

Klimamodelle für den Mathematikunterricht

Franz Embacher

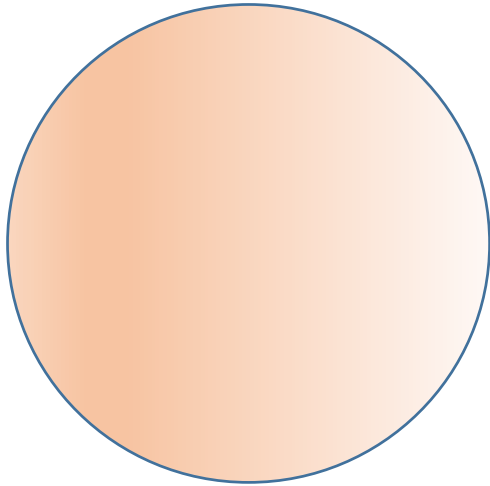
Universität Wien | Fachhochschule Technikum Wien

Fortbildungstagung für Lehrkräfte
der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
Universität Wien, 5.4.2024

Physikalische Konzepte

- Elektromagnetische Strahlung
- Sichtbares Licht und UV-Strahlung
- Wärmestrahlung (IR-Strahlung)
- (Wiensches Verschiebungsgesetz)
- Absorption und Emission
- Stefan-Boltzmannsches Strahlungsgesetz
- Leistung = Energie/Zeit

Idealisierungen

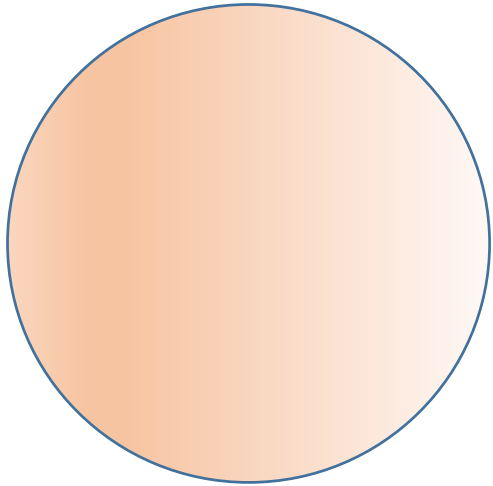


- Alle auftretenden physikalischen Größen sind über Oberfläche und Zeit gemittelt,
- es werden keine horizontalen Energieflüsse (Winde, Meeresströmungen) berücksichtigt,
- es wird kein Unterschied zwischen Klimazonen gemacht,
- ...

1. Kapitel

Planet ohne Atmosphäre

Bare planet

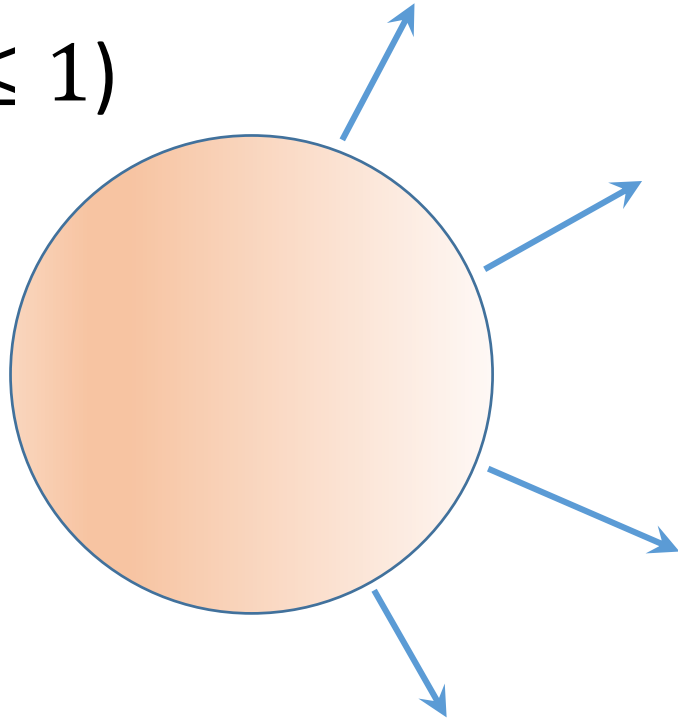


Solarkonstante S (W/m^2)



Bare planet

Albedo α
($0 < \alpha \leq 1$)

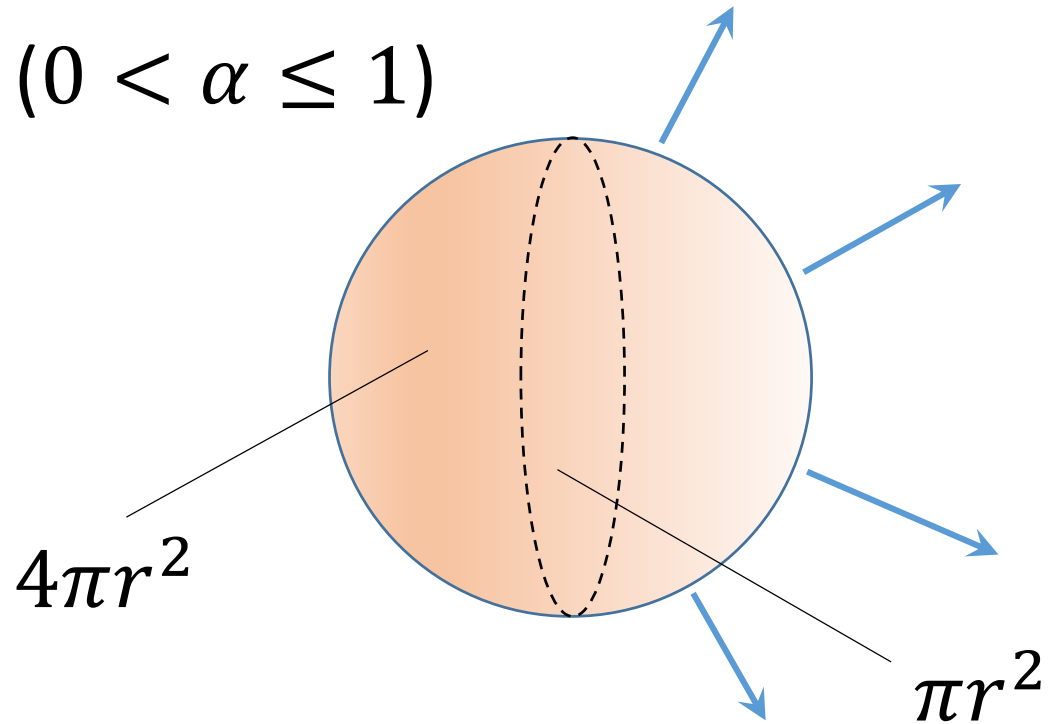


Solarkonstante S (W/m^2)



Bare planet

Albedo α
($0 < \alpha \leq 1$)

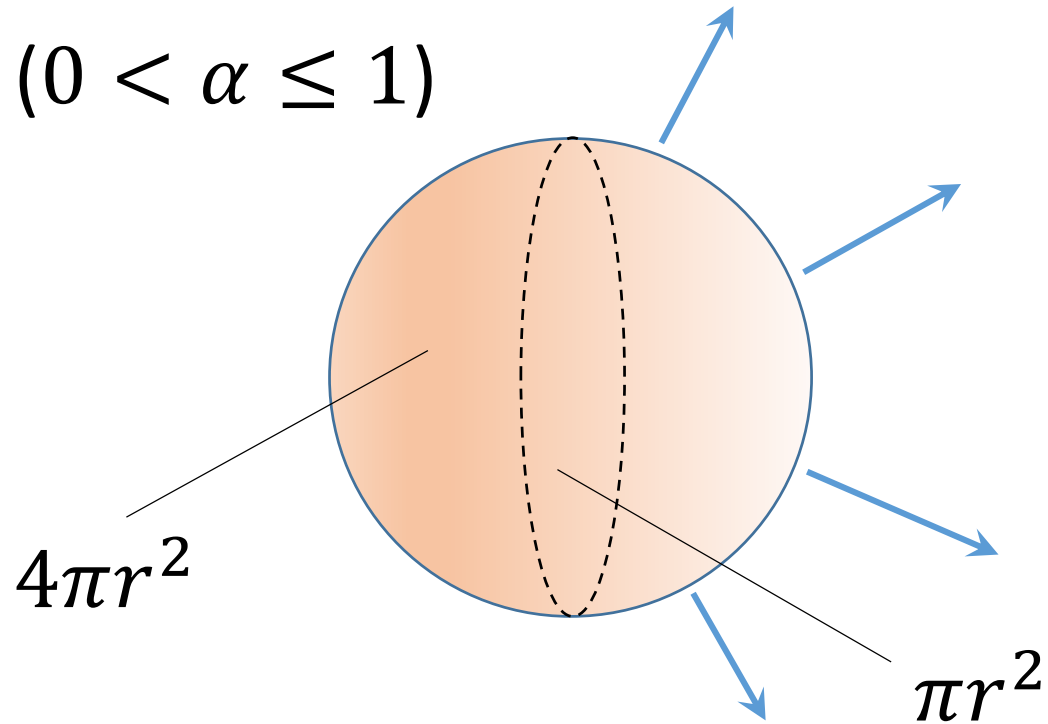


Solarkonstante S (W/m^2)



Bare planet

Albedo α
($0 < \alpha \leq 1$)

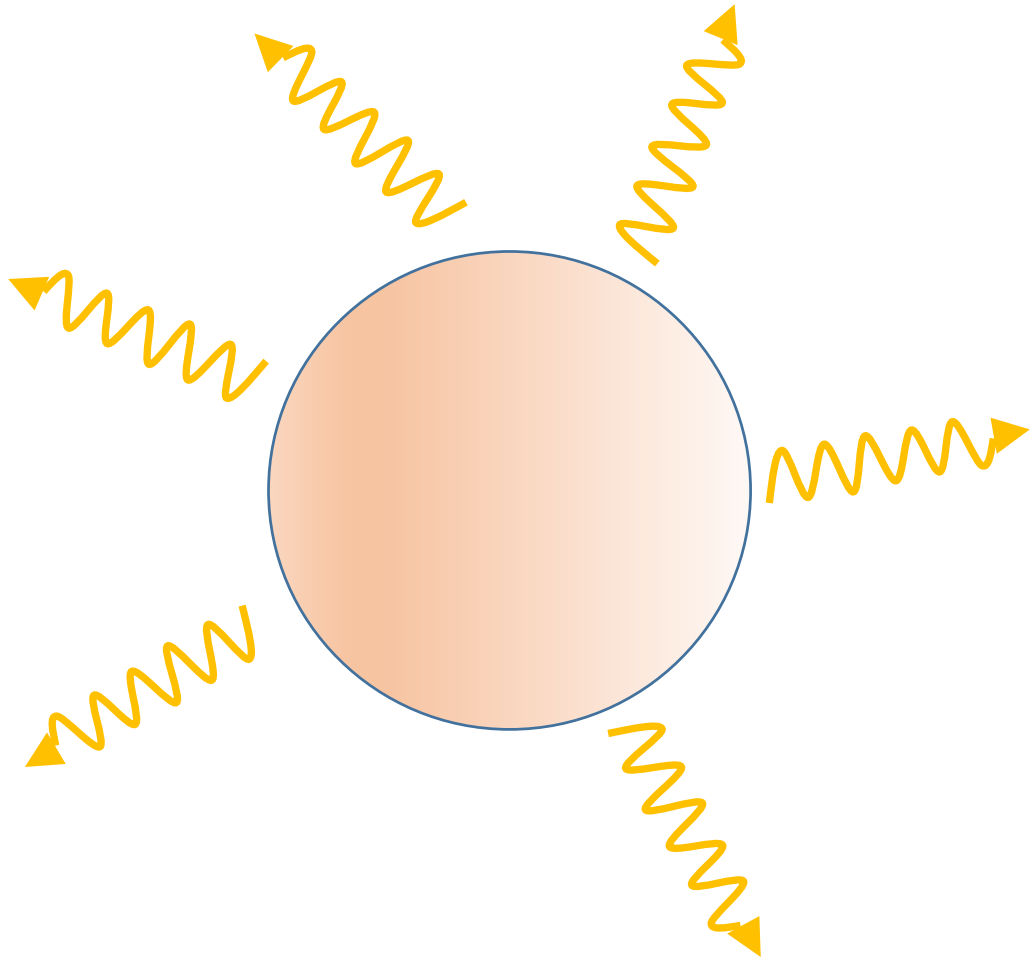


Solarkonstante S (W/m^2)

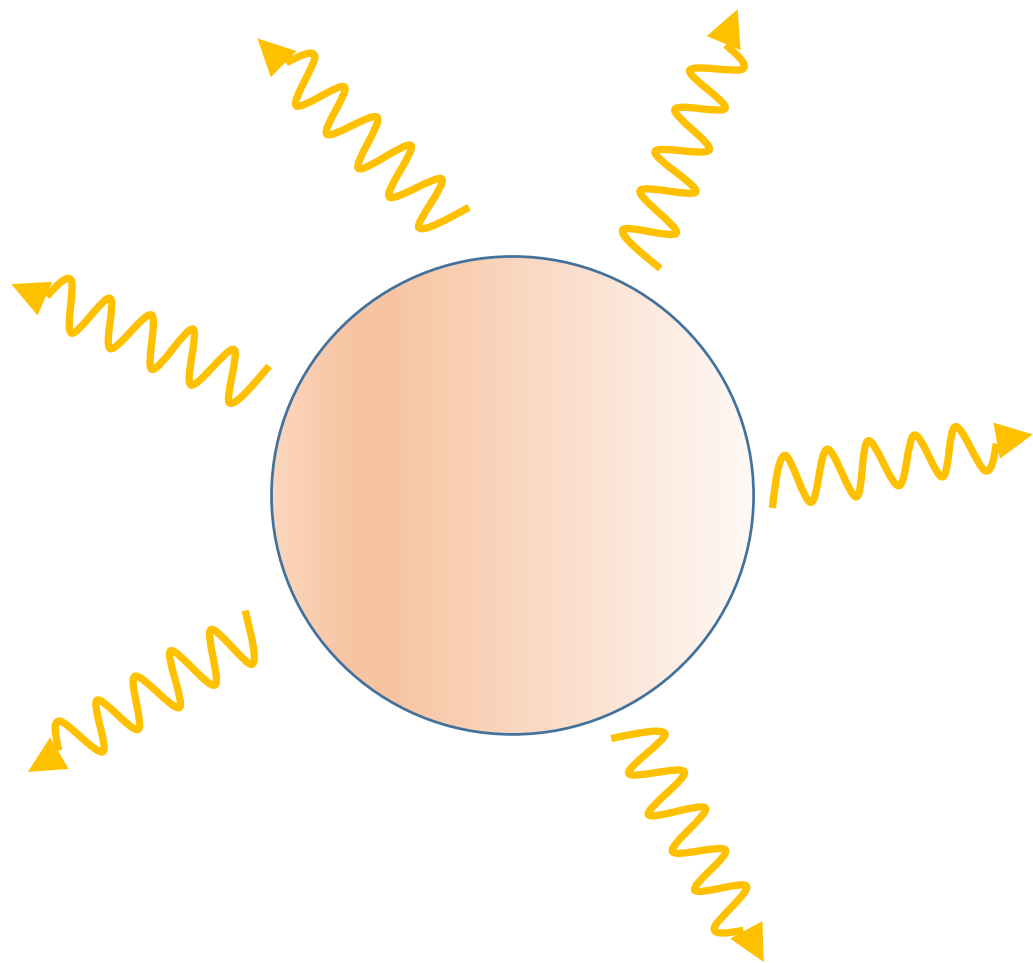


$$\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S$$

Bare planet



Bare planet



Stefan-Boltzmannsches
Strahlungsgesetz:

Strahlungsleistung pro Fläche:

