

# Elementarmathematische Betrachtungen zur gerechten Pizza- und Apferteilung<sup>1</sup>

HANS HUMENBERGER, WIEN

Das wirklich gerechte Teilen einer Pizza ist – genau genommen – gar nicht so einfach, wobei unter „gerecht“ in naheliegender Weise hier durchweg „flächengleich“ gemeint ist. Möchte man die Pizza mit einem Messer durch einen geraden Schnitt teilen, muss man dabei immerhin den Mittelpunkt treffen, so dass der Schnitt ein Durchmesser ist. Dazu und auch für die Teilung unter mehreren Personen gibt es aber auch interessante Alternativen, die starken Bezug zur Elementargeometrie (Sekundarstufe 1) und auch zur Integralrechnung (Sekundarstufe 2) aufweisen. Darüber hinaus gibt es ein interessantes dreidimensionales Analogon für Kugeln („Äpfel“) – als Anwendung des wichtigen und bekannten Prinzips von Cavalieri.

## 1. Das Phänomen der gerechten Pizzateilung („Pizzatheorem“)

Es gibt eine Möglichkeit, mit einem Pizzamesser, das aus vier geradlinigen Klingen bzw. Messern mit „Zentrum“  $P$  besteht ( $P$  teilt jedes Messer in zwei Teile), so dass benachbarte Klingen einen Winkel von  $45^\circ$  einschließen, eine immer gerechte (auch in der Theorie!) Pizzateilung zu erhalten. Wir stellen uns dieses Messer als „Stanze“ vor, die irgendwo (das Stanzzentrum  $P$  liege beliebig auf der Kreisfläche) auf die Pizza gedrückt wird, so dass dadurch acht Teile entstehen (Abb. 1). Diese Teile haben eine zu Kreissektoren verwandte Form, sind aber keine wirklichen (außer in jenem Fall, in dem man mit dem Kreuzungspunkt des Stanzmessers genau den Kreismittelpunkt trifft), trotzdem sollen sie der Einfachheit halber im Folgenden „Sektoren“ heißen.

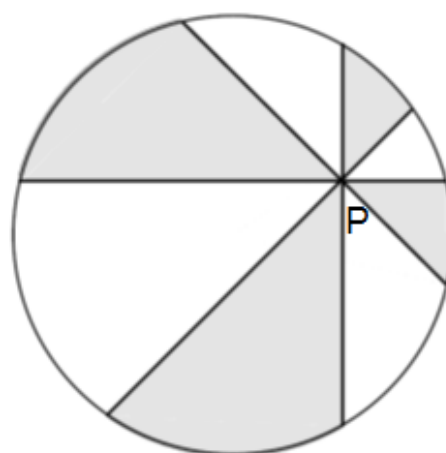


Abb. 1: Pizzastanze – schematisch

Wenn sich nun die erste Person jeden zweiten „Sektor“ nimmt, z. B. die in der Abbildung weiß dargestellten, und die zweite Person die anderen (die grau dargestellten), so ist die Pizza gerecht geteilt! Eine Realisierung mit einer echten Pizza und einem entsprechenden Stanzgerät sieht man in Abb. 2. Dieses Phänomen ist sicher überraschend und passt irgendwie nicht zu den Symmetrieverhältnissen des Kreises, kaum jemand würde dies intuitiv vermuten. Im Gegenteil, als Frage formuliert würden sicher die meisten Befragten verneinen, dass dadurch wirklich eine gerechte Teilung gegeben ist.



Abb. 2a: Pizzastanze – real



Abb. 2b: Pizzastanze – nach Stanzvorgang

<sup>1</sup> Dieser Aufsatz ist eine etwas überarbeitete und kombinierte Version von Humenberger 2015 und 2019 (Mathematische Semesterberichte).

Heutzutage kann man sich mit *Dynamischer Geometrie Software* (DGS) zumindest phänomenologisch davon überzeugen: Jede DGS kann Flächeninhalte messen und solche addieren (es handelt sich nicht um echte Sektoren, aber man kann sie zerlegen in Dreiecke und Kreissegmente und diese Typen von Figuren können gemessen werden). Hier könnte man ein entsprechendes Applet konzipieren, das dies leistet ( $P$  verschieben und die Flächeninhaltssumme der grauen und weißen „Sektoren“ bleibt jeweils gleich). Enaktiv kann man sich auch dadurch überzeugen, dass man ein (großes) kreisrundes Stück Karton so wie angegeben in Stücke teilt und jeweils die weißen bzw. grauen Flächenstücke zusammen abwägt.

**Bemerkung:** In Kroll/Jäger 2010 wird vorgeschlagen, das Problem für den Unterricht „einzukleiden“ in ein Erbteilungsproblem. Diese Einkleidung halten wir für nicht günstig, da sie u. E. vom Problem weit weg führt und sehr künstlich klingt (Baumkronen als Kreise, etc.). Auf S. 101 steht zu lesen: „Niemand sollte sich daran stören, dass das Problem unrealistisch ist; denn Schüler stören sich auch nicht daran.“ Auch wenn dies stimmen sollte (was wir bezweifeln; wir glauben viele Schülerinnen und Schüler stören sich sehr wohl daran), halten wir das aus der Sichtweise von Realitätsbezügen im Mathematikunterricht für problematisch, es kann nämlich dadurch leicht ein falsches (und schädliches) Bild von Mathematik erzeugt werden.

Als selbständig zu lösende Problemlöseaufgabe ist die Begründung der entsprechenden Phänomene für Schülerinnen und Schüler (im Regelunterricht) mit Sicherheit zu schwierig. Gleichwohl hat dieses Phänomen etwas Faszinierendes und Motivierendes, sich mit dieser Sache etwas genauer zu beschäftigen<sup>2</sup>. Wie könnte also ein konkreter Unterricht aussehen, in dem dieses Phänomen thematisiert wird? In welcher Klassenstufe könnte dies stattfinden? Darauf gehen wir später ein.

Zunächst folgen fachlich-epistemologische Analysen des Themas auf zwei Ebenen, nämlich mittels Elementargeometrie und mittels Analysis, wobei auch auf Literaturstellen zu diesem Thema eingegangen wird.

## 2 Elementargeometrie

### 2.1 Darstellungen nach S. Wagon u. a.

Die folgende Literaturstelle ist eine irgendwie *verblüffende* (zumindest, wenn man mit dem Phänomen noch nicht vertraut ist). In der Arbeit von Carter/Wagon 1994 (nur eine halbe Seite!) ist ein „Beweis ohne Worte“ angegeben, d. h. einfach ein Bild (Abb. 3), keine Erklärungen dazu.

Durch dieses Bild sieht man (darauf käme man i. A. nicht alleine), dass nicht nur Flächengleichheit zwischen den grauen und weißen „Sektoren“ zu bestehen scheint, sondern sogar *Zerlegungsgleichheit*, d. h. man kann aus denselben Puzzleteilen sowohl die vier

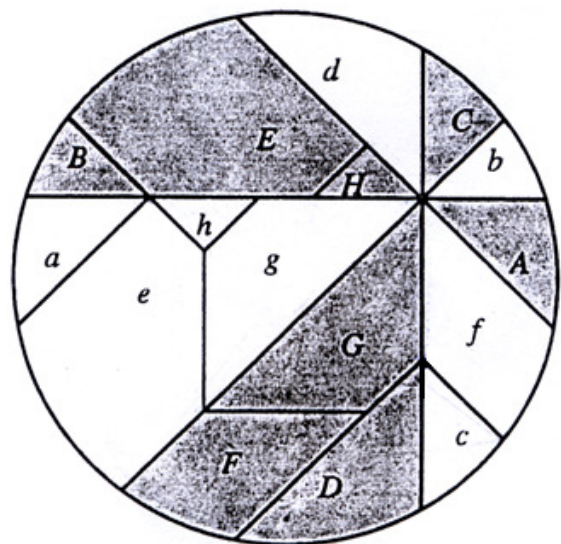


Abb. 3: Zerlegungsgleichheit nach Carter u. Wagon 1994

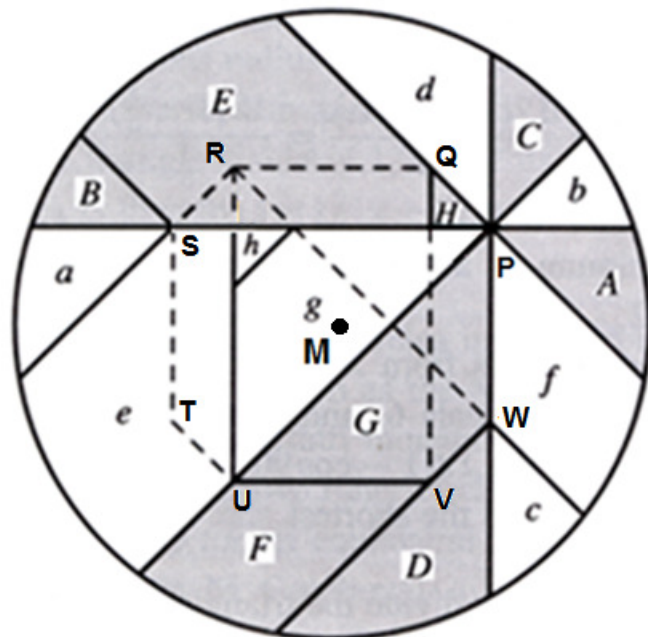
Das ist noch überraschender als die bloße Flächengleichheit. Das obige Wort *verblüffend* bezieht sich auf folgende Aspekte: (1) Es herrscht sogar Zerlegungsgleichheit. (2) Ist der Beweis wirklich so einfach, dass man darüber eigentlich gar kein Wort zu verlieren braucht?

<sup>2</sup> Dieses Thema hat es sogar schon ins Fernsehen geschafft, was für ein mathematisches Thema nicht selbstverständlich ist: Wissen vor 8, ARD, 14. 11. 2018. Leider ist diese Sendung nur bis 14. 11. 2019 in der Mediathek von ARD.

Carter/Wagon deuten durch die Bezeichnung der jeweiligen Flächenteile (analoge Groß- und Kleinbuchstaben) schon an, dass es sich dabei jeweils wohl um kongruente Flächen handeln wird. Aber das Bild (d. h. die dahintersteckenden Ideen, Gedanken, Begründungen etc.) ist gar nicht leicht genauer zu analysieren. Was geschieht hierbei genau? Wie entstehen die einzelnen Unterteilungen bzw. Flächenstücke, d. h. wie ist die Figur konstruiert? Letztlich: warum sind die Flächen, die mit demselben Buchstaben benannt sind (große Buchstaben bei den grauen Flächen, kleine bei den weißen), kongruent? Die Kongruenzen  $A \cong a, B \cong b, C \cong c, D \cong d$  sind noch relativ leicht zu erklären: In diesen Fällen wurde vermutlich einfach am waag- bzw. senkrechten Kreisdurchmesser (nicht eingezeichnet) gespiegelt.  $G$  und  $g$  liegen spiegelsymmetrisch zu ihrer gemeinsamen Grenze. Aber warum genau gelten die anderen Kongruenzen ( $E \cong e, F \cong f, H \cong h$ )? Das, was in einer mathematischen Zeitschrift in der Rubrik „Beweis ohne Worte“ offenbar nicht gesagt zu werden braucht, entpuppt sich bei genauerer Betrachtung als gar nicht so selbstverständlich. So gesehen scheint der Titel „Beweis ohne Worte“ in einem elementaren Sinn kaum gerechtfertigt.

Eine nur wenig geänderte Variante der oben angegebenen Carter-Wagon-Zerlegung wird in (Kohnhauser/Velleman/Wagon 1996, S. 118; vgl. Abb. 4) gegeben, die Flächenstücke  $h$  bzw.  $H$  sind hier gegenüber Abb. 3 nur halbiert. Der entscheidende Unterschied besteht aber darin, dass hier auch ein zur Lösung sehr gut brauchbares hochsymmetrisches Achteck  $PQRSTUWV$  (Mittelpunkt =  $M$  = Kreismittelpunkt) eingezeichnet ist. Dieses Achteck kann man sich z. B. so entstanden denken: das Rechteck  $PSTW$  (dessen Mittelpunkt ist ja der Kreismittelpunkt  $M$ ) wird mit

Abb. 4: Zerlegungsgleichheit mit Achteck



Zentrum  $M$  um  $90^\circ$  gedreht. Dabei müssen die Bildpunkte  $Q, V$  und  $U$  auf den jeweiligen  $45^\circ$ -Linien durch  $P$  und  $W$  zu liegen kommen (warum genau?). Das Achteck  $PQRSTUWV$  wird bei einer  $90^\circ$ -Drehung um  $M$  auf sich abgebildet, und dadurch kann schon ein entscheidender Hinweis gegeben sein bei der Suche nach einer Begründung für die Kongruenzen. Bei Abb. 4 könnte man deswegen u. E. schon eher als bei Abb. 3 (hier fehlt das Achteck und dadurch der Hinweis auf die wichtige  $90^\circ$ -Drehsymmetrie bezogen auf  $M$ ) von einem Beweis ohne Worte sprechen.

Die Kongruenzen  $A \cong a, B \cong b, C \cong c, D \cong d, G \cong g$  ergeben sich dabei genauso wie oben schon angedeutet (Spiegelungen). Für die anderen Kongruenzen könnte man z. B. mit Hilfe des hochsymmetrischen Achtecks wie folgt argumentieren: Durch die Symmetrie des Achtecks (z. B. sind die schrägen Diagonalen klarerweise „ $45^\circ$ -Linien“) ist z. B.  $H \cong h$  a priori klar (gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke mit der kleinen Achteckseite als Hypotenuse; in Abb. 3 ist die Kongruenz  $H \cong h$  zwar auch augenscheinlich, aber wie kann diese exakt begründet werden?). Die Kongruenz  $F \cong f$  könnte z. B. so begründet werden (vgl. Abb. 4): Wenn man das Achteck mit Zentrum  $M$  um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn dreht und dabei auch  $f$  mitnimmt, so entsteht daraus klarerweise  $F$  (warum genau?), woraus ihre Kongruenz folgt (analog bei  $e$  und  $E$ ). Durch das Achteck sieht man vermutlich leichter (und kann es leichter begründen), dass  $f$  und  $F$  bzw.  $e$  und  $E$  durch  $90^\circ$ -Drehungen mit Zentrum  $M$  auseinander hervorgehen.

## 2.2 Darstellungen nach P. Gallin

Ein inhaltlich frappierend einfacher, aber sehr viele Teile benötigender – und daher scheinbar etwas unübersichtlicher – Zerlegungsbeweis findet sich in (Gallin 2011, S. 12). Wenn man sich aber von der Flut von Teilen nicht abschrecken lässt, so könnte die zugehörige Abbildung (Abb. 5) als ein echter „Beweis ohne Worte“ angesehen werden, z. B. mit folgendem erklärenden Text (d. h. also „fast ohne Worte“): Man spiegelt  $P$  mitsamt den vier Schnitten bzw. Pizzamessern an  $M$ , an den beiden Koordinatenachsen und an den Winkelhalbierenden des Koordinatensystems, so dass die Bildpunkte von  $P$  ein Achteck bilden (fett gezeichnet). In jedem Eckpunkt des Achtecks gibt es dann eine waag-, eine senkrechte und zwei um  $\pm 45^\circ$  geneigte Linien (Messer). Nun kann man das Äußere und das Innere des Achtecks getrennt voneinander betrachten und die jeweilige Flächengleichheit (sogar Zerlegungsgleichheit) der gefärbten und ungefärbten Stücke fast unmittelbar (aber begründet) sehen, wie genau?

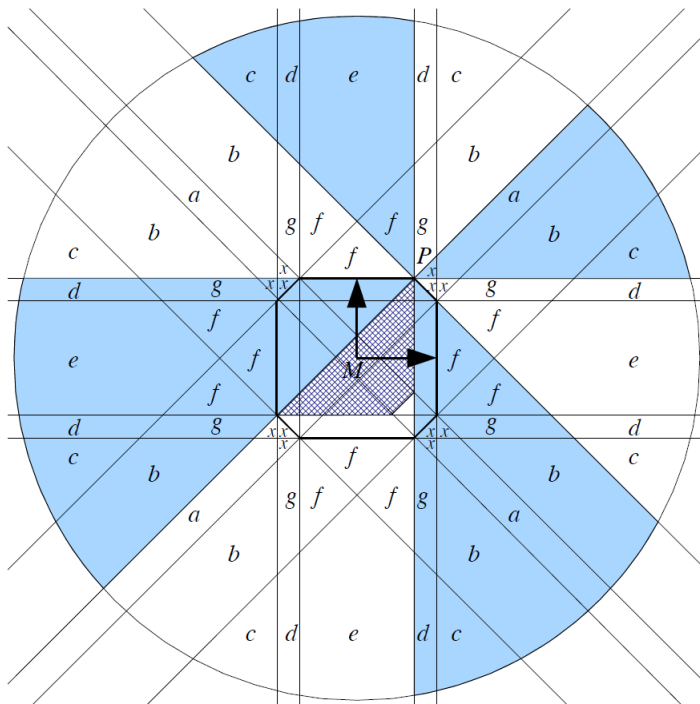


Abb. 5: Zerlegungsgleichheit nach Gallin 2011

**Lösung:** Äußeres: Aus Symmetriegründen (diese brauchen hier wohl nicht mehr näher erläutert zu werden) findet man kongruente Stücke im weißen bzw. gefärbten Bereich: In jedem Bereich zwei Stücke  $a$  und  $e$ ; vier Stücke  $b$ ,  $c$ ,  $d$  und  $g$ ; sechs Stücke  $f$  und  $x$ . Außerhalb des Achtecks ist daher die Flächengleichheit der gefärbten und ungefärbten Stücke nachgewiesen. Inneres: Das schraffierte Trapez gehört eigentlich zur weißen Fläche (gleich groß wie das im Achteck danebenliegende gefärbte Trapez) und die restlichen Flächen innerhalb des Achtecks sind auch leicht als zerlegungsgleich zu erkennen (ein kleines Trapez und vier kleine kongruente Dreiecke).

Beim Achteck von Abb. 5 handelt es sich eigentlich um dasselbe Achteck wie in den Abb. 4. Die geniale Idee von P. Gallin besteht i. W. darin, nicht nur den Punkt  $P$  immer weiter zu spiegeln an den Koordinatenachsen bzw. Winkelhalbierenden ( $\rightarrow$  Achteck), sondern auch die vier Schnittmesser jeweils mitzuspiegeln. Dadurch wird der an sich ja nicht symmetrischen Figur von Abb. 1 die höchstmögliche Symmetrie (sozusagen „mit Gewalt“) aufgeprägt, die sich in dieser Situation nur denken lässt. Der Preis dafür sind zwar „viele Linien“ und „viele Flächenstücke“, aber man kommt dadurch zu einem Bild, das leicht zu interpretieren ist. Durch die hochgradige Symmetrie, die erreicht bzw. geschaffen wurde, sind die Kongruenzen aller Flächenstücke  $a$  (oder auch  $b$ , etc.) evident und kaum

mehr weiter begründungsbedürftig. Dies ist aber in Abb. 3 noch überhaupt nicht so, und in Abb. 4 in deutlich schwächerer Ausprägung.

P. Gallin gibt in seiner Arbeit (2011, S. 14f) noch einen anderen schönen elementargeometrischen Beweis für den Flächeninhalt, der allen Interessierten empfohlen sei.

Übrigens werden bei dieser Teilung auch die „Ränder“ gleichmäßig aufgeteilt, niemand braucht dabei mehr von den bei Pizzen oft weniger beliebten – weil trockeneren – Rändern zu akzeptieren. Auch dafür (Bogenlängen, „Pizzaränder“) gibt es einen sehr elementaren Beweis, dass die Längensumme der vier gefärbten Kreisbogenteile gleich jener der vier ungefärbten ist (vgl. Gallin 2011, S. 13f). Man kann relativ leicht zeigen, dass bei festem Öffnungswinkel  $\alpha$  eines Sehnenpaares die Summe der beiden Bogenlängen am Kreis immer gleich ist, unabhängig von der Lage von  $P$  und von der speziellen Lage der beiden Sehnen, es kommt nur auf deren Öffnungswinkel  $\alpha$  an (vgl. Abb. 6a):

$$\left| \widehat{A_1 C_1} \right| + \left| \widehat{B_1 D_1} \right| = \left| \widehat{A_2 C_2} \right| + \left| \widehat{B_2 D_2} \right|.$$

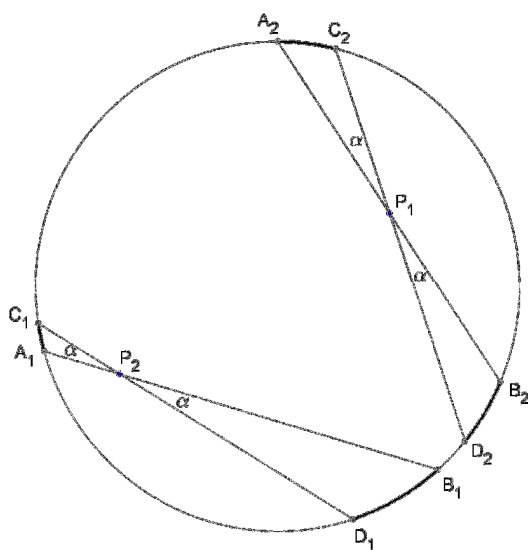


Abb. 6a: Gleiche Summe der Bogenlängen

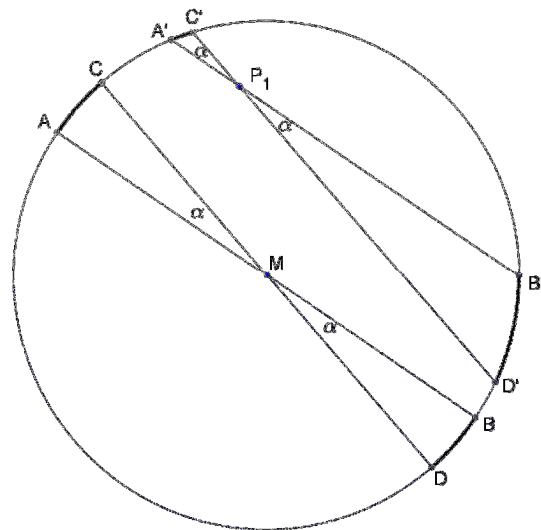


Abb. 6b: Sehnen paarweise parallel

Eine wesentliche Idee dabei ist, dass es genügt zu zeigen: Dies gilt für  $P_2 = M$  und paarweise parallele Sehnen (siehe Abb. 6b):

$$\left| \widehat{A'C'} \right| + \left| \widehat{B'D'} \right| = \left| \widehat{AC} \right| + \left| \widehat{BD} \right|.$$

Es wird sich dabei herausstellen, dass die Verlängerungen bzw. Verkürzungen bei den „Übergängen“  $\left| \widehat{AC} \right| \rightarrow \left| \widehat{A'C'} \right|$  bzw.  $\left| \widehat{BD} \right| \rightarrow \left| \widehat{B'D'} \right|$  einander aufheben, somit in Summe sich keine Veränderung ergibt: Es gilt nämlich

$$\left| \widehat{A'C'} \right| = \left| \widehat{AC} \right| + \left| \widehat{CC'} \right| - \left| \widehat{AA'} \right| \quad \text{bzw.} \quad \left| \widehat{B'D'} \right| = \left| \widehat{BD} \right| + \left| \widehat{BB'} \right| - \left| \widehat{DD'} \right|$$

und wegen  $\left| \widehat{AA'} \right| = \left| \widehat{BB'} \right|$  bzw.  $\left| \widehat{CC'} \right| = \left| \widehat{DD'} \right|$  (aus der Kreissymmetrie klar!) ergibt sich durch Summenbildung:  $\left| \widehat{A'C'} \right| + \left| \widehat{B'D'} \right| = \left| \widehat{AC} \right| + \left| \widehat{BD} \right|$ . Die Summe ist leicht abzulesen, wenn die Sehnen durch  $M$  gehen, sie beträgt  $2\alpha r$  ( $\alpha$  im Bogenmaß).

**Bemerkung:** Beim Flächeninhalt braucht man zur „Konstanz“ alle vier sektorähnlichen Teile, d. h. zwei „Doppelsektoren“, bei der zugehörigen Bogenlänge gilt diese offenbar schon für jeweils zwei gegenüberliegende sektorähnliche Teile, d. h. für einen Doppelsektor.

### 2.3 Eine weitere elementargeometrische Erkenntnis und eine Plausibilitätsbetrachtung

Im Fokus der obigen Betrachtungen stand die Zerlegungsgleichheit der jeweiligen Flächenteile. Im Folgenden steht diese nicht mehr im Zentrum, sondern „nur“ mehr deren Flächengleichheit mittels eines ganz anderen elementargeometrischen Zugangs, der schon die Verbindung zum Zugang mit Hilfe der Analysis herstellt. Dafür formulieren wir zunächst ein Lemma.

**Lemma:** Bei jedem orthogonalen Sehnenpaar in einem Kreis gilt für die Sehnenabschnitte  $a, b, c, d$  ( $r$  ist der Kreisradius, Abb. 7):  

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2r)^2$$

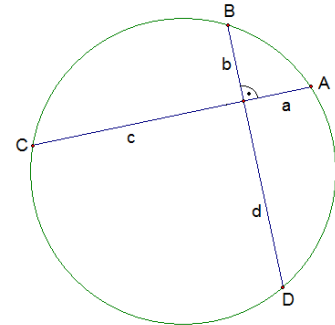


Abb. 7: Orthogonales Sehnenpaar

Dafür gibt es verschiedene Beweise auf Schulniveau, dies ist eine typische und interessante „Problemlöseaufgabe“. Ein schöner und illustrativer „Beweis ohne Worte“ bestehend aus vier Abbildungen findet sich in (Nelsen 2004).

Dieses Lemma spielt einerseits bei der folgenden Plausibilitätsbetrachtung für das Pizzatheorem und andererseits auch bei der Begründung mittels Integralrechnung (Analysis, unten) eine wichtige Rolle. Insofern hat dieses Lemma hier eine Art Brückenfunktion zwischen Elementargeometrie und Analysis.

#### Plausibilitätsbetrachtung

Wenn man zwei orthogonale „Pizzamesser“ (Schnittpunkt  $P$  um  $P$  mit einem kleinen Winkel  $\Delta\varphi$  weiterdreht), dann ist der Inhalt der Fläche zwischen der ursprünglichen und der neuen Lage (vgl. Abb. 8, grau) ungefähr gleich

$$A \approx \frac{1}{2} \Delta\varphi (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \quad (1)$$

Erklärung: Man fasst jeden der vier sektorähnlichen Teile mit „Spitze  $P$ “ näherungsweise als Kreissektor mit Öffnungswinkel  $\Delta\varphi$  und den jeweiligen Radien  $a, b, c$  bzw.  $d$  auf. Der Flächeninhalt eines Kreissektors mit Radius  $r$  und Öffnungswinkel  $\Delta\varphi$  ist bekanntlich gegeben durch  $\text{Bogenlänge} \cdot r / 2 = (r \cdot \Delta\varphi) \cdot r / 2 = r^2 \cdot \Delta\varphi / 2$ .

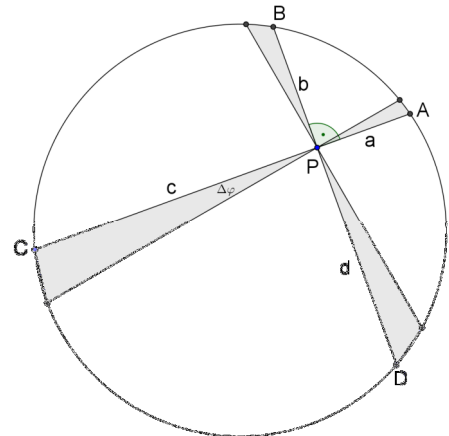


Abb. 8: Fläche beim Weiterdrehen um  $\Delta\varphi$

Dass die oben angegebene Näherungsbeziehung (1) sogar exakt gilt, soll bei dieser Plausibilitätsbetrachtung nicht weiter begründet werden (die zugehörige Begründung wird erst weiter unten gegeben). Nach dem obigen Lemma ist  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2r)^2$  konstant und somit der Flächeninhalt des grauen Bereiches (Abb. 8) offenbar proportional zum Drehwinkel, denn der Proportionalitätsfaktor ist dabei unabhängig von der Lage des Punktes  $P$  und von der Lage der beiden orthogonalen Pizzamesser: Auch bei der *beliebig oft* (z. B.  $(n-1)$ -mal) um  $\Delta\varphi$  verdrehten Lage als Ausgangslage ergibt sich dieselbe Proportionalität beim Weiterdrehen, jedes Mal mit demselben Proportionalitätsfaktor, d. h. es ist plausibel, dass (1) nicht nur für kleine Winkel  $\Delta\varphi$ , sondern auch für größere Winkel  $\varphi = n \cdot \Delta\varphi$  gilt (viele kleine Steigungsdreiecke mit derselben Steigung „hintereinander gesetzt“ ergeben ein großes Steigungsdreieck mit ebendieser Steigung). Diese Proportionalität kann auch mittels DGS bestätigt werden (DGS als Messinstrument). Solche empirischen Befunde sind zwar klarerweise kein Beweisersatz, aber bei Plausibilitätsargumenten doch eine gewisse Bestätigung, dass man am richtigen Weg ist (nach einem formalen Beweis kann man ja bei Bedarf immer noch suchen, z. B. mittels Integralrechnung, siehe unten). Der Flächeninhalt zweier „orthogonaler Doppelsektoren“ (wie z. B. die grauen Flächenteile in Abb. 3 mit  $\varphi = \pi / 4$ ) ist demnach  $A = (1/2) \cdot \varphi \cdot (2r)^2 = 2r^2 \cdot \varphi$ ,

mit  $\varphi = \pi/4$  schließlich  $A = r^2\pi/2$ , d. h. die grauen Flächenteile machen wirklich genau die halbe Kreisfläche aus!

Durch die eben angesprochene Erkenntnis der Proportionalität (diese ist gewissermaßen der mathematische Kern dieses Themas!) ist sofort folgende Verallgemeinerung möglich: Wenn man die  $90^\circ$ -Quadranten nicht nur – wie oben – in zwei „winkelgleiche“ Teile zu je  $45^\circ$  teilt, sondern z. B. in drei zu je  $30^\circ$  (insgesamt dann 12 Teile), dann kann man mit der genau gleichen Argumentation sagen: Bei so einer Teilung kann gerecht zwischen drei Personen geteilt werden, indem jeder jeden dritten Teil nimmt. Jeder

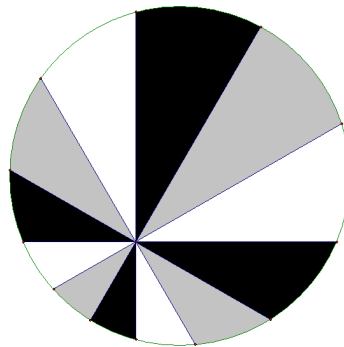


Abb. 9a: Aufteilung auf drei Personen – drei Teile pro Quadrant

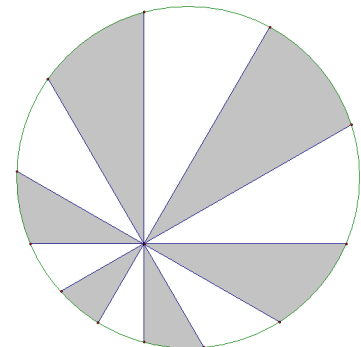


Abb. 9b: Aufteilung auf zwei Personen – drei Teile pro Quadrant

bekommt so insgesamt wieder zwei „orthogonale“ Paare einander gegenüberliegender „Sektoren“ („Doppelsektoren“), nur mit Öffnungswinkel  $30^\circ$  statt  $45^\circ$  (Abb. 9a: die erste Person bekommt die weißen Doppelsektoren, die zweite die grauen, die dritte die schwarzen).

Dies würde genauso mit  $n$  Teilen jedes Quadranten (gesamt  $4n$  Teile) funktionieren, damit ist dann eine gerechte Aufteilung unter  $n$  Personen möglich.

Bei gerader Anzahl der Teile eines Quadranten ( $2k$ , gesamt dann  $8k$  Teile) ist damit insgesamt eine gerechte Aufteilung der Pizza unter  $2k$  Personen möglich (jede Person hat 4 „Sektoren“). Wenn man sich nun die  $2k$  Personen durchnummeriert vorstellt (von 1 bis  $2k$ ) und die Teile der „ungeraden“ bzw. „geraden“  $k$  Personen jeweils vereinigt, dann hat man wieder eine gerechte Aufteilung in zwei Teilmengen. Dies kann man auch so ausdrücken: Wenn man die „Sektoren“ (im oder gegen den Uhrzeigersinn) von 1 bis  $8k$  durchnummeriert, dann ist die Flächeninhaltssumme der ungeraden „Sektoren“ gleich jener der geraden.

Aber wenn man jeden Quadranten wie oben in Bezug auf den Winkel z. B. drittelt (siehe Abb. 9b; allgemein: ungerade Anzahl der Teile in jedem Quadranten), dann sagt diese Plausibilitätsbetrachtung natürlich noch nichts darüber aus, ob auch dann die Flächeninhaltssumme der ungeraden „Sektoren“ gleich jener der geraden ist. Man hat dann eben nicht die schöne und einfache Situation von Paaren orthogonaler Doppelsektoren gleicher Farbe. Dieser Fall kann z. B. mit Analysis begründet werden – siehe z. B. (Humenberger 2015). Dass dies bei jeder gleichwinkligen Unterteilung der Quadranten funktioniert, heißt in der Literatur auch (allgemeines) „Pizzateorem“.

### 3 Analysis

Eine ganz andere Art der Behandlung dieses Themas bietet die Analysis, wobei eine (etwas andere) Anwendung der **Grundidee von Integralrechnung** ins Zentrum rücken kann: Integrale sind **Grenzwerte von Produktsummen**  $\sum_i f(x_i) \cdot \Delta x_i$ . Diese wertvolle Grundvorstellung für Integrale – in vielen Kontexten – ist in der didaktischen Literatur schon oft beschrieben worden, vgl. z. B. (Blum/Kirsch 1996, S. 62ff). Integrale können so nicht nur der Flächenberechnung mittels „schmaler Streifen“ dienen (obwohl diese geometrische Interpretation sicher eine herausragende Stellung besitzt, sie sollte aber nicht die einzige sein), sondern eben auch in anderen Kontexten hilfreich sein. Oft wird die Integralrechnung im Schulunterricht ja auf das Anwenden des zweiten Hauptsatzes der Differential-

und Integralrechnung beschränkt  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ : Berechnen von Integralen mittels Stammfunktionen. Zu diesem Inhalt wird oft seitens der Lehrenden bzw. in Schulbüchern möglichst schnell

hingesteuert, um rasch viele Übungsaufgaben „rechnen“ zu können. Manchmal wird in Schulbüchern der genannte Satz sogar zu einer Definition „degradiert“  $\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a)$ , was im Sinne Freudenthals durchaus einer *antididaktischen Inversion* entspricht. Aus der Sicht mancher Lehrkräfte bzw. Schulbücher spart man dabei zwar einige Mühen, aber der Preis dafür ist eindeutig zu hoch. Der Unterschied, was etwas *ist*, und wie man es *berechnet*, wird durch diese Definition übertüncht, eine berühmte Berechnungsformel, die zu Recht den Namen Hauptsatz trägt, wird zur Definition. Im Folgenden geht es auch um Flächeninhaltsberechnungen, nur nicht mittels schmaler Rechteckstreifen, sondern mittels schmaler Kreissektoren, das Prinzip von Produktsummen ist aber dasselbe.

### 3.1 Eine Begründung mit der Leibniz'schen Sektorformel

Ausgestattet mit dem obigen elementargeometrischen Lemma  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2r)^2$  und einer Anwendung der Integralrechnung, die auch als „Leibniz'sche Sektorformel“ bekannt ist, kann man leicht auch analytisch bestätigen, dass die Flächeninhaltssummen der weißen bzw. grauen „Sektoren“ jeweils dem halben Kreisflächeninhalt entsprechen.

Viele Flächen kann man auch näherungsweise als Summe von schmalen Kreissektoren sehen, insbesondere die obigen sektorähnlichen Flächen. Wir denken uns ein festes Zentrum  $P$  und einen „Radiusstrahl“ variabler Länge  $r$  (abhängig vom Drehwinkel  $\varphi$ ) und interessieren uns für den dabei überstrichenen Flächeninhalt (Abb. 10).

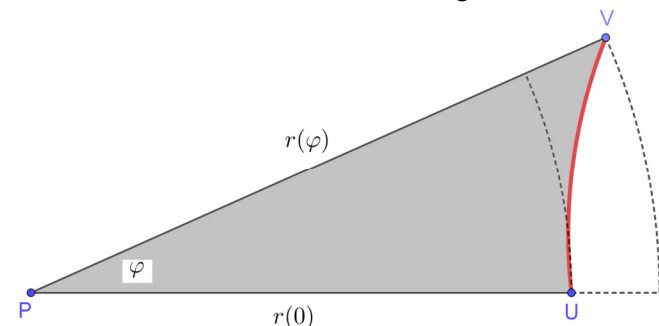


Abb. 10: Leibniz'sche Sektorformel

Wir berechnen nun die Fläche eines „Sektors“ mit Zentrum  $P$  und Winkel  $\varphi$ . Mit  $r(\varphi)$  bezeichnen wir den Abstand von  $P$  zum Punkt  $V$  (Abb. 10), der Abstand von  $P$  zum Punkt  $U$  ist daher  $r(0)$ . Die Fläche eines „Sektors“ ist kleiner als die Fläche des Kreissektors mit Mittelpunkt  $P$ , Winkel  $\varphi$  und Radius  $r(\varphi)$  und größer als die des Kreissektors mit Mittelpunkt  $P$ , Winkel  $\varphi$  und Radius  $r(0)$ . Wenn  $\varphi$  klein ist, sind die Flächen dieser zwei Kreissektoren gute Näherungen für die Fläche des „Sektors“.

Zerlegen wir den Winkel  $\varphi$  durch  $0 = \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq \varphi_n = \varphi$  in kleinere Winkel  $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), erhalten wir die Produktsumme  $\frac{1}{2} \sum_i r^2(\varphi_i) \cdot \Delta\varphi_i$  als Näherung für den gesuchten Flächeninhalt, die im Grenzwert dann zu einem Integral  $\frac{1}{2} \int_0^\varphi r^2(\psi) d\psi$  wird.

Angewandt auf eine weiße bzw. graue sektorähnliche Fläche beim Pizza-Teilungsproblem ergibt sich

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2(\psi) d\psi$$

weil der Winkel in jeder solchen Fläche  $\pi / 4 = 45^\circ$  beträgt. Wir beschränken uns nun auf die grauen „Sektoren“ und zeichnen die „Beginnradien“  $r_1(0), r_2(0), r_3(0), r_4(0)$  und Radien in der Endstellung

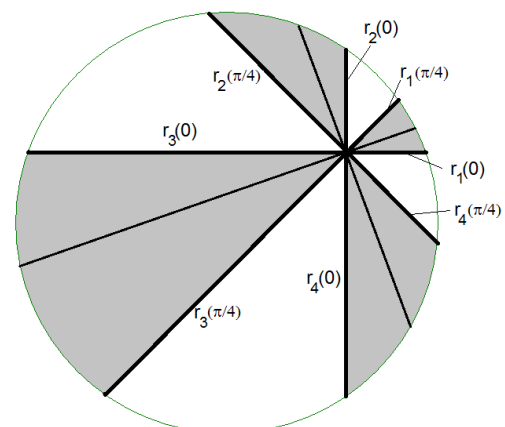


Abb. 11: Leibniz'sche Sektorformel beim Pizzatheorem



$r_1(\pi/4), r_2(\pi/4), r_3(\pi/4), r_4(\pi/4)$ , d. h. nach der Drehung um  $45^\circ$ , fett ein; des Weiteren zeichnen wir eine „Zwischenstellung“ dieser „Radien“ ein (Abb. 11).

Bei jedem Winkel gilt: Die zugehörigen „Radien“ stehen senkrecht aufeinander!

Nun brauchen wir die einzelnen „Sektorflächen“ gar nicht wirklich zu berechnen, denn es gilt ja wegen des obigen elementargeometrischen Lemmas mit  $r_1, r_2, r_3, r_4$  statt  $a, b, c, d$ :  $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = (2r)^2$ . Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 A_{\text{grau}} &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r_1^2(\psi) d\psi + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r_2^2(\psi) d\psi + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r_3^2(\psi) d\psi + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r_4^2(\psi) d\psi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \underbrace{(r_1^2(\psi) + r_2^2(\psi) + r_3^2(\psi) + r_4^2(\psi))}_{=(2r)^2} d\psi = \frac{1}{2} \cdot (2r)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi r^2}{2}
 \end{aligned} \tag{2}$$

### Bemerkungen:

- Hiermit ist auch die formale Lücke in der obigen Plausibilitätsbetrachtung geschlossen: Man sieht aus (2) unmittelbar, dass die Näherungsformel (1) sogar exakt gilt.
- Analog ergibt sich auch hier leicht der mathematische Kern, nämlich die schon angesprochene Proportionalität: statt mit  $\pi/4$  würde dies auch mit jedem anderen Öffnungswinkel  $\varphi$  eines Paares orthogonaler Doppelsektoren funktionieren, man erhielte  $A = \frac{1}{2} \cdot (2r)^2 \cdot \varphi = 2r^2 \cdot \varphi$ , wie oben bei der elementargeometrischen Plausibilitätsbetrachtung in 2.3.

## 4 Fachdidaktische und unterrichtsmethodische Aspekte

Insgesamt sehen wir in diesem zwar anspruchsvollen, aber sehr „beziehungshaltigen“ (im Sinne Freudenthals) Thema eine gute Gelegenheit, die Elementargeometrie im Unterricht an einem interessanten Phänomen (gerechte Pizzateilung) etwas zu stärken, sie hat im deutschsprachigen Raum ohnehin sehr wenig Beachtung in der Sekundarstufe 1. Dabei geht es insbesondere um Lerninhalte wie Symmetrie, Zerlegungsgleichheit, Spiegelungen, Drehungen, die bei diesem Thema gefestigt, erweitert und vernetzt werden können. Bei der Differential- und Integralrechnung in der Sekundarstufe 2 wird im Unterricht oft der Kalkül (Syntax) zu sehr in den Vordergrund gestellt, weniger inhaltliche (Grund-)Vorstellungen, d. h. semantische Aspekte. Bei diesem Thema ist aber insbesondere die Grundvorstellung des Integrals als Grenzwert von Produktsummen (Flächeninhalt als Inhaltssumme schmaler Kreissektoren) konstitutiv. So weit zu den inhaltlichen Kompetenzen. Bei den prozessbezogenen Kompetenzen, die durch dieses Thema angesprochen (gefordert und gefördert) werden, sind zu nennen: Vernetzen von Inhalten; Problemlösen; Experimentieren, Explorieren, Überprüfen (mit DGS); Argumentieren und Begründen. In welcher Form und in welchen Klassenstufen könnte dieses Problem in Schulen (Gymnasien) behandelt werden?

In der Sekundarstufe 1 könnte ein analoges Phänomen mit einem Quadrat statt eines Kreises behandelt werden, allerdings durchaus als selbständig zu lösende Problemaufgabe, je nach Bedarf auch mit kleinen möglichen Hinweisen durch die Lehrkraft.

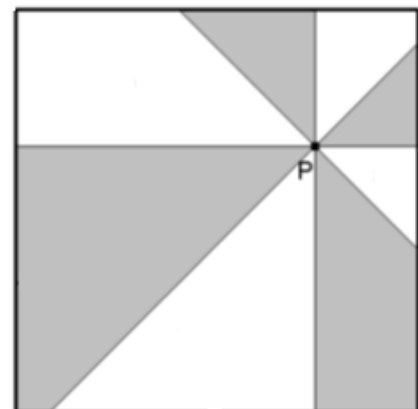


Abb. 12: Quadrat und „Pizzastanze“

In einem Quadrat wird das Stanzmesser so angelegt, dass zwei Messer seiten- und die anderen beiden diagonalenparallel sind (Abb. 12). Warum ist dann die Flächeninhaltssumme der weißen „Sektoren“ genau so groß wie jene der grauen (vgl. Kroll/Jäger 2010, 103f)?

**Bemerkung:** Wenn  $P$  nicht der Quadratmittelpunkt ist (bei dem alles klar ist), dann fällt er in irgendeinen Quadranten; wir legen nun o. B. d. A.  $P$  in den rechten oberen Quadranten.

Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, sich von der Flächengleichheit zu überzeugen. Es ist immer ein Vorteil bei selbständiger Arbeit von Schülerinnen und Schülern, wenn es mehrere Möglichkeiten der Bearbeitung/Lösung gibt, denn dann können verschiedene Ansätze zum Ziel führen. Ein möglicher Hinweis für eine relativ rasche, kurze und elegante Lösung könnte darin bestehen, eine bestimmte waagrechte Linie (gestrichelt) einzuzeichnen, und zwar den oberen Quadrantenrand an der Waagrechten durch  $P$  gespiegelt (Abb. 13).

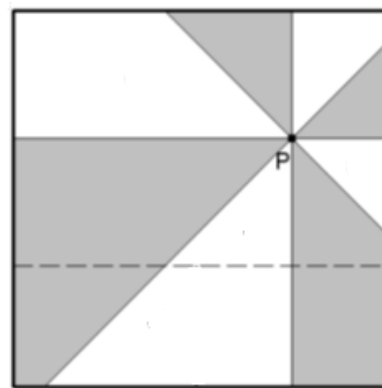


Abb. 13: Quadrat und „Pizzastanze“ – erster Lösungshinweis

Damit ist dann schon klar: Oberhalb der gestrichelten Linie heben die weißen Flächen die grauen aus Symmetriegründen genau auf, so dass man sich nur mehr um das Gebiet unterhalb der gestrichelten Linie kümmern muss. Sollte dies nicht selbständig gelingen, kann ein weiterer Hinweis darin bestehen, eine weitere Hilfslinie einzuzeichnen; diese ist so gewählt, dass III und IV gleichen Flächeninhalt haben, so dass sich das Problem darauf reduziert, die Flächengleichheit von I und II nachzuweisen (Abb. 14). Auch das ist, wenn Schüler/innen das selbständig machen, eine erfreuliche Leistung.

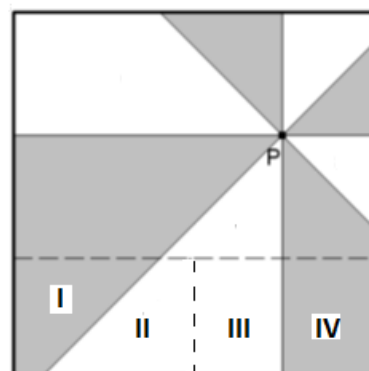


Abb. 14: Quadrat und „Pizzastanze“ – zweiter Lösungshinweis

Beim ursprünglichen Problem mit der runden Pizza könnten in der Sekundarstufe 1 einerseits schon früh enaktive Vorerfahrungen gesammelt werden (Zerschneiden kreisrunder Kartonflächen und Abwiegen der Teile), andererseits kann dem Phänomen mit DGS als Messinstrument nachgegangen werden.

Auch eine Auseinandersetzung mit der Zerlegung von P. Gallin (Abb. 5) scheint uns in der Sekundarstufe 1 gut möglich zu sein, vielleicht sogar als selbständig zu bearbeitende Gruppenarbeit. Abb. 5 hat vielleicht auch auf Schulniveau den Charakter eines Beweises ohne Worte. Diese Hoffnung habe ich deshalb, weil hier kaum weitere kreative Einfälle nötig sind, das hilfreiche Achteck ist schon eingezeichnet, es ist auch erklärt, wie es entstanden ist. Auch weniger leistungsfähige Schülerinnen und Schüler können hier auf die Idee kommen, für den Bereich außerhalb des Achtecks einfach die Anzahlen der Flächenstücke  $a, \dots, g, x$  im weißen und im gefärbten Bereich zu zählen (deren Kongruenz ist hier ja unmittelbar klar). Auch innerhalb des Achtecks liegt die Begründung auf der Hand. Die elementargeometrische Begründung für die Pizzaränder nach Gallin (vgl. Abb. 6a,b) ist sicher auch für die Sekundarstufe 1 von Gymnasien geeignet. Wenn dabei die „Problemreduktion“ Abb. 6a  $\rightarrow$  Abb. 6b von der Lehrkraft kommt (diese werden Schüler/innen alleine kaum sehen), ist die weitere Lösung auch als selbständig in Gruppen zu bearbeitende Aufgabe gut vorstellbar (evtl. kleinere Hinweise nötig). Zur Unterstützung und Visualisierung könnte auch hier eine DGS (als Messinstrument) gut eingesetzt werden, am besten wohl vor dem Beweis.

In der Sekundarstufe 2 (Analysis) bietet es sich an, dass das Problem durch die Lehrkraft (Lehrervortrag) behandelt wird, selbständige Schüleraktivitäten scheinen hier wenig angebracht. Im Fokus stünde bei diesem anspruchsvollen Vorhaben sicherlich die wichtige Grundvorstellung des Integrals als

Grenzwert von Produktsummen (hier: Inhalte schmäler Kreissektorflächen). Das dabei wichtige elementargeometrische Lemma (siehe oben) sorgt hierbei auch für günstige Vernetzungsaspekte zwischen Elementargeometrie und Analysis, wobei hier auch selbständige Schüleraktivitäten (Problemlösen) gut vorstellbar wären.

## 5 Ein dreidimensionales Analogon – eine Anwendung des Cavalieri-Prinzips

Wenn man sich vorstellt, dass man einen kugelförmigen Apfel<sup>3</sup> mit einer solchen Stanze zerteilt (die Stanzachse muss dabei nicht notwendig durch den Kugelmittelpunkt gehen, sondern kann den Apfel auch „dezentral“ treffen), erhält man 8 keilförmige „Apfelspalten“ (bei Kartoffeln spricht man dabei oft von „wedges“). Man kann sich nun wieder vorstellen, jede zweite „Spalte“ grau bzw. weiß zu färben und erhält dann – auf die Ebene projiziert – das analoge Bild wie bei der Pizzateilung.

Als räumliches Bild ergibt sich dabei so etwas wie in Abb. 15.

$A$  und  $B$  markieren dabei jene Punkte, in denen das Zentrum der Stanze, also die Stanzachse, die Kugel „betritt“ bzw. diese „verlässt“. Von oben betrachtet läge in der ebenen Projektion von oben dort genau der Punkt  $P$ . Nun kann man in naheliegender Weise nach dem dreidimensionalen Analogon des Pizza-Theorems fragen: Sind die Summen der Volumina (bzw. Oberflächen-

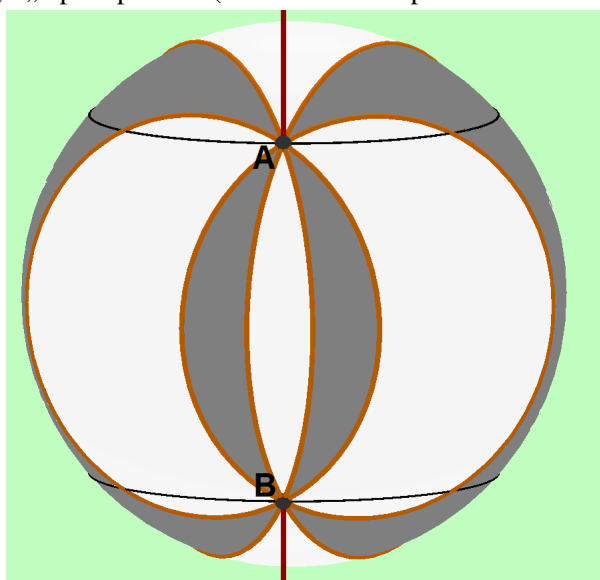


Abb. 15: Teilung eines Apfels in keilförmige Spalten („wedges“), jeweils  $45^\circ$

inhalte) von Grau und Weiß wieder gleich? Manchmal? Immer? Nie? A priori klar ist:

Wenn ein Stanzmesser durch den Kugelmittelpunkt schneidet, dann ist die Gleichheit von Grau und Weiß aus Symmetriegründen gegeben. Aber wenn man schon sehr weit an die Peripherie geht mit dem Stanzzentrum (d. h. wenn  $A$  und  $B$  in Abb. 15 nur wenig übereinander liegen), dann ist es schon ziemlich klar, dass die in Abb. 15 größtenteils gar nicht sichtbare weiße Fläche „hinten“ schon ziemlich groß, also mehr als die halbe Kugeloberfläche weiß sein wird.

Das ist zunächst vielleicht einmal eine Enttäuschung. Denn immerhin kann man ja bei allen waagrecht<sup>4</sup> Schnitten zwischen den beiden „Breitenkreisen“ von  $A$  und  $B$  eine Konstellation wie beim ebenen Pizza-Theorem feststellen, und dort herrscht ja bekanntlich immer Flächengleichheit zwischen Grau und Weiß. Nach dem Prinzip von Cavalieri<sup>5</sup> folgt daraus unmittelbar die Volumengleichheit zwischen Grau und Weiß für die „Kugelschicht“ zwischen diesen beiden Breitenkreisen. Mit einem zum Pizza-Theorem analogen Argument (vgl. Humenberger 2017) folgt wieder: In der Kugelschicht zwischen den beiden angesprochenen Breitenkreisen herrscht auch Flächengleichheit zwischen Grau und Weiß. Das Scheitern liegt also irgendwie an den beiden „Polen“<sup>6</sup>, also „nördlich“ des Breitenkreises von  $A$  und „südlich“ des Breitenkreises von  $B$ . Diese beiden „Polregionen“ sind genau symmetrisch zur

<sup>3</sup> Wir vernachlässigen die Einbuchtungen bei Äpfeln beim Stängel und diametral gegenüber. Bei Kartoffeln, Melonen, Knödeln hätte man dieses Problem nicht, wir bleiben aber trotzdem bei Äpfeln, weil das auch in Humenberger 2019 schon so steht.

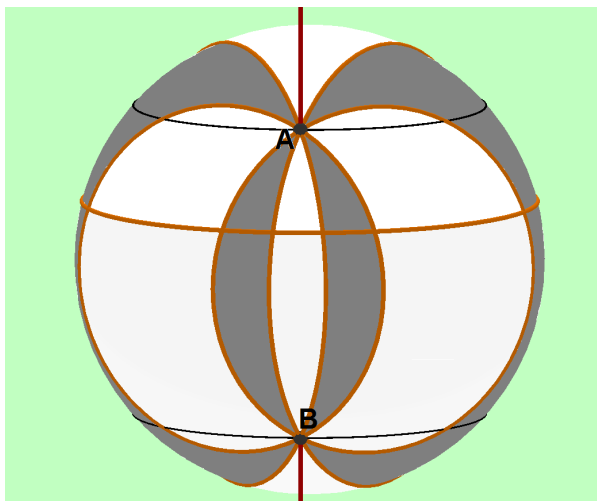
<sup>4</sup> Hiermit ist parallel zur Auflageebene des Apfels gemeint.

<sup>5</sup> Dieses besagt bekanntlich: Zwei Körper besitzen dasselbe Volumen, wenn alle ihre Schnittflächen in Ebenen parallel zu einer Grundebene in entsprechenden Höhen den gleichen Flächeninhalt haben.

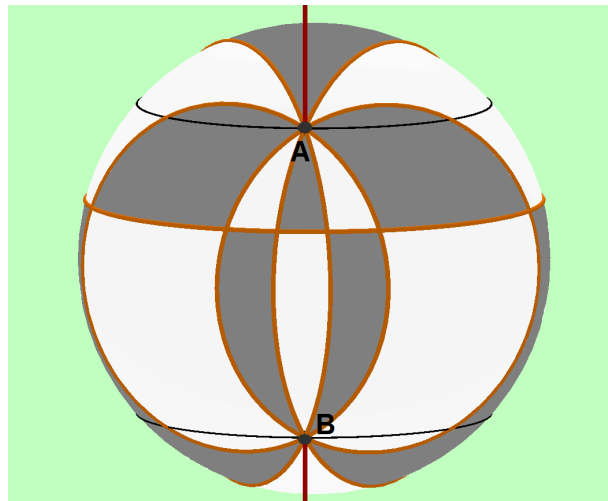
<sup>6</sup> Der Punkt des Apfels, mit dem er auf dem „Schneidbrett“ aufliegt, kann idealisiert als „Südpol“ bezeichnet werden, der diametral gegenüberliegende Punkt als „Nordpol“.

„Äquatorebene“, d. h. das, was nördlich von *A* grau ist, ist auch südlich von *B* grau und analog bei weiß. D. h. für einen Ausgleich zwischen Grau und Weiß müsste jede Polregion für sich schon ausgeglichen sein, aber ist das so?

Man braucht sich jedoch gar nicht lang den Kopf zu zerbrechen, ob es schon innerhalb der einzelnen Polregionen einen Ausgleich gibt (außer in den trivialen Fällen, in denen jede Polregion in sich symmetrisch aufgebaut ist in grau und weiß – wenn ein Stanzmesser durch den Kugelmittