Lernende anregen, Spiele mit „mathematischer Brille“ zu betrachten?

Wozu im Mathematikunterricht spielen?



Blaise Pascal
1623 - 1662

Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.

Spiele im Mathematikunterricht nutzen

- Spiele sind unterhaltsam. Sie machen Spaß.
- Spiele fördern motivationale und emotionale Bereitschaft, sich mit einem Lerngegenstand zu befassen.
- Spiele bieten eine Atmosphäre für freies, ungezwungenes und angstfreies Lernen.
- Spiele brauchen Begleitung, um Lernprozesse ertragreich zu gestalten.
- Durch Spiele können **mathematische Prozesse** gefördert werden.

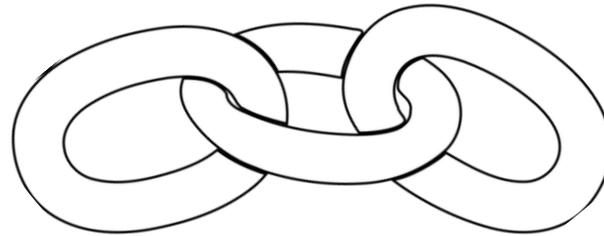
(Huber & Grabher, 2023; Alber et al., 2011; Schukaljow et al., 2023; Skene et al. 2022; Sagmeister et al. 2022)

Mathematikunterricht



Lehrplan 2023

zentrale fachliche
Konzepte



mathematische
Prozesse

Zahlen und Maße

Variablen und Funktionen

Figuren und Körper

Daten und Zufall

Modellieren, Problemlösen

Operieren (Rechnen und Konstruieren)

Darstellen, Interpretieren

Vermuten, Begründen

Anwendungsbereiche (1. bis 4. Klasse):

Präzisierung der Kompetenzbeschreibungen:

Kompetenzbereich Daten und Zufall



Lehrplan 2023

Anlage A zu Art.4

S. 78 - 89

3. Klasse

Die Schülerinnen und Schüler können aufbauend auf einem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff Wahrscheinlichkeiten in einfachen Zufallsexperimenten ermitteln, vergleichen und interpretieren.

- Verwenden eines intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs zur Quantifizierung von Sicherheit
- Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe empirisch gewonnener relativer Häufigkeiten
- Ermitteln von Laplace-Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten (z.B. Münzwurf, Würfeln); Interpretieren solcher Wahrscheinlichkeiten als Vorhersagewert für relative Häufigkeiten

4. Klasse

Die Schülerinnen und Schüler können Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten ermitteln und interpretieren.

- Wiederholen und Festigen: Erstellen und Interpretieren von Baumdiagrammen; Ermitteln und Interpretieren von Laplace-Wahrscheinlichkeiten
- Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten (auch mit Hilfe von Baumdiagrammen); Interpretieren solcher Wahrscheinlichkeiten

Spiele im Mathematikunterricht nutzen

Anforderungen

- Spielregeln, die leicht verständlich und eindeutig sind,
- Spielutensilien, die einfach zu beschaffen und zu handhaben sind,
- eine häufige Wiederholbarkeit eines Spiels,
- Variabilitätsmöglichkeiten der Spiel- und Gewinnregeln,
- eine angemessene Spieldauer.

(Käpnick 2014, S. 185)

Point of View



SuS 3. Klasse
Sekundarstufe 1

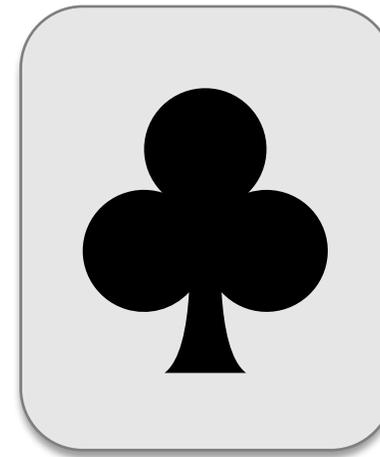
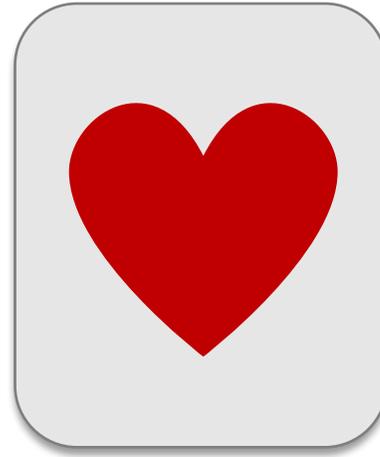
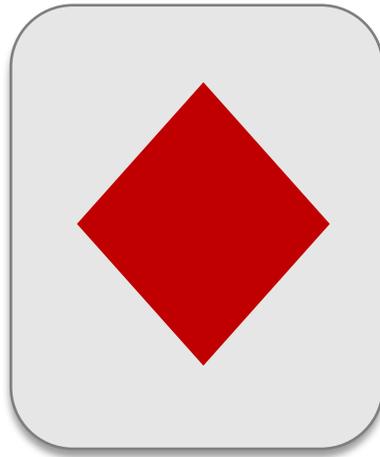


Nur ein kleines Kartenspiel





Wähle
für alle im Hörsaal
eine Farbe.



Zieh eine beliebige Karte aus dem Kartendeck.
Stimmt die Farbe der gezogenen Karte mit der
gewählten Farbe überein?



+ 1 Punkt für



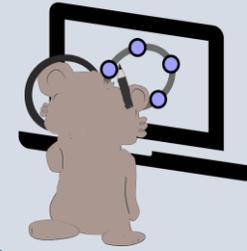
+ 1 Punkt für



Wer zuerst 10 Punkte hat, gewinnt.



<https://www.geogebra.org/m/du43dunt>

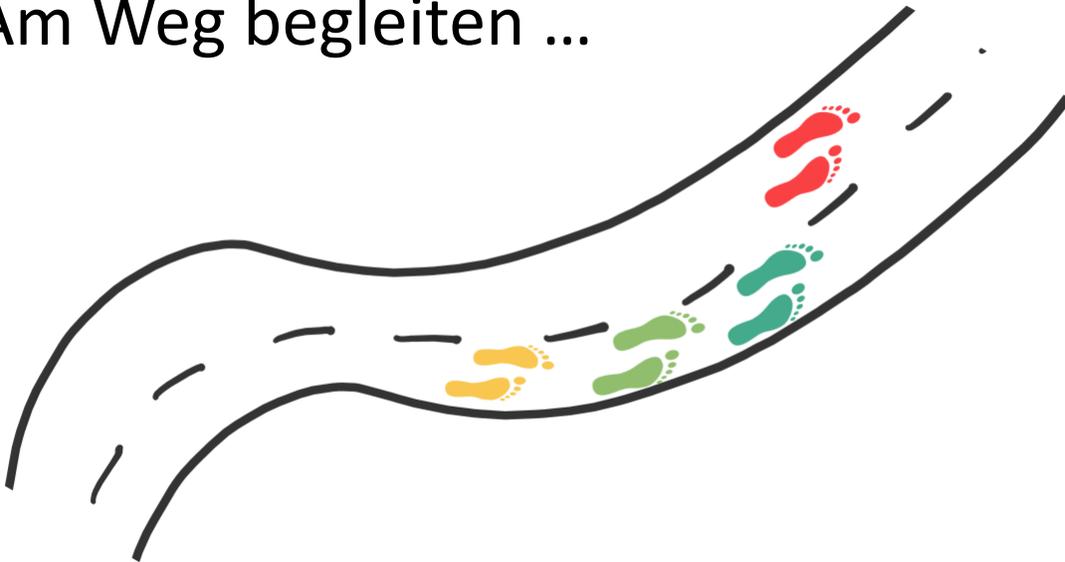


Wahrscheinlich gewinne ich ...
Nur ein kleines Kartenspiel



Wahrscheinlich gewinne ich ...

Am Weg begleiten ...



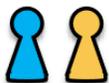
- 1 spielen
- 2 Daten sammeln
- 3 analysieren



So wird gespielt



1 Kartendeck mit 52 Karten



Bestimmt wer  und wer  ist.

Mischt die Karten und legt sie verdeckt auf einen Stapel.



darf eine Farbe wählen:

Karo	Herz	Treff	Pik
			

Spielt abwechselnd.

Bist du an der Reihe, dann darfst du eine Karte aus dem Kartendeck ziehen.

Stimmt die gewählte Farbe mit der gezogenen Karte überein, bekommt  einen Punkt,

sonst .

Wer zuerst 10 Punkte hat, gewinnt das Spiel!



**Wahrscheinlich finde ich heraus, ob das Spiel
Nur ein kleines Kartenspiel
fair ist.**

Wann ist ein Spiel fair?

Ist das Spiel „Nur ein kleines Kartenspiel“ fair?

Überprüft eure Vermutung, indem ihr z.B. einige Spiele systematisch untersucht. Diskutiert in der Gruppe.



Der „mathematische“ Blick

Aufgabe 1:

Wann ist ein Spiel „fair“?

Findet eine Definition!

Aufgabe 2

Spielt das Spiel mehrere Male.

Wie oft bekommt  in einer Runde einen Punkt? Wie oft .

Überlegt euch, wie ihr eure Spielverläufe aufschreiben könnt.

Könnt ihr mit Hilfe eurer Untersuchungsergebnissen feststellen, ob das Spiel „fair“ ist?

Aufgabe 3

Wie ist das Kartendeck aufgebaut?

Wie viele Karten von welcher Farbe gibt es?

In wie vielen Fällen bekommt  einen Punkt?

In wie vielen Fällen bekommt  einen Punkt?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt  einen Punkt?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit  ?

Aufgabe 4

Wie muss man die Spielregeln verändern, dass „nur ein kleines Kartenspiel“ fair ist?



Lösungsskizzen

Aufgabe 1:

Ein Spiel ist fair, wenn es für alle Mitspieler...

Aufgabe 2

Es werden für die Untersuchung nur noch... Ziehen einer einzigen Karte passiert.

	Anzahl der Punkte	ab...
		
		

n kann aufgrund dieser Tabelle erst dann für... viele Spielverläufe dokumentiert.

Aufgabe 3

Das Kartendeck besteht aus 4 Farben (Karo, Herz, Treff, Pik).
Wie viele Karten gibt es daher?

Wie oft bekommt eine bestimmte Farbe...

Wie oft bekommt in 13 Fällen einen Punkt...

Wie oft bekommt in allen anderen Fällen einen Punkt...

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass  einen Punkt bekommt...

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass  einen Punkt bekommt...

Wie oft wählt entweder ROT oder SCHWARZ...

Aufgabe 1:

Wann ist ein Spiel „fair“?
Findet eine Definition!

Aufgabe 2

Spielt das Spiel mehrere Male.

Wie oft bekommt  in einer Runde einen Punkt? Wie oft ?

Überlegt euch, wie ihr eure Spielverläufe aufschreiben könnt.

Könnt ihr mit Hilfe eurer Untersuchungsergebnisse feststellen, ob das Spiel „fair“ ist?

Aufgabe 3

Wie ist das Kartendeck aufgebaut?
Wie viele Karten von welcher Farbe gibt es?

In wie vielen Fällen bekommt  einen Punkt?

In wie vielen Fällen bekommt  einen Punkt?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt  einen Punkt?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ?

Aufgabe 4

Wie muss man die Spielregeln verändern, dass „nur ein kleines Kartenspiel“ fair ist?

Aus der Lebenswelt stammende Definitionen
„mathematischer“ formulieren

Darstellen: Tabelle, Strichliste, ...
Operieren: relative Häufigkeiten bestimmen

Argumentieren: Mit Hilfe der gewonnenen Daten
Begründungen liefern

Wahrscheinlichkeiten berechnen: Laplace

Argumentieren: Variation (er-)finden und untersuchen

Point of View



SuS 4. Klasse
Sekundarstufe 1

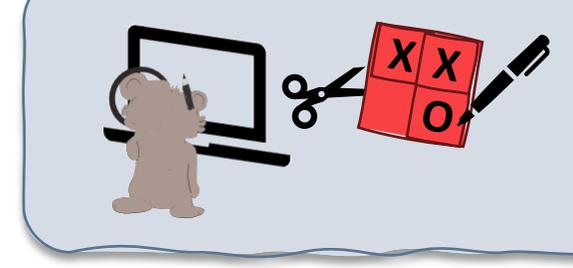


Noch ein Kartenspiel





3 Karten mit
Vorder- und Rückseite



Wahrscheinlich gewinne ich ...
mit einer Gewinnstrategie

Bist du an der Reihe, mische alle 3 Karten.

Zieh eine Karte blind und lege sie (ohne auf die Rückseite zu schauen) auf den Tisch.

Welches Symbol ist auf der anderen Seite? (Prognostiziere!)

+ 1 Punkt für jede richtige Prognose!

Wer zuerst 10 Punkte hat, gewinnt.





Wahrscheinlich gewinne ich ... mit einer Gewinnstrategie

Am Weg begleiten ...



- 1 spielen
- 2 Daten sammeln
- 3 analysieren



Wahrscheinlich gewinne ich ... mit einer Gewinnstrategie

Am Weg begleiten ...



Gibt es eine Gewinnstrategie?

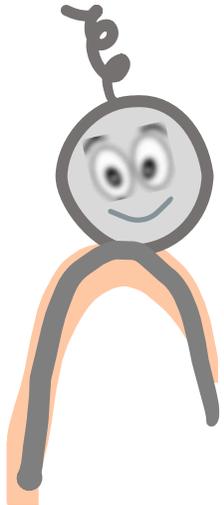
Wie kann ich überprüfen,
ob eine Strategie „gut“ ist?

Gewinne ich **immer**, wenn ich
eine bestimmte Strategie
wähle?

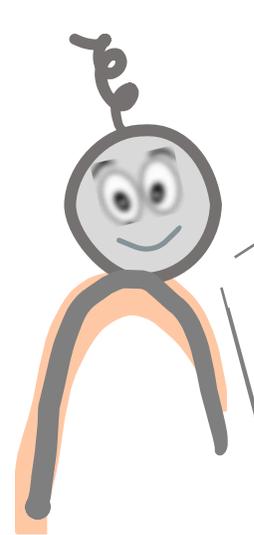




Wahrscheinlich gewinne ich ...
mit einer Gewinnstrategie



Ich prognostiziere immer genau
das Symbol, das ich sehe!



Ich sehe!



Wahrscheinlich gewinne ich ...
mit einer Gewinnstrategie



Ich sage!

X

O

X

X

O

O



Meine Punkte

0

0

1

1

1

1

In 4 von 6 Fällen liege ich richtig!