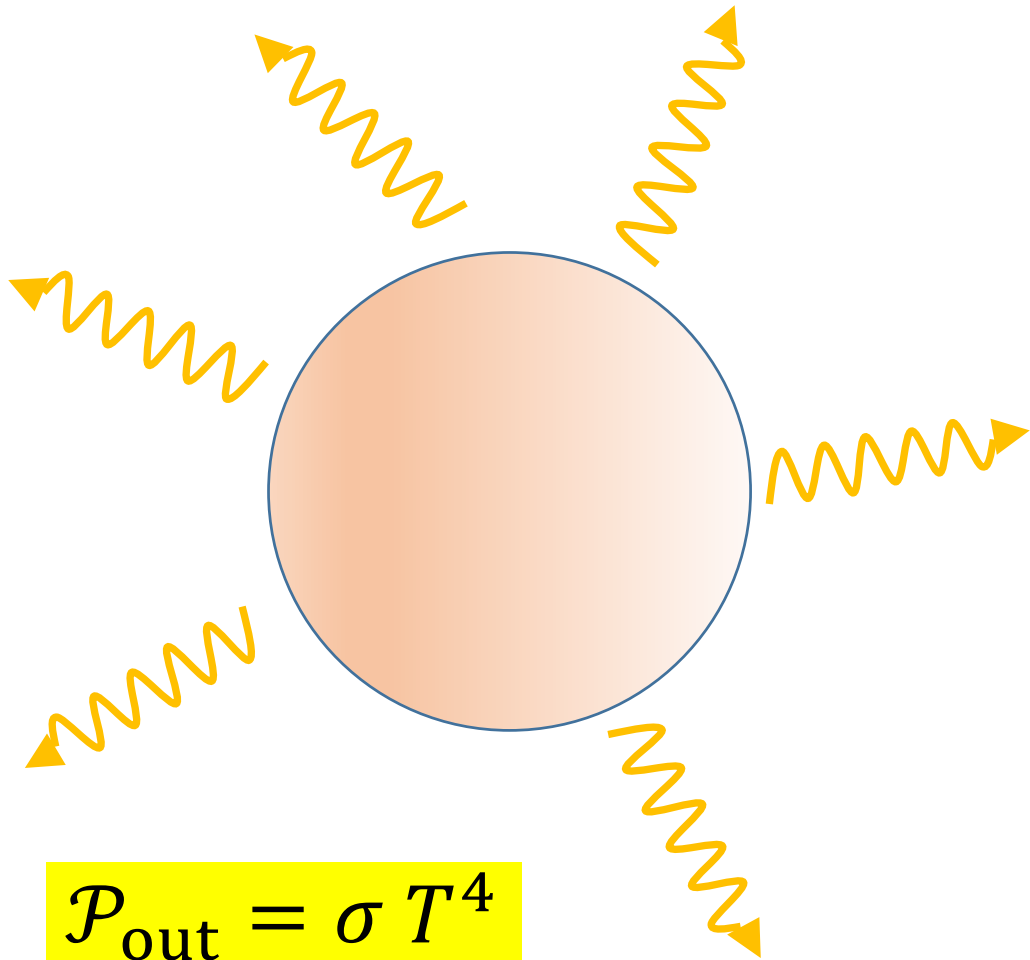
$$\mathcal{P} = \sigma T^4$$

bzw.

$$\mathcal{P} = \varepsilon \sigma T^4$$

mit $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$.

Bare planet



Stefan-Boltzmannsches
Strahlungsgesetz:

Strahlungsleistung pro Fläche:

$$\mathcal{P} = \sigma T^4$$

bzw.

$$\mathcal{P} = \varepsilon \sigma T^4$$

mit $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$.

Bare planet

Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{1}{4} (1 - \alpha) S = \sigma T^4$$

Bare planet

Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{1}{4} (1 - \alpha) S = \sigma T^4$$

Für den **Merkur** ist $S = 10^4 \frac{W}{m^2}$ und $\alpha = 0.1$

$$\Rightarrow T = 446 \text{ K} = 173^\circ\text{C} \quad \dots \text{passt!}$$

Bare planet

Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{1}{4} (1 - \alpha) S = \sigma T^4$$

Für den **Merkur** ist $S = 10^4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ und $\alpha = 0.1$

$$\Rightarrow T = 446 \text{ K} = 173^\circ\text{C} \quad \dots \text{passt!}$$

Für die **Erde** ist $S = 1361 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ und $\alpha = 0.3$

$$\Rightarrow T = 255 \text{ K} = -19^\circ\text{C} \quad \dots \text{zu kalt!}$$

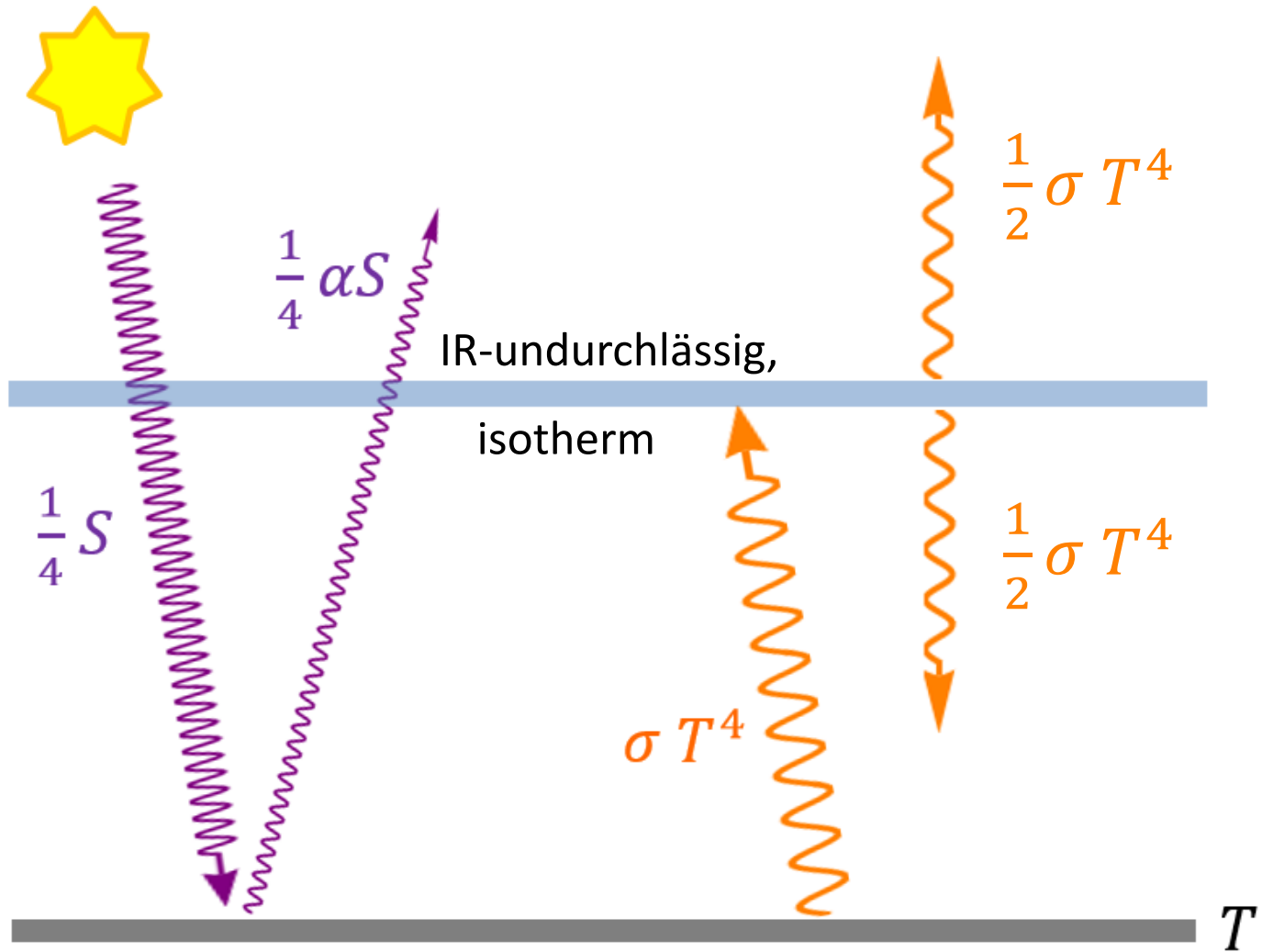
2. Kapitel

Atmosphärischer Treibhauseffekt (einige einfache Klimamodelle)

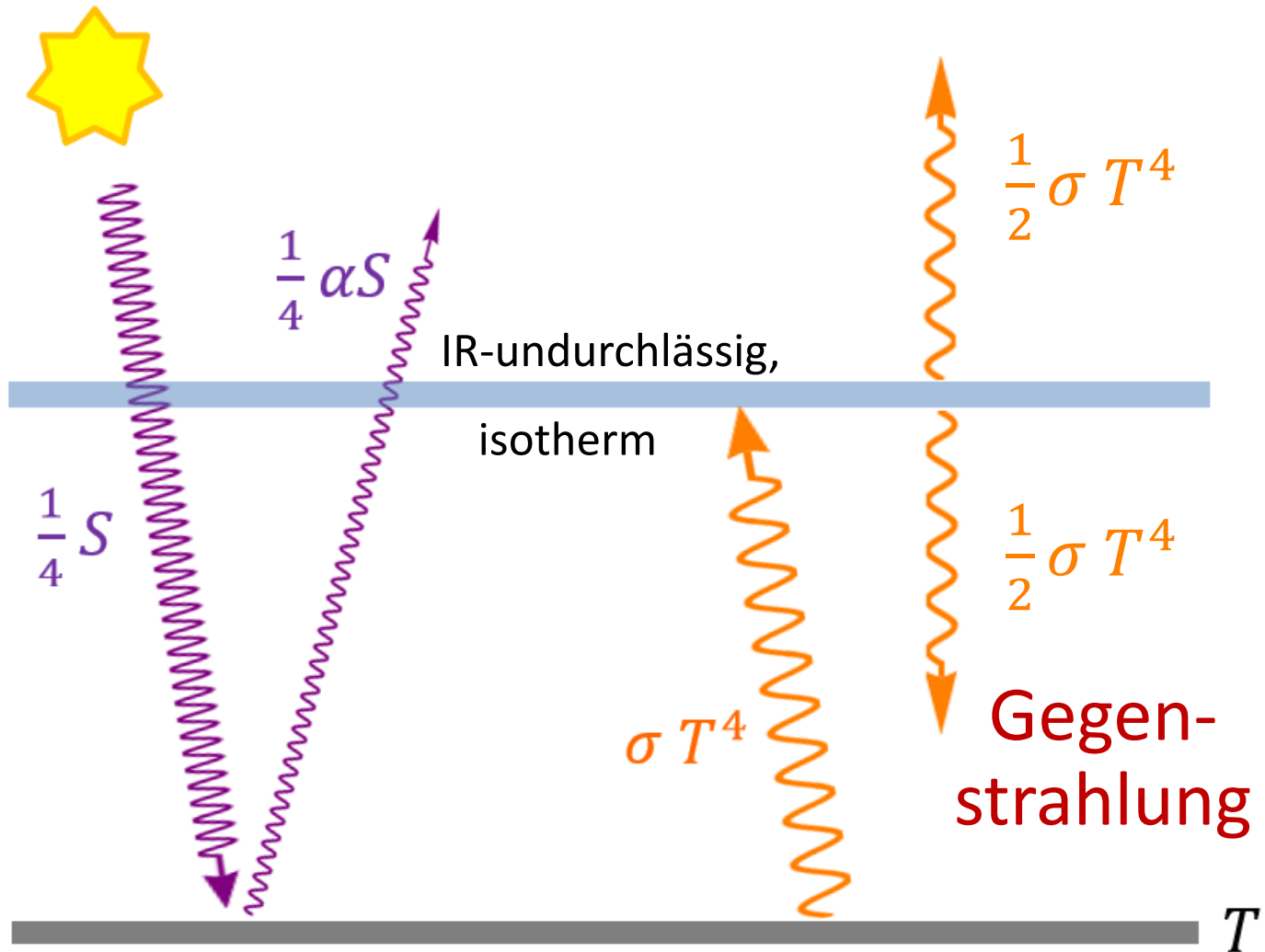
Atmosphäre mit Treibhausgasen

- Die mittlere Oberflächentemperatur der Erde ist größer als -19°C , weil die Erde eine Atmosphäre besitzt, die **Treibhausgase** enthält.
[Joseph Fourier (1827), Eunice Foote (1857), John Tyndall (1861), Svante Arrhenius (1896)]
- Die Treibhausgase der Erdatmosphäre (vor allem Wasserdampf, Kohlendioxid, Methan, Lachgas und Fluorchlorkohlenwasserstoffe) **absorbieren und emittieren Wärmestrahlung** (IR-Strahlung).

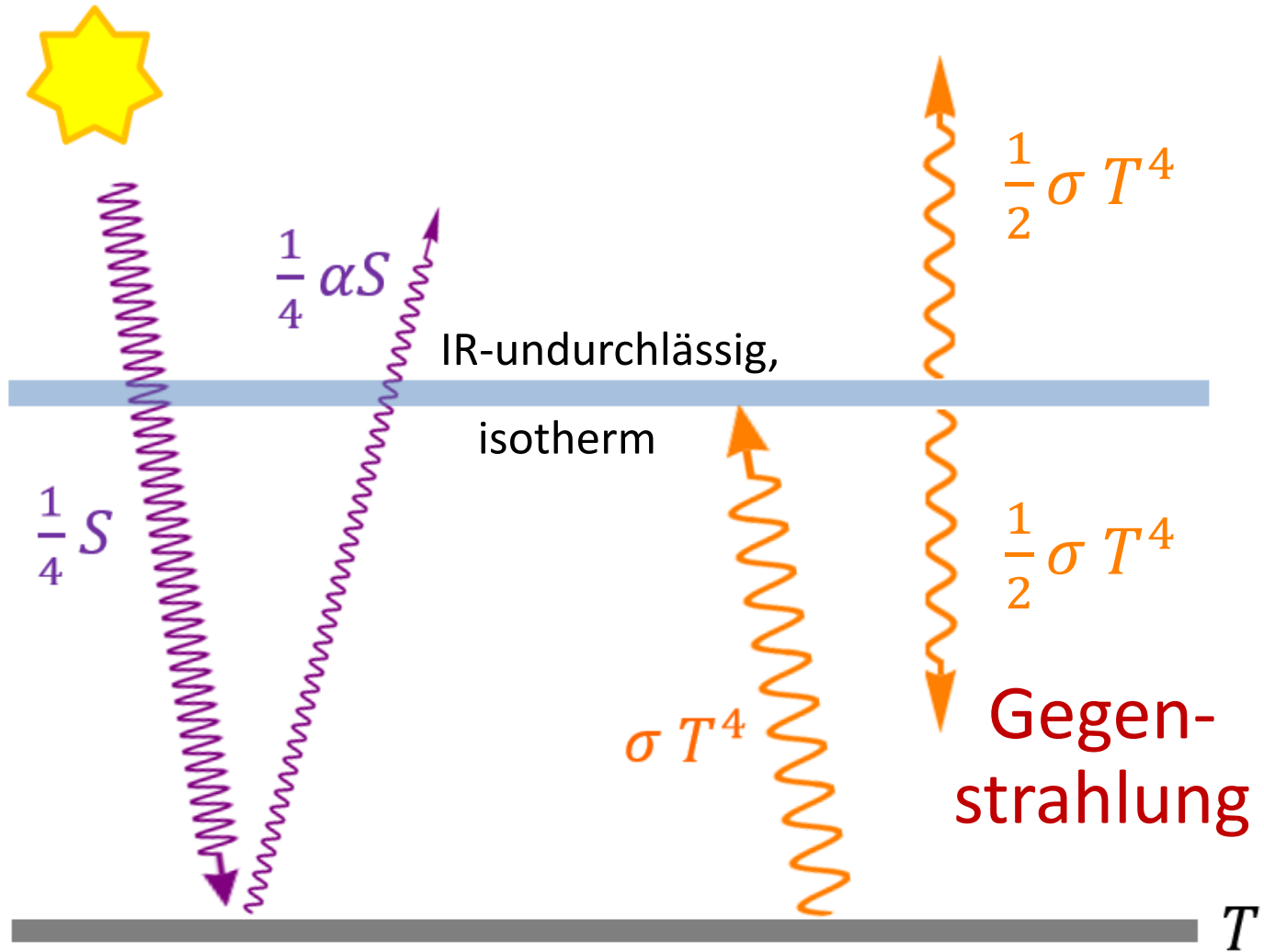
Ein (sehr) einfaches Modell des Treibhauseffekts



