Vereinigen oder hinzufügen? Vorstellungen zu Rechenoperationen mit Wahrscheinlichkeiten von Mathematik-Lehramtsstudierenden

FLORIAN STAMPFER, INNSBRUCK; PIA TSCHOLL, INNSBRUCK

Welche Grundvorstellungen zur Addition und Multiplikation rufen Sekundarstufenlehramtsstudierende im Kontext der Stochastik auf? Ausgehend vor dem Hintergrund des *Grundvorstellungskonzepts* und der *Knowledge in Pieces* Theorie wird dieser Frage theoretisch nachgegangen, um dann angelehnt an eine empirische Untersuchung von Schüler*innen der 7. und 9. Schulstufe eine Erhebung mit 110 Lehramtsstudierenden des Unterrichtsfachs Mathematik vorzustellen. Konkret werden Rechengeschichten zur Addition und Multiplikation im Kontext der Stochastik erhoben, um Einblicke in die zugrundeliegenden Grundvorstellungen zu erhalten. Die Ergebnisse lassen im Einklang mit theoretischen Überlegungen und im Gegensatz zu empirischen Befunden vermuten, dass es den Studierenden für die Multiplikation deutlich besser gelingt, tragfähige Grundvorstellungen im Kontext der Stochastik zu aktivieren. Das Aufrufen tragfähiger Grundvorstellungen für die Addition im stochastischen Kontext wird vermutlich durch die prominente Grundvorstellung des *Hinzufügens* erschwert. Konkrete Implikationen dieser Ergebnisse für den Schulunterricht werden diskutiert.

1 Über automatisiertes Ausführen und nicht automatisches Verstehen

Plutimikation ist eine Wortneuschöpfung der Kinderbuchautorin Astrid Lindgren, die eine fehlerhafte Vermischung der Addition und Multiplikation durch ihre Protagonistin Pippi Langstrumpf beschreibt. „Zweimal drei macht vier, widdewiddewitt und drei macht neune..." singt Pippi fröhlich im Intro der Kinderbuchverfilmung und sagt den herkömmlichen Rechenregeln zur Addition und Multiplikation damit den Kampf an. Auch wenn Pippi also scheinbar ihre Schwierigkeiten mit den Grundrechnungsarten hat, gelten die rein prozeduralen Ausführungen der Addition und der Multiplikation als relativ gut ausgeprägt, während konzeptuelles Verständnis dieser Rechenoperationen bzw. die Rückführung derselben in reale Kontexte eine deutlich größere Herausforderung darstellen (Prediger 2011). Dabei weisen empirische Befunde darauf hin, dass Kinder ein deutlich schlechteres konzeptuelles Verständnis der Multiplikation rationaler Zahlen im Vergleich zur Addition aufweisen (Prediger 2008a). Dies wird dadurch erklärt, dass die zugrundeliegenden Grundvorstellungen der Multiplikation im Zuge der Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ größere Diskontinuitäten durchlaufen als jene der Addition (Prediger 2011). Dass diese Diskontinuitäten nicht nur für Kinder große Hürden darstellen, zeigen Studien von Stampfer & Hell (2018): Bei 214 von 318 untersuchten österreichischen Primarstufenlehramtsstudierenden konnte ein *Natural Number Bias* – eine fehlerhafte Übertragung von Eigenschaften natürlicher Zahlen auf Bruchzahlen – festgestellt werden. Dabei ist ein solides Verständnis grundlegender schulischer Inhalte gerade für Mathematik-Lehramtsstudierende eine notwendige Voraussetzung, um mathematische Inhalte fachdidaktisch sinnvoll durchdringen und aufbereiten zu können (Krauss et al. 2008; Kunter et al. 2011). Ein hohes fachdidaktisches Wissen der Lehrperson ist wiederum ein starker Prädiktor für den Lernerfolg der Schüler*innen (Krauss et al. 2008; Kunter et al. 2011). Für die mathematikdidaktische Ausbildung von Lehramtsstudierenden wäre es also nicht unerheblich, dass tragfähige konzeptuelle Vorstellungen zu wesentlichen mathematischen Inhalten – etwa zu Bruchzahlen oder zu Rechenoperationen – bei den Studierenden bereits durch ihre schulische Vorbildung vorlägen. Zudem wäre es wünschenswert, dass diese soliden Vorstellungen flexibel auf diverse Kontexte, etwa neue Zahlenbereiche oder inhaltliche Themengebiete, übertragen werden können.

Während es Studien zu Verständnisschwierigkeiten bei Lehramtsstudierenden ausgelöst durch die Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ gibt (siehe Stampfer & Hell 2018), ist bisher unerforscht,

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 56, 2024, S. 141 - 160.

welche Auswirkungen Kontextverschiebungen[5] auf das Verständnis von Rechenoperationen mit Bruchzahlen haben. Solche Kontextverschiebungen können nämlich entsprechend der *Knowledge in Pieces Theorie* (diSessa 2018) eine Neuorganisation intuitiver Wissenselemente erfordern und so potentielle Diskontinuitäten auslösen. Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich demnach mit der Frage, in welchem Umfang tragfähige konzeptuelle Vorstellungen bei Mathematik-Lehramtsstudierenden der Sekundarstufe zur Addition und Multiplikation von Bruchzahlen im Kontext der Stochastik vorhanden sind.

Um sich dieser Forschungsfrage anzunähern, wird nachfolgend geklärt, wie tragfähige Vorstellungen in der Mathematikdidaktik theoretisch gerahmt sind, welche Vorstellungen in Bezug auf die Addition und die Multiplikation als wünschenswert angesehen werden, wie Zahlenbereichs- und Kontextverschiebungen entsprechend der Knowledge in Pieces Theorie diesbezügliche Diskontinuitäten hervorrufen können und welche empirischen Befunde es dazu bereits gibt. Anschließend werden auf Basis dieser Ausführungen Forschungsfragen und Hypothesen formuliert, welchen wir uns methodisch mittels erhobener Rechengeschichten (n = 110, Lehramtsstudierende Sekundarstufe Mathematik, 4. Semester) widmen. Die Diskussion der Ergebnisse sowie ein Ausblick folgen.

2 Grundvorstellungen zur Addition und Multiplikation im Kontext mathematischer Umbrüche

2.1 Grundvorstellungen – eine theoretische Perspektive

Grundvorstellungen sind ein Schlüsselbegriff der Mathematikdidaktik, wenn es um die Beziehung zwischen einem mathematischen Inhalt und der individuellen Begriffsbildung geht. Unter Grundvorstellungen werden tragfähige Erklärungsmodelle für mathematische Konzepte verstanden (vom Hofe 1995; vom Hofe & Blum 2016; vom Hofe & Roth 2023), wobei für das umfassende Verständnis eines mathematischen Begriffs nicht nur eine, sondern mehrere Grundvorstellungen notwendig sind (Prediger 2011; vom Hofe 2003). Diese Grundvorstellungen bilden schließlich das wesentliche Übersetzungswerkzeug zwischen mathematischen Situationen, den individuellen Vorstellungen der Lernenden und der Realität (vom Hofe & Blum 2016). Im Modellierungskreislauf werden Grundvorstellungen somit an den Schnittstellen zwischen der mathematischen und realen Welt verortet (Prediger 2010, 2011; vom Hofe & Blum 2016), wie in Abb. 1 demonstriert wird.

Das Grundvorstellungskonzept, welches mehrere Weiterentwicklungen erfahren hat, zeichnet sich durch drei charakteristische Prozesse aus (vom Hofe & Blum 2016):

1. Ein mathematisches Konzept wird durch die Anbindung an bereits bestehendes Wissen, gefestigte Erfahrungen oder (mental) repräsentierte Handlungen mit Bedeutung versehen.
2. Mentale Repräsentationen des mathematischen Konzepts werden ausgebildet, welche operatives Handeln auf der Ebene des Denkens ermöglichen.
3. Die gewonnenen Erkenntnisse können durch das Erkennen von gleichartigen Strukturen in neuen innermathematischen bzw. durch Modellierungsprozesse in außermathematischen Kontexten angewendet werden.

Dabei wird zwischen *primären* und *sekundären* Grundvorstellungen unterschieden. Primäre Grundvorstellungen haben *repräsentativen* Charakter, da sie auf Handlungen an konkreten Objekten im realen Leben fußen (vom Hofe & Blum 2016). Diese Handlungserfahrungen werden bereits vor einer schulischen Auseinandersetzung mit den dahinterliegenden mathematischen Konzepten gemacht und

[5] Mit *Kontexten* sind hier und im Folgenden vor allem weitere mathematische Inhaltsbereich gemeint, z. B. Arithmetik, Geometrie oder Stochastik. Allerdings lassen sich die Überlegungen auch auf thematische Kontexte, wie z. B. Sport, Buchhaltung und Naturwissenschaften, übertragen.

sind daher einer elementaren Grundvorstellungsbildung zuzuschreiben (vom Hofe & Blum 2016; vom Hofe & Roth 2023). Die fortgeschrittenere Art der Ausbildung von Grundvorstellungen geschieht im mathematischen Operieren mit symbolischen Objekten, z. B. Zahlen und Funktionen, wie es häufig im Schulunterricht praktiziert wird (vom Hofe & Blum 2016; vom Hofe & Roth 2023). Im Zuge dessen geht es nicht mehr um konkrete Handlungen an realen Objekten, sondern viel mehr um einen mentalen bzw. vorgestellten Umgang mit mathematischen Konzepten und ihren Repräsentationen. Diese sekundären Grundvorstellungen haben somit *symbolischen* Charakter (vom Hofe & Blum 2016).

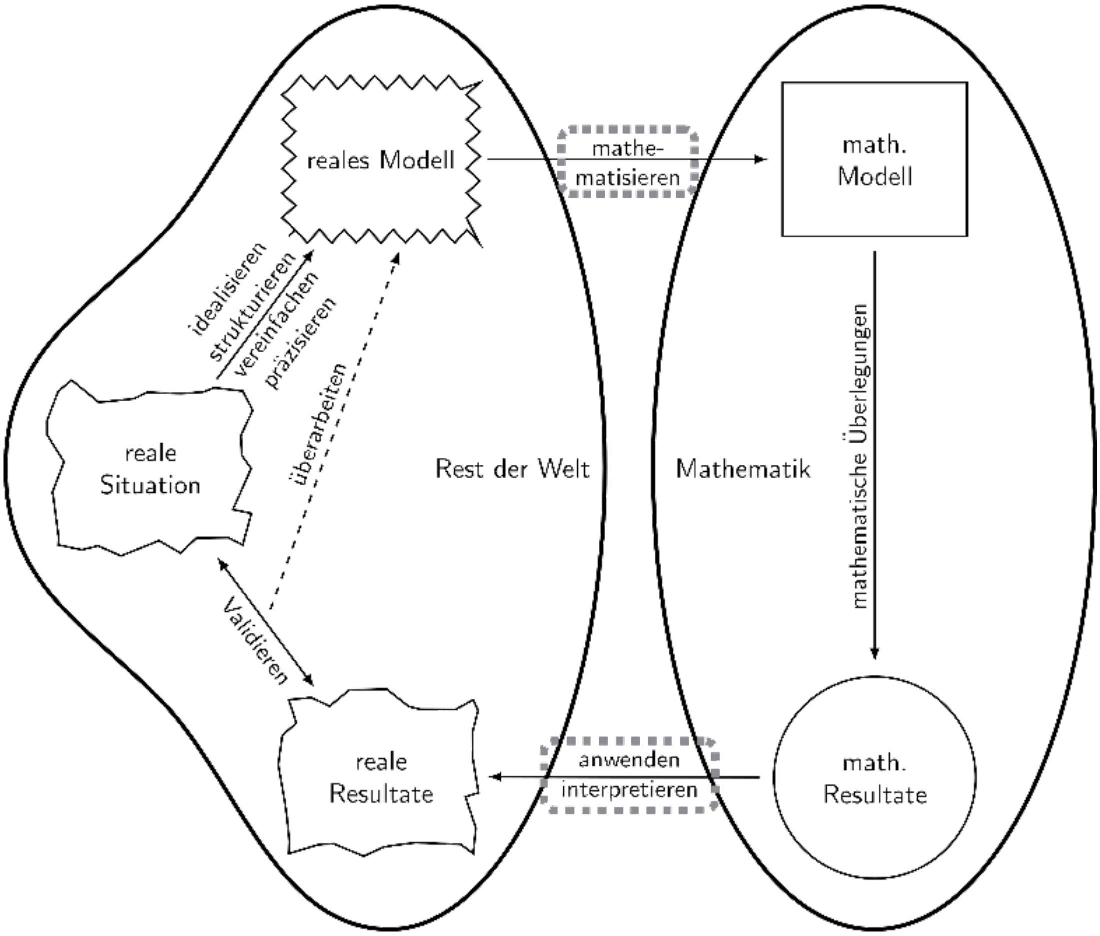

Abb. 1: Darstellung des Modellierungskreislaufs, wobei für die grau punktiert eingerahmten Übersetzungsprozesse Grundvorstellungen benötigt werden (eigene Darstellung nach Blum & Leiß 2005, S. 19).

Neben der Aneignung von Grundvorstellungen bedarf auch der fachdidaktische Umgang mit ihnen einer genaueren Unterscheidung. Zum einen können Grundvorstellungen *normativ* aufgefasst werden und dienen dabei als unterrichtlicher Anker im Sinne einer angestrebten, adäquaten Interpretation mathematischer Konzepte (vom Hofe & Blum 2016). Darüber hinaus beinhaltet das Grundvorstellungskonzept einen deskriptiven Aspekt, welcher die Einordnung (individueller) mentaler Modelle mathematischer Inhalte von Lernenden – welche in der Regel mehr oder weniger stark von den normativ angestrebten Grundvorstellungen abweichen – erlaubt (vom Hofe & Blum 2016). Unterschiedliche Zielsetzungen im Umgang mit mathematischen Grundvorstellungen in Wissenschaft und (Unterrichts-)Praxis bedürfen daher eines diesbezüglichen Perspektivenwechsels. Um die Verwendung dieser unterschiedlichen Konnotationen explizit zu machen, wird nachfolgend in Anlehnung an Prediger (2011) der Ausdruck *Grundvorstellungen* für die normative Perspektive und der Begriff *individuelle Modelle* für die deskriptive Perspektive verwendet. Dabei ist zu berücksichtigen, dass normativ nicht mit *global* gleichzusetzen ist, d. h. auch normative Grundvorstellungen sind nicht in allen Kontexten uneingeschränkt passend. Das ist auch der Grund, warum es in der Regel mehrere Grundvorstellungen zu einem mathematischen Konzept gibt.

2.2 Grundvorstellungen zur Addition und Multiplikation

Sowohl für die Addition als auch für die Multiplikation gibt es Grundvorstellungen, die sich in der fachdidaktischen Forschung konsolidiert haben.

Für die Addition in $\mathbb{N}$ sind etwa die Grundvorstellungen des *Vereinigens*[6] und des *Hinzufügens*[7] – in unterschiedlichen akademischen Werken anders benannt, aus verschiedenen Perspektiven betrachtet oder weiter unterteilt (siehe z. B. vom Hofe & Roth 2023 oder Padberg 2009) – relevant.

Die Multiplikation ist diesbezüglich etwas umfangreicher, so finden sich die *wiederholte Addition*[8], die *Flächeninhaltsvorstellung*[9], das *Vergrößern* bzw. der *multiplikative Vergleich*[10] in einer (nicht vollständigen) Sammlung möglicher Grundvorstellungen für diese Rechenoperation in $\mathbb{N}$ (Padberg 2009; Prediger 2011; vom Hofe & Roth 2023).

Entsprechend der Knowledge in Pieces Theorie, die eine Spezialform der Conceptual Change Theorie darstellt, können solche Grundvorstellungen als *p-prims* – also einzelne, intuitive Wissensstücke – aufgefasst werden (diSessa 2018). Diese Auffassung von Grundvorstellungen passt mit dem von Susanne Prediger (2008b) entwickeltem Mehrebenenmodell zur Analyse des Operationsverständnisses zusammen, wonach Schwierigkeiten bezüglich Rechenoperationen auf der formalen, der algorithmischen oder der *intuitiven* Ebene erfolgen können. Diskontinuitäten auf intuitiver Ebene beziehen sich neben dem Anwendungsbezug und der Vorstellung von Regeln auf die individuellen Modelle der Bedeutung von Rechenoperationen und Bruchzahlen (Prediger 2008a). Diese Wissenselemente können in verschiedenen Kontexten jeweils tragfähige Grundvorstellungen oder eben nicht tragfähige individuelle Modelle sein. Wissenszuwachs erfolgt demnach dann, wenn diese intuitiven p-prims – individuelle Modelle bzw. Grundvorstellungen – entsprechend des Kontextes sinnvoll in *coordination classes* strukturiert werden. Je nach betrachtetem Kontext müssen p-prims also anders (oder gar nicht) aktiviert, vernetzt oder womöglich sogar neu erschlossen werden, damit sie tragfähig bzw. nicht irreführend sind (diSessa 2018). Eine solche Neuorganisation oder Anpassung der p-prims bezüglich der individuellen Modelle bzw. der Grundvorstellungen zur Addition und Multiplikation wird beispielsweise bei der Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ notwendig. Abb. 2 gibt einen Überblick über die Umbrüche, die bei der Zahlenbereichserweiterung in Bezug auf die beiden betrachteten Rechenoperationen zum Tragen kommen:

[6] Tom hat 1€ und Annika hat 2€. Wie viel Geld in € besitzen Tom und Annika gemeinsam?

[7] Tom hat 1€ und bekommt zuerst von Annika und dann Pippi jeweils noch 1€ geschenkt. Wie viel Geld in € besitzt Tom jetzt?

[8] „3·2“ bedeutet 2+2+2.

[9] „3·2“ ist der Flächeninhalt eines Rechtecks mit Seitenlängen 3 und 2.

[10] „·4“ bedeutet, dass etwas viermal so groß/schnell/viel… wie ursprünglich wird.

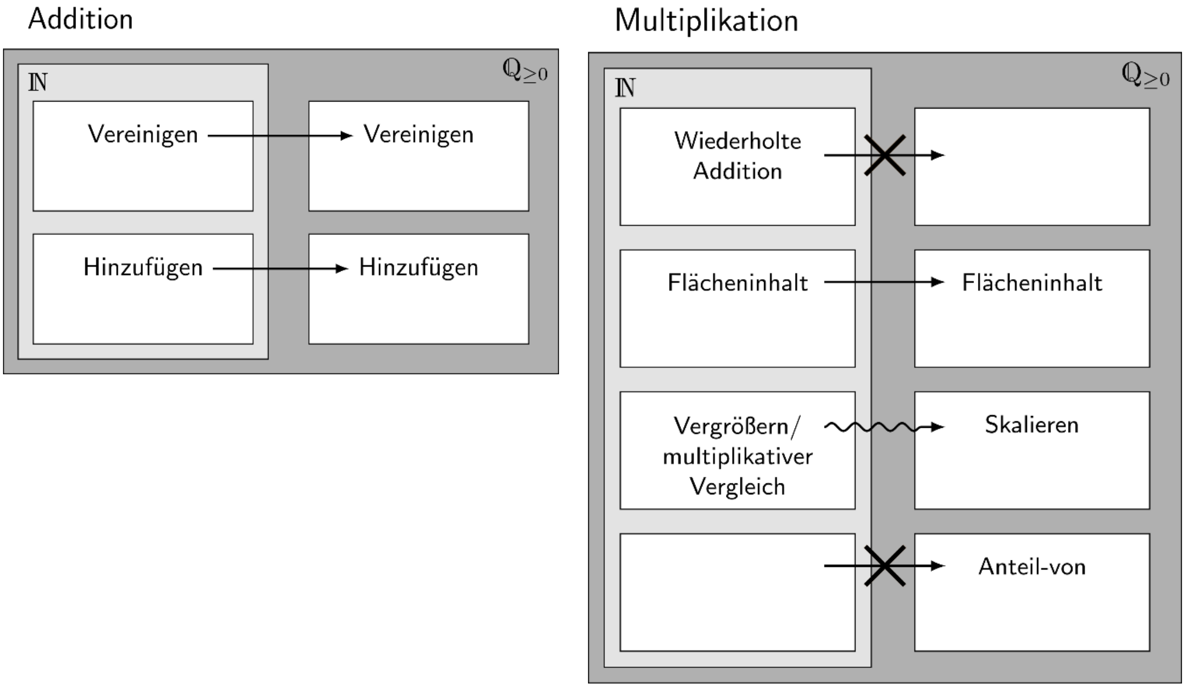

Abb. 2: Grundvorstellungsumbrüche zur Addition und Multiplikation im Zuge der Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$. Durchgehende Pfeile symbolisieren gleichbleibende Grundvorstellungen, gewellte Pfeile die Anpassungsnotwendigkeit der Grundvorstellungen und durchgestrichene Pfeile das Scheitern der Grundvorstellungen (eigene Darstellung, teilweise in Anlehnung an Prediger 2008a, S. 31).

Wie in Abb. 2 deutlich zu erkennen ist, treten insbesondere bei der Multiplikation durch die Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ Diskontinuitäten auf. So gibt es zur wiederholten Addition keine entsprechende Grundvorstellung in den rationalen Zahlen[11]. Umgekehrt tritt eine neue Grundvorstellung bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ auf, nämlich die *Anteil-von*[12] Vorstellung, die in den natürlichen Zahlen kein Pendant hat. Die Vorstellung *Vergrößern/multiplikativer Vergleich* muss zu einer Skalierungsvorstellung[13] verallgemeinert werden, womit nur die *Flächeninhaltsvorstellung* gleichbleibend übernommen werden kann.
Die Grundvorstellungen zur Addition bleiben bei der Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ hingegen tragfähig, weswegen die betreffende Zahlenbereichserweiterung für diese Rechenoperation aus der konzeptuellen Perspektive unproblematisch ist (Padberg & Wartha 2017).