Point of View



SuS 4. Klasse
Sekundarstufe 1



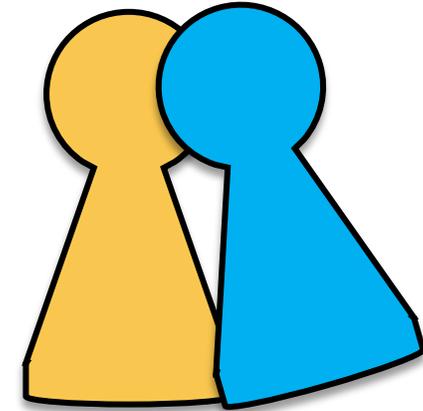
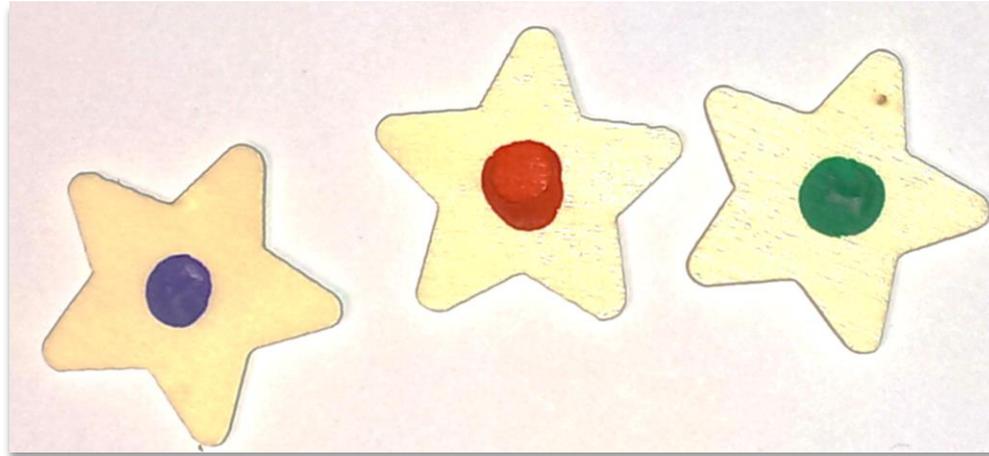
Sieg der Sterne



Sieg der Sterne



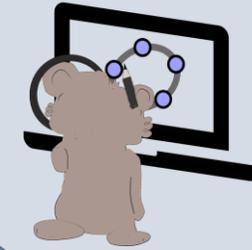
3 Sterne (Scheiben) mit Kennzeichnungen





Sieg der Sterne

<https://www.geogebra.org/m/zm29gsja>



Bestimmt, wer  und wer  ist.

Spielt abwechselnd.

Bist du an der Reihe, wirf alle 3 Sterne gleichzeitig.

So wird gewertet:

 bekommt 1 Punkt, wenn 2 gleiche Farben zu sehen sind.

 erhält in allen anderen Fällen einen Punkt.

Wer zuerst 20 Punkte hat, gewinnt das Spiel!

Vorderseite	Rückseite
	
	
	



Wahrscheinlich gewinne ich ...
Sieg der Sterne



Wahrscheinlich gewinne ich ...

Sieg der Sterne

Am Weg begleiten ...



- 1 spielen
- 2 Daten sammeln
- 3 analysieren



Wahrscheinlich gewinne ich ...

Sieg der Sterne

Am Weg begleiten ...



Gibt es eine Gewinnstrategie?

Wie kann ich alle möglichen
Spielverläufe darstellen?

Ist das Spiel fair?

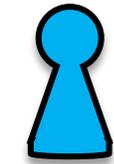


Vorderseite	Rückseite
	
	
	

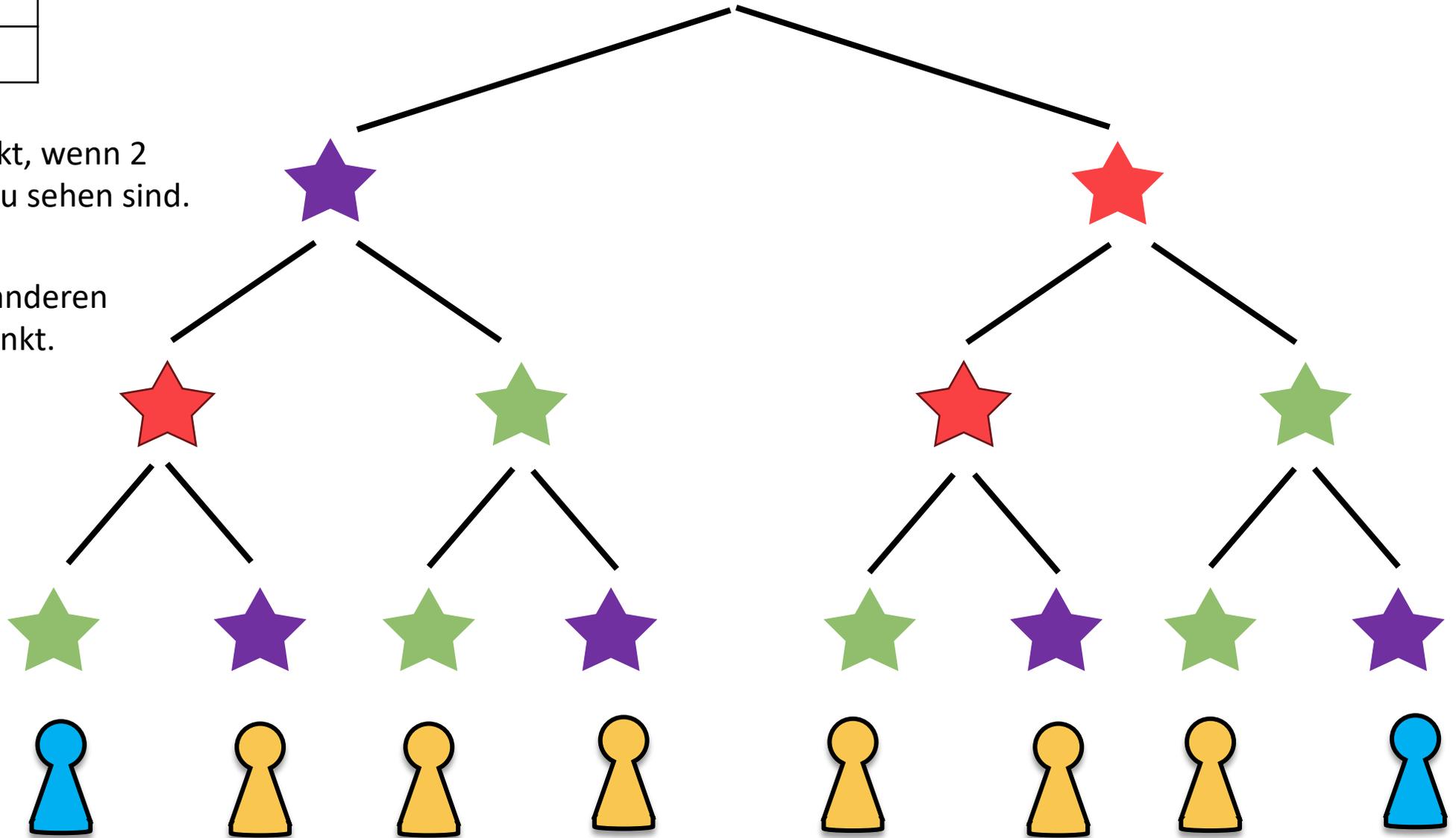
Wie kann ich alle möglichen Spielverläufe darstellen?



bekommt 1 Punkt, wenn 2 gleiche Farben zu sehen sind.



erhält in allen anderen Fällen einen Punkt.

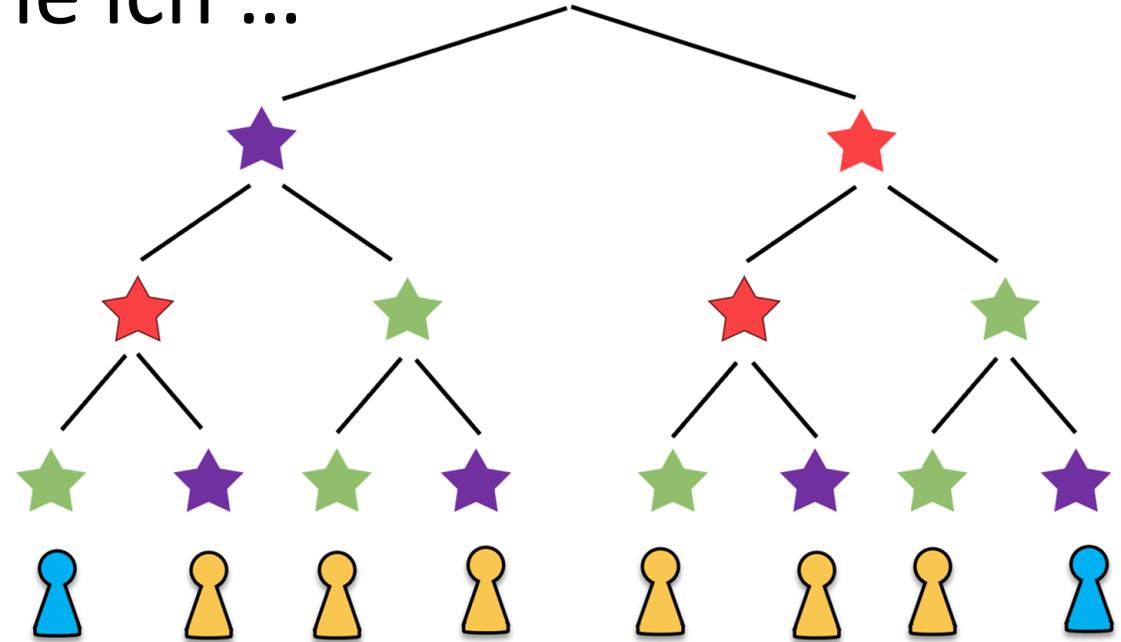




Wahrscheinlich gewinne ich ...