Ein (sehr) einfaches Modell des Treibhauseffekts



Ein (sehr) einfaches Modell des Treibhauseffekts

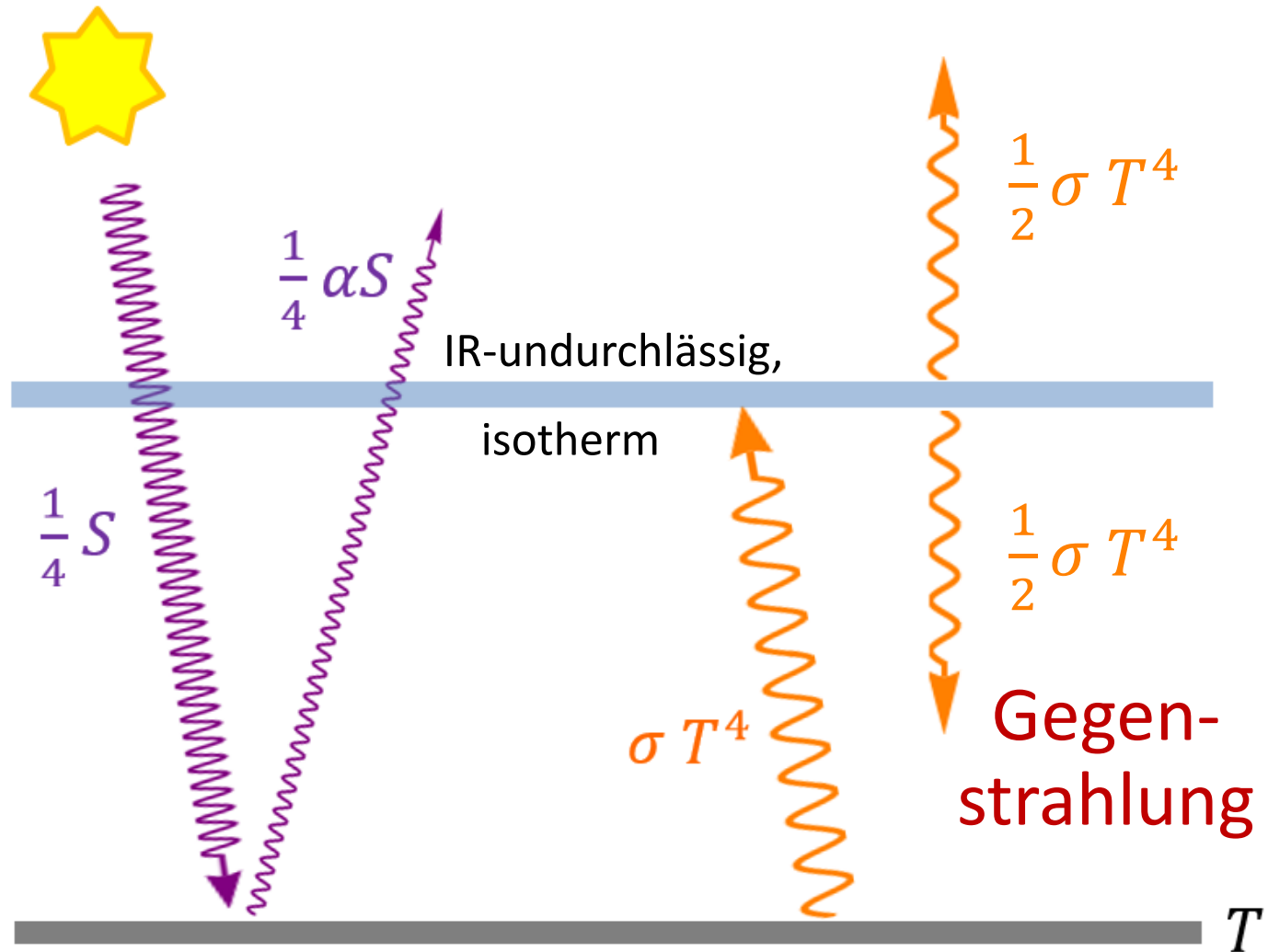


$$\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S$$

$$\mathcal{P}_{\text{out}} = \frac{1}{2} \sigma T^4$$

Transmissionsgrad
der Atmosphäre
(Maß für die Stärke
des Treibhauseffekts)

Ein (sehr) einfaches Modell des Treibhauseffekts



Für die Erde ergibt sich

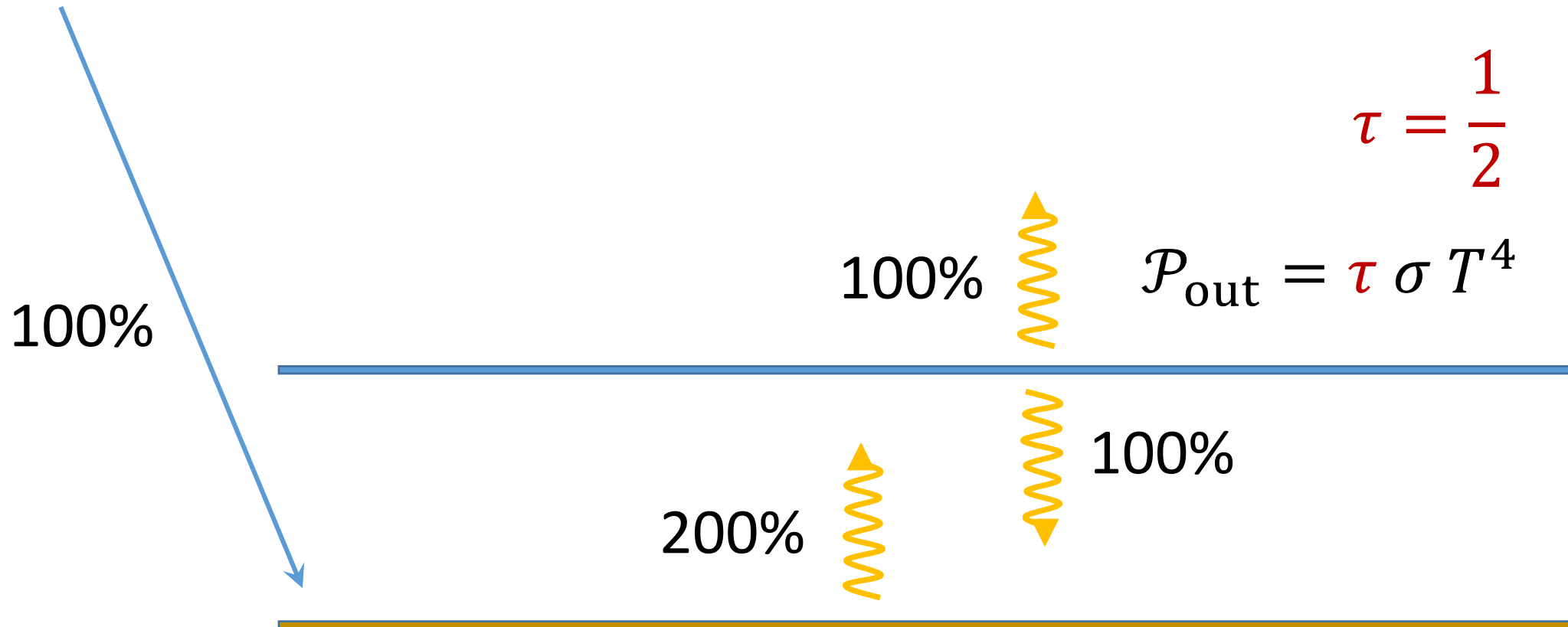
$$T = 303 \text{ K} = 30^\circ\text{C}$$

... zu warm!

Der Treibhauseffekt ist hier zu stark modelliert.

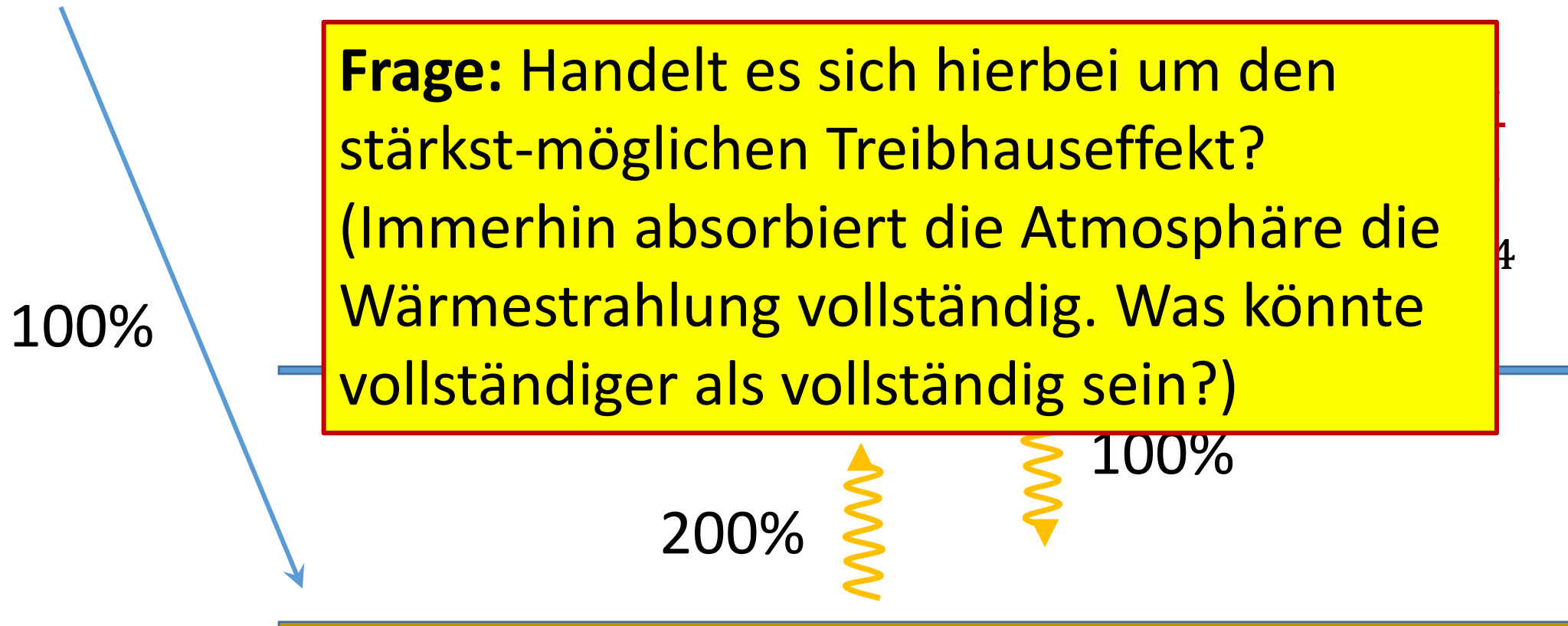
Die „Buchhaltung“ dahinter...

Veranschlage $\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S$ als 100%.



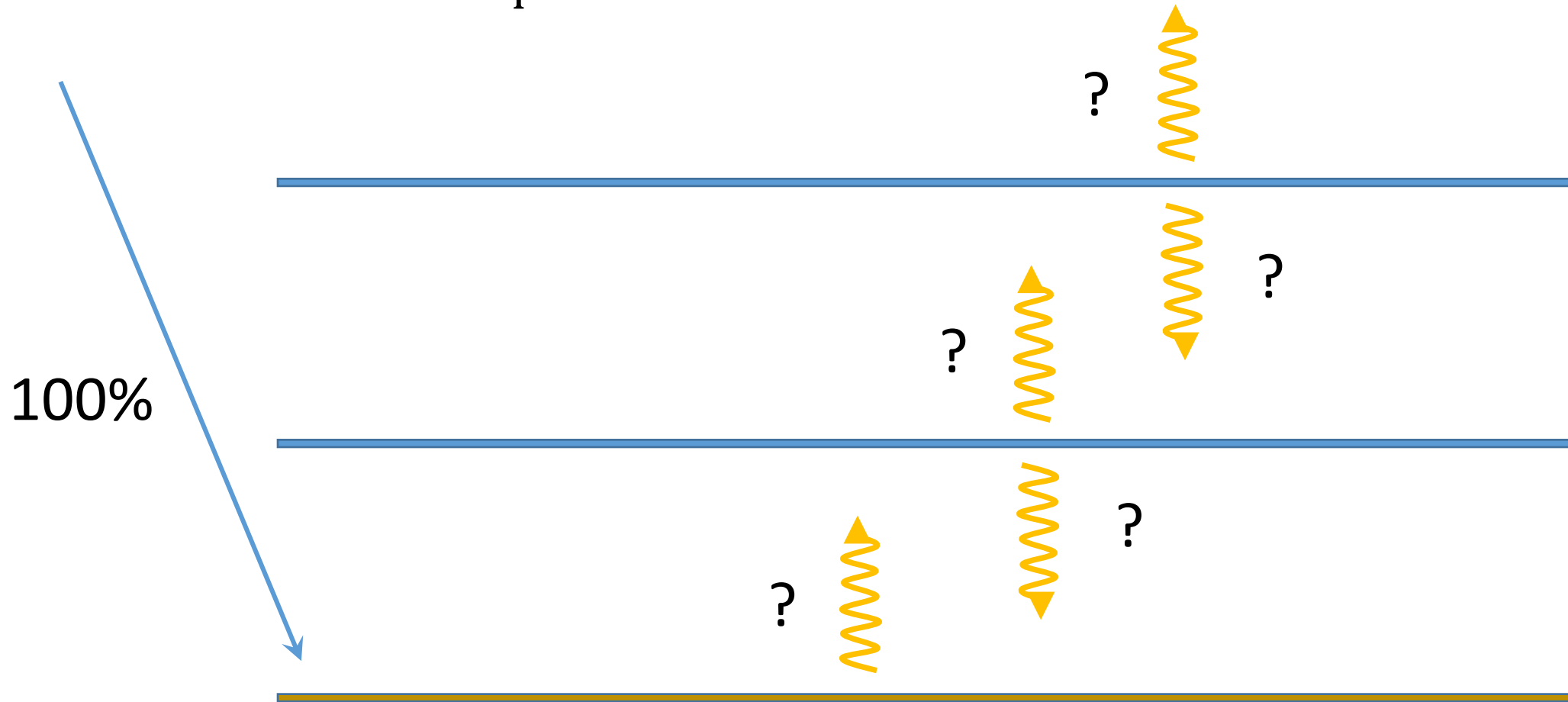
Die „Buchhaltung“ dahinter...

Veranschlage $\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S$ als 100%.



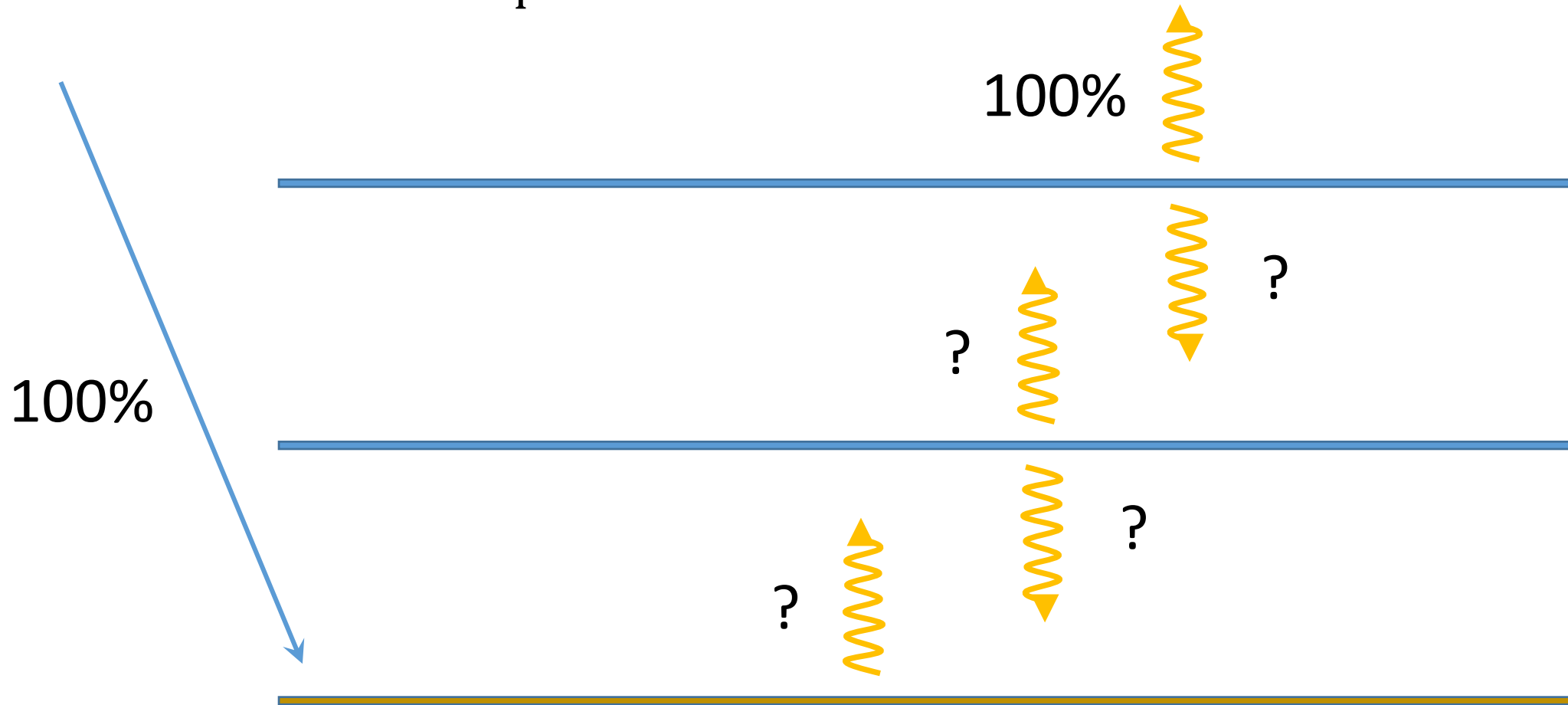
Atmosphäre aus 2 IR-undurchlässigen Schichten

Veranschlage $\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S$ als 100%.



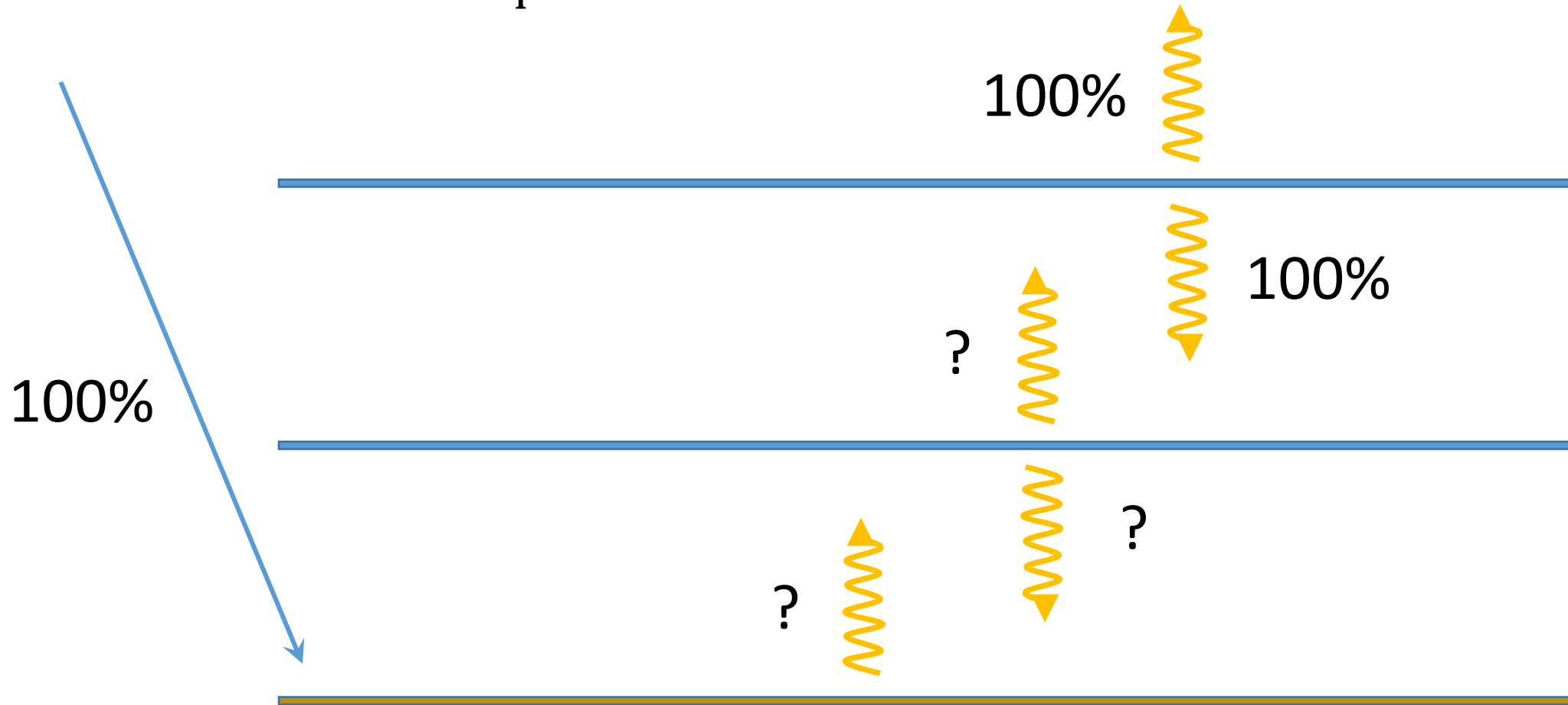
Atmosphäre aus 2 IR-undurchlässigen Schichten

Veranschlage $\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S$ als 100%.



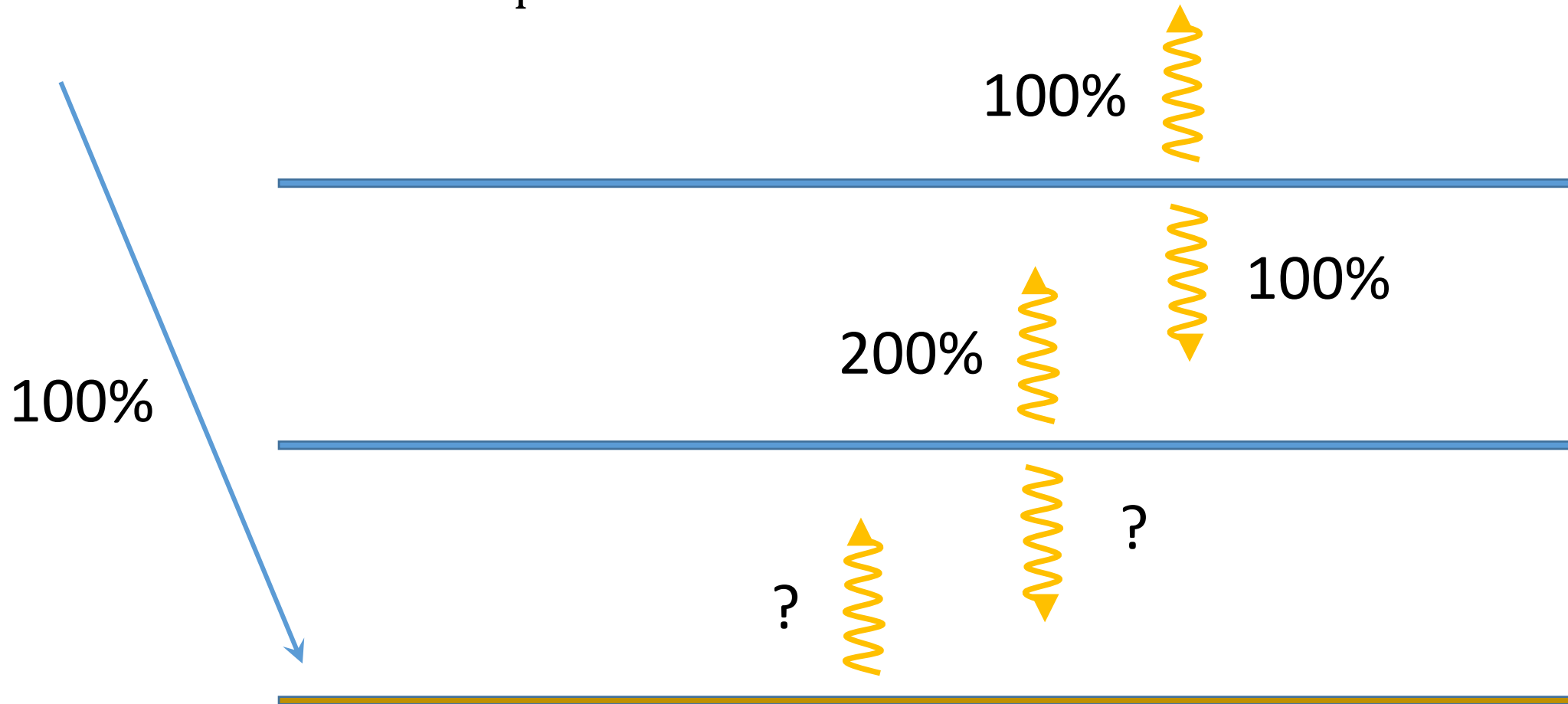
Atmosphäre aus 2 IR-undurchlässigen Schichten

Veranschlage $\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S$ als 100%.



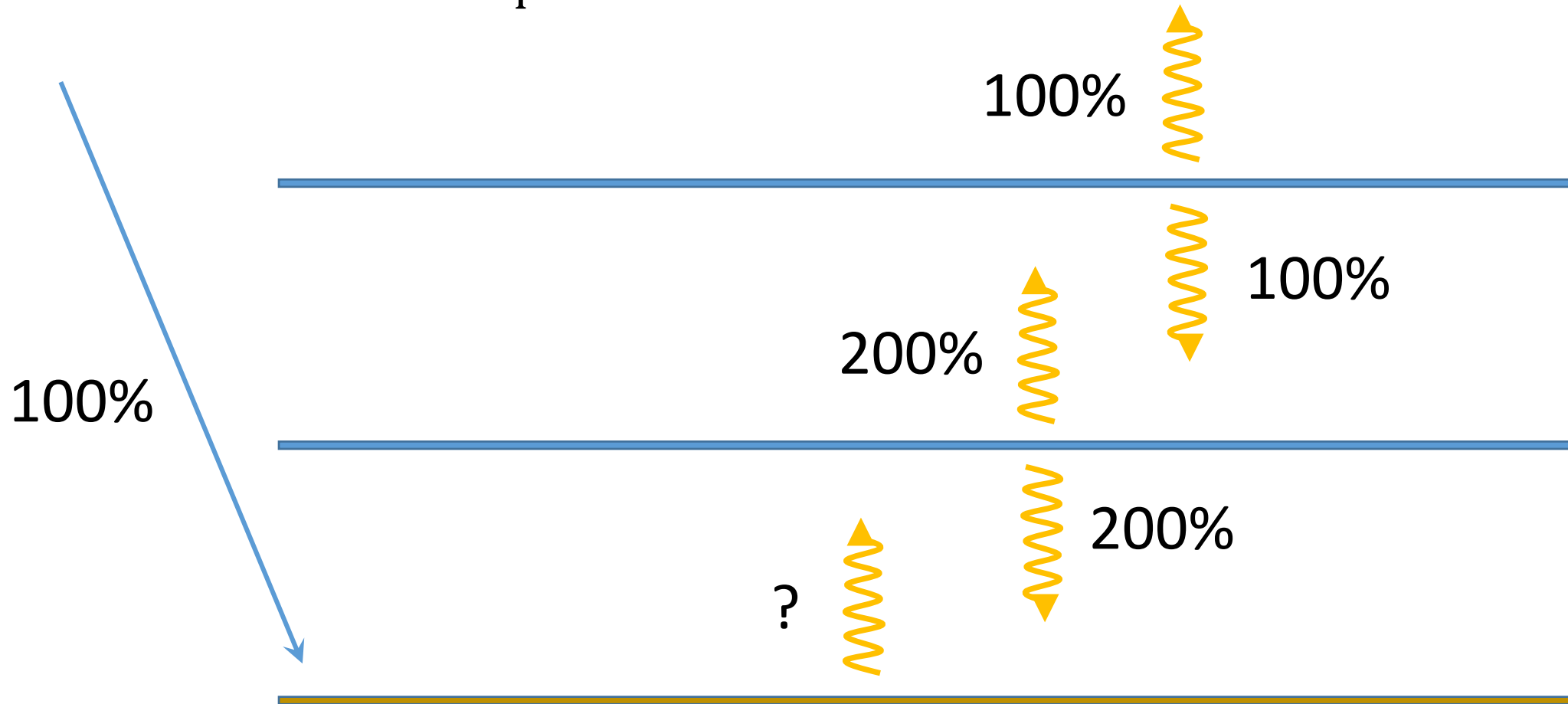
Atmosphäre aus 2 IR-undurchlässigen Schichten

Veranschlage $\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S$ als 100%.



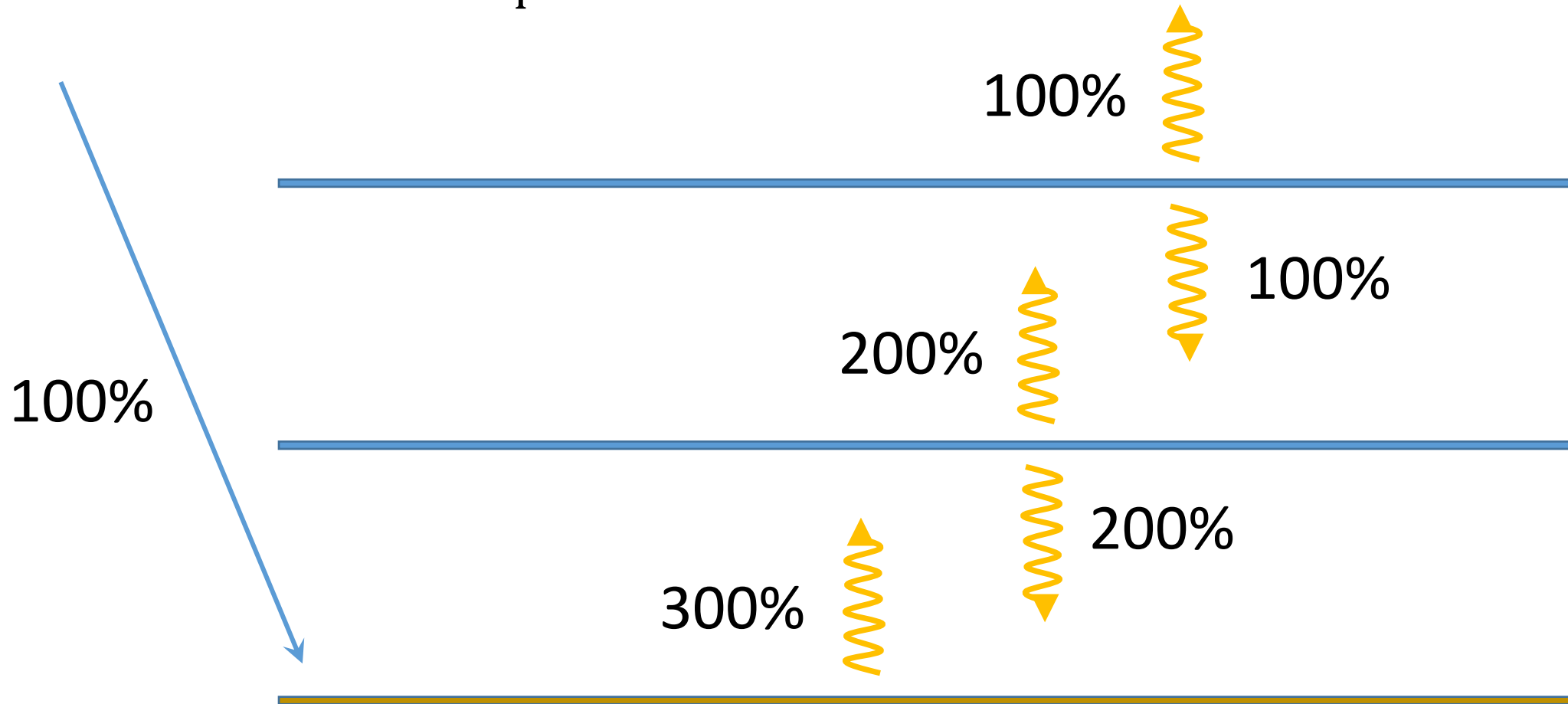
Atmosphäre aus 2 IR-undurchlässigen Schichten

Veranschlage $\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S$ als 100%.



