



Pädagogische
Hochschule
Steiermark

Warum Raumvorstellung (nicht nur) für das Rechnen notwendig ist: Erklärungsansätze aus der Kognitionswissenschaft und der Fachdidaktik

HS-Prof. Dr. Karl-Heinz Graß
Hochschulprofessor für Mathematikdidaktik
Pädagogische Hochschule Steiermark



Pädagogische
Hochschule
Steiermark

Warum?

MOTIVATION DES THEMAS



Zahlen im Alltag



Lesen der
Uhr/Zeitangaben



Bezahlen mit Geld
und Online-Banking
(IBAN)



Hausnummern/Adres-
sen finden



Entfernungen/Reichw-
eiten einschätzen



Preise/Gehälter
vergleichen



Diagramme/Tabellen/
Zahlen in Medien
deuten



Nutzung von
Smartphones
(Telefonnummern, ...)

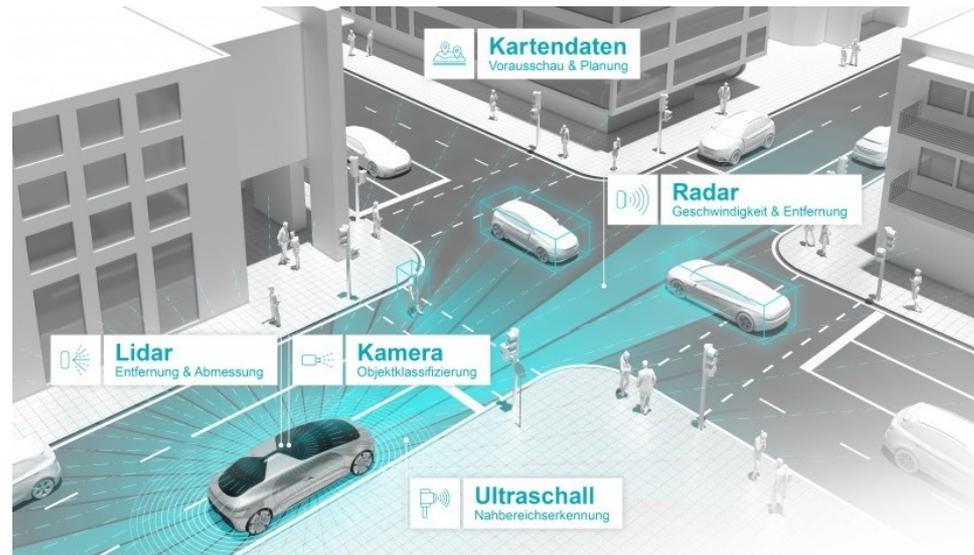


Prozente verstehen,
etc.



Relevanz des Faches Mathematik

Mathematische Kompetenzen werden durch die **zunehmende Technologisierung und Digitalisierung** zur Aufrechterhaltung unseres Wohlstands (Wirtschaftsstandort, Export,...) immer wichtiger.

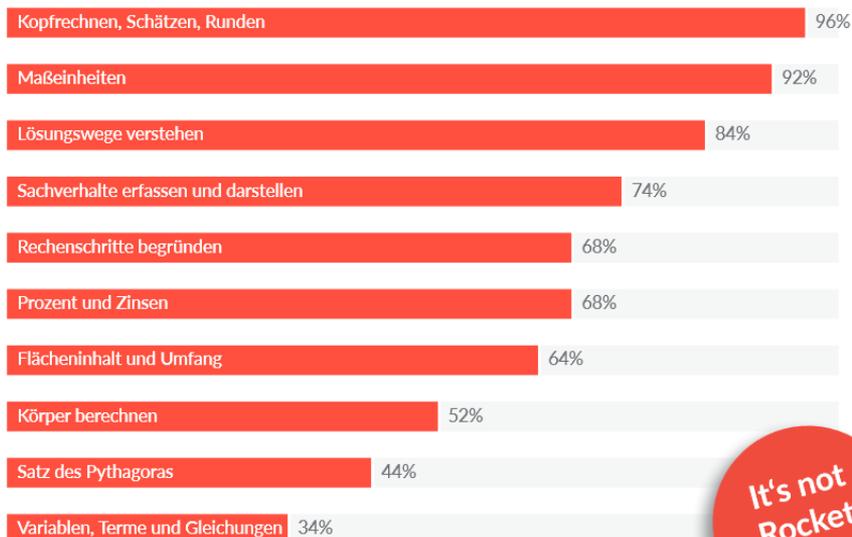




Was sich (steirische) Betriebe wünschen...

Mathematik

It's not Rocket Science! Mathematik ist wichtig. Schätzen, Runden, Kopfrechnen und ein Verständnis von Lösungswegen fürs Mitdenken und Mitentscheiden ist, was sich die Betriebe wünschen.



Edtbauer et al. (2011, S. 25)



IST-Stand in Österreich...

21% Risikoschüler*innen in Mathematik (PISA, 2018)
Jedes Kind ist eines zu viel.

- Probleme im Alltag → sekundäre emotionale Störungen
- Volkswirtschaftliche Auswirkungen

In Österreich befindet sich rund jede/r fünfte Jugendliche in der Mathematik-Risikogruppe (21 %, PISA 2018). Diese Jugendlichen weisen sehr geringe mathematische Kompetenzen auf und befinden sich (noch) in einer Vorstufe, mathematisches Wissen für sich selbst gut nutzen zu können. Die österreichische Risikogruppe ist fast doppelt so groß wie die österreichische Spitzengruppe. (PISA 2018, S. 69)



Ableitungen davon...

Frühzeitiges fördern mathematischer Kompetenzen ist eine Notwendigkeit.

Was gehört dazu:

- ***Interesse am Fach vermitteln***
- ***Mathematische Denkprozesse anregen***
- ***Selbstkonzept und Selbstwirksamkeit stärken***
- ***Positive math. Weltbilder generieren***
- ...



Inhalt des Vortrags



Das rechnende Gehirn und Rechenstörungen

- Welche Regionen?
- Aufbau der Zahlenrepräsentation
- Typische Entwicklungen
- Atypische Entwicklung



Raumvorstellung & Rechnen

- Raumvorstellung
- Zusammenhang
Raumvorstellung und
Rechnen



Grundvorstellungen und Ableitungen für die Praxis

- Fachdidaktische Diskussion
- Neurokognitive Ergebnisse vs.
fachdidaktische Tradition
- Praxistransfer



Wie sieht man ins Gehirn?



Funktionelle
Magnetresonanztomographie
(fMRT)



Elektroenzephalographie (EEG)



Transcraniale Nahe-Infrarot-
Spektroskopie (NIRS)

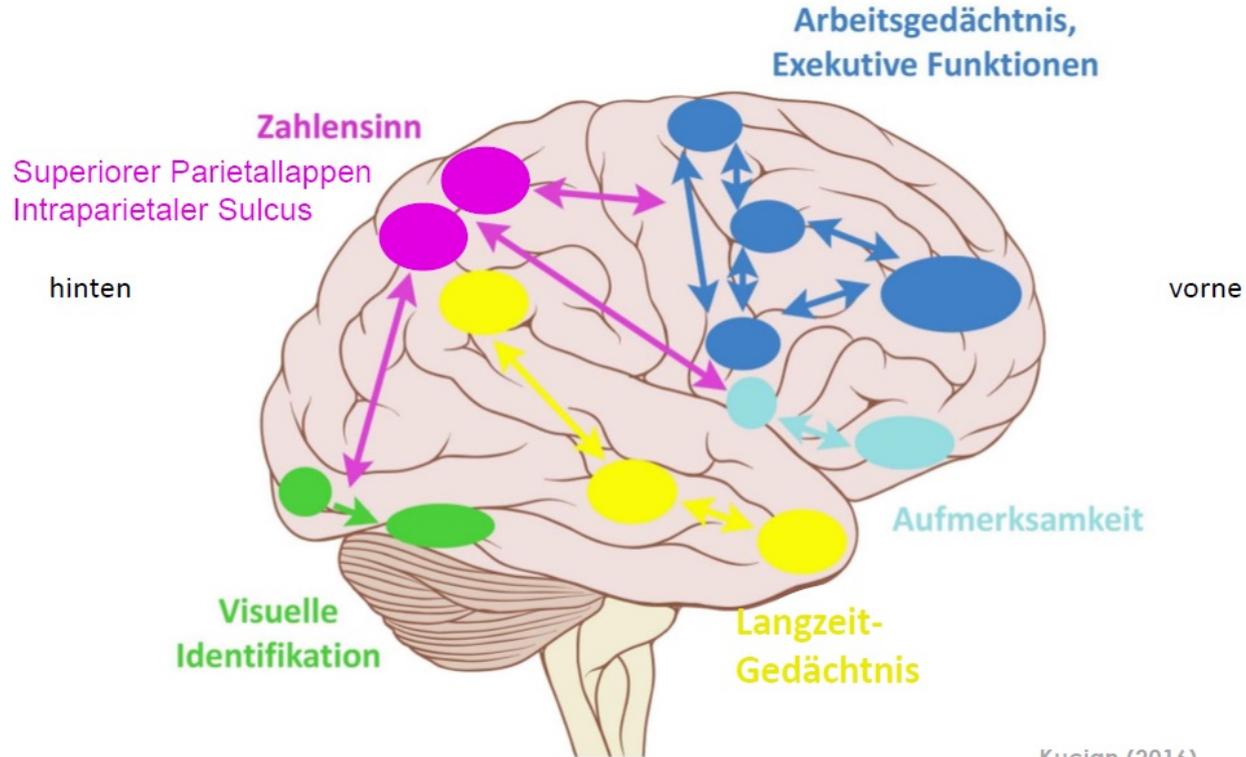


Wayne Reed, Wikipedia

1 2 3 4 5...
5-3=2



Neuronales Netzwerk der Zahlenverarbeitung





Kleine Mengen vs. große Mengen werden in unterschiedlichen Gehirnarealen verarbeitet





Kleine Mengen vs. große Mengen



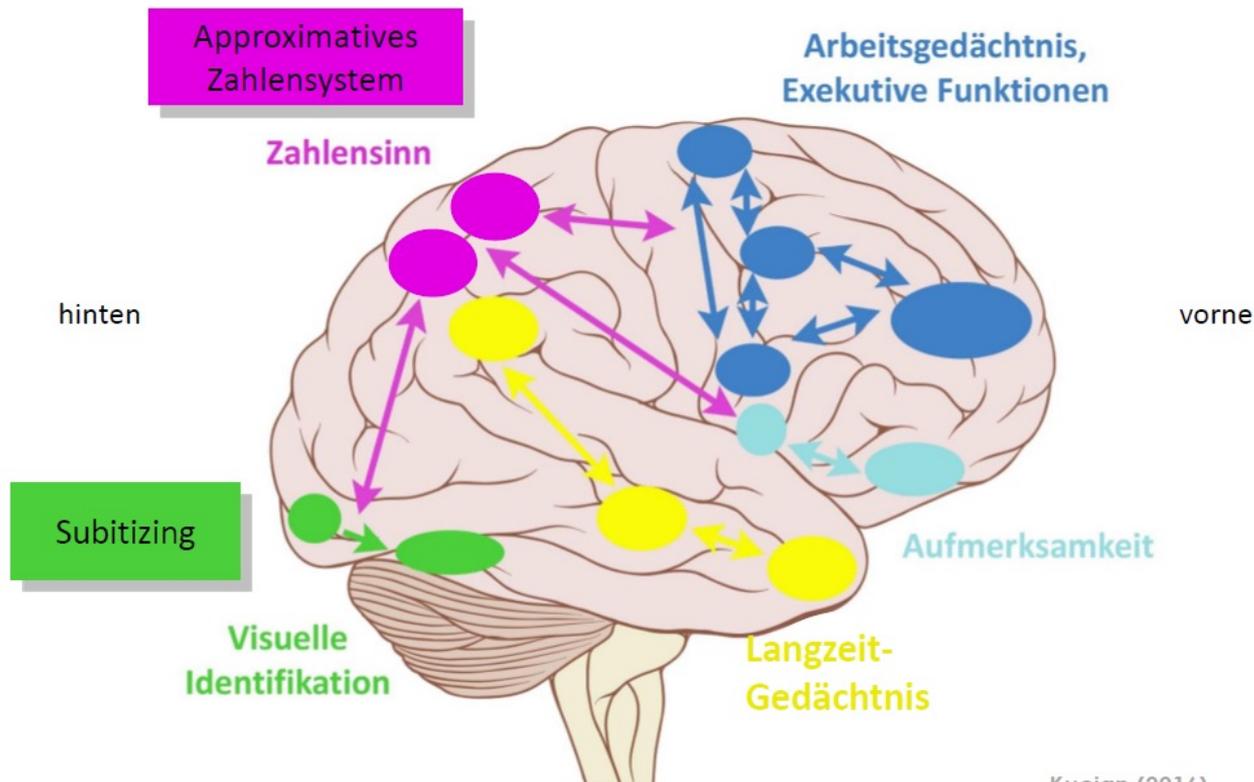
Exaktes Benennen von kleinen Mengen
→ Subitizing



Approximatives
Zahlensystem



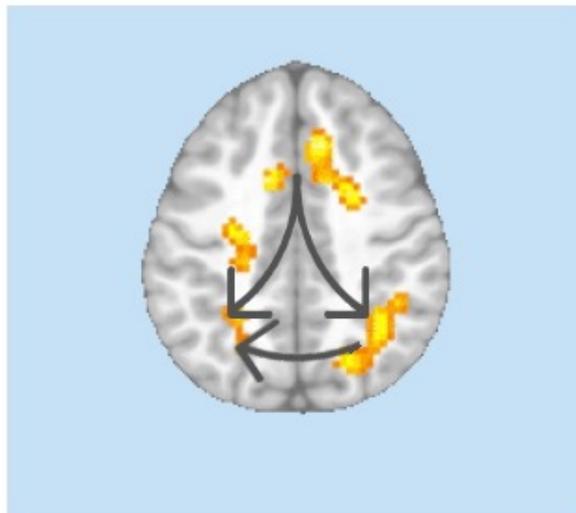
Neuronales Netzwerk der Zahlenverarbeitung



Kucian (2016)



Typische Entwicklung



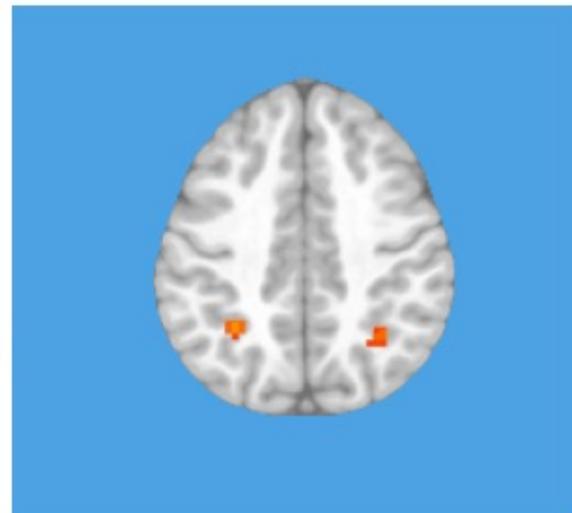
Arbeitsgedächtnis
und Aufmerksamkeit

Rechnen wird
automatisiert

Rivera et al. (2005),
Kucian et al. (2008)

Arabische
Zahlen

Emerson & Cantlon
2014, Vogel et al. 2015



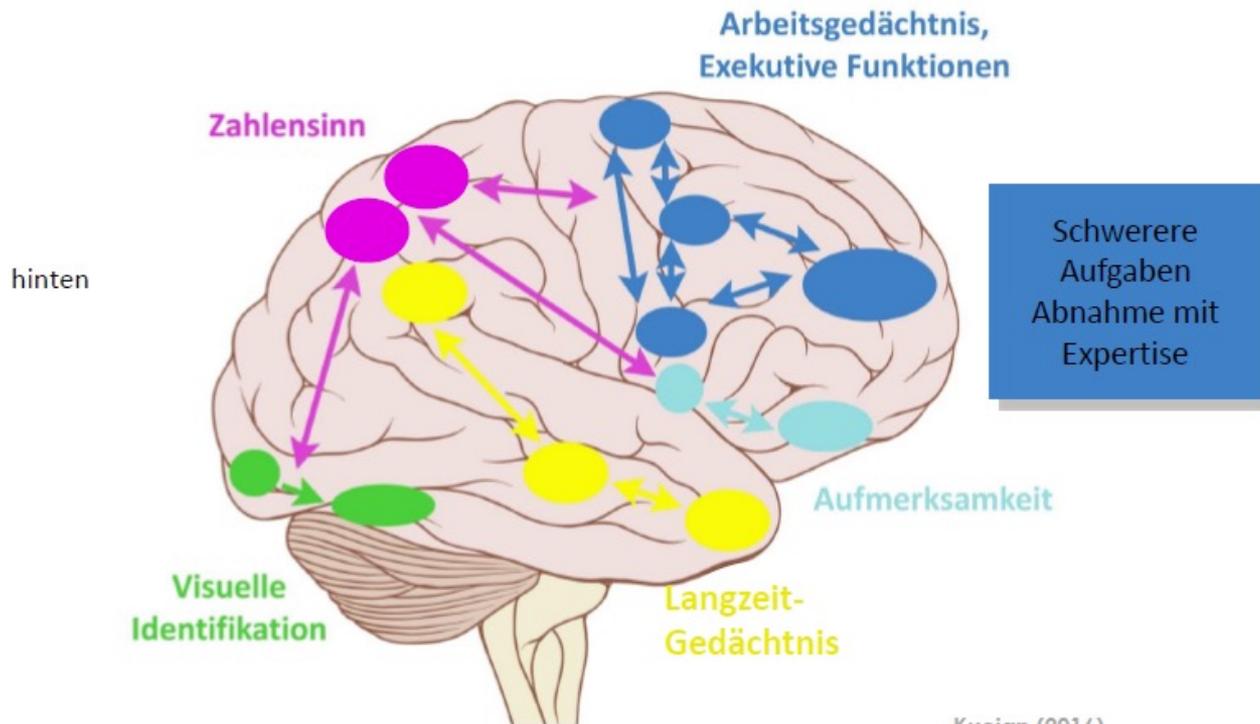
Funktionelle Spezialisierung
rechenspezifischer Areale



McCaskey et al. (2018)



Neuronales Netzwerk der Zahlenverarbeitung

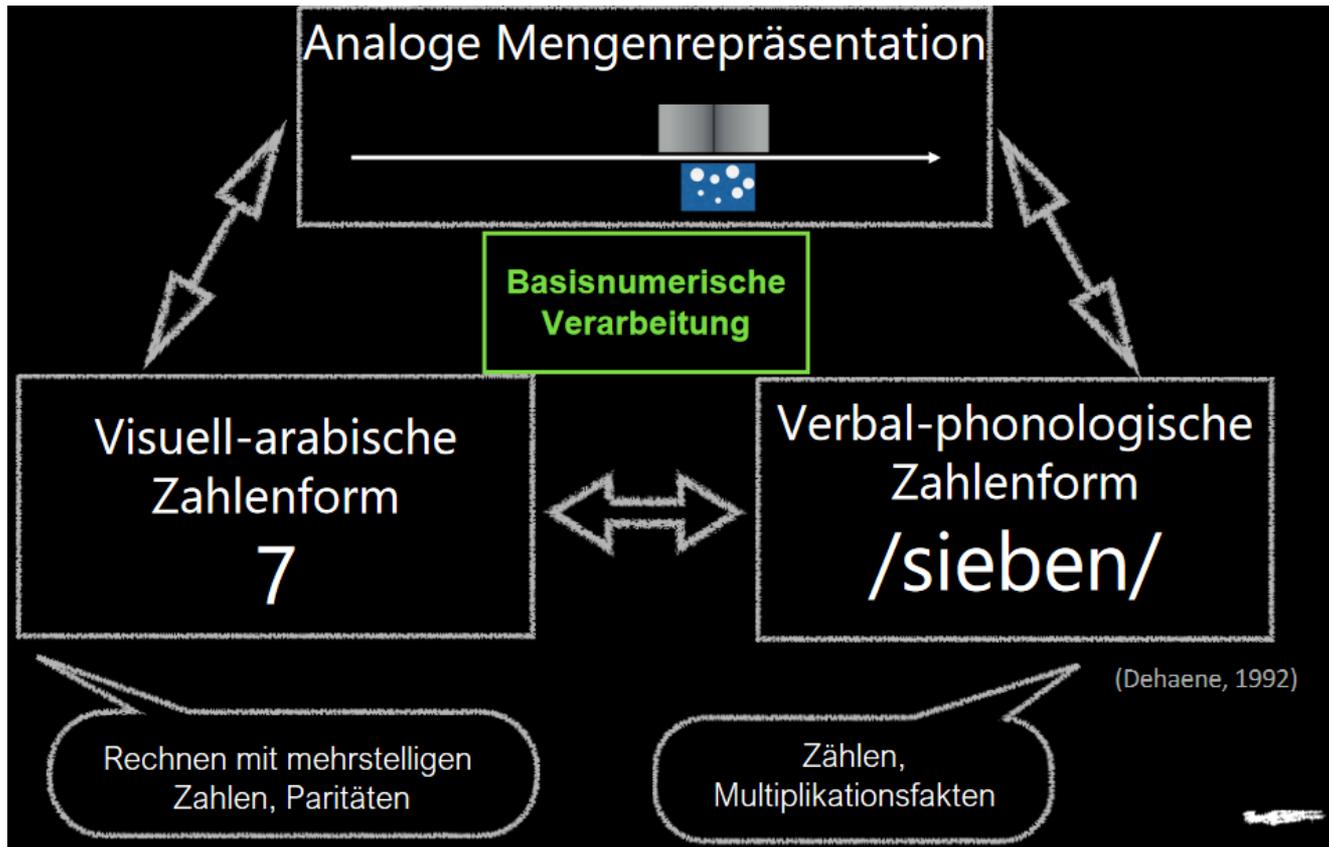


Kucian (2016)

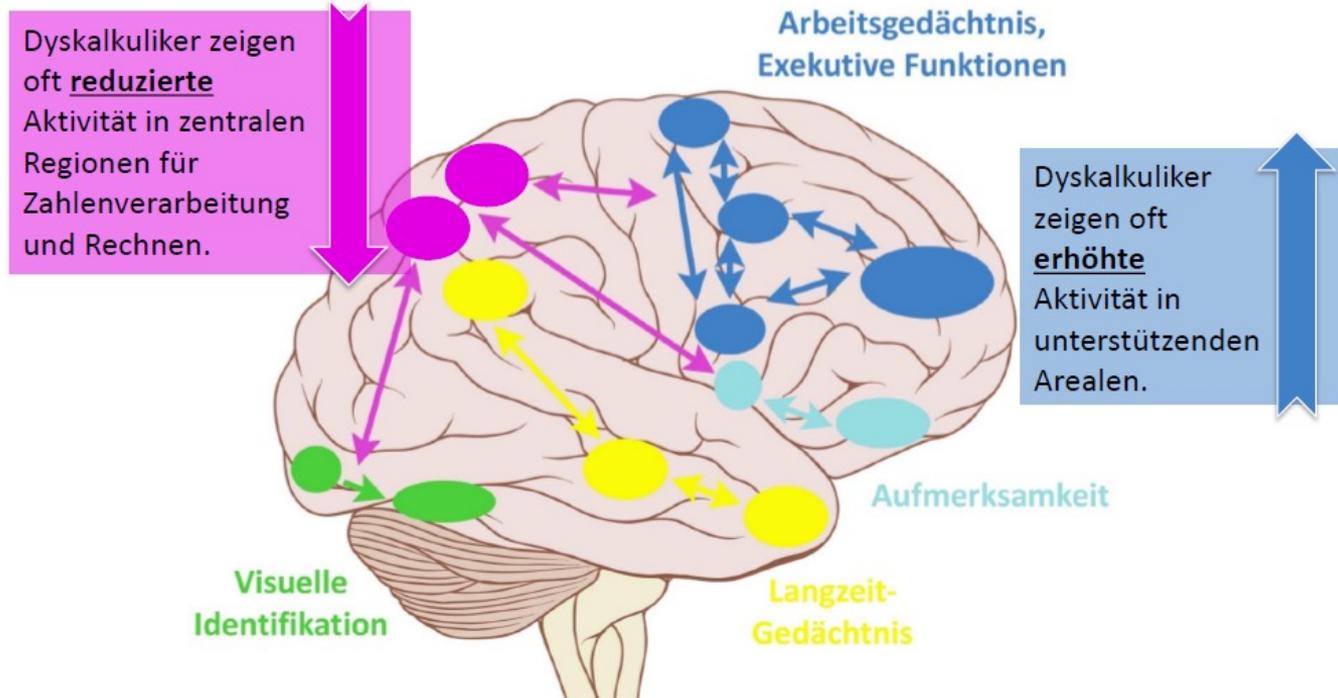


Triple-Code-Modell

Neuroanatomisches Rechenmodell (Dehaene, 1992)



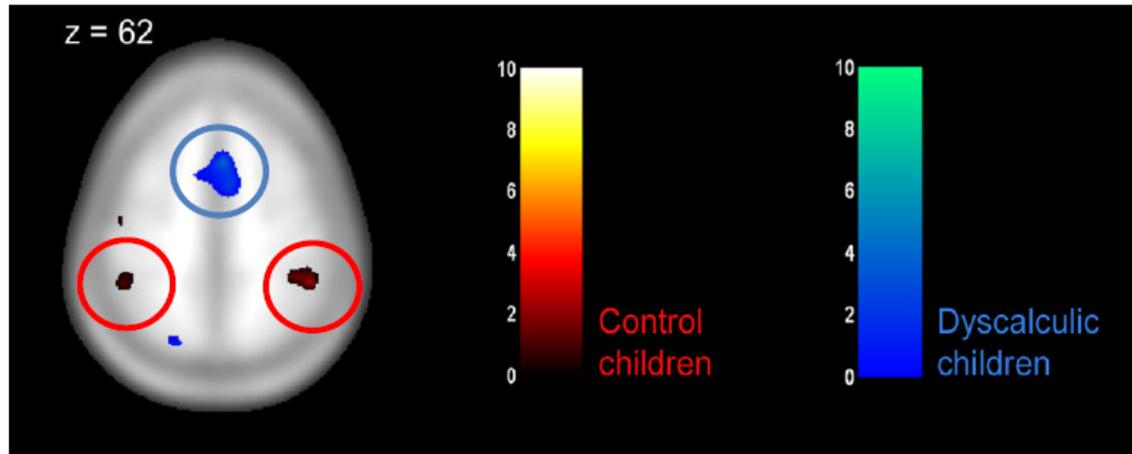
Rechenstörung - Hirnfunktion





Rechenstörung - Hirnaktivität

Nicht-symbolischer Distanzeffekt

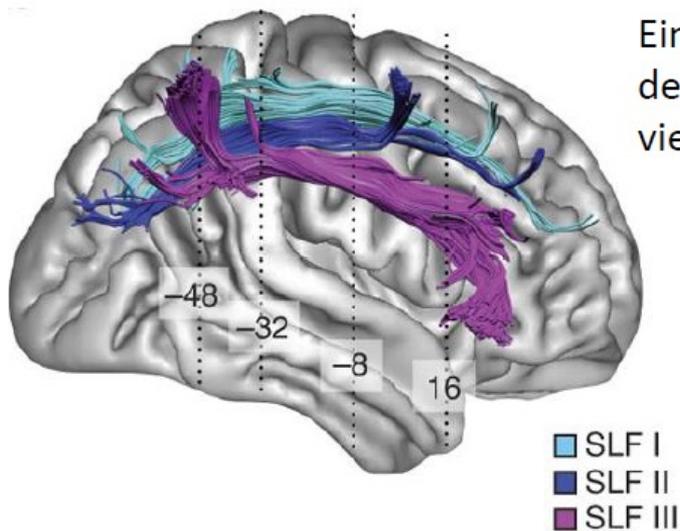


Kucian et al. (2011)



Faserverbindungen bei Rechenstörung

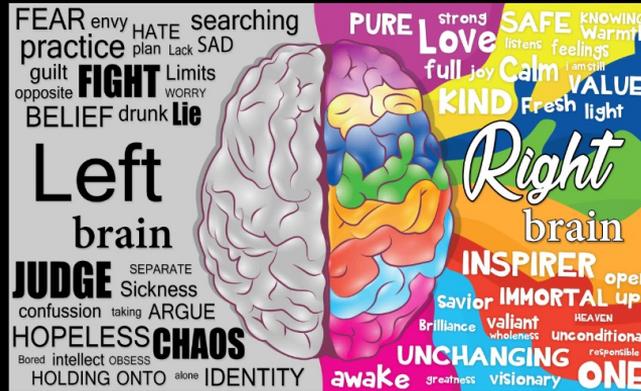
Kinder mit Dyskalkulie zeigen Unterschiede im SLF, einer Faserverbindung, welche parietale, temporale und frontale Areale verbindet.



Ein rascher und exakter Austausch zwischen dem Frontal- und Parietallappen ist wichtig für viele höhere kognitive Fähigkeiten.

Zusammenfassung

Ein Mythos



Es gibt keine wissenschaftliche Belege dafür, dass komplexe Operationen wie Rechnen oder Kreativität von einer Hemisphäre verarbeitet werden. Sogar die einfachsten Aufgaben beinhalten diverse komplexe kognitive Operationen, die eine Vielzahl unterschiedlicher Gehirnareale beanspruchen.



Inhalt des Vortrags



Das rechnende Gehirn und Rechenstörungen

- Welche Regionen?
- Aufbau der Zahlen-
repräsentation
- Typische Entwicklungen
- Atypische Entwicklung



Raumvorstellung & Rechnen

- Raumvorstellung
- Zusammenhang
Raumvorstellung und
Rechnen



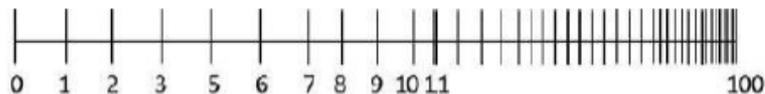
Grundvorstellungen und Ableitungen für die Praxis

- Fachdidaktische Diskussion
- Neurokognitive Ergebnisse vs.
fachdidaktische Tradition
- Praxistransfer



Aufbau der Zahlenrepräsentationen ist räumlich

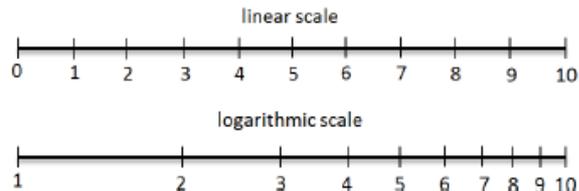
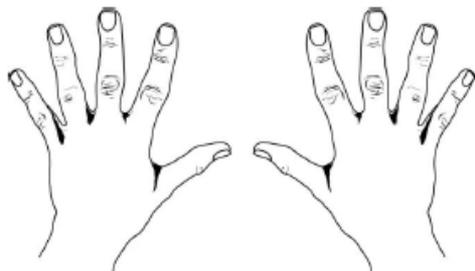
Mentaler Zahlenstrahl



Links → Rechts

Logarithmisch → Linear

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



Dehaene et al. (1993)



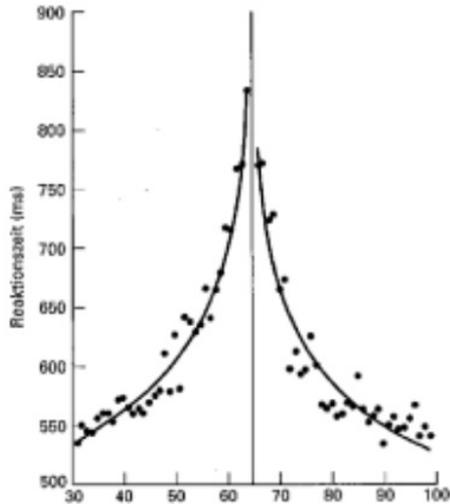
Zahlen im Raum - Mentaler Zahlenstrahl

Zahlen werden räumlich gedacht – Mentaler Zahlenstrahl

Mentaler Zahlenstrahl basiert auf 3 wissenschaftlich gesicherten Effekten:

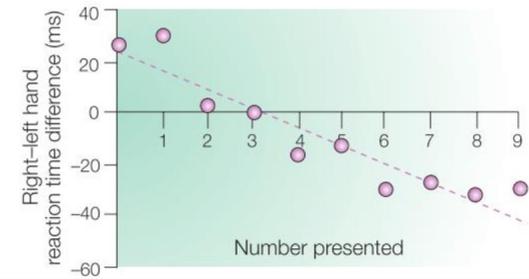
- **Distanzeffekt**
- **SNARC-Effekt (spatial-numerical-association of response codes)**
- **Attention Bias Effekt**

Distanzeffekt und SNARC-Effekt



Reaktionszeiten beim Zahlvergleich mit 65 (Dehaene, 1999, S. 91)

a SNARC effect



Spatial Numerical Association of Response Codes

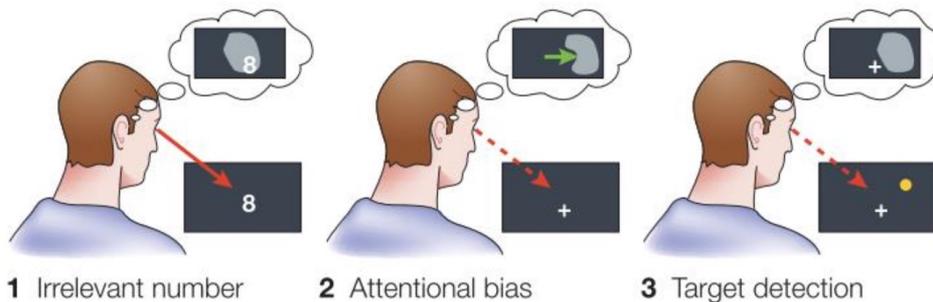


Attention Bias Effect

Zahlen im Raum

Interaktion zwischen Zahlen und visuell-räumlicher Kognition

b Attention bias effect



Attention Bias Effect

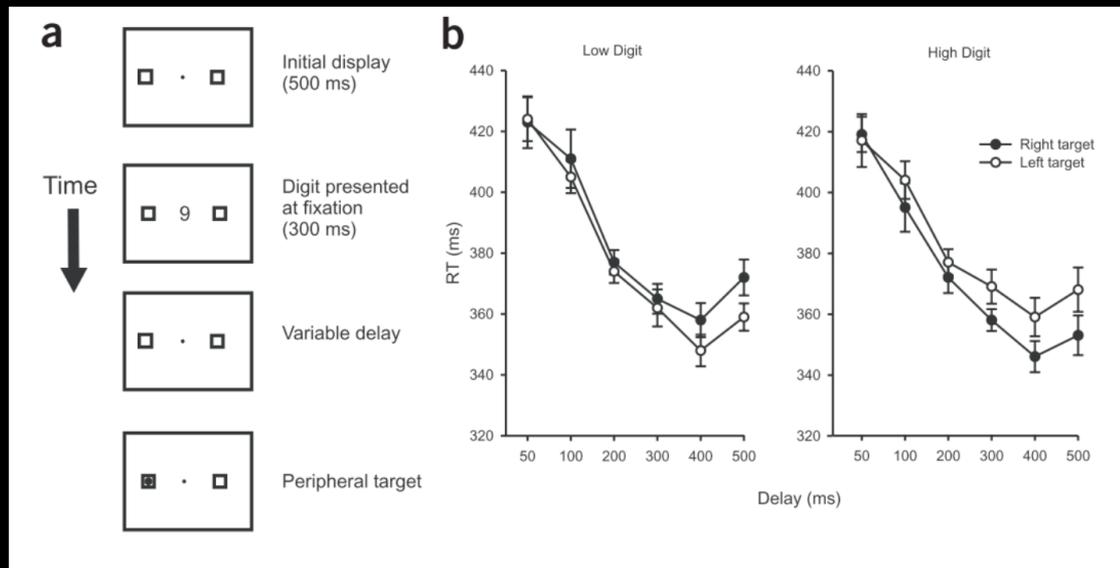
(Fischer et al., 2003)



Attention Bias Effect

Zahlen im Raum

Interaktion zwischen Zahlen und visuell-räumlicher Kognition

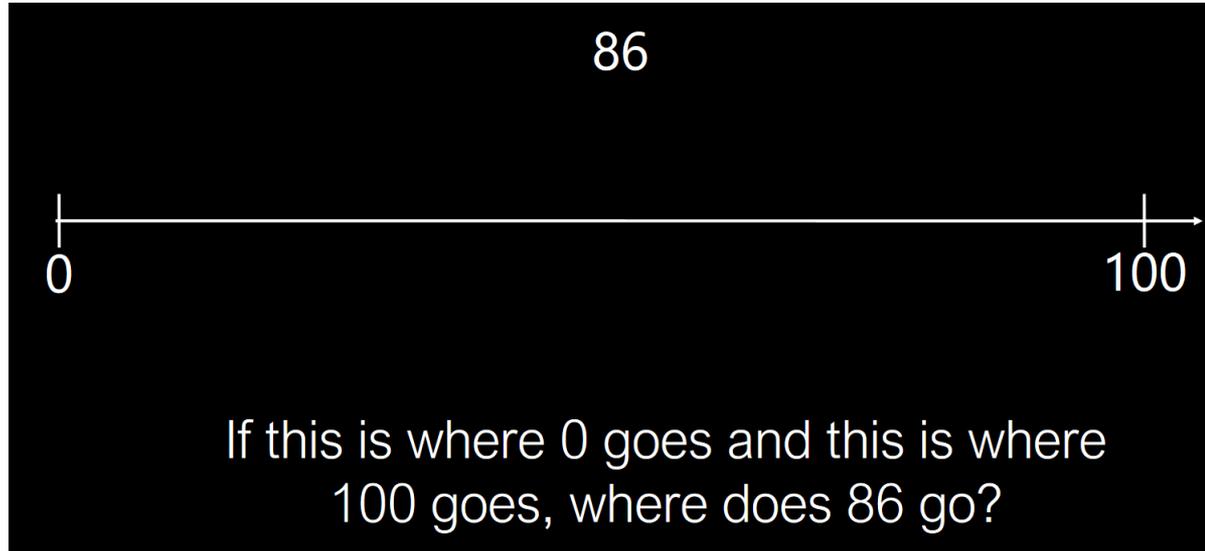


Attention Bias Effect

(Fischer et al., 2003)

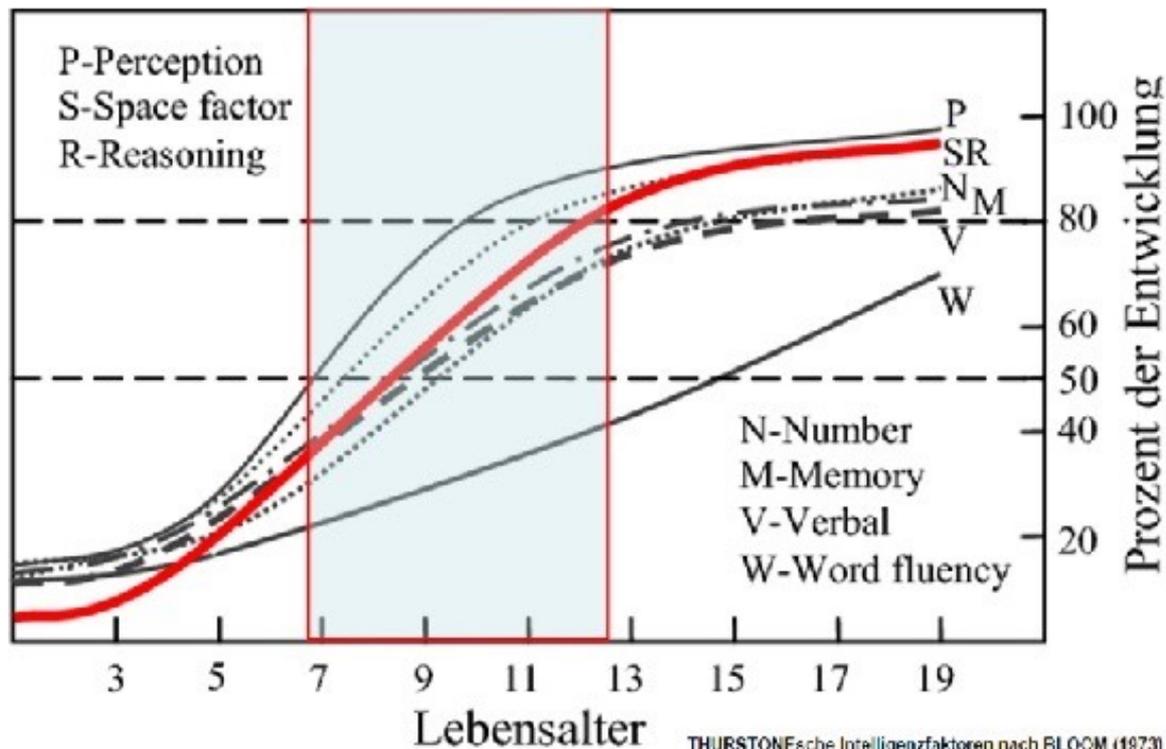


Wie wird der mentale Zahlenstrahl getriggert?





Entwicklung der Raumvorstellung



THURSTONEsche Intelligenzfaktoren nach BLOOM (1973)



Raumvorstellung

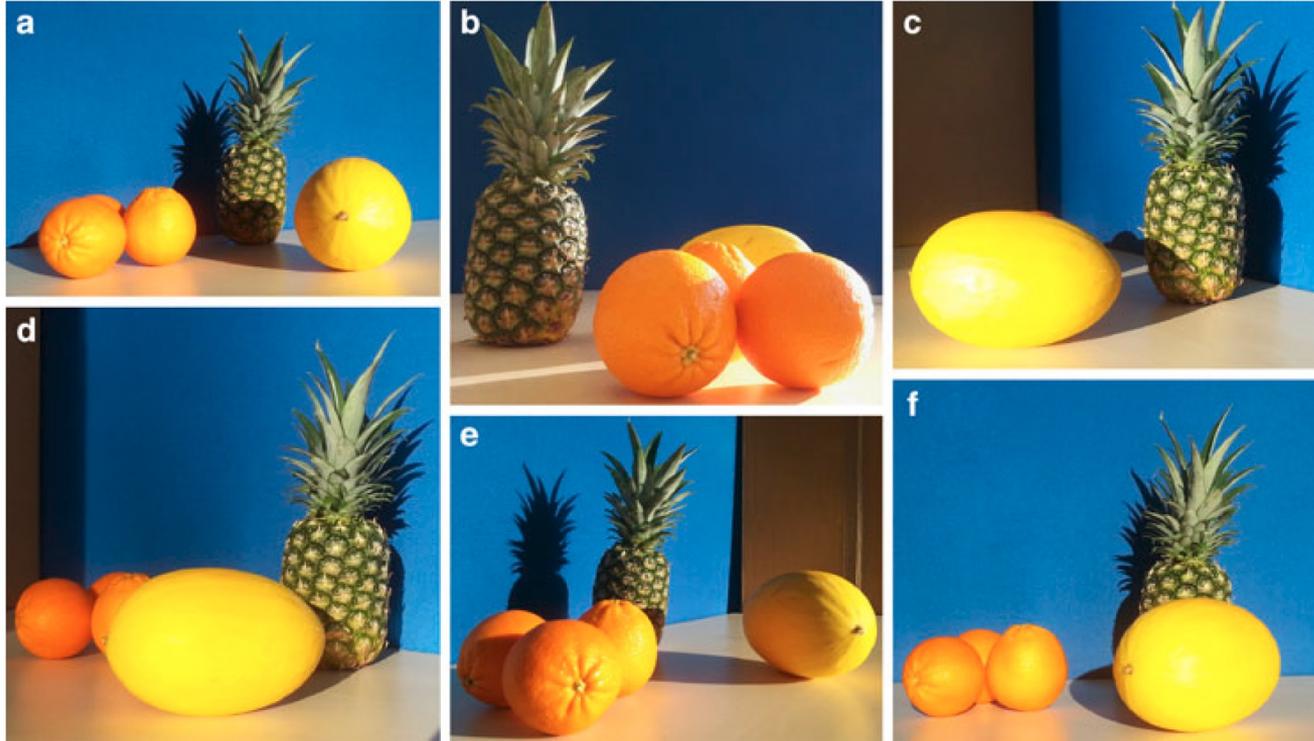


Abb. 2.1 Orientierungstest zum räumlichen Vorstellungsvermögen. (© Markus Helmerich)



Fazit: Zusammenhänge zwischen Raumvorstellung & Rechnen

3 wissenschaftliche Erklärungsansätze:

1. **Räumliche Enkodierung von Zahlen „mental number line“**
(z.B. Hubbard, Piazza, Pinel & Dehaene, 2005; Van Dijck, Ginsburg, Girelli & Gevers, 2015)
2. **Neuroanatomische Nähe** (z.B. Cutini, Scarpa, Scatturin, Dell'Acqua, & Zorzi, 2012; Göbel, Calabria, Farnè, & Rossetti, 2006; Goffaux, Martin, Dormal, Goebel, & Schiltz, 2012; Ranzini, Dehaene, Piazza, & Hubbard, 2009; Kucian et al. 2018)
3. **Visuell-räumlicher Arbeitsspeicher** (z.B. Holmes, Adams, & Hamilton, 2008; Nath & Szűcs, 2014; Szűcs, Devine, Soltesz, Nobes, & Gabriel, 2013; Bergman-Nutley, & Klingberg, 2014)



Inhalt des Vortrags



Das rechnende Gehirn und Rechenstörungen

- Welche Regionen?
- Aufbau der Zahlen-
repräsentation
- Typische Entwicklungen
- Atypische Entwicklung



Raumvorstellung & Rechnen

- Raumvorstellung
- Zusammenhang
Raumvorstellung und
Rechnen



Grundvorstellungen und Ableitungen für die Praxis

- Mentale Repräsentationen
- Praxistransfer



Fachdidaktik versus Kognitionswissenschaft

Kognitions- und neuropsychologische Beiträge stehen stoffdidaktischen Ansätzen teilweise (noch) gegenüber.

Stoffdidaktik: Mathematische Lehr- und Denkprozesse müssen immer aus der Struktur des Faches generiert werden (Wittmann 2013)

versus

Kognitionspsychologie versucht Aufschluss über die Denkweise von Menschen zu erlangen (dieses Denken muss nicht notwendig der inneren, logischen Struktur des Faches folgen) (Lorenz 2017)



Kognitionspsychologie (Morra et al. 2008)

- **Wissen** ist das Produkt eines konstruktiven Prozesses (Momentan im Gedächtnis verfügbar).
- **Denken** ist der Prozess des Operierens mit Symbolen, welche Erfahrungen, Vorstellungen und Gedanken repräsentieren.
- **Gedanken** (z. B. Dreiecke, Zahlen, Begriffe) benötigen eine bestimmte **Repräsentationsform: Enaktiv – Ikonisch – Symbolisch**



Fachdidaktik: „Kognitionspsychologische Erkenntnisse müssen zur Struktur des Faches passen“

Beispiele für Repräsentationsformen von Zahlen:

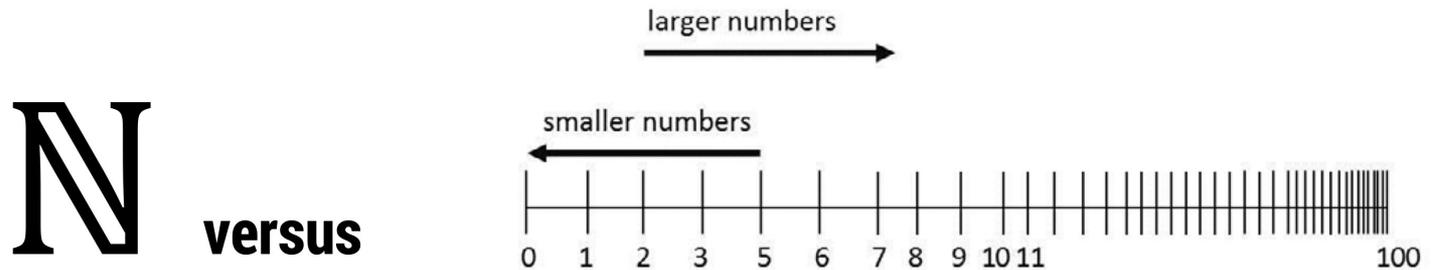
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100





Gedankliche Konstrukte brauchen mentale Repräsentationen

Gedankliche Konstrukte vs. mentale Repräsentationen



Beziehung kann als Strukturgleichheit (Isomorphie) bezeichnet werden (Griesel et al. 2019).



Der mentale Zahlenstrahl als Beispiel einer räumlichen mentalen Repräsentation

Jeder Punkt x repräsentiert eine natürliche Zahl, die Menge ist der Zwischenraum zwischen zwei Punkten x_1 und x_2 .

- Isomorphie bzgl. Nachfolgerbeziehung (Richtungssinn)
- Isomorphie bzgl. Wohlordnung in \mathbb{N} (Ordnung zwischen den Punkten)
- 0 ist natürliche Zahl und 0 ist kein Nachfolger (Zahlenstrahl hat Anfang)

Mentaler ZS ist isomorph zum gedanklichen Konstrukt der natürlichen Zahlen

(dadurch ist der mentale ZS eine mentale Repräsentation)



„Grundvorstellungen“ als Antwort der Fachdidaktik

Mentale Repräsentation = Grundvorstellung

Das Grundvorstellungskonzept verbindet die Ergebnisse der Kognitionspsychologie mit der Fachdidaktik (Griesel et al. 2019).

- Durch Grundvorstellungen werden mathematische Begriffe für SuS erst konkret und dadurch benutzbar. (v. Hofe 1995)
- Normative Grundvorstellungen sind isomorph zum mathematischen Objekt.
- SuS kommen mit deskriptiven GVen (können auch Fehlvorstellungen sein)



Aufbau von mentalen Repräsentationen

Grundvorstellungen (mentale Repräsentationen) zu gedanklichen Konstrukten müssen handelnd oder visuell und konstruktivistisch aufgebaut werden!

Das Kind handelt am geeigneten Material.

- 1 Die mathematische Bedeutung der Handlung wird beschrieben. Zentral: Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.

Das Kind beschreibt die Materialhandlung mit Sicht auf das Material.

- 2 Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung und kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.

Das Kind beschreibt die Materialhandlung ohne Sicht auf das Material.

- 3 Für die Beschreibung der Handlung ist es darauf angewiesen, sich den Prozess am Material vorzustellen.

Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert.

- 4 Gegebenenfalls wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert.

Das Vierphasenmodell (Abbildung aus Wartha & Schulz, 2011, S. 11)



Grundvorstellungen in der Sekundarstufe I

Was sind überhaupt normative Grundvorstellungen?

Bsp. Funktionen

Zuordnungsvorstellung

Eine Funktion ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zu.

Mit dem Mengenbegriff formuliert bedeutet dies: Eine Funktion ordnet jedem Element einer Definitionsmenge genau ein Element einer Zielmenge zu.

Fläche eines Quadrats nimmt mit zunehmender Seitenlänge streng monoton zu.

Kovariationsvorstellung

Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird.

Objektvorstellung

Eine Funktion ist ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt.

Abkühlen von Tee,
Schwingungen,...



Aufbau von Grundvorstellungen

„Der Aufbau mentaler Repräsentationen kann nur in einem eigenständigen Akt durch den Schüler selbst erfolgen.“ (Piaget u. Bruner nach Griesel et al. 2019)

→ *Klassenorganisationsebene (z. B. dialogisches Lernen,...)*

Eigenständiges Zeichnen und das Anfertigen von Skizzen führt zum Aufbau mentaler Repräsentationen und verhindert die Etablierung von Fehlvorstellungen (Griesel et al. 2019)



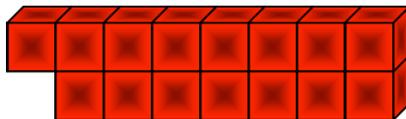
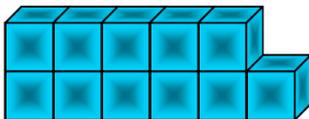
Erneut kommt Raumvorstellung/Geometrie ins Spiel

Raumvorstellung und Geometrie sind im modernen Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe allgegenwärtig...

- ✓ Arithmetische und algebraische Sachverhalte werden mit geometrischen Aktivitäten verdeutlicht. (z.B. die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets gerade)
- ✓ Geometrische Sachverhalte sind oft Anlass für spannende Fragestellungen (z.B. Seitenlänge des Würfels wird verdoppelt, wie verändert sich der Rauminhalt?, Knobelaufgaben, ...)
- ✓ Arithmetisches Erarbeitungsmaterial ist räumlich und generiert Grundvorstellungen für Zahlen, Zahlbeziehungen, Operationen, Stellenwertsystem. (z. B. Dienes, Montessori, ...)
- ✓ Zeichnungen und Visualisierungen zum Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen bedienen sich geometrisch-räumlicher Kognitionen



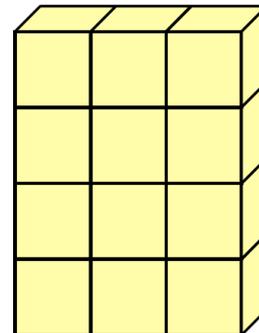
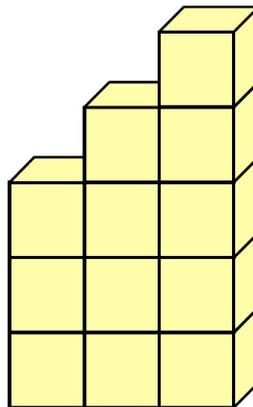
Beispiele



$$n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3*(n+1)$$

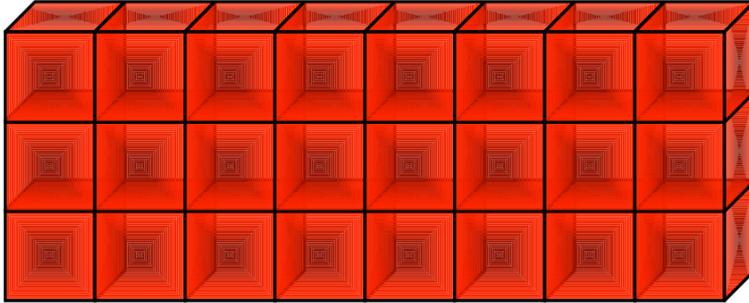
EIS – Prinzip

$$(2n+1) + (2m+1) = 2n+2m+2 = 2*(n+m+1)$$





Beispiel



Lege mit Würfeln Rechtecke aus.

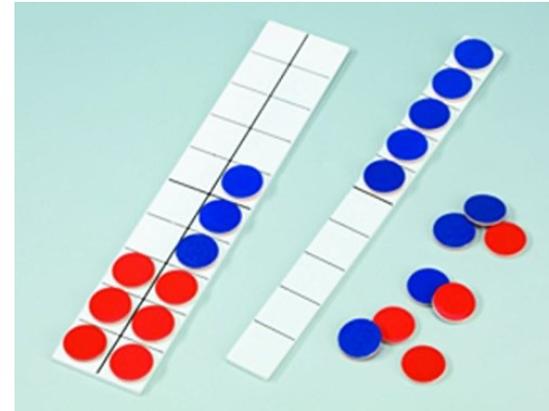
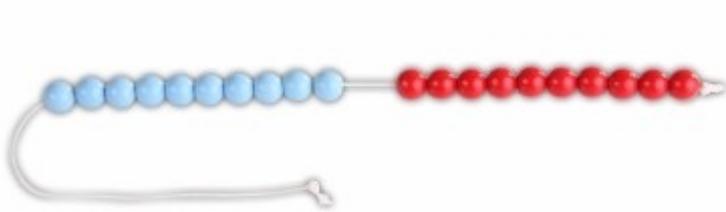
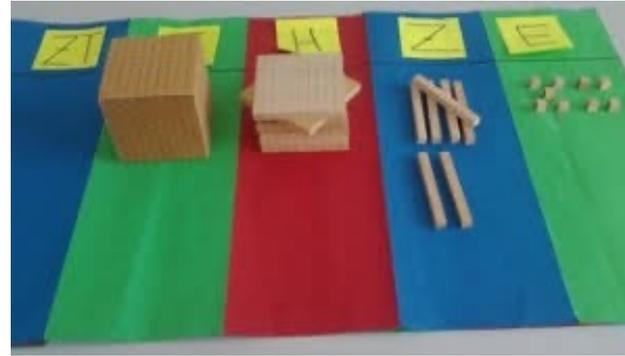
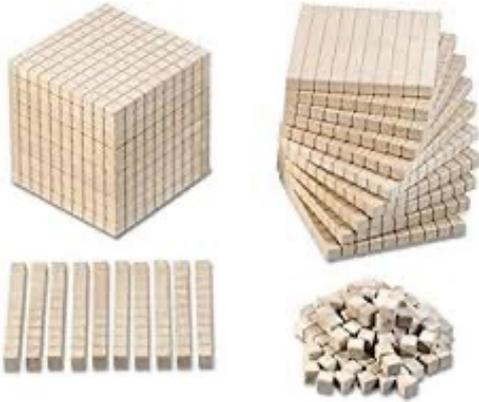
Bei welchen Zahlen gibt es viele Möglichkeiten?

Bei welchen Zahlen kannst du Quadrate legen?

Bei welchen Zahlen werden es nur „Schlangen“?

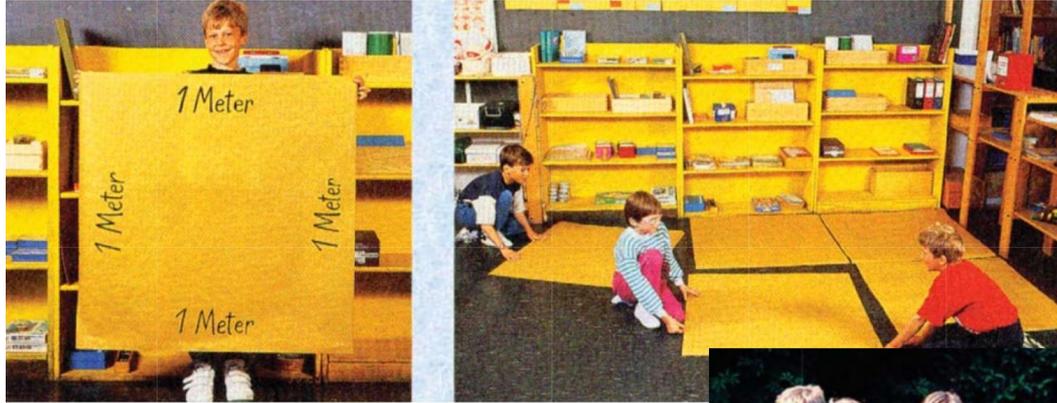


Beispiel: Räumliches Erarbeitungsmaterial für arithmetische Sachverhalte





Beispiele (Grundvorstellungen für Größen)





Zusammenfassung

- Rechnen beruht auf vielen kognitiven Teilleistungen (Arbeitsgedächtnis, visuell-räumliche Verarbeitung,...)
- Unterschiedliche neuronale Netzwerke liegen diesen Teilleistungen zugrunde → Gesamtes Gehirn wird beansprucht.
- Relevanz der Raumvorstellung für das Rechnen (3 Erklärungsansätze)
- Gedankliche Konstrukte brauchen mentale Repräsentationen.
- Grundvorstellungen sind die Antwort der Fachdidaktik auf mentale Repräsentationen und daher gleichzusetzen.
- Mentale Repräsentationen werden durch Materialhandlungen bzw. später durch Visualisierungen (Zeichnung/Graphik) aufgebaut (visuell-räumlich)
- Geometrisch-räumliche Sachverhalte können Anlass für weitreichende und ansprechende arithmetische/mathematische Fragestellungen sein.



Literatur

- Alloway, T. P., & Passolunghi, M. C. (2011). The relationship between working memory, IQ, and mathematical skills in children. *Learning and Individual Differences*, 21(1), 133-137.
- Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews. Neuroscience*, 9(4), 278
- Ansari, D., & Vogel, S. E. (2013). Cognitive neuroscience of numerical cognition.
- Bergman-Nutley, S., & Klingberg, T. (2014). Effect of working memory training on working memory, arithmetic and following instructions. *Psychological research*, 78(6), 869-877.
- Bugden, S., Price, G. R., McLean, D. A., & Ansari, D. (2012). The role of the left intraparietal sulcus in the relationship between symbolic number processing and children's arithmetic competence. *Developmental Cognitive Neuroscience*, 2(4), 448-457.
- Cutini, S., Scarpa, F., Scatturin, P., Dell'Acqua, R., & Zorzi, M. (2014). Number-space interactions in the human parietal cortex: Enlightening the SNARC effect with functional near-infrared spectroscopy. *Cerebral Cortex*, 24(2), 444-451.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive neuropsychology*, 20(3-6), 487-506
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44(1-2), 1-42.
- Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, 284(5416), 970-974.
- Edtbauer, K., Härtel, P., Höllbacher, M., & Marterer, M. (2011). Bildungsanforderungen an Lehrlinge: Kompetenzen und Qualifikationen zu Lehrbeginn aus der Sicht österreichischer Unternehmen. Steirische Volkswirtschaftliche Gesellschaft.
- Fischer, M. H., Castel, A. D., Dodd, M. D., & Pratt, J. (2003). Perceiving numbers causes spatial shifts of attention. *Nature neuroscience*, 6(6), 555-556.
- Franklin, M. S., Jonides, J., & Smith, E. E. (2009). Processing of order information for numbers and months. *Memory & Cognition*, 37(5), 644-654. doi:10.3758/MC.37.5.644
- Goffaux, V., Martin, R., Dormal, G., Goebel, R., & Schiltz, C. (2012). Attentional shifts induced by uninformative number symbols modulate neural activity in human occipital cortex. *Neuropsychologia*, 50(14), 3419-3428.
- Goffin, C., & Ansari, D. (2016). Beyond magnitude: Judging ordinality of symbolic number is unrelated to magnitude comparison and independently relates to individual differences in arithmetic. *Cognition*, 150, 68-76.
- Graß, K. H., & Krammer, G. (2018). Direkte und indirekte Einflüsse der Raumvorstellung auf die Rechenleistungen am Ende der Grundschulzeit. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 39(1), 43-67.
- Gregg, E. C., Thurstone, F. L., & Epp, E. R. (1973). Ultrasound in Diagnostic Medicine: A Report from the Radiation Study Section of the National Institutes of Health. *Radiology*, 109(3), 737-742.
- Griesel, H., vom Hofe, R., & Blum, W. (2019). Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(1), 123-133.
- Helmerich, M., & Lengnink, K. (2016). Einführung Mathematik Primarstufe-Geometrie. Springer Berlin Heidelberg.
- Holmes, J., Adams, J. W., & Hamilton, C. J. (2008). The relationship between visuospatial sketchpad capacity and children's mathematical skills. *European Journal of Cognitive Psychology*, 20(2), 272-289.
- Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, 6(6), 435-448.
- Kaufmann, L., Vogel, S. E., Starke, M., Kremser, C., Schocke, M., & Wood, G. (2009). Developmental dyscalculia: compensatory mechanisms in left intraparietal regions in response to nonsymbolic magnitudes. *Behavioral and Brain Functions*, 5(1), 35.
- Knops, A., & Willmes, K. (2014). Numerical ordering and symbolic arithmetic share frontal and parietal circuits in the right hemisphere. *Neuroimage*, 84, 786-795.
- Kucian, K., McCaskey, U., O'Gorman Tuura, R., & von Aster, M. (2018). Neurostructural correlate of math anxiety in the brain of children. *Translational psychiatry*, 8(1), 273.



Literatur

- Kucian, K. (2016). Developmental dyscalculia and the brain. In Development of mathematical cognition (pp. 165-193). Academic Press.
- Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., ... & von ASTER, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, 57(3), 782-795.
- Lorenz, J. H. (2017). Einige Anmerkungen zur Repräsentation von Wissen über Zahlen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38(1), 125-139.
- Lyons, I. M., & Beilock, S. L. (2013). Ordinality and the nature of symbolic numbers. *Journal of Neuroscience*, 33(43), 17052-17061.
- Lyons, I. M., Price, G. R., Vaessen, A., Blomert, L., & Ansari, D. (2014). Numerical predictors of arithmetic success in grades 1–6. *Developmental Science*, 17(5), 714-726.
- McCaskey, U., Von Aster, M., Maurer, U., Martin, E., O’Gorman Tuura, R., & Kucian, K. (2018). Longitudinal brain development of numerical skills in typically developing children and children with developmental dyscalculia. *Frontiers in human neuroscience*, 11, 629.
- Morra, S., Gobbo, C., Marini, Z., & Sheese, R. (2008). Cognitive development – neo-piagetion perspectives. New York: Lawrence Erlbaum.
- Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, 215(5109), 1519-1520.
- Nath, S., & Szücs, D. (2014). Construction play and cognitive skills associated with the development of mathematical abilities in 7-year-old children. *Learning and Instruction*, 32, 73-80.
- O’Connor, P. A., Morsanyi, K., & McCormack, T. (2018). Young children’s non-numerical ordering ability at the start of formal education longitudinally predicts their symbolic number skills and academic achievement in maths. *Developmental science* 12645.
- Ranzini, M., Dehaene, S., Piazza, M., & Hubbard, E. M. (2009). Neural mechanisms of attentional shifts due to irrelevant spatial and numerical cues. *Neuropsychologia*, 47(12), 2615-2624.
- Rivera, S. M., Reiss, A. L., Eckert, M. A., & Menon, V. (2005). Developmental changes in mental arithmetic: evidence for increased functional specialization in the left inferior parietal cortex. *Cerebral cortex*, 15(11), 1779-1790.
- Sasanguie, D., Lyons, I. M., De Smedt, B., & Reynvoet, B. (2017). Unpacking symbolic number comparison and its relation with arithmetic in adults. *Cognition*, 165, 26-38.
- Sommerauer, G., Graß, K.-H., Grabner, R., & Vogel, S. (2020). The semantic control network mediates the relationship between symbolic numerical order processing and arithmetic performance in children.
- Suchań, B., Höller, I., & Wallner-Paschon, C. (2019). PISA 2018. Grundkompetenzen am Ende der Pflichtschulzeit im internationalen Vergleich.
- Szucs, D., Devine, A., Soltesz, F., Nobes, A., & Gabriel, F. (2013). Developmental dyscalculia is related to visuo-spatial memory and inhibition impairment. *cortex*, 49(10), 2674-2688.
- Van Dijck, J. P., Ginsburg, V., Girelli, L., & Gevers, W. (2015). Linking numbers to space. *The Oxford handbook of numerical cognition*, 89-105.
- Vogel, S. E., Goffin, C., & Ansari, D. (2015). Developmental specialization of the left parietal cortex for the semantic representation of Arabic numerals: an fMR-adaptation study. *Developmental cognitive neuroscience*, 12, 61-73.
- Vogel, S. E., Remark, a., & Ansari, D. (2015). Differential processing of symbolic numerical magnitude and order in 1st grade children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 129, 26–39
- von Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Wartha, S., & Schulz, A. (2011). Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. Kiel: IPN.
- Wittmann, E. C. (2013). Grundfragen des Mathematikunterrichts. Springer-Verlag.



Pädagogische
Hochschule
Steiermark



Φ-LEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

Pädagogische Hochschule Steiermark
Hasnerplatz 12, 8010 Graz, Austria
Mail: karl1.grass@phst.at
Telefon: +43 (0)316/8067 - 6115