Sieg der Sterne

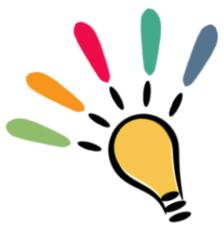
Ist das Spiel fair?



bekommt in 6 Fällen einen Punkt



bekommt in 2 Fällen einen Punkt

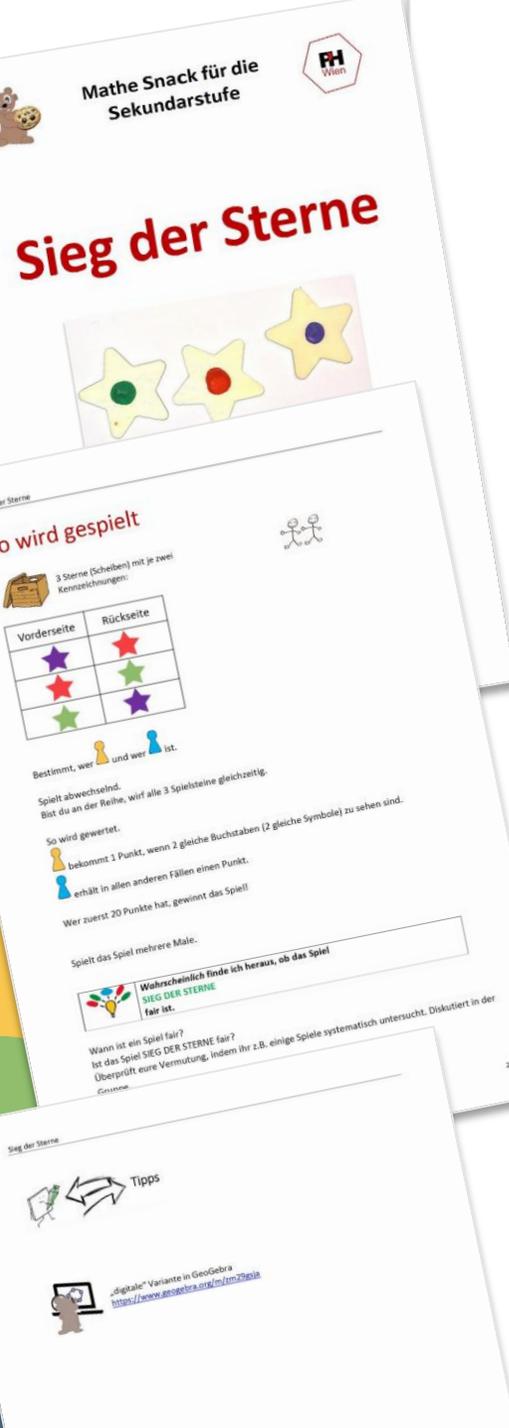


Wahrscheinlich gewinne ich ...

Sieg der Sterne

Am Weg begleiten ...





Der „mathematische“ Blick

Aufgabe 1:

Wann ist ein Spiel „fair“?
Findet eine Definition!

Aufgabe 2

Dokumentiert eure Spielverläufe:

Wie oft bekommt bei einem Spiel einen Punkt? Wie oft ?

Überlegt euch, wie ihr eure Spielverläufe in einer Tabelle aufschreiben könnt. Tragt eure Untersuchungsergebnisse in diese Tabelle ein.

Könnt ihr aus euren Untersuchungsergebnissen feststellen, ob das Spiel „fair“ ist?

Aufgabe 3

Wie viele verschiedenen Wurfresultate gibt es?

Versucht alle möglichen Wurfresultate aufzuschreiben. Ergänzt, ob oder einen Punkt in jedem dieser Fälle bekommt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt einen Punkt?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ?

Lösungsskizzen

Aufgabe 1:

Ein Spiel ist fair, wenn es für alle Mitspielenden dieselbe Gewinnwahrscheinlichkeit gibt.

Aufgabe 2

	Anzahl der Punkte (Strichliste)	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit

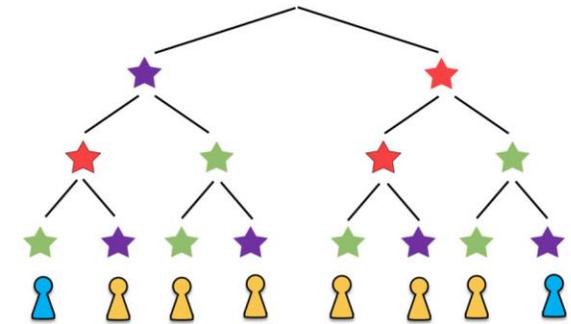
Man kann erst dann feststellen, ob das Spiel fair ist, wenn man sehr, sehr viele Spielverläufe dokumentiert.

Aufgabe 3

Wie viele verschiedenen Wurfresultate gibt es? Es gibt $2^3 = 8$ mögliche Wurfresultate.

Versucht alle möglichen Wurfresultate aufzuschreiben. Ergänzt, ob oder einen Punkt in jedem dieser Fälle bekommt.

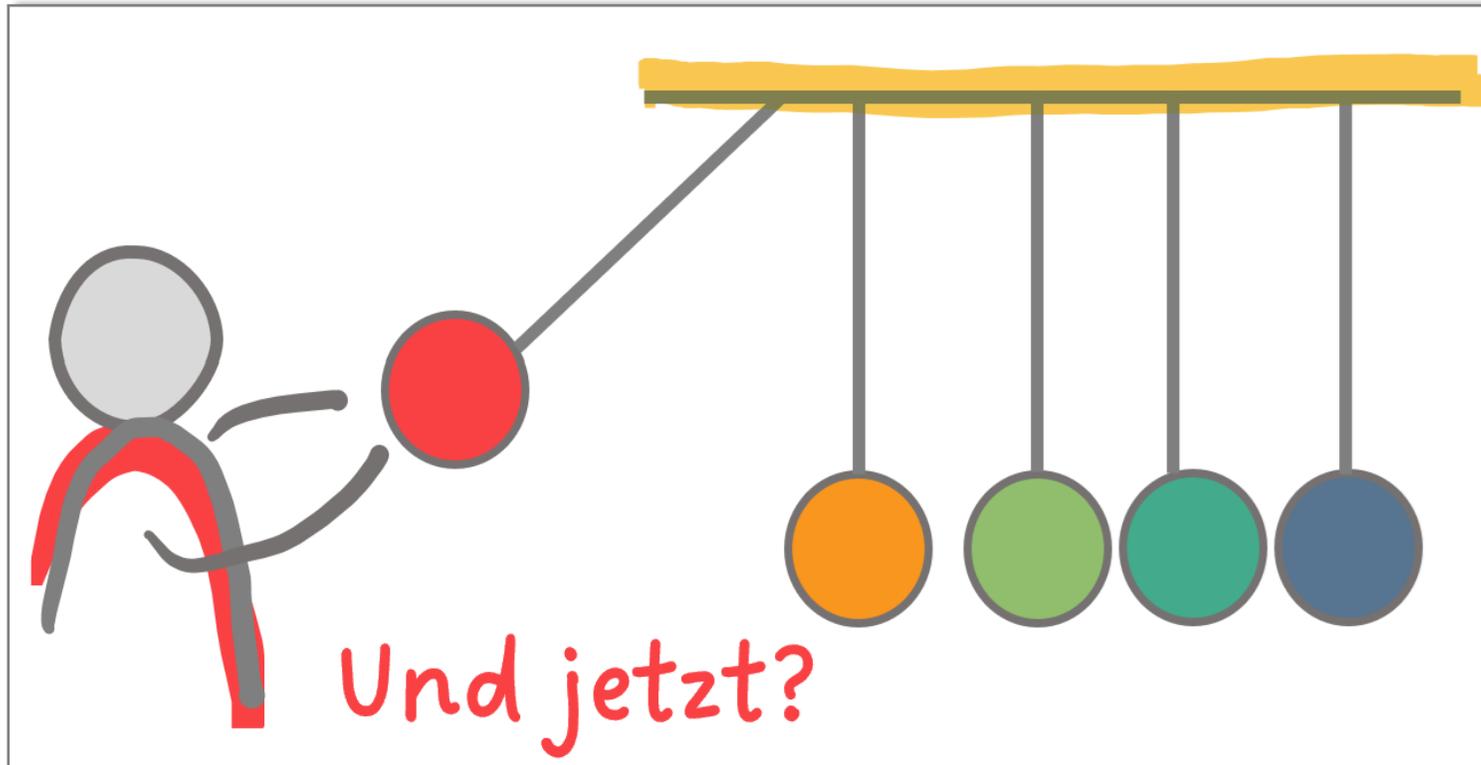
Baumdiagramm:

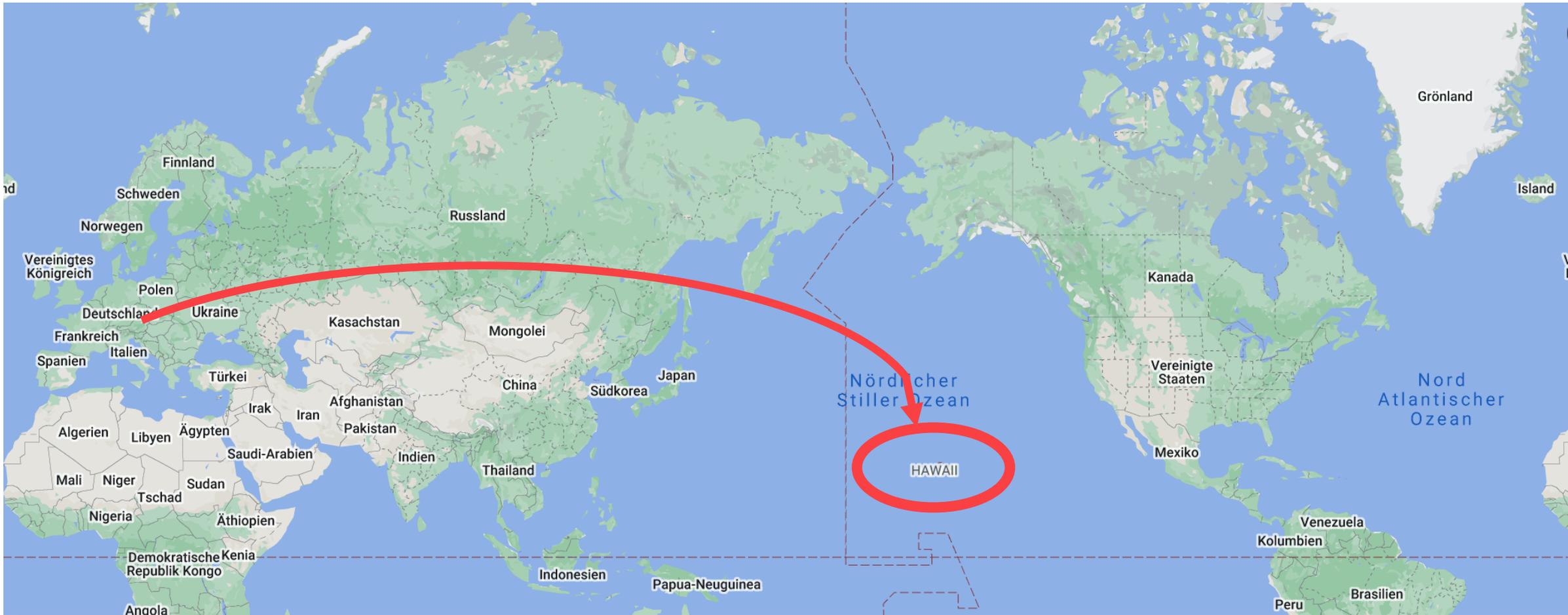


Für sind 6 günstig, für nur 2.

Gewinnwahrscheinlichkeiten: : $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 75\%$

: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$





Point of View



SuS 3. Klasse
Sekundarstufe 1



LuLu

ein Spiel aus Hawaii



LuLu

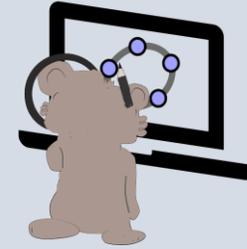


4 Scheiben mit 1, 2, 3 und 4 Punkten auf einer Seite





LuLu



Spielt reihum.

Bist du an der Reihe, wirfst du alle 4 LuLu-Steine gleichzeitig.

Du darfst dir so viele Punkte aufschreiben, wie die Steine zeigen.

Wer zuerst 50 Punkte hat, hat gewonnen!



Wahrscheinlich finde ich heraus, welche Mathematik im Spiel **LuLu** steckt ...



Wahrscheinlich finde ich heraus, welche Mathematik im Spiel **LuLu** steckt ...

- Habt ihr eine Vermutung, welche Punkte-Anzahlen häufiger auftreten als andere?
- Wie oft muss man im Schnitt werfen, um 50 Punkte zu erreichen?
- Überprüft eure Vermutung, indem ihr z.B. einige Spiele systematisch untersucht. Diskutiert in der Gruppe.

Vokabelliste

Lulu	schütteln
Hu-li la-lo	4 „leere“ Steine
Hu-ka-hi hu-i i-lu-na	1 Stein mit Punktmuster nach oben
E-lu-a hu-li i-lu-na	2 Steine mit Punktmuster nach oben
E-ko-lu hu-li i-lu-na	3 Steine mit Punktmuster nach oben
E-ha hu-li i-lu-na	alle 4 Steine mit Punktmuster nach oben



Wahrscheinlich gewinnen Sie!

Mit einfachen Überlegungen aus der
Wahrscheinlichkeitsrechnung über das
Gewinnen von Spielen nachdenken.

Literatur

Alber, E.; Fischer, C.; Fritz, I.; Heiner, J.; Kröpfl B.; Makl-Freund, B. & Strauss, M. (2011): Projekt Mathematische Bildung P[MB: 5-8]. PH Tirol.

Huber, E. & Grabher, J. (2023): Spielen im Mathematikunterricht. In F&E Edition, 29, S. 76 – 87.

Käpnick, F. (2014). Lernspiele im Grundschulmathematikunterricht. In Mathematiklernen in der Grundschule. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 175 – 186.

Sagmeister, G., Hirth, T. & Musilek, M. (2022). Teacher Training is the key : ... and always will be. *R&E-SOURCE*, (S22). <https://doi.org/10.53349/resource.2022.iS22.a1027>

Schukajlow, S., Rakoczy, K. & Pekrun, R. (2023). Emotions and motivation in mathematics education: Where we are today and where we need to go. *ZDM Mathematics Education* 55, S. 249–267.

<https://doi.org/10.1007/s11858-022-01463-2>

Skene, K., O'Farrelly, C. M., Byrne, E. M., Kirby, N., Stevens, E. C., & Ramchandani, P. G. (2022). Can guidance during play enhance children's learning and development in educational contexts? A systematic review and meta-analysis. In *Child Development*, 93, S. 1162–1180.

<https://doi.org/10.1111/cdev.13730>