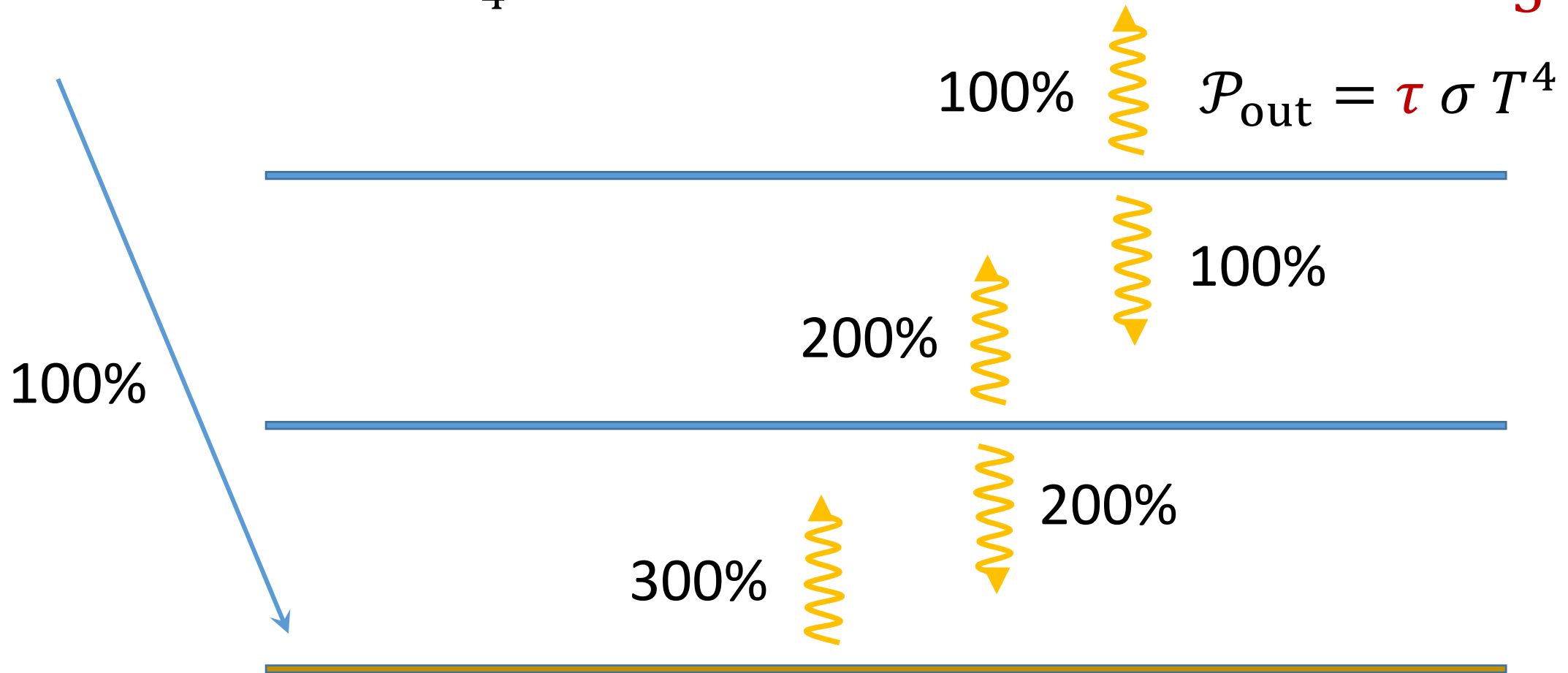
Atmosphäre aus 2 IR-undurchlässigen Schichten

Veranschlage $\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S$ als 100%.

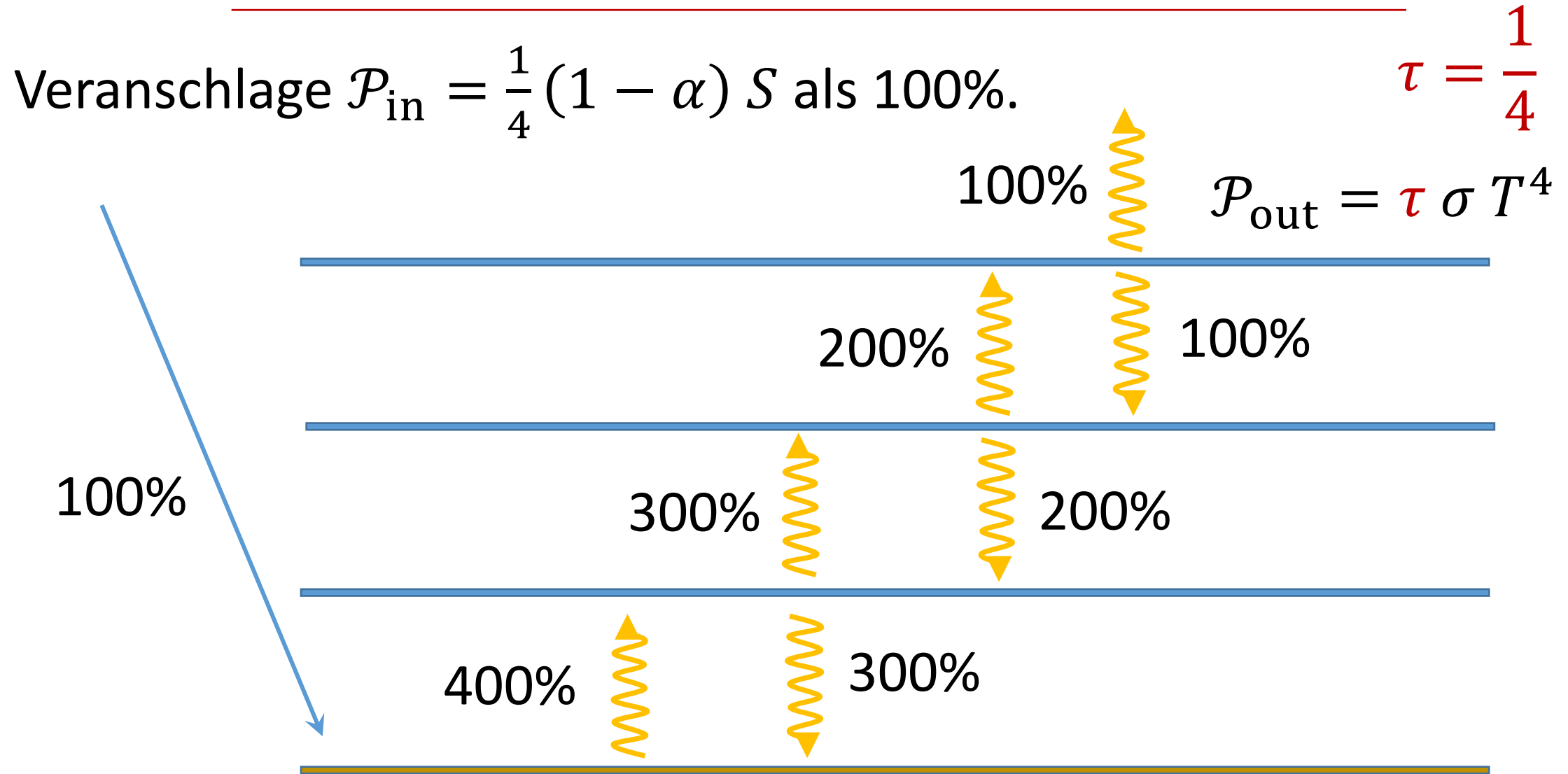


Atmosphäre aus 2 IR-undurchlässigen Schichten

Veranschlage $\mathcal{P}_{\text{in}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S$ als 100%. $\tau = \frac{1}{3}$



Atmosphäre aus 3 IR-undurchlässigen Schichten



Atmosphäre aus n IR-undurchlässigen Schichten

Allgemein:

$$\tau = \frac{1}{n + 1}.$$

Atmosphäre aus n IR-undurchlässigen Schichten

Allgemein:

$$\tau = \frac{1}{n + 1}.$$

Die mittlere Oberflächentemperatur der Erde ($T = 288 \text{ K} = 15^\circ\text{C}$) wird reproduziert für $n = 0.65$.

Atmosphäre aus n IR-undurchlässigen Schichten

Allgemein:

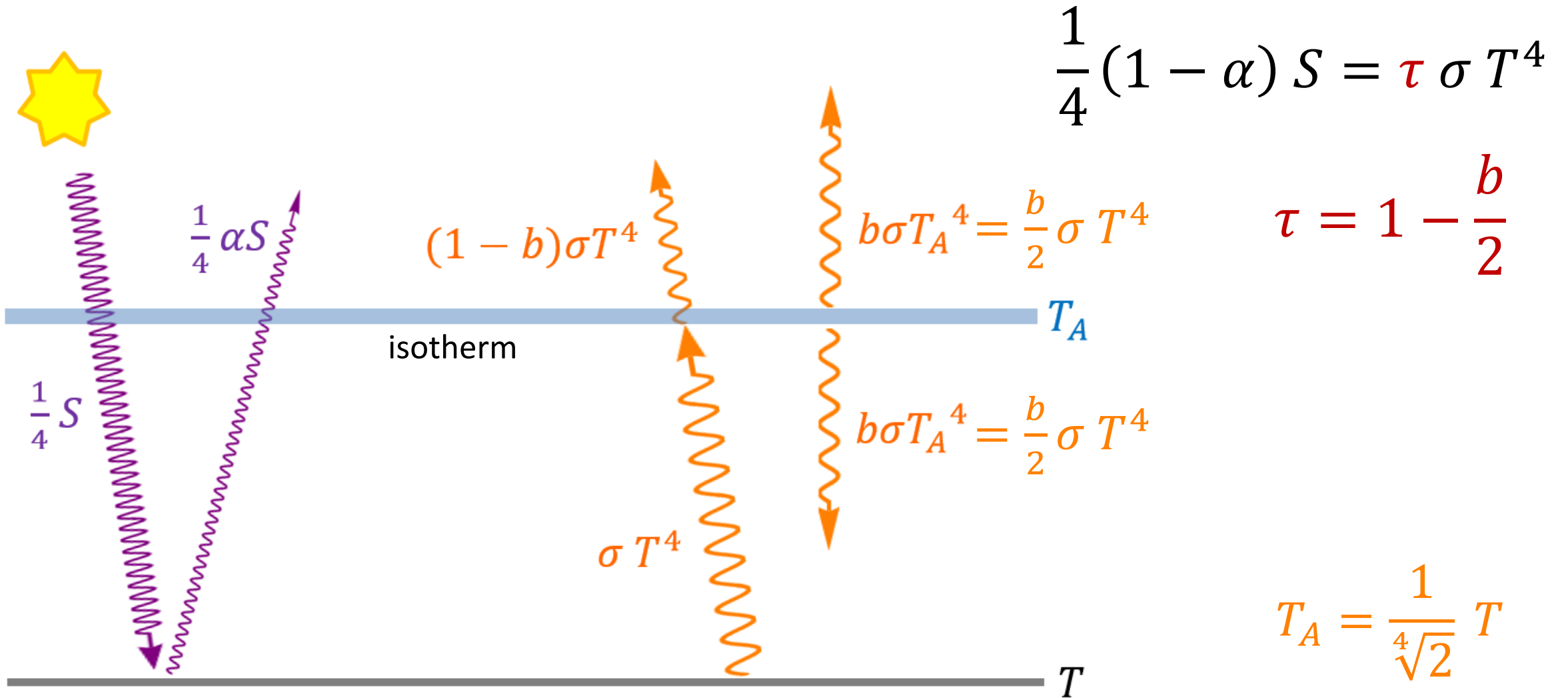
$$\tau = \frac{1}{n + 1}.$$

Die mittlere Oberflächentemperatur der Erde ($T = 288 \text{ K} = 15^\circ\text{C}$) wird reproduziert für $n = 0.65$.

Die mittlere Oberflächentemperatur der Venus

($T = 737 \text{ K} = 464^\circ\text{C}$ bei $\alpha = 0.7$ und $S = 2650 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$) wird reproduziert für $n = 82$.

Alternative: Atmosphäre als teilweise-IR-durchlässige Schicht



3. Kapitel

Globale Strahlungsbilanzgleichung

Globale Strahlungsbilanzgleichung (mit beliebigem τ)

- Die globale Strahlungsbilanzgleichung

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha) S = \tau \sigma T^4$$

ist der Ausgangspunkt der Überlegungen in den folgenden Kapiteln.

- Effektive Temperatur: $\tau T^4 = T_{\text{eff}}^4$.

Globale Strahlungsbilanzgleichung (mit beliebigem τ)

$$\frac{1}{4} (1 - \alpha) S = \tau \sigma T^4$$

- Der **Transmissionsgrad** τ dient (modellmäßig) als Maß für die Stärke des Treibhauseffekts.
- Für die Erde reproduziert $\tau = 0.61$ den korrekten Wert von T .

Globale Strahlungsbilanzgleichung (mit beliebigem τ)

$$\frac{1}{4} (1 - \alpha) S = \tau \sigma T^4$$

- Der **Transmissionsgrad** τ dient (modellmäßig) als Maß für die Stärke des Treibhauseffekts. ^{*)}
 - Für die Erde reproduziert $\tau = 0.61$ den korrekten Wert von T .
- ^{*)} Diesen Punkt kann man verbessern, aber um den Preis eines etwas aufwändigeren Formalismus mit mehr Variablen.

4. Kapitel

Zusammenspiel zwischen Eis und Albedo

Temperaturabhängige Albedo

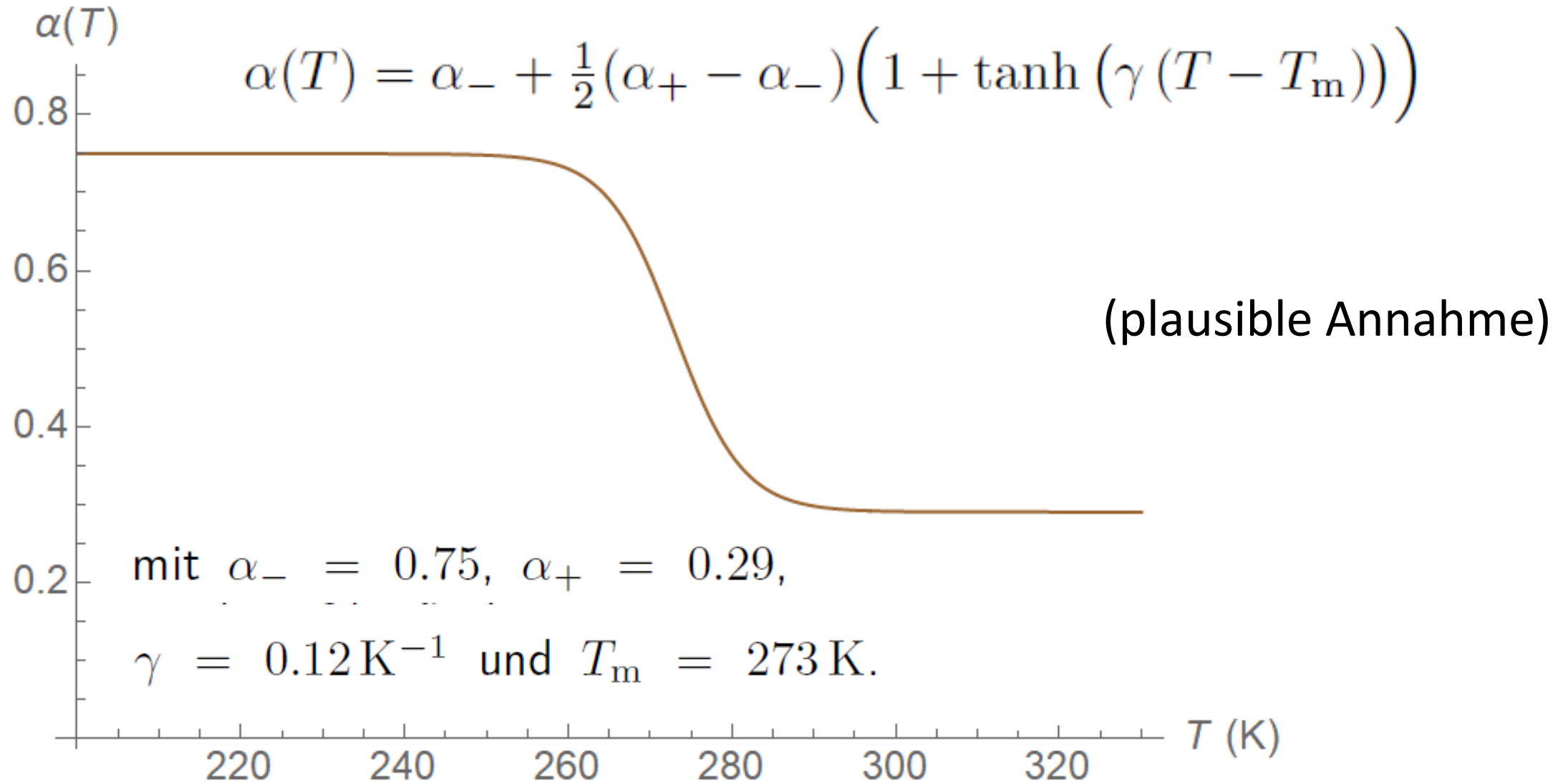
- Die Albedo hängt von der Temperatur ab.
- Wird das berücksichtigt, so nimmt (wenn S und τ als unabhängig von T modelliert werden) die globale Strahlungsbilanzgleichung die Form

$$\frac{1}{4} (1 - \alpha(T)) S = \tau \sigma T^4$$

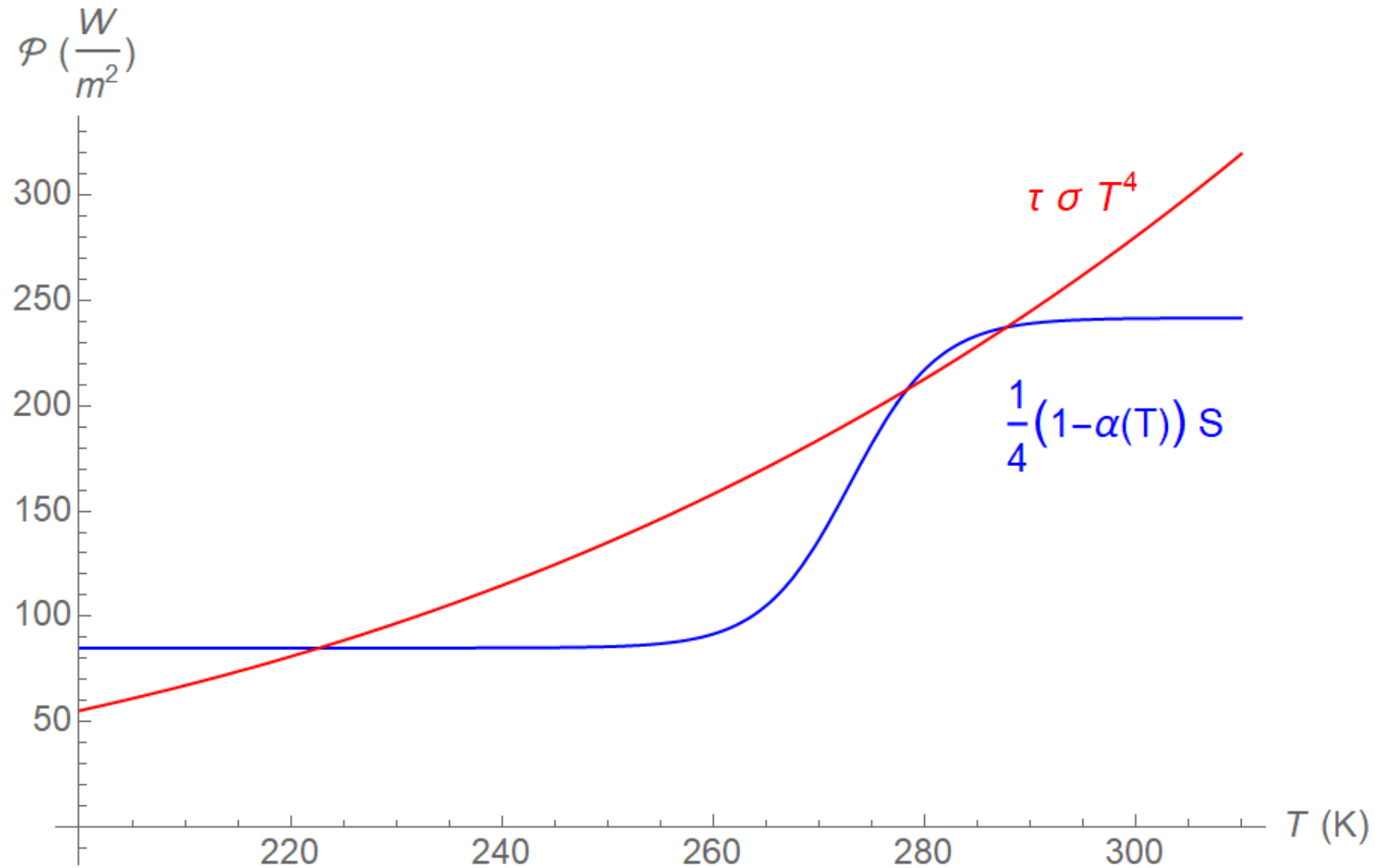
an.

- Strategie: plausible Annahme über $\alpha(T)$, dann grafische Lösung: Plot des Graphen der linken Seite und Plot des Graphen der rechten Seite.

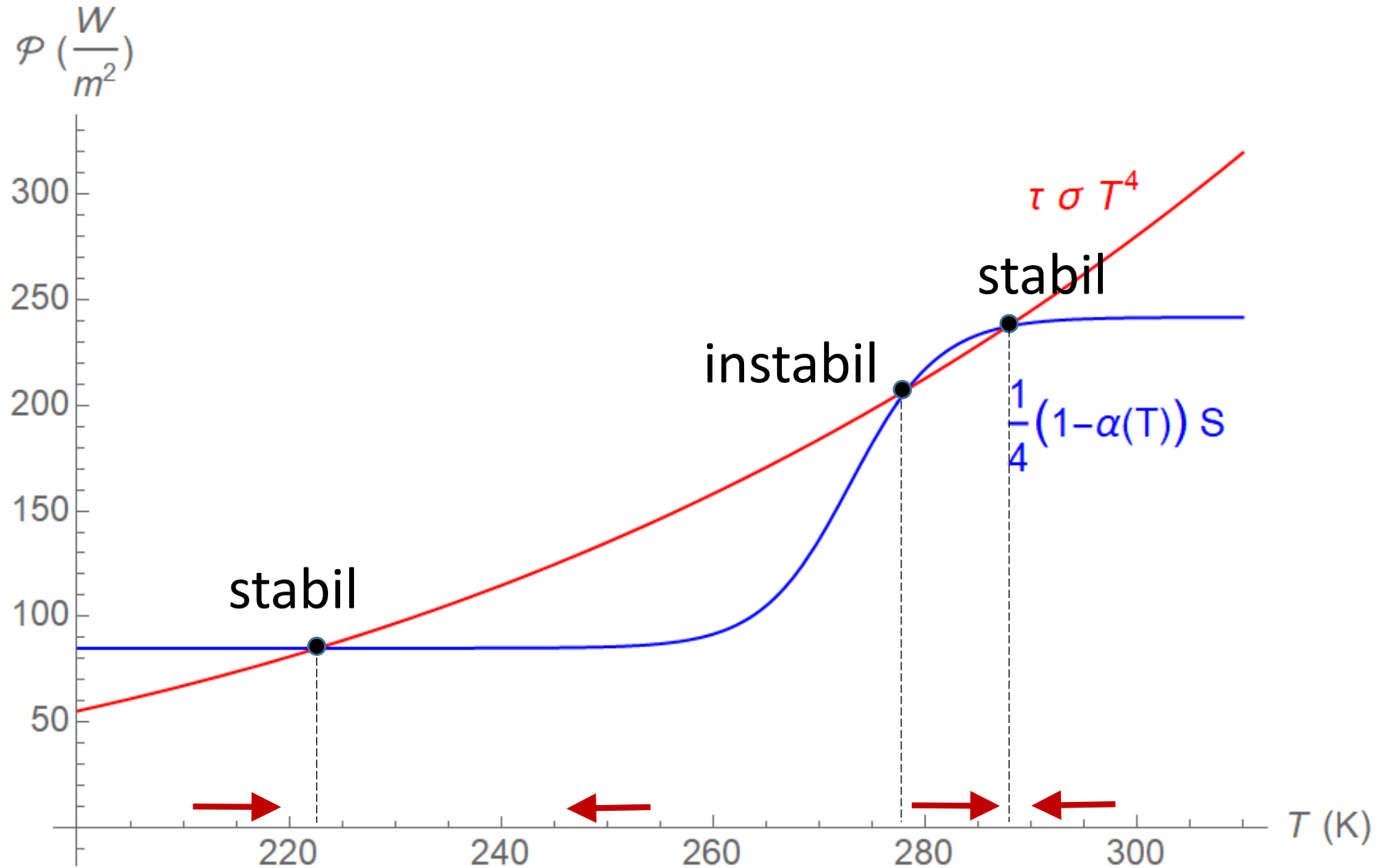
Temperaturabhängige Albedo



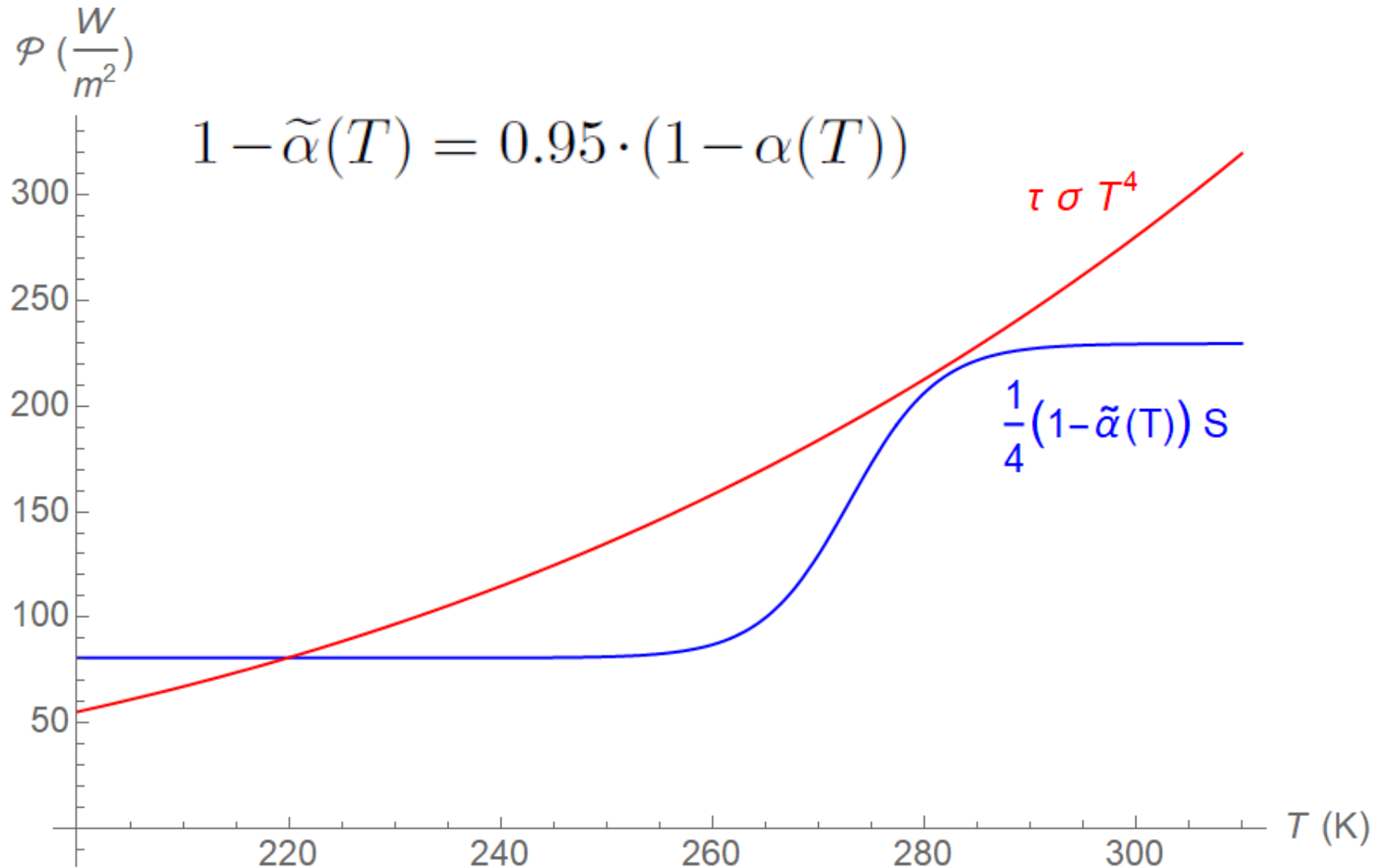
Drei Gleichgewichtszustände!



Drei Gleichgewichtszustände!



Ein Gleichgewichtszustand: Schneeball Erde!



Äußere Einwirkungen
und Rückkopplungen
im Klimasystem
(Überblick)

Wie reagiert das Klima auf äußere Einwirkungen?

Äußere Einwirkungen (**Störungen**, **Antriebe**, *forcings*): Einflüsse, die von außerhalb des eigentlichen Klimasystems kommen, z.B.

- Freisetzung von Treibhausgasen aus fossilen Brennstoffen (verstärkt den Treibhauseffekt, verkleinert τ).
- Freisetzung von Aerosolen in die höheren Atmosphärenschichten (verstärkt die Rückstrahlung, vergrößert α).
- Änderung der Landnutzung: Wälder \rightarrow Weide- und Ackerland (verstärkt die Rückstrahlung, vergrößert α).
- Änderung der Sonnenaktivität (und damit von S).

Wie reagiert das Klima auf äußere Einwirkungen?

Rückkopplungen (*feedbacks*): Prozesse, die durch Temperaturänderungen angestoßen werden.

Die wichtigsten „**schnellen**“ Rückkopplungen im Klimasystem der Erde sind:

- Wasserdampf-Rückkopplung
- Eis-Albedo-Rückkopplung
- Wolkenrückkopplung
- Temperaturgradient-Rückkopplung (*lapse rate*-Rückkopplung)

Wie reagiert das Klima auf äußere Einwirkungen?

Daneben wirken auch „**langsame**“ Rückkopplungen, z.B.

- Abschmelzen der Eisschilde Grönlands und der Antarktis
- Auftauen der Permafrostböden
- Änderung der Vegetationszonen und damit der Albedo sowie der Austauschraten von Kohlendioxid zwischen Atmosphäre, Biosphäre und Ozean

Klimaänderungen ...

- ... kommen in Form zahlreicher Prozessen einher,
- aber **in erster Linie interessiert uns** die langfristig zu erwartende Änderung der mittleren Oberflächentemperatur ΔT ,
 - weil sie eine einfache Kennzahl ist, die weltweit bei der Formulierung von Klimazielen und Klimaabkommen genutzt werden kann,
 - und weil sehr viel alleine von der Temperatur abhängt.

Formale Beschreibung von Klimaänderungen

Strategie zur Berechnung von ΔT :

1. Strahlungsantrieb
2. Klimaantwort ohne Rückkopplungen
→ No-feedback-Klimasensitivität
3. Rückkopplungen werden berücksichtigt
→ Klimasensitivität, Rückkopplungsfaktor

6. Kapitel

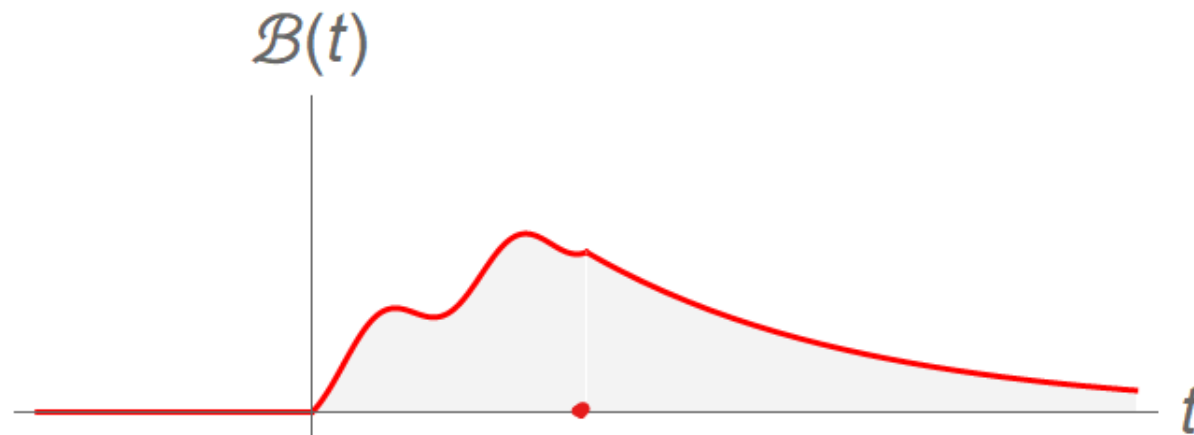
Strahlungsantrieb und No-feedback-Klimasensitivität

Strahlungsantrieb

Strahlungsbudget:

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}_{\text{in}} - \mathcal{P}_{\text{out}} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S - \tau \sigma T^4$$

= eingestrahlte – abgestrahlte Leistung pro Fläche.



Strahlungsantrieb

Äußere Einwirkung: Änderung einer oder mehrerer der Größen α , S und τ , als **abrupt** modelliert.

Strahlungsantrieb (radiative forcing):

$$\text{RF} = \Delta\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\text{nachher}} - \mathcal{B}_{\text{vorher}}$$

Strahlungsantrieb

Äußere Einwirkung: Änderung einer oder mehrerer der Größen α , S und τ , als **abrupt** modelliert.

Strahlungsantrieb (radiative forcing):

$$\text{RF} = \Delta \mathcal{B} = \mathcal{B}_{\text{nachher}} - \mathcal{B}_{\text{vorher}}$$

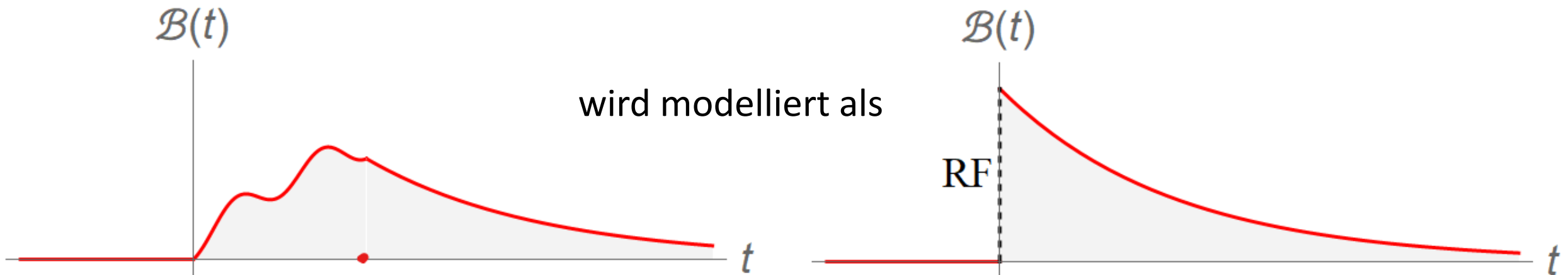
bei konstanter Temperatur!
(thermische Trägheit)

Strahlungsantrieb

Äußere Einwirkung: Änderung einer oder mehrerer der Größen α , S und τ , als **abrupt** modelliert.

Strahlungsantrieb (radiative forcing):

$$\text{RF} = \Delta\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\text{nachher}} - \mathcal{B}_{\text{vorher}}$$



Strahlungsantrieb

Die Änderungen $\Delta\alpha$, ΔS und $\Delta\tau$ seien klein, ihre Quadrate und Produkte werden vernachlässigt. Aus

$$\mathcal{B} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S - \tau \sigma T^4$$

folgt, ausgehend von einem Gleichgewichts-Anfangszustand $(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0)$:

$$\text{RF} = \Delta\mathcal{B}|_{T=T_0} = -\frac{\Delta\alpha}{4} S_0 + \frac{1}{4} (1 - \alpha_0) \Delta S - \Delta\tau \sigma T_0^4$$

Exkurs zum Strahlungsantrieb

Beispiel 1: Strahlungsantrieb einer Änderung der Konzentration von CO₂ (gemessen in ppm) von C_{ini} auf C_{fin} :

$$\text{RF} = 5.35 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \ln \left(\frac{C_{\text{fin}}}{C_{\text{ini}}} \right).$$

mit Computermodellen
empirisch gefundene
Formel

Mit $\text{RF} = -\Delta\tau \sigma T_0^4$ folgt daraus der Zusammenhang zwischen $\Delta\tau$ und der Änderung der CO₂-Konzentration:

$$\Delta\tau = -0.0137 \cdot \ln \left(\frac{C_{\text{fin}}}{C_{\text{ini}}} \right).$$

Anmerkung: $C_{1750} = 280$ ppm, $C_{\text{heute}} = 420$ ppm.

Exkurs zum Strahlungsantrieb

Beispiel 1': Strahlungsantrieb einer Verdoppelung der CO₂-Konzentration in der Atmosphäre:

$$\text{RF} = 5.35 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \ln(2) = 3.7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Beispiel 2: Strahlungsantrieb einer Steigerung der Sonnenaktivität um ein Prozent:

$$\text{RF} = \frac{1}{4} (1 - \alpha_0) \Delta S = \frac{1}{4} (1 - \alpha_0) \frac{1}{100} S_0 = 2.4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Klimaantwort ohne Rückkopplungen

Nach einer äußeren Einwirkung mit Strahlungsantrieb RF strebt das Klimasystem einem **neuen Gleichgewichtszustand** zu. In diesem gilt wieder $\mathcal{B} = 0$.

Zuerst werden **Rückkopplungen ignoriert**, d.h. α , S und τ ändern sich nach der äußeren Einwirkung nicht mehr. Die Temperaturänderung berechnet sich daher aus

$$\Delta\mathcal{B} = \Delta\mathcal{B}|_{T=T_0} - \tau \sigma \Delta(T^4) = 0,$$

also, mit $\Delta(T^4) = 4T_0^3 \Delta T$,

$$RF - 4 \tau \sigma T_0^3 \Delta T = 0.$$

Klimaantwort ohne Rückkopplungen

Nach einer äußeren Einwirkung mit Strahlungsantrieb RF strebt das Klimasystem einem **neuen Gleichgewichtszustand** zu. In diesem Zustand ist die Energieerhaltung wieder gegeben:

$$(T_0 + \Delta T)^4 = T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T + \dots$$

oder

$$\frac{dT^4}{dT}(T_0) = 4T_0^3$$

Die Rückkopplungen werden ignoriert, d.h. α , S und τ sind von der äußeren Einwirkung nicht mehr. Die Energieerhaltung setzt sich daher aus

$$\Delta \mathcal{B} = \Delta \mathcal{B}|_{T=T_0} - \tau \sigma \Delta(T^4) = 0,$$

also, mit $\Delta(T^4) = 4T_0^3 \Delta T$,

$$RF - 4 \tau \sigma T_0^3 \Delta T = 0.$$

Klimaantwort ohne Rückkopplungen

Löse also

$$RF - 4 \tau \sigma T_0^3 \Delta T = 0$$

nach ΔT und nenne die Lösung ΔT_{nf} (für *no feedback*):

$$\Delta T_{\text{nf}} = \frac{1}{4 \tau \sigma T_0^3} RF$$

oder

$$\Delta T_{\text{nf}} = \lambda_{\text{nf}} RF$$

mit

$$\lambda_{\text{nf}} = \frac{1}{4 \tau \sigma T_0^3} = 0.3 \frac{\text{K}}{\text{W/m}^2}$$

Klimaantwort ohne Rückkopplungen

Löse also

$$RF - 4 \tau \sigma T_0^3 \Delta T = 0$$

nach ΔT und nenne die Lösung ΔT_{nf} (für *no feedback*):

$$\Delta T_{\text{nf}} = \frac{1}{4 \tau \sigma T_0^3} RF$$

No-feedback-
Klimasensitivität

oder

$$\Delta T_{\text{nf}} = \lambda_{\text{nf}} RF$$

mit

$$\lambda_{\text{nf}} = \frac{1}{4 \tau \sigma T_0^3} = 0.3 \frac{\text{K}}{\text{W/m}^2}$$

7. Kapitel

Einbeziehung von Rückkopplungen

Rückkopplungen

Alle im Folgenden auftretenden mit Δ bezeichneten Größen seien wieder klein, ihre Produkte und Quadrate werden vernachlässigt. Wir betrachten als Beispiel einer Rückkopplungsschleife

- eine äußere Einwirkung in Form einer Emission von Treibhausgasen (Änderung von τ)
- und die Eis-Albedo-Rückkopplung, d.h. $\alpha(T)$.

Da dickere Eisflächen nur langsam schmelzen, fällt es leicht, den gesamten Prozess gedanklich in eine **Abfolge von Einzelschritten** zu zerlegen.

Rückkopplungen

- Ausgangspunkt: Gleichgewichtszustand $(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0)$
- Emission von Treibhausgasen (instantan):

$$(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0) \rightarrow (\alpha_0, S_0, \tau_1 = \tau_0 + \Delta\tau, T_0)$$

τ bleibt im Folgenden konstant auf dem Wert τ_1 .

- Die Temperatur stellt sich (zunächst ohne Rückkopplungen) auf ein vorübergehendes Gleichgewicht ein:

$$(\alpha_0, S_0, \tau_1, T_0) \rightarrow (\alpha_0, S_0, \tau_1, T_1 = T_0 + \Delta T_{nf})$$

↑
wie zuvor berechnet

Rückkopplungen

- Ab jetzt wird als Modell für die Temperaturabhängigkeit der Albedo ein lineares Modell verwendet:

$$\alpha(T) = \alpha_0 + q \cdot (T - T_0).$$

Eisflächen beginnen zu schmelzen. Die Albedo steigt auf den Wert $\alpha_1 = \alpha(T_1) = \alpha_0 + q \Delta T_{\text{nf}}$ an, d.h.

$$(\alpha_0, S_0, \tau_1, T_1) \rightarrow (\alpha_1, S_0, \tau_1, T_1)$$

Rückkopplungen

- In der Folge reagiert wieder die Temperatur, und es stellt sich ein neues vorübergehendes Gleichgewicht ein:

$$(\alpha_1, S_0, \tau_1, T_1) \rightarrow (\alpha_1, S_0, \tau_1, T_2 = T_1 + \Delta T_1)$$

Berechne ΔT_1 : Globale Strahlungsbilanzgleichungen für die zwei vorübergehenden Gleichgewichtszustände:

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha_0)S_0 = \tau_1 \sigma T_1^4 \quad \text{und} \quad \frac{1}{4}(1 - \alpha_1)S_0 = \tau_1 \sigma T_2^4$$

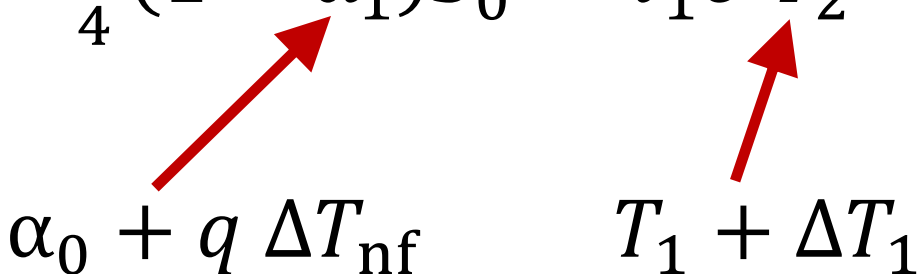
Rückkopplungen

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha_0) S_0 = \tau_1 \sigma T_1^4 \quad \text{und} \quad \frac{1}{4}(1 - \alpha_1) S_0 = \tau_1 \sigma T_2^4$$

Rückkopplungen

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha_0) S_0 = \tau_1 \sigma T_1^4 \quad \text{und} \quad \frac{1}{4}(1 - \alpha_1) S_0 = \tau_1 \sigma T_2^4$$

$\alpha_0 + q \Delta T_{\text{nf}}$ $T_1 + \Delta T_1$



Rückkopplungen

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha_0) S_0 = \tau_1 \sigma T_1^4 \quad \text{und} \quad \frac{1}{4}(1 - \alpha_1) S_0 = \tau_1 \sigma T_2^4$$

$\alpha_0 + q \Delta T_{\text{nf}}$ $T_1 + \Delta T_1$

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha_0 - q \Delta T_{\text{nf}}) S_0 = \tau_1 \sigma (T_1^4 + 4T_1^3 \Delta T_1)$$

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha_0) S_0 - \frac{1}{4} q \Delta T_{\text{nf}} S_0 = \tau_1 \sigma T_1^4 + 4\tau_1 \sigma T_1^3 \Delta T_1$$

Rückkopplungen

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha_0) S_0 = \tau_1 \sigma T_1^4 \quad \text{und} \quad \frac{1}{4}(1 - \alpha_1) S_0 = \tau_1 \sigma T_2^4$$

$\alpha_0 + q \Delta T_{\text{nf}}$ $T_1 + \Delta T_1$

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha_0 - q \Delta T_{\text{nf}}) S_0 = \tau_1 \sigma (T_1^4 + 4T_1^3 \Delta T_1)$$

$$\frac{1}{4}(1 - \alpha_0) S_0 - \frac{1}{4} q \Delta T_{\text{nf}} S_0 = \tau_1 \sigma T_1^4 + 4\tau_1 \sigma T_1^3 \Delta T_1$$

Rückkopplungen

$$-\frac{1}{4} q \Delta T_{\text{nf}} S_0 = 4\tau_1 \sigma T_1^3 \Delta T_1$$

$$-\frac{1}{4} q \Delta T_{\text{nf}} S_0 = 4\tau_0 \sigma T_0^3 \Delta T_1$$

$$\Delta T_1 = -\frac{q S_0}{16 \tau_0 \sigma T_0^3} \Delta T_{\text{nf}}$$

Ergebnis:

$$\Delta T_1 = g \Delta T_{\text{nf}} \quad \text{mit} \quad g = -\frac{q S_0}{16 \tau_0 \sigma T_0^3}$$

Rückkopplungen

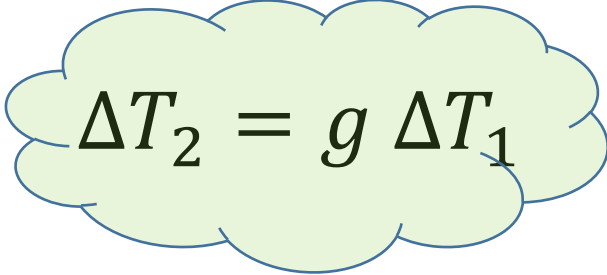
- Und so geht es weiter: Anstieg der Albedo:

$$(\alpha_1, S_0, \tau_1, T_2) \rightarrow (\alpha_2 = \alpha(T_2), S_0, \tau_1, T_2)$$

- Anpassung der Temperatur (vorübergehendes Gleichgewicht):

$$(\alpha_2, S_0, \tau_1, T_2) \rightarrow (\alpha_2, S_0, \tau_1, T_3 = T_2 + \Delta T_2)$$

Analoge Rechnung wie zuvor:


$$\Delta T_2 = g \Delta T_1$$

Rückkopplungen

- Und so geht es weiter: Anstieg der Albedo:

$$(\alpha_1, S_0, \tau_1, T_2) \rightarrow (\alpha_2 = \alpha(T_2), S_0, \tau_1, T_2)$$

- Anpassung der Temperatur (vorübergehendes Gleichgewicht):

$$(\alpha_2, S_0, \tau_1, T_2) \rightarrow (\alpha_2, S_0, \tau_1, T_3 = T_2 + \Delta T_2)$$

Analoge Rechnung wie zuvor: $\Delta T_2 = g \Delta T_1 = g^2 \Delta T_{\text{nf}}$

- u.s.w.

Rückkopplungen

Insgesamt steigt die Temperatur um

$$\Delta T_{\text{ges}} = \Delta T_{\text{nf}} + g \Delta T_{\text{nf}} + g^2 \Delta T_{\text{nf}} + g^3 \Delta T_{\text{nf}} + \dots =$$

$$= \frac{1}{1 - g} \Delta T_{\text{nf}} = f \Delta T_{\text{nf}}$$

sofern $|g| < 1$

Somit ist

$$\Delta T_{\text{ges}} = f \lambda_{\text{nf}} \text{RF} = \lambda \text{RF}$$

Rückkopplungen

Insgesamt steigt die Temperatur um

$$\Delta T_{\text{ges}} = \Delta T_{\text{nf}} + g \Delta T_{\text{nf}} + g^2 \Delta T_{\text{nf}} + g^3 \Delta T_{\text{nf}} + \dots =$$

$$= \frac{1}{1 - g} \Delta T_{\text{nf}} = f \Delta T_{\text{nf}}$$

sofern $|g| < 1$

Somit ist

$$\Delta T_{\text{ges}} = f \lambda_{\text{nf}} \text{RF} = \lambda \text{RF}$$

Rückkopplungsfaktor

Klimasensitivität(sparameter)

Rückkopplungen

g und f für die vier wichtigsten Rückkopplungen im Klimasystem der Erde:

$$g_{\text{Wasserdampf}} \approx 0.6$$

$$f_{\text{Wasserdampf}} \approx 2.5$$

$$g_{\text{Eis-Albedo}} \approx 0.15$$

$$f_{\text{Eis-Albedo}} \approx 1.2$$

$$g_{\text{Wolken}} \approx \text{zwischen } 0 \text{ und } 0.25$$

$$f_{\text{Wolken}} \approx \text{zwischen } 1 \text{ und } 1.3$$

$$g_{\text{lapse rate}} \approx -0.25$$

$$f_{\text{lapse rate}} \approx 0.8.$$

Rückkopplungen

Kombination dieser vier Rückkopplungen:

$$\Delta T_{\text{ges}} = f_{\text{Wasserdampf}} \cdot f_{\text{Eis-Albedo}} \cdot f_{\text{Wolken}} \cdot f_{\text{lapse rate}} \Delta T_{\text{nf}}$$

Rückkopplungen

Kombination dieser vier Rückkopplungen:

$$\Delta T_{\text{ges}} = f_{\text{Wasserdampf}} \cdot f_{\text{Eis-Albedo}} \cdot f_{\text{Wolken}} \cdot f_{\text{lapse rate}} \Delta T_{\text{nf}}$$

Rückkopplungen

~~Kombination dieser vier Rückkopplungen:~~

~~$$\Delta T_{\text{ges}} = f_{\text{Wasserdampf}} \cdot f_{\text{Eis-Albedo}} \cdot f_{\text{Wolken}} \cdot f_{\text{lapse rate}} \Delta T_{\text{nf}}$$~~

Kombination unabhängiger Rückkopplungen: **Die g 's werden addiert!** Für zwei Rückkopplungen:

$$g_{\text{ges}} = g_1 + g_2 \quad \text{und} \quad f_{\text{ges}} = \frac{1}{1 - g_1 - g_2} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - f_1 f_2}$$

Rückkopplungen

Behauptung:

$$\Delta T_n = (g_1 + g_2)^n \Delta T_{nf}$$

Rückkopplungen

Behauptung:

$$\Delta T_n = (g_1 + g_2)^n \Delta T_{\text{nf}}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

$$n = 1$$

$$\Delta T_1 = g_1 \Delta T_{\text{nf}} + g_2 \Delta T_{\text{nf}} = (g_1 + g_2) \Delta T_{\text{nf}}$$

$$n \rightarrow n + 1$$

$$\begin{aligned} \Delta T_{n+1} &= g_1 \Delta T_n + g_2 \Delta T_n = (g_1 + g_2) \Delta T_n = \\ &= (g_1 + g_2) (g_1 + g_2)^n \Delta T_{\text{nf}} = (g_1 + g_2)^{n+1} \Delta T_{\text{nf}} \end{aligned}$$



Rückkopplungen

Aufgabe: Angenommen, es gäbe nur zwei Rückkopplungen im Klimasystem, nämlich $g_{\text{Wasserdampf}} = 0.6$ und $g_{\text{Eis-Albedo}} = 0.5$.
Was passiert, wenn eine äußere Einwirkung eine anfängliche Temperaturerhöhung ΔT_{nf} bewirkt?

Rückkopplungen

Aufgabe: Angenommen, es gäbe nur zwei Rückkopplungen im Klimasystem, nämlich $g_{\text{Wasserdampf}} = 0.6$ und $g_{\text{Eis-Albedo}} = 0.5$.

Was passiert, wenn eine äußere Einwirkung eine anfängliche Temperaturerhöhung ΔT_{nf} bewirkt?

Antwort: Die geometrische Reihe divergiert!

→ *runaway greenhouse effect* ·

Rückkopplungen

Gemäß der Regel „addiere die g 's“ ergibt sich mit den vier wichtigsten Rückkopplungen im Klimasystem der Erde:

$$g_{\text{ges}} = g_{\text{Wasserdampf}} + g_{\text{Eis-Albedo}} + g_{\text{Wolken}} + g_{\text{lapse rate}} \approx 0.5 \text{ bis } 0.75$$

und damit

$$f_{\text{ges}} = \frac{1}{1 - g_{\text{ges}}} \approx 2 \text{ bis } 4 .$$

Eine anfängliche Temperaturänderung wird durch Rückkopplungen im Klimasystem **verdoppelt** bis **vervierfacht**!

Rückkopplungen

Gemäß der Regel „addiere die g 's“ ergibt sich mit den vier wichtigsten Rückkopplungen im Klimasystem der Erde:

$$g_{\text{ges}} = g_{\text{Wasserdampf}} + g_{\text{Eis-Albedo}} + g_{\text{Wolken}} + g_{\text{lapse rate}} \approx 0.5 \text{ bis } 0.75$$

und damit

$$f_{\text{ges}} = \frac{1}{1 - g_{\text{ges}}} \approx 2 \text{ bis } 4 .$$

Eine anfängliche Temperaturänderung wird durch Rückkopplungen im Klimasystem **verdoppelt** bis **vervierfacht**!

Ergebnis

$$\Delta T_{\text{ges}} = \lambda \text{ RF}$$

Ergebnis

$$\Delta T_{\text{ges}} = \lambda \text{ RF}$$

schwierig zu
ermitteln, große
Unsicherheit
(*model diversity*)

leicht zu ermitteln,
kleine Unsicherheit

Ergebnis

Für grobe Abschätzungen kann verwendet werden:

$$\Delta T_{\text{ges}} = \lambda R F \quad \text{mit} \quad \lambda = 0.9 \frac{\text{K}}{\text{W/m}^2}$$

Ergebnis

Für grobe Abschätzungen kann verwendet werden:

$$\Delta T_{\text{ges}} = \lambda \text{ RF} \quad \text{mit} \quad \lambda = 0.9 \frac{\text{K}}{\text{W/m}^2}$$

Aufgabe: Die Summe der Strahlungsantriebe aller von Menschen verursachten äußeren Einwirkungen auf das Klima zwischen 1750 und 2022 wird geschätzt auf 2.9 W/m^2 . (Strahlungsantriebe können addiert werden.) Um wieviel Prozent müsste die Sonne heller werden, um (nach diesen Modellvorstellungen) den gleichen Effekt zu erzielen? Welche Werte haben ΔT_{nf} und ΔT_{ges} ?

8. Kapitel

Kopplung an den Ozean als Wärmereservoir

Kopplung an den Ozean

Modellierung des Ozeans („der Ozeane“) als isothermes Wärmereservoir mit Wärmekapazität pro Fläche \mathcal{C} und Tiefe h . Damit ist (bei konstantem α , S und τ)

$$\mathcal{C} \frac{dT}{dt} = \mathcal{B} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S - \tau \sigma T^4.$$

In Bezug auf einen Gleichgewichtszustand $(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0)$ sei $T(t) = T_0 + \theta(t)$ mit $\theta(t)$ klein. Dann gilt

$$\mathcal{C} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{4} (1 - \alpha) S - \tau \sigma T_0^4 - 4\tau \sigma T_0^3 \theta(t)$$

Kopplung an den Ozean

Grobe Näherung: (α, S, τ) seien konstant (α_0, S_0, τ_0) .

Dann wird die DGL zu

$$C \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{4} (1 - \alpha_0) S_0 - \tau_0 \sigma T_0^4 - 4\tau_0 \sigma T_0^3 \theta(t)$$

also

$$C \frac{d\theta(t)}{dt} = -4\tau_0 \sigma T_0^3 \theta(t)$$

und somit

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda_{\text{nf}} C} \theta(t).$$

Kopplung an den Ozean

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda_{\text{nf}} \mathcal{C}} \theta(t).$$

Es lässt sich zeigen (Hausaufgabe!), dass die Berücksichtigung von Rückkopplungen auf

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda \mathcal{C}} \theta(t)$$

führt.

Kopplung an den Ozean

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda_{nf} C} \theta(t).$$

Es lässt sich zeigen (Hausaufgabe!), dass die Berücksichtigung von Rückkopplungen auf

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda C} \theta(t)$$

führt.

gilt in der Nähe eines Gleichgewichtszustands

$(\alpha_0, S_0, \tau_0, T_0)$

Kopplung an den Ozean

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda_{\text{nf}} \mathcal{C}} \theta(t).$$

Es lässt sich zeigen (Hausaufgabe!), dass die Berücksichtigung von Rückkopplungen auf

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda \mathcal{C}} \theta(t)$$

führt.

$$\begin{aligned} \theta(0) &> 0 \\ \text{oder} \\ \theta(0) &< 0 \end{aligned}$$

Kopplung an den Ozean

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda_{nf} C} \theta(t).$$

Es lässt sich zeigen (Hausaufgabe!), dass die Berücksichtigung von Rückkopplungen auf

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda C} \theta(t)$$

führt.

*warming
in the pipeline!*

$\theta(0) > 0$
oder
 $\theta(0) < 0$

Kopplung an den Ozean

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda_{\text{nf}} \mathcal{C}} \theta(t).$$

Es lässt sich zeigen (Hausaufgabe!), dass die Berücksichtigung von Rückkopplungen auf

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{1}{\lambda \mathcal{C}} \theta(t)$$

führt. Daher ist die Zeitkonstante (*e*-folding time) gleich

$$\Delta T_{\text{Wärmereservoir}} = \lambda \mathcal{C}.$$

Kopplung an den Ozean

$$\Delta T_{\text{Wärmereservoir}} = \lambda C.$$

Mit ein bisschen Physik berechnet man C und damit auf der Basis unseres einfachen Modells

- für die Mischungsschicht:
 $h = 100 \text{ m} \dots \Delta T_{\text{Wärmereservoir}} \approx 10 \text{ Jahre}$
- für den oberen Ozean
 $h = 700 \text{ m} \dots \Delta T_{\text{Wärmereservoir}} \approx 50 \text{ Jahre}$
- für den gesamten Ozean
 $h = 4 \text{ km} \dots \Delta T_{\text{Wärmereservoir}} \approx 300 \text{ Jahre}$

Achtung!

Nachbemerkung zur Warnung

Achtung!

Klarerweise wurde in diesem Vortrag viel vereinfacht und vernachlässigt!

- Abbau von Methan in der Atmosphäre (~ 10 Jahre).
- Kohlenstoffzyklus: CO₂-Austausch zwischen Atmosphäre, Ozean, Biosphäre und Gestein.
- Der Ozean ist nicht isotherm, die Durchmischungsrate nimmt mit der Tiefe ab.
- ...
- ...

Empfehlenswerte Quellen

- Andrew Dessler: *Modern Climate Change* (Cambridge University Press, 2022)
- Lawrence Krauss: *The Physics of Climate Change* (Apollo, 2021)
- Thorsten Bell und Oliver Walter: *Schüler modellieren den Treibhauseffekt: Unterrichtskonzept und Ergebnisse einer Erprobung in der Sekundarstufe II*, *PhyDid* 2/8 (2009), S. 32 – 48.
- David Archer and Raymond Pierrehumbert (eds.): *The Warming Papers* (Wiley-Blackwell, 2013)
- Walter Roedel und Thomas Wagner: *Physik unserer Umwelt: Die Atmosphäre* (Springer Spektrum, 2017)
- Syukuro Manabe and Anthony Broccoli: *Beyond Global Warming: How Numerical Models Revealed the Secrets of Climate Change* (Princeton University Press, 2020)
- Thomas Stocker: *Introduction to Climate Modelling* (Springer, 2011)
- Raymond Pierrehumbert: *Principles of Planetary Climate* (Cambridge University Press, 2019)

Empfehlenswerte Quellen

- Idealisiertes Treibhausmodell
https://de.wikipedia.org/wiki/Idealisiertes_Treibhausmodell
- IPCC Data Distribution Centre
<https://ipcc-data.org/>
- IPCC: Climate Change 2021. The Physical Science Basis
<https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/>
- GeoSphere Austria Informationsportal Klimawandel (ehem. ZAMG Portal Klimawandel)
<https://www.zamg.ac.at/cms/de/klima/informationsportal-klimawandel>
- Sonnblick - aktuelle Daten inkl. Spurengase
<https://www.sonnblick.net/de/daten/aktuelle-messdaten/>
- Portal Klimawandel am Hamburger Bildungsserver
<https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Klimawandel:Portal>
(Hauptseite: <https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Hauptseite>)

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

Sie finden diese Präsentation
und weiteres Material zum Thema
unter

<https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Klima>