2.3 Empirische Befunde zum intuitiven Verständnis der Addition und Multiplikation

Um Diskontinuitäten im individuellen Operationsverständnis bezüglich Bruchzahlen auf intuitiver Ebene festzustellen, arbeitet Prediger (2008a) mit Rechengeschichten. Rechengeschichten weisen großes diagnostisches Potential hinsichtlich inhaltlicher Vorstellungen von Lernenden auf (Kuntze & Prediger 2005). Konkret hat Prediger (2008a) die folgenden Aufgaben 269 Schüler*innen der 7. und 9. Schulstufe (etwa 12 und 14 Jahre) eines deutschen Gymnasiums gestellt:

---

[11] Wir sehen hier vom Spezialfall „$n \cdot q$" bzw. „$q \cdot n$" mit $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$, welcher unter anderem aus jedem einzelnen Bruch durch Herausheben des Nenners konstruiert werden kann, ab.

[12] „$\frac{3}{4}\cdot$" bedeutet ein Anteil von $\frac{3}{4}$ des zweiten Faktors.

[13] Für Faktoren größer als 1 kann diese intuitive Vorstellung grundsätzlich auch in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ übernommen werden. Da Faktoren in den rationalen Zahlen jedoch auch Werte kleiner 1 annehmen können, ist bei einer Multiplikation nicht zwangsläufig eine Vergrößerung die Folge: $\frac{2}{5} \cdot x$ bedeutet zum Beispiel eine Skalierung von x auf $\frac{2}{5}$ der ursprünglichen Größe.

a) Finde eine Textaufgabe, die durch die Gleichung $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ gelöst werden kann.

b) Finde eine Textaufgabe, die durch die Gleichung $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$ gelöst werden kann.

Während Aufgabe a) von 210 Schüler*innen (78%) korrekt gelöst werden konnte, waren nur 30 Lernende (11%) dazu in der Lage, eine passende Sachsituation für Aufgabe b) zu finden (Prediger 2008a). 121 Personen (45%) haben Aufgabe b) nicht einmal ansatzweise bearbeitet (siehe Abb. 3).

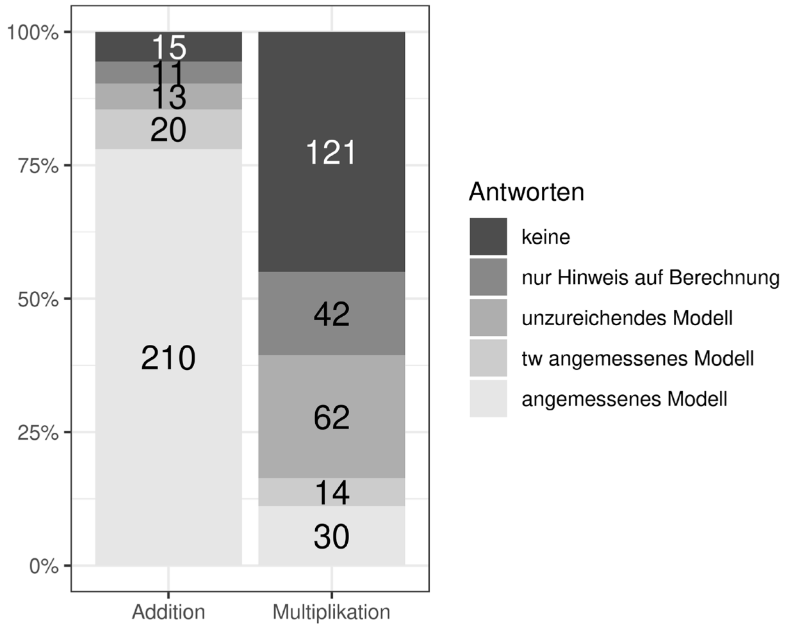

Abb. 3: Güte der erfundenen Rechengeschichten zu additiven (links) und multiplikativen (rechts) Operationen mit Bruchzahlen von Schüler*innen der 7. und 9. Schulstufe (eigene Darstellung nach Prediger 2008a, S. 34).

Diese Resultate bestätigen die Vermutung, dass die Multiplikation im Zuge der Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ größere Schwierigkeiten hervorruft als die Addition.

2.4 Synthese aus Theorie, Empirie und Praxis

Wie der vorangegangene Abschnitt zeigt, ist bei Lernenden zwischen der 7. und 9. Schulstufe das konzeptuelle Verständnis für die Addition stärker ausgeprägt als jenes für die Multiplikation. Eine Erklärung hierfür findet sich im Conceptual Change Ansatz bzw. der Knowledge in Pieces Theorie, wonach die Grundvorstellungen zur Multiplikation in Folge der Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ neu organisiert werden müssen, was bei der Addition nicht der Fall ist (siehe Abb. 2). Diese Umstrukturierung der p-prims in andersartige coordination classes wird also durch die Kontextvariation des Zahlenbereichs von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ hervorgerufen. Dabei kann die Kontextvariation, die eine zentrale Rolle in der Knowlede in Pieces Theorie spielt (diSessa 2018), aber nicht nur auf den Zahlenbereich bezogen werden. Eine sowohl theoretisch als auch empirisch bisher unberücksichtigte Perspektive ist beispielsweise die Neustrukturierung von coordination classes mit entsprechenden p-prims durch die Variation der mathematischer Inhaltsbereiche. Werden z. B. exemplarisch die Inhaltsbereiche *Geometrie* und *Stochastik* betrachtet, so kann Abb. 2 folgendermaßen erweitert werden:

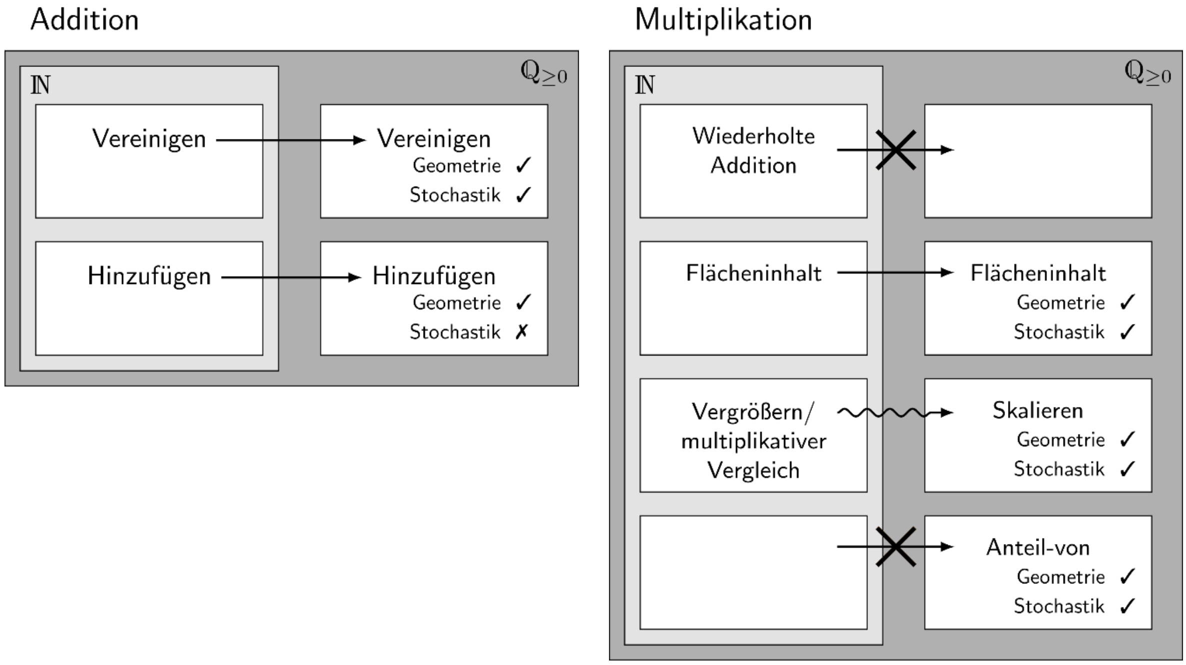

Abb. 4: Grundvorstellungsumbrüche zur Addition (links) und Multiplikation (rechts) im Zuge der Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ gesondert nach den mathematischen Inhaltsbereichen *Geometrie* und *Stochastik*. Die Pfeile sind wie in Abb. 2 zu verstehen, während ✓ die Tragfähigkeit der Grundvorstellung und ✗ eine mit Hürden behaftete Übertragung der Grundvorstellung im jeweiligen Inhaltsbereich symbolisiert (eigene Darstellung).

Während die aufgezählten Grundvorstellungen im geometrischen Kontext sowohl in $\mathbb{N}$ als auch in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ gleichermaßen tragfähig bleiben, ist das für den Kontext der Stochastik nicht immer der Fall (siehe Abb. 4). Insbesondere in den natürlichen Zahlen sind stochastische Kontexte nur in pathologischen Fällen zielführend, da Wahrscheinlichkeiten als Zahlen zwischen 0 und 1 ausgedrückt und interpretiert werden müssen. Im Zahlenbereich der rationalen Zahlen, die eine stochastische Interpretation von Zahlen prinzipiell zulassen, sind die aufgelisteten Grundvorstellungen zur Multiplikation sowohl in der Geometrie als auch in der Stochastik tragfähig[14]. Für die Addition ist jedoch nur die Vorstellung des *Vereinigens* für beide Inhaltsbereiche zielführend, während die Vorstellung des *Hinzufügens* nur im geometrischen Kontext sinnvoll angewendet werden kann (vgl. Abschnitt 5.2). Offensichtlich ist der Kontext *Stochastik* also in Bezug auf die Addition und die Multiplikation herausfordernder als jener der Geometrie.

Basierend auf den vorangegangenen Ausführungen stellt sich die Frage, inwiefern der Stochastikunterricht in Österreich dazu anleitet, Grundvorstellungen zur Addition und Multiplikation abhängig vom mathematischen Inhaltsbereich aufzurufen und zu strukturieren. Eine Gruppe Personen, für die diese Überlegungen besondere Relevanz aufweisen, sind Sekundarstufenlehramtsstudierende des Unterrichtsfachs Mathematik. In Hinblick auf den erstrangigen Berufswunsch dieser Zielgruppe sollte sie über die Fähigkeit verfügen, Grundvorstellungen zu Rechenoperationen flexibel, kontextabhängig und tragfähig aufzurufen und zu vernetzen (Abschnitt 1, vgl. Krauss et al. 2008; Kunter et al. 2011).

Das Wissen um das Operieren mit Wahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Zufallsexperimenten ist laut österreichischem Lehrplan bereits in der Sekundarstufe I relevant: In der vierten Klasse wird das

[14] Die Flächeninhaltsvorstellung kann in der Stochastik auf die Flächen von Einheitsquadraten, die Schnitt- und Randwahrscheinlichkeiten darstellen, angewendet werden. Wahrscheinlichkeiten können zudem durch Änderung der Versuchsbedingungen beispielsweise verdoppelt oder geviertelt werden (skalieren), wobei diese Vorstellung auch fälschlicherweise übergeneralisiert werden kann, wie das Paradoxon des Chevalier de Méré's zeigt (Strick 2020). Die Anteil-von Vorstellung kommt insbesondere bei mehrstufigen Zufallsexperimenten zum Tragen, wo Wahrscheinlichkeiten bedingt betrachtet werden müssen.

Ermitteln und Interpretieren von Wahrscheinlichkeiten in ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten gefordert (RIS 2024). Beim Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Zufallsexperimenten unterstreicht der Lehrplan dabei explizit, dass Baumdiagramme als Hilfestellung herangezogen werden können (RIS 2024). Das Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Zufallsexperimenten reduziert sich in Baumdiagrammen jedoch häufig auf die prozedurale Anwendung der sogenannten *Pfadregeln* (Hefendehl-Hebeker & Törner 1984; Jahnke 2012): Die erste Pfadregel, auch *Produktregel* genannt, besagt, dass Wahrscheinlichkeiten entlang eines Astes im Baumdiagramm multipliziert werden können, um zur entsprechenden Schnittwahrscheinlichkeit zu kommen. Die zweite Pfadregel, auch als *Summenregel* bekannt, erlaubt es hingegen, Ereignisse diverser Äste im Baumdiagramm zu vereinigen und die Wahrscheinlichkeit dieser Vereinigung zu berechnen, indem die Wahrscheinlichkeiten (gegebenenfalls Schnittwahrscheinlichkeiten) der betreffenden einzelnen Ereignisse addiert werden. Auch wenn durch die Bezeichnung als erste und zweite Pfadregel suggeriert wird, dass es sich bei der Anwendung dieser Schemata um gleichwertige Tätigkeiten handelt, so stehen fachlich doch völlig andersartige Konzepte dahinter, wie Abb. 5 verdeutlicht.

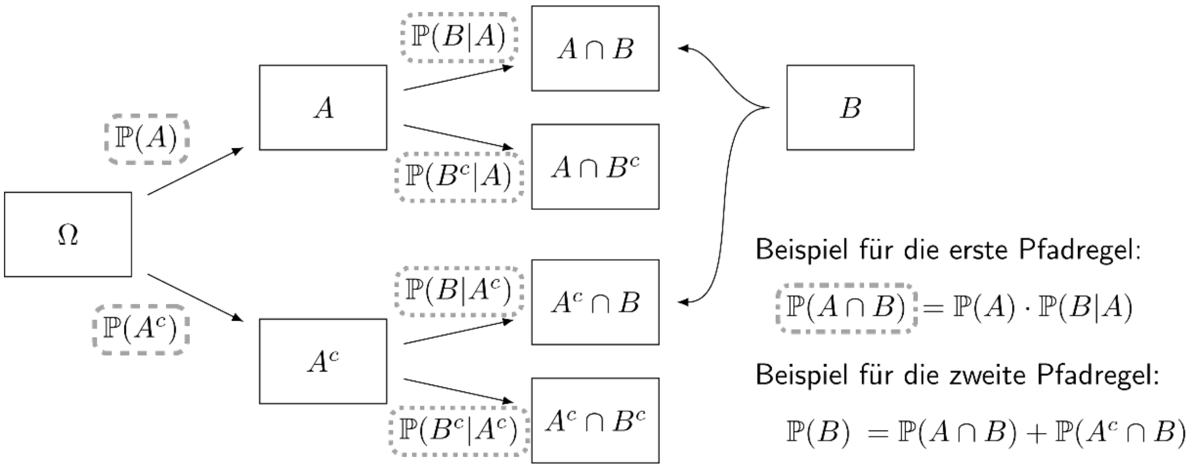

Abb. 5: Visualisierung von möglichen *Randwahrscheinlichkeiten* (strichliert hervorgehoben), *bedingten Wahrscheinlichkeiten* (punktiert hervorgehoben) und *Schnittwahrscheinlichkeiten* (strichpunktiert hervorgehoben) in einem Baumdiagramm mit beispielhafter Darstellung der ersten und zweiten Pfadregel (eigene Darstellung).

Die Produktregel bezieht sich mathematisch betrachtet auf das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten, was nun für ein zweistufiges Zufallsexperiment exemplifiziert wird: Da $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$ gilt, kann die Schnittwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A \cap B)$ als Produkt der betreffenden Randwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$ in der ersten Stufe des Experiments und der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(B|A)$ in der zweiten Stufe des Experiments berechnet werden.

Die Summenregel bezieht sich hingegen auf die σ-Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes, die besagt, dass für paarweise disjunkte Ereignisse A_i ($i \in \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$) des dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsraumes gilt, dass $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$. Diese σ-Additivität ist durch das dritte Axiom von Andrei Nikolaevich Kolmogorov, welcher das Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1933 begründet hat, festgelegt (Huget 2024). Da Schnittwahrscheinlichkeiten bzw. Randwahrscheinlichkeiten mehrstufiger bzw. einstufiger Zufallsexperimente zwingend disjunkt sind, lässt sich die Summenregel direkt aus der σ-Additivität ableiten. Diese fachliche Perspektive macht offensichtlich, warum die Vorstellung des *Vereinigens* für die Addition im Kontext der Stochastik die tragfähige ist.

3 Forschungsfragen und Hypothesen

In Analogie zu Prediger (2008a), stellen sich für uns die folgenden Forschungsfragen:

1. Werden Grundvorstellungen zur Multiplikation bei Lehramtsstudierenden (Sekundarstufe Mathematik) im Kontext der Wahrscheinlichkeitsrechnung korrekt aktiviert?
2. Werden Grundvorstellungen zur Addition bei Lehramtsstudierenden (Sekundarstufe Mathematik) im Kontext der Wahrscheinlichkeitsrechnung korrekt aktiviert?

Unsere Hypothesen lauten basierend auf den Überlegungen in Abb. 4 folgendermaßen:

1. Die bekannten Grundvorstellungen zur Multiplikation werden im Inhaltsbereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung von den Studierenden korrekt aktiviert.
2. Die Grundvorstellungen des *Hinzufügens* wird im Kontext der Wahrscheinlichkeitsrechnung fälschlicherweise von den Studierenden aktiviert.

4 Stichprobe, Testinstrument und Kodierungsschema

In Anlehnung an Prediger (2008a) wurden 110 Lehramtsstudierenden des Sekundarstufenlehramts im Fach Mathematik an der Universität Innsbruck und der Pädagogischen Hochschule Vorarlberg die folgenden Aufgaben zur schriftlichen Bearbeitung im Paper-Pencil-Format vorgelegt:

1. Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ passt.
2. Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ passt.

Den Studierenden wurden etwa fünf Minuten Bearbeitungszeit je Aufgabe im Rahmen eines Proseminars, welches laut empfohlenem Studienverlauf im 4. Semester – *vor* dem fachlichen Stochastik-Modul – stattfindet, zur Verfügung gestellt.

Die schriftlichen Produkte wurden anschließend eingescannt und in Anlehnung an Prediger (2008a) in die folgenden Kategorien eingeteilt:

- **Angemessenes Modell:**
  - Multiplikation: Multiplikation verstanden als die Schnittwahrscheinlichkeit von Ereignissen aufeinanderfolgender Zufallsexperimente.
  - Addition: Addition verstanden als die disjunkte Vereinigung von Randwahrscheinlichkeiten einstufiger bzw. Schnittwahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsexperimente.
- **Fehlerhaftes Modell:** Zwar wurde ein stochastischer Kontext gewählt, jedoch passt die gefundene Textaufgabe nicht zu der vorgegebenen Rechnung.
- **Kein stochastischer Kontext:** Es ist kein stochastischer Kontext angegeben; häufig verbleiben die Studierenden auf dem Level von Anteilen.
- **Keine Lösung:** Leere oder vollständig durchgestrichene Abgaben.

Die Kodierung der Studierendenprodukte wurde unabhängig voneinander von drei Mathematikdidaktiker*innen vorgenommen, wobei eine Übereinstimmung von 80% erreicht werden konnte. Voneinander abweichende Kategorisierungen wurden anschließend im Team diskutiert und einstimmig vereinheitlicht.

5 Resultate

5.1 Multiplikation

Für die Aufgabe *Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung* $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ *passt* wurde das in Abb. 6 dargestellte Löseverhalten bei den 110 Lehramtsstudierenden festgestellt.

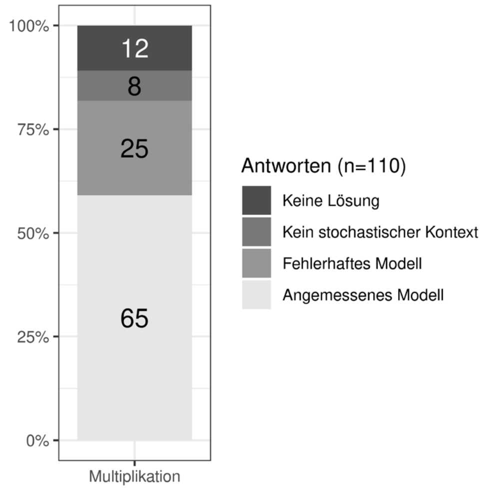

Abb. 6: Löseverhalten der 110 Lehramtsstudierenden zur Multiplikationsaufgabe (eigene Darstellung).

Wie Abb. 6 zu entnehmen ist, waren knapp 60% der untersuchten Studierenden dazu in der Lage, eine angemessene Textaufgabe zur gegebenen Multiplikation im stochastischen Kontext zu formulieren. Etwa 40% der Lernenden waren demnach nicht im Stande, eine passende Textaufgabe zu verschriftlichen (23%), einen stochastischen Kontext anzugeben (7%) oder generell eine Lösung zu finden (11%). Nachfolgend werden einzelne Rückmeldungen aus den Kategorien *Angemessenes Modell* und *Fehlerhaftes Modell* genauer beleuchtet.

Angemessenes Modell

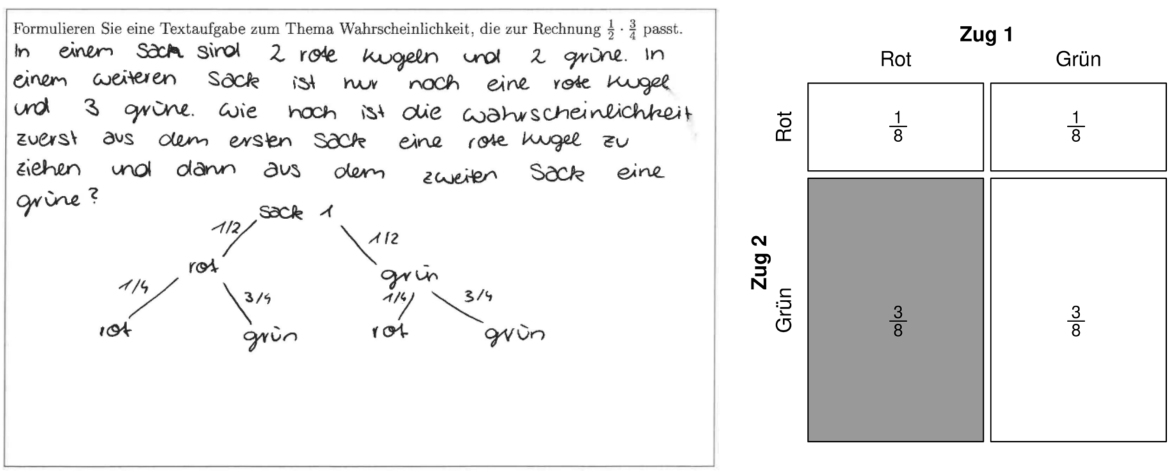

Abb. 7: Antwort zur Multiplikationsaufgabe von Person 36 (links); Visualisierung der gesuchten Wahrscheinlichkeit im Einheitsquadrat (rechts, eigene Darstellung).

Die in Abb. 7 veranschaulichte Studierendenantwort kann als prototypisch für die Kategorie *angemessenes Modell* angesehen werden. Es wird in der Regel ein zweistufiges Zufallsexperiment angegeben (z. B. zufälliges Ziehen von farbigen Kugeln aus einem Sack, siehe Abb. 7), wobei ein Ereignis (z. B. rote Kugel, siehe Abb. 7) des ersten Zufallsexperiments die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und ein Ereignis (z. B. grüne Kugel, siehe Abb. 7) des zweiten Zufallsexperiments die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ aufweist. Die Zufallsexperimente werden hintereinander ausgeführt, gefragt wird nach der Schnittwahrscheinlichkeit beider betreffenden Ereignisse (z. B. rote Kugel im ersten Zug, grüne Kugel im zweiten Zug, siehe Abb. 7).

Fehlerhaftes Modell

Bei der Multiplikation haben sich mannigfaltige Gründe für die Formulierung eines fehlerhaften Modells ergeben, weswegen es herausfordernd ist, konkrete Fehlerkategorien weiter zu analysieren. Demzufolge kann die nachfolgende Antwort (siehe Abb. 8) als ein Beispiel, nicht jedoch als exemplarische Rückmeldung für diese Kategorie aufgefasst werden.

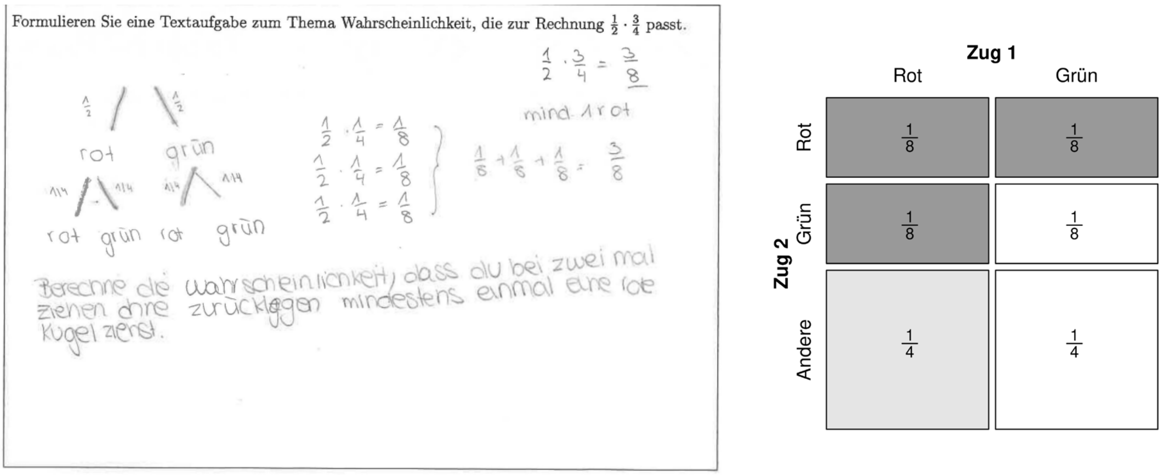

Abb. 8: Antwort zur Multiplikationsaufgabe von Person 59 (links); Visualisierung der gesuchten Wahrscheinlichkeit im Einheitsquadrat (rechts, eigene Darstellung).

Wir konnten für den fehlerhaften Denkprozess von Person 59 (siehe Abb. 8) einen möglichen Pfad rekonstruieren: Die Person überlegt sich, dass $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ gerade $\frac{3}{8}$ ergibt. $\frac{3}{8}$ kann auch als $3 \cdot \frac{1}{8}$ und somit im pathologischen Fall als mehrfache Addition $(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})$ aufgefasst werden. Nun musste die Person ein Zufallsexperiment konstruieren, in welchem drei Rand- (im einstufigen Fall) bzw. Schnittwahrscheinlichkeiten (im mehrstufigen Fall) mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ vorkommen und am Ende disjunkt vereinigt werden. Person 59 wählt für diesen Zweck ein zweistufiges Zufallsexperiment, welches sie mittels Baumdiagramm visualisiert (siehe Abb. 8). Das erste Zufallsexperiment kann als zufälliges Ziehen aus einer Urne mit gleich vielen roten wie grünen Kugeln aufgefasst werden. Das zweite Zufallsexperiment scheint sich auf dieselbe Urne zu beziehen (kann implizit dem Hinweis „ohne Zurücklegen" entnommen werden, siehe Abb. 8), die angegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten entziehen sich im Rahmen dieser Annahme jedoch einer sinnvollen Logik. Zum einen sind die Wahrscheinlichkeiten für eine rote bzw. eine grüne Kugel trotz des fehlenden Zurücklegens im zweiten Zufallsexperiment jeweils $\frac{1}{4}$ und somit gleich hoch[15]. Zum anderen ist die Summe dieser beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$, weswegen offensichtlich mindestens ein weiteres mögliches Ereignis

[15] Eine mögliche Erklärung für diese Wahl ist das „vollständige" Zerlegen der vorangegangenen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ im entsprechenden Ast des ersten Zufallsexperiments in $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$.

im zweiten Zufallsexperiment, etwa „andere Farbe“, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ im gezeichneten Baumdiagramm fehlt. Im nächsten Schritt möchte die Person die Schnittwahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse „rot-rot“, „rot-grün“, „grün-rot“ – fälschlicherweise als das Ereignis „*mindestens* einmal eine rote Kugel“ aufgefasst (siehe Abb. 8) – aufsummieren, um auf $\frac{3}{8}$, was dem Ergebnis der Rechnung $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ entspricht, zu kommen. Korrekt wird erkannt, dass die Addition $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ im Kontext der Wahrscheinlichkeit als die Vereinigung der drei Schnittwahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „rot-rot“, „rot-grün“, „grün-rot“ aufgefasst werden kann, womit jedoch nicht die eigentliche Fragestellung beantwortet wird. Zudem wäre das Ereignis „*mindestens* einmal eine rote Kugel“ korrekterweise die Vereinigung der Ereignisse „rot-rot“, „rot-grün“, „rot-andere Farbe“, „grün-rot“ und damit $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$. Das zusätzliche $\frac{1}{4}$ Wahrscheinlichkeit, das von Person 59 somit vergessen wurde, ist auf der rechten Seite der Abb. 8 hellgrau dargestellt, während die intendierte und verschriftliche Addition dunkel hervorgehoben wird.

Die Schwierigkeiten von Person 59 können also auf verschiedenen Ebenen lokalisiert werden:

- Das Auffassen von $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ als mehrfache Addition $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ anstatt des Aufrufes tragfähiger Grundvorstellungen zur Multiplikation im Kontext der Wahrscheinlichkeit (siehe Abb. 4).
- Fehlerhaftes Modellieren von mehrstufigen Zufallsexperimenten und den dazugehörigen (bedingten) Wahrscheinlichkeiten.

Dieses Beispiel zeigt, wie komplex die Fehlermuster von Mathematik-Lehramtsstudierenden zu Rechenoperationen im Kontext von Wahrscheinlichkeiten selbst in höheren Semestern noch sein können.

5.2 Addition

Für die Aufgabe *Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema Wahrscheinlichkeit, die zur Rechnung* $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ *passt* wurde das in Abb. 9 dargestellte Löseverhalten bei den 110 Lehramtsstudierenden festgestellt.

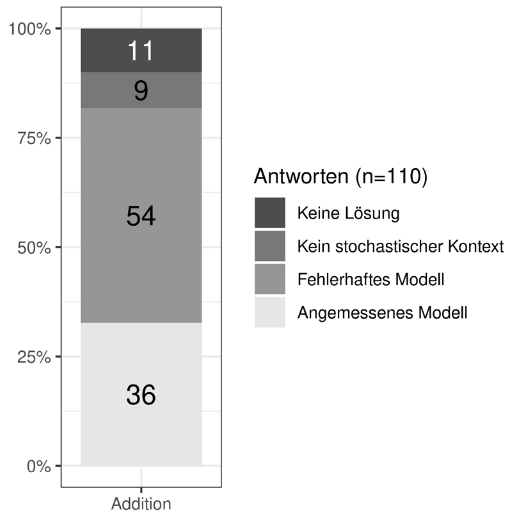

Abb. 9: Löseverhalten der 110 Lehramtsstudierenden zur Additionsaufgabe (eigene Darstellung).

Wie Abb. 9 zu entnehmen ist, waren nur knapp über 30% der Studierenden in der Lage, eine passende Textaufgabe zur Addition von Bruchzahlen im Kontext der Wahrscheinlichkeit zu formulieren. Der Großteil der Studierenden (49%) verfasste eine fehlerhafte Rückmeldung, 8% wählten keinen stochastischen Kontext und 10% waren zu keiner Lösung im Stande.

Um einen genaueren Einblick in diverse Fehlermuster zu geben, werden nachfolgend Beispiele der Kategorien *angemessenes Modell* sowie identifizierte Subkategorien der *fehlerhaften Modelle* vorgestellt.

Angemessenes Modell

Der Großteil der Rückmeldungen, die der Kategorie *angemessenes Modell* zugeordnet werden konnten, umfasst einstufige Zufallsexperimente, deren Ergebnisraum in disjunkte Ereignisse mit passender Wahrscheinlichkeit – meist ausgedrückt über natürliche Häufigkeiten – zerlegt worden ist. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit der disjunkten Vereinigung zweier Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{3}$. Die in Abb. 10 gegebene Antwort von Person 5 ist hierfür exemplarisch.

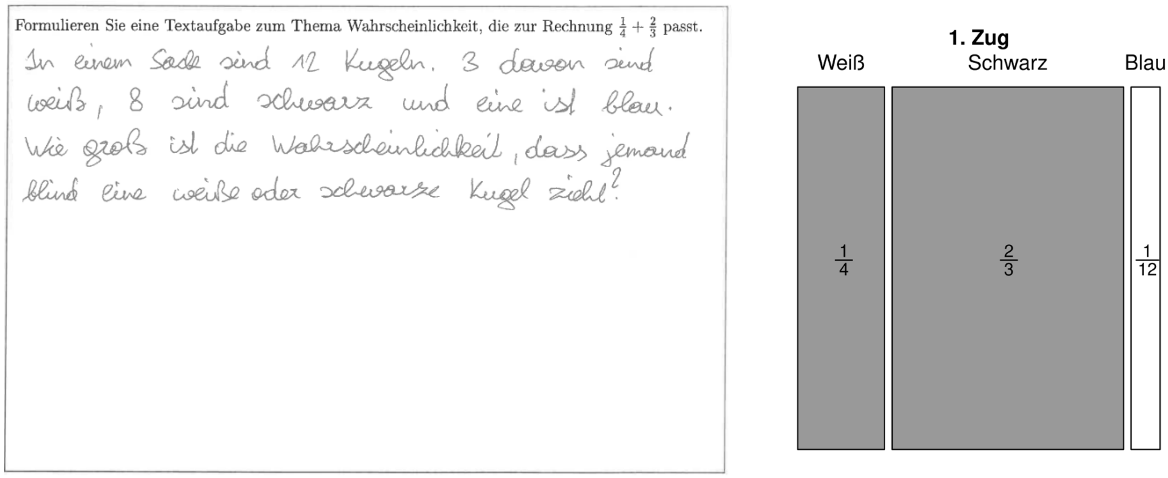

Abb. 10: Antwort zur Additionsaufgabe von Person 5 (links); Visualisierung der gesuchten Wahrscheinlichkeit im Einheitsquadrat (rechts, eigene Darstellung).

Fehlerhaftes Modell: „Mindestens einmal Erfolg“

Insgesamt 54 Personen (49%) zeigen durch ihre Antwort ein fehlerhaftes Modell zur Addition im Kontext der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf. Davon haben 37 Personen (69%) in ihren Ausführungen ein zweistufiges Zufallsexperiment beschrieben. Diese gewählten Modelle lassen sich noch feiner bezüglich der gestellten Frage nach *mindestens einmal*, *genau einmal* und *zweimal hintereinander* auftretendem Erfolg aufteilen.

In ihrer Ausarbeitung nach *mindestens einmal* Erfolg haben 14 der 54 Personen (34%) gefragt. Ein prototypisches Beispiel für diese Art des Fehlers ist die Antwort von Person 33 in Abb. 11. Die Person erfindet ein zweistufiges Zufallsexperiment, indem mit Zurücklegen aus einer Urne gezogen wird. Die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel liegt bei $\frac{1}{3}$, die Wahrscheinlichkeit für keine rote Kugel bei $\frac{2}{3}$. Für zweimaliges Ziehen soll die Frage beantwortet werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit für den Zug mindestens einer roten Kugel ist. Als positiv kann die Tatsache gewertet werden, dass für die Beantwortung dieser Frage tatsächlich drei disjunkte Ereignisse („rot-rot“, „rot-nicht rot“, „nicht rot-rot“) vereinigt werden und die resultierende Wahrscheinlichkeit berechnet wird, was der Addition der drei dazugehörigen Einzelwahrscheinlichkeiten entspricht. Jedoch werden in diesem Fall nicht *zwei* disjunkte Ereignisse mit den Einzelwahrscheinlichkeiten $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{3}$ vereinigt, sondern *drei* diskunkte Ereignisse mit den Einzelwahrscheinlichkeiten $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ und $\frac{2}{9}$ (siehe Einheitsquadrat, rechte Seite Abb. 11).

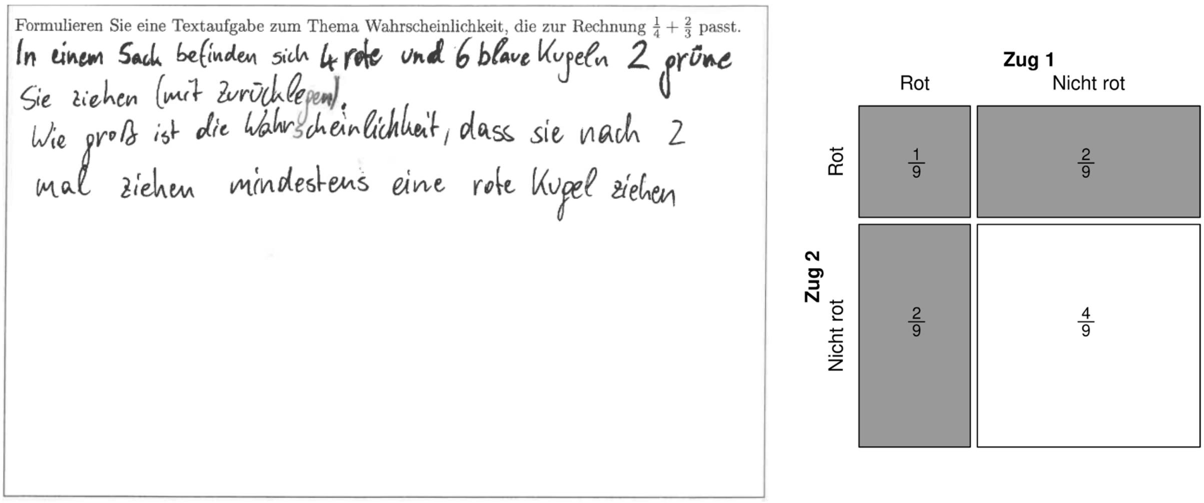

Abb. 11: Antwort zur Additionsaufgabe von Person 33 (links); Visualisierung der gesuchten Wahrscheinlichkeit im Einheitsquadrat (rechts, eigene Darstellung).

Fehlerhaftes Modell: „Genau einmal Erfolg“

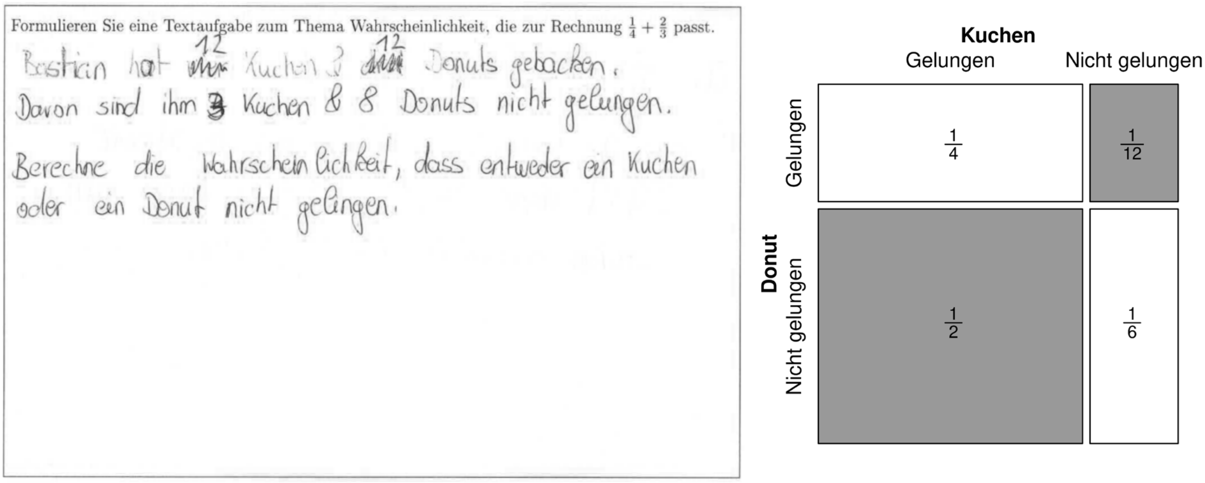

Abb. 12: Antwort zur Additionsaufgabe von Person 73 (links); Visualisierung der gesuchten Wahrscheinlichkeit im Einheitsquadrat (rechts, eigene Darstellung).

Ein seltener, aber ebenfalls in dieses Schema passender Fehler ist die Frage nach *genau einmaligem* Erfolg. Person 73 ist die einzige der 54 Personen (2%) der Kategorie *fehlerhaftes Modell*, die diesem Fehlermuster folgt. Die in Abb. 12 aufgezeigte Rechengeschichte kann folgendermaßen aufgefasst werden: Das Backen von Kuchen und das Backen von Donuts können als zwei verschiedene Zufallsexperimente aufgefasst werden, die beide (hintereinander) durchgeführt werden, wobei $\frac{1}{4}$ der Kuchen und $\frac{2}{3}$ der Donuts „zufällig“ misslingen. Nun wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass *entweder* ein Kuchen *oder* ein Donut nicht gelingen – also *genau ein* Backerfolg zu verzeichnen ist. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit der disjunkten Vereinigung der zwei Ereignisse „Kuchen gelungen-Donut misslungen“ und „Kuchen misslungen-Donut gelungen“. Korrekt ist also die Anzahl der disjunkt zu vereinigenden Ereignisse, jedoch stimmen die Einzelwahrscheinlichkeiten ($\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{12}$), die infolge der Vereinigung addiert werden müssen, nicht mit der Angabe ($\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{3}$) überein (siehe

Einheitsquadrat, rechte Seite Abb. 12). Vermutlich hat Person 73 im Zuge ihrer Ausarbeitung übersehen, dass es nicht ausreicht, die Wahrscheinlichkeiten für „Kuchen misslungen" im ersten Zufallsexperiment auf $\frac{1}{4}$ und die Wahrscheinlichkeit für „Donut misslungen" im zweiten Zufallsexperiment auf $\frac{2}{3}$ zu setzen, da die Frage nach *genau einem* Backerfolg in dieser Konstellation nicht die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten ist, sondern das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (erste Pfadregel/Produktregel) berücksichtigt werden muss.

Fehlerhaftes Modell: „Zweimal hintereinander Erfolg"

Die am häufigsten bediente Subkategorie der fehlerhaften Modelle ist die Frage nach *zweimal hintereinander* Erfolg. 22 von 54 Personen (41%) haben fehlerhafte Antworten abgegeben, die dieser Subkategorie zuzuordnen sind.

Antworten dieses Fehlertyps – ein exemplarisches Beispiel dafür ist die Rechengeschichte von Person 2 in Abb. 13 – enthalten immer ein zweistufiges Zufallsexperiment. Jedes Zufallsexperiment für sich weist eine bestimmte Erfolgswahrscheinlichkeit auf, im Beispiel von Person 2 etwa $\frac{1}{4}$ für das erste Spiel und $\frac{2}{3}$ für das zweiten Spiel. Gefragt wird nun nach der Wahrscheinlichkeit, *zweimal hintereinander* – sowohl im ersten als auch im zweiten Zufallsexperiment – erfolgreich zu sein. Mathematisch wird also nicht nach der Wahrscheinlichkeit der disjunkten Vereinigung der Ereignisse „Erfolg im ersten Spiel" und „Erfolg im zweiten Spiel" gefragt, sondern nach der Wahrscheinlichkeit des Schnitts dieser beiden Ereignisse. Das entspricht aber gerade dem Rechnen mit (bedingten) Wahrscheinlichkeiten, also der ersten Pfadregel bzw. der Produktregel, wie in Abschnitt 2.4 erläutert. Die Erfolgswahrscheinlichkeiten der beiden Zufallsexperimente müssen für diese Fragestellung demnach nicht addiert, sondern multipliziert werden. Personen, die dieses Fehlermuster aufweisen, *plutimizieren* also im *Pippi Langstrumpf'schen* Sinne – sie vermischen bzw. verwechseln die Addition und die Multiplikation. Wäre in der Angabe also ein Multiplikationszeichen anstelle eines Additionszeichens vorhanden, hätten die 22 Personen dieser Fehlerkategorie eine korrekte Antwort abgegeben. Diese Verwechslung der Additions- und Multiplikationsregel ist für den Inhaltsbereich der Kombinatorik bereits bekannt (Hefendehl-Hebeker & Törner 1984).

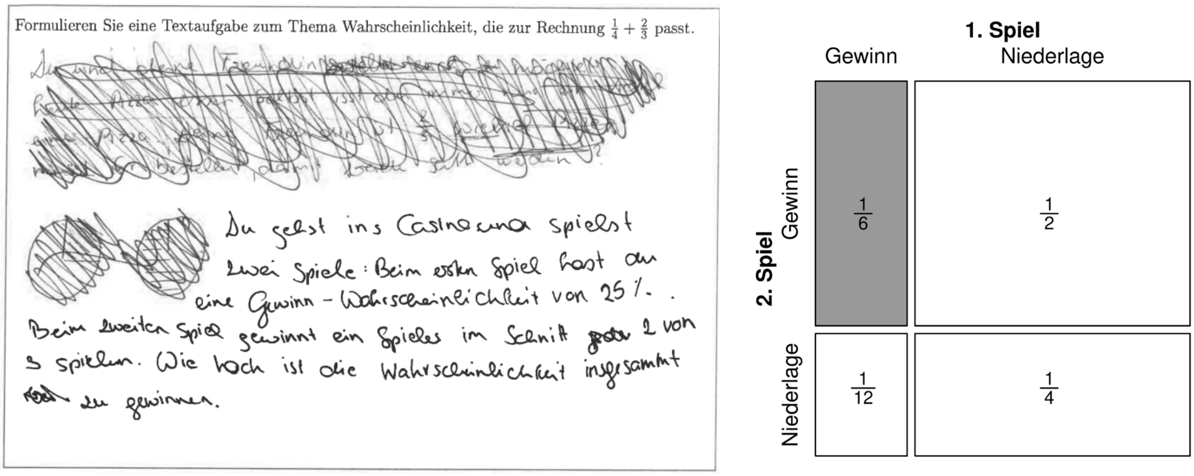

Abb. 13: Antwort zur Additionsaufgabe von Person 2 (links); Visualisierung der gesuchten Wahrscheinlichkeit im Einheitsquadrat (rechts, eigene Darstellung).

Eine bemerkenswerte Studierendenantwort, die auch diesem Fehlermuster zuzuordnen ist, ist jene von Person 89 (siehe Abb. 14).

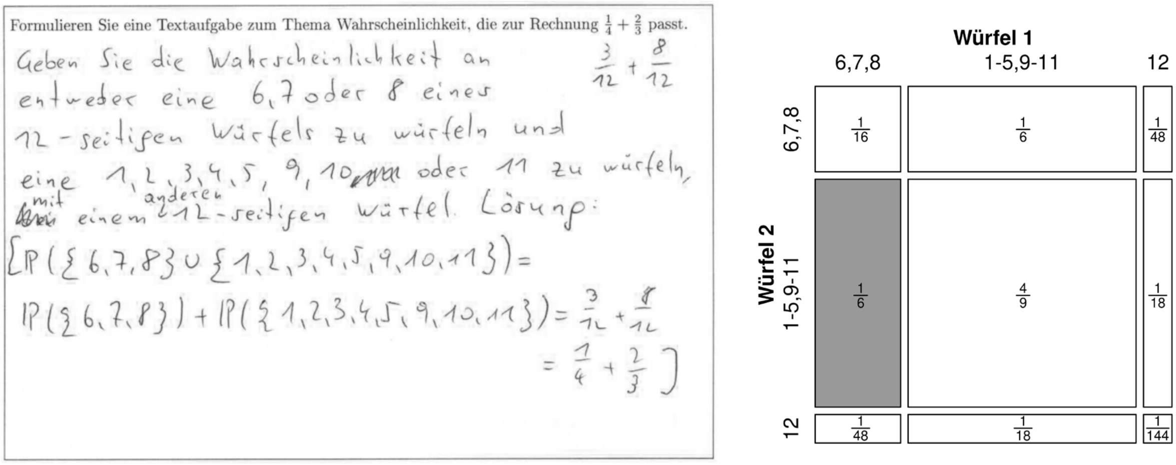

Abb. 14: Antwort zur Additionsaufgabe von Person 89 (links); Visualisierung der gesuchten Wahrscheinlichkeit im Einheitsquadrat (rechts, eigene Darstellung).

Die beiden von dieser Person gewählten Zufallsexperimente umfassen jeweils das Würfeln mit einem fairen Dodekaeder. Als Erfolg beim ersten Würfeln wird eine Zahl aus der Menge $\{6,7,8\}$ gewertet, als Erfolg beim zweiten Würfeln eine Zahl aus der Menge $\{1,2,3,4,5,9,10,11\}$. Gefragt wird nach *zweimaligem Erfolg*, also eine Zahl aus $\{6,7,8\}$ beim ersten Würfeln und eine Zahl aus $\{1,2,3,4,5,9,10,11\}$ beim zweiten Würfeln[16]. Die Antwort auf diese Frage ist das Produkt der Wahrscheinlichkeit für eine Zahl aus $\{6,7,8\}$ im ersten Zufallsexperiment und der Wahrscheinlichkeit für eine Zahl aus $\{1,2,3,4,5,9,10,11\}$ im zweiten Zufallsexperiment, $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ (siehe Einheitsquadrat, rechte Seite Abb. 14). Interessanterweise zeigt Person 89 durch die im unteren Teil ihrer Antwort platzierte formale Betrachtung des Problems (siehe linke Seite Abb. 14), dass ihr die σ-Additivität (siehe Abschnitt 2.4) als zugrundeliegendes mathematisches Konzept der Addition von Wahrscheinlichkeiten durchaus bewusst ist. Nichtsdestotrotz ist Person 89 nicht im Stande, ihr mathematisches Wissen in eine sinnvolle Rechengeschichte, welche zur gegebenen Situation passt, umzumünzen.

6 Diskussion

Werden unsere Ergebnisse zur Multiplikation in Abb. 6 bzw. zur Addition in Abb. 9 mit den Ergebnissen von Prediger (2008a) in Abb. 3 verglichen, so zeigt sich ein deutlicher Unterschied. Während 78% der Schüler*innen der 7. und 9. Schulstufe bei Prediger (2008a) in der Lage waren, eine sinnvolle Rechengeschichte zur Addition in einem beliebigen Kontext zu verfassen, waren im Kontext der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur 33% der Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik dazu fähig. Hingegen konnten nur 11% der Schüler*innen bei Prediger (2008a) eine korrekte Rückmeldung zur Multiplikation in einem beliebigen Kontext geben, während 59% der Lehramtsstudierenden eine passende Rechengeschichte im Kontext der Wahrscheinlichkeitsrechnung formuliert haben.

Letzteres Ergebnis ist übereinstimmend mit der von uns formulierten ersten Hypothese, wonach Sekundarstufenlehramtsstudierende des Fachs Mathematik dazu in der Lage sind, Grundvorstellungen zur Multiplikation im Kontext der Stochastik korrekt zu aktivieren (Abschnitt 3). Eingebettet in die Knowledge in Pieces Theorie von diSessa (2018) ist dieses Resultat nicht verwunderlich, weil im Zuge der Kontextverschiebung zum Inhaltsbereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung keine Neuorganisation

[16] Hätte die Person geschrieben, dass nur einmal gewürfelt wird und für Erfolg entweder eine Zahl aus {6,7,8} oder {1,2,3,4,5,9,10,11} notwendig ist, wäre das angegebene Modell angemessen.

der p-prims *Flächeninhalt*, *Skalieren* und *Anteil-von* in coordination classes erfolgen muss, da diese Wissenselemente tragfähig bleiben (siehe Abb. 4).

Differenzierter sind die Ergebnisse der Additionsaufgabe zu betrachten, wenngleich das schlechte Abschneiden der Lehramtsstudierenden bei diesem Problem zur zweiten von uns festgelegten Hypothese passt (Abschnitt 3). Laut formulierter zweiter Hypothese ist davon auszugehen, dass Lehramtsstudierende vermehrt die Grundvorstellung des *Hinzufügens* im Kontext der Stochastik aufrufen, welche im Zuge dieser inhaltlichen Kontextverschiebung jedoch nicht tragfähig bleibt und daher laut der Knowledge in Pieces Theorie von diSessa (2018) eine Neuorganisation der p-prims notwendig wird (siehe Abb. 4). Das fehlerhafte Aufrufen dieser Grundvorstellung im gegebenen Kontext führt schließlich zum Scheitern bei der Bearbeitung der gestellten Additionsaufgabe. Somit kann das schlechte Abschneiden der Lehramtsstudierenden im Vergleich zu den Schüler*innen bei Prediger (2008a) erklärt werden, da die inhaltliche Kontextverschiebung hin zur Stochastik die wesentliche Änderung der Aufgabenstellung darstellt. Doch welche Argumente lassen sich konkret für das fälschliche Aufrufen der Grundvorstellung des *Hinzufügens* in den Ausarbeitungen der Lehramtsstudierenden für die Additionsaufgabe finden?

Zum einen ist das prominente Wählen von zwei- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten beim fehlerhaften Lösen der Additionsaufgabe ein Indiz für die Grundvorstellung des *Hinzufügens* (siehe Abb. 11, 12, 13, 14). Dabei wird das *Hinzufügen* als das *Hinzufügen-von-Zufallsexperimenten* mit passend gewählten Wahrscheinlichkeiten verstanden. Diese Interpretation kann mit dem Fehlermuster der *Zeitgebundenheit des Denkens*, welches Hauer-Typpelt (2006) für bayesianische Aufgaben beschrieben hat und wonach die Überbetonung des *Nacheinander-Ausführens* von Zufallsexperimenten zu Schwierigkeiten führen kann, in Verbindung gebracht werden. Eine graphische Darstellung, die dieses *Nacheinander-Ausführen* und somit das *Hinzufügen* von Zufallsexperimenten unserer Meinung nach stärkt, ist das Baumdiagramm. Durch das chronologische Darstellen der Zufallsexperimente in mehreren Ebenen, wobei das zweite Zufallsexperiment in der Ebene *nach* dem ersten eingezeichnet wird, wird die Grundvorstellung des *Hinzufügens* angesprochen. Dass das Baumdiagramm häufig als visuelle Stütze von den Studierenden herangezogen wird, erkennt man an einigen entsprechenden Skizzen in den Rückmeldungen (siehe z. B. Abb. 8). Eine graphische Darstellung, die im Gegensatz zum Baumdiagramm der tragfähigen Grundvorstellung des *Vereinigens* bei der Addition im stochastischen Kontext näher ist, ist das Einheitsquadrat[17]. Die abgegrenzten Flächen im Einheitsquadrat stellen jeweils disjunkte Ereignisse von Zufallsexperimenten dar, wobei der jeweilige Flächeninhalt die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse ausdrückt. Die Addition von zwei Wahrscheinlichkeiten ist also das gedankliche Zusammenfügen der zwei disjunkten Flächen mit passender Größe im Einheitsquadrat. Zudem wird die Zeitgebundenheit des Denkens nicht überbetont, da sich keine chronologisch angeordneten Flächen im Einheitsquadrat erkennen lassen, wie das bei Baumdiagrammen mit einer chronologisch interpretierbaren Struktur der Fall ist. Daneben bietet es auch einen sinnvollen Anknüpfungspunkt für die *Flächeninhaltsvorstellung* der Multiplikation im stochastischen Kontext. Nichtsdestotrotz taucht diese visuelle Verstehensstütze in keiner der 110 Rückmeldungen der Lehramtsstudierenden explizit als Skizze auf. Dabei bietet das Einheitsquadrat über die Rechenoperationen hinausgehend noch weitere Potentiale für den Stochastikunterricht, wie der Beitrag von Victoria Döller und Stefan Götz in diesem Heft zeigt.

Zum anderen verdichten kleinere Folgestudien die Indizien dafür, dass das *Hinzufügen* die vorherrschende Grundvorstellung für die Addition ist und dass Baumdiagramme diese nicht tragfähige Grundvorstellung im Kontext der Wahrscheinlichkeit triggern. So haben von 14 Lehramtsstudierenden (Mathematik Sekundarstufe, 4. Semester), denen die Aufgabe *Formulieren Sie eine Textaufgabe zum*

[17] Diese Darstellung ist daher für die Visualisierung der rückgemeldeten Modelle in den Abb. 7, 8, 10, 11, 12, 13 und 14 gewählt worden.

Thema Geometrie*, die zur Rechnung* $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ *passt* vorgelegt wurde, zehn (71%) die Grundvorstellung des *Hinzufügens* in ihrer Antwort verarbeitet, während vier (29%) die Grundvorstellung des *Vereinigens* gewählt haben. Interviews (*n* = 3, Lehramtsstudierende Mathematik Sekundarstufe, 4. Semester) bzw. die Methode des *Lauten Denkens* (*n* = 3, Lehramtsstudierende Mathematik Sekundarstufe, 4. Semester) bezogen auf das ursprüngliche Erhebungsinstrument im Kontext der Wahrscheinlichkeitsrechnung legen zudem die starke Gebundenheit des stochastischen Operierens an Baumdiagramme offen:

> „Was mir als erstes in den Sinn kommt, ist ein Baumdiagramm." (P_LD_N_Z117)

> „Das Erste, was mir eigentlich im Kopf gekommen ist, ist die Zeit in der Schule [...]. Und dann ist es weiter eigentlich direkt zur Baumdiagramm, das dann so immer im Kopf irgendwie erstellt worden ist." (P_I2_N_Z11)

> „Ich war im Kopf bei Wahrscheinlichkeit und dann ist das Baumdiagramm eines der grundlegenden Sachen [...]. [...] Entlang vom Baumdiagramm hat man genau gesehen, wie die Addition durchgeführt werden muss." (P_I3_N_Z83)

In Anbetracht dieser Überlegungen und Resultate kann unsere zweite Hypothese (Abschnitt 3) als zutreffend angenommen werden.

Abseits der formulierten Hypothesen ist eine weitere Beobachtung in den Resultaten nennenswert: Die Verwendung natürlicher Häufigkeiten. 19 von 36 Lehramtsstudierenden (53%), die eine angemessene Antwort auf die Frage *Formulieren Sie eine Textaufgabe zum Thema* Stochastik*, die zur Rechnung* $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ *passt* geben konnten, haben natürliche Häufigkeiten als numerische Darstellung der betreffenden Wahrscheinlichkeiten verwendet. Dies lässt vermuten, dass das inhaltliche Denken zum stochastischen Operieren durch die Verwendung natürlicher Häufigkeiten erleichtert wird, wie es vor allem für bayesianische Aufgaben bereits belegt wurde (Krauss et al. 2020).

7 Ausblick

Die Resultate der Studie und die anschließende Diskussion legen einige Implikationen für den Schulunterricht nahe.

1. Auch Mathematik-Lehramtsstudierende im 4. Semester haben Schwierigkeiten, tragfähige Grundvorstellungen zu Rechenoperationen im stochastischen Kontext zu aktivieren, insbesondere für die Addition. Es ist daher davon auszugehen, dass auch Lernende in der Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II explizite Unterstützung von Seiten der Lehrpersonen beim Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen zu Rechenoperationen im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung brauchen. Dabei ist im Sinne der Knowledge in Pieces Theorie von diSessa (2018) nicht davon auszugehen, dass tragfähige Grundvorstellungen zu Rechenoperationen im Allgemeinen ausreichen, um sie auch kontextspezifisch korrekt aufzurufen.
2. Eine visuelle Verstehensstütze, die beim Rechnen im Kontext der Stochastik häufig von den Studienteilnehmer*innen aufgerufen wurde, ist das Baumdiagramm. Das Baumdiagramm verleitet jedoch dazu, stochastische Rechenoperationen rein algorithmisch auszuführen und die erste und zweite Pfadregel als gleichartig – ohne ein inhaltliches Verständnis der dahinterliegenden mathematischen Konzepte – anzusehen. Insbesondere verstärkt das Verwenden eines Baumdiagramms die Gefahr, die Zeitgebundenheit des Denkens zu übergeneralisieren und die Addition als das *Hinzufügen-von-Zufallsexperimenten* aufzufassen. Eine alternative Visualisierung, die diese Erschwernisse übergeht, einen Anknüpfungspunkt für die *Flächeninhaltsvorstellung* der Multiplikation im stochastischen Kontext bietet, noch viele weitere Potentiale birgt (siehe den Beitrag von Döller und Götz in diesem Heft), jedoch nie von den Studienteilnehmer*innen explizit herangezogen wurde, ist das Einheitsquadrat. Ein Grund für die ausbleibende Popularität dieser Darstellung könnte der Lehrplan der Sekundarstufe darstellen: Während das Erstellen und Interpretieren von Baumdiarammen bzw. das Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen expliziter Bestandteil des österreichischen Stochastikcurriculums für die Sekundarstufe war und ist, taucht das

Einheitsquadrat aktuell in diesem Kontext nicht auf (RIS 2024). Jedoch wird es einmalig im Rahmen der Geometrie-Ausbildung genannt und das Darstellen, Ergänzen und Interpretieren von absoluten und relativen Häufigkeiten in Vierfeldertafeln würde einen passenden Anknüpfungspunkt für die Behandlung von Einheitsquadraten auch im Stochastikunterricht bieten (RIS 2024). Dieser Punkt sei daher als Plädoyer für eine verstärkte Behandlung von Einheitsquadraten im Stochastikunterricht der Sekundarstufe zu verstehen, insbesondere um inhaltliche Vorstellungen zu Rechenoperationen abseits der Pfadregeln aufzubauen.

3. Eine sprachsensible Fachausbildung scheint insbesondere für den Bereich der Stochastik von großer Relevanz zu sein. Wie die Resultate zur Additionsaufgabe (siehe Abschnitt 5.2) aber auch zur Multiplikationsaufgabe (siehe Abb. 8) zeigen, werden Schlüsselbegriffe wie *mindestens*, *genau einmal*, […] von den Studierenden ohne ein tragfähiges inhaltliches Verständnis verwendet. Gerade hier sind der Bildungsbereich *Sprache und Kommunikation* der Oberstufe und die fächerübergreifende Kompetenz *Sprachliche Bildung und Lesen* im Lehrplan also besonders ernst zu nehmen und bei der Planung von Unterricht zu berücksichtigen (RIS 2024).

Natürlich sind bezüglich dieser Implikationen Praktiker*innen und Fachdidaktiker*innen gleichermaßen dazu aufgefordert, gemeinsam an konkreten Umsetzungsmöglichkeiten für den Stochastikunterricht in Österreich zu arbeiten und Erkenntnisse zu teilen, um zentrale inhaltliche Vorstellungen bei den Lernenden langfristig zu fördern.

Literatur

Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *Mathematik lehren*(128), 18–21.

diSessa, A. A. (2018). A Friendly Introduction to “Knowledge in Pieces”: Modeling Types of Knowledge and Their Roles in Learning. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt & B. Xu (Hrsg.), *Springer eBook Collection Education. Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (65–84). Springer.

Hauer-Typpelt, P. (2006, 21. April). *Unbedingt Bedingte Wahrscheinlichkeit? Der Satz von Bayes im Schulunterricht.* ÖMG. ÖMG-Lehrerfortbildung, Wien. Online:

https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2006%20Band%2039/VortragHauerTyppelt.pdf

Hefendehl-Hebeker, L. & Törner, G. (1984). Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *Didaktik der Mathematik*, *12*(4), 245–262.

Huget, J. (2024). *Die Methode der didaktisch orientierten Rekonstruktion* (Bd. 11). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-42642-2

Jahnke, T. (2012). *Die Regeldetri des Mathematikunterrichts* (Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, 46. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 5.3.2012 bis 9.3.2012 in Weingarten). GDM. https://doi.org/10.17877/DE290R-13840

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M. & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *29*(3-4), 233–258.

https://doi.org/10.1007/BF03339063

Krauss, S., Weber, P., Binder, K. & Bruckmaier, G. (2020). Natürliche Häufigkeiten als numerische Darstellungsart von Anteilen und Unsicherheit – Forschungsdesiderate und einige Antworten. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *41*(2), 485–521. https://doi.org/10.1007/s13138-019-00156-w

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Waxmann. Online: https://elibrary.utb.de/doi/book/10.31244/9783830974338

Kuntze, S. & Prediger, S. (2005). Ich schreibe, also denk' ich - Über Mathematik schreiben. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *47*(5), 1–6.

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Arithmetik: Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (3., erw., völlig überarb. Aufl., Nachdr). *Mathematik Primar- und Sekundarstufe*. Spektrum Akad. Verl.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Auflage). *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0

Prediger, S. (2008a). Discontinuities for Mental Models - A Source for Difficulties with the Multiplication of Fractions. In D. de Bock, B. D. Søndergaard, B. Gómez Alfonso & L. C. Chun Chor (Hrsg.), *Research and development in the teaching and learning of number systems and arithmetic: Proceedings of ICME-11, Topic Study Group 10* (29–37).

Prediger, S. (2008b). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, *18*(1), 3–17.

Prediger, S. (2010). Aber wie sag ich es mathematisch? Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt. In D. Höttecke (Hrsg.), *Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik: Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Dresden 2009 ; [36. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik ; Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Band 30* (6–20). LIT-Verl.

Prediger, S. (2011). Why Johnny Can't Apply Multiplication? Revisiting the Choice of Operations with Fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *6*(2), 65–88. https://doi.org/10.29333/iejme/262

RIS Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen (2023 & i.d.F.v. 09.07.2024): https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568.

Stampfer, F. & Hell, T. (2018). Teufelskreis Natural Number Bias – Primarstufenstudierende im Fokus. In P. Bender & T. Wassong (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018: Vorträge zur Mathematikdidaktik und zur Schnittstelle Mathematik/Mathematikdidaktik auf der gemeinsamen Jahrestagung GDM und DMW 2018: (52. Jahestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik)* (1727–1730). WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Strick, H. K. (2020). *Stochastische Paradoxien*. *essentials*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29583-7

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Teilw. zugl.: Kassel, Univ.-Gesamthochsch., Diss. *Texte zur Didaktik der Mathematik*. Spektrum Akad. Verl.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren*(118), 4–8.

vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 225–254. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3

vom Hofe, R. & Roth, J. (2023). Grundvorstellungen aufbauen. *Mathematik lehren* (236), 2–7.

Verfasser*innen

Florian Stampfer
Universität Innsbruck
Institut für Fachdidaktik
Fürstenweg 176
6020 Innsbruck
florian.stampfer@uibk.ac.at

Pia Tscholl
Universität Innsbruck
Fakultät für Fachdidaktik
Fürstenweg 176
6020 Innsbruck
pia.tscholl@uibk.ac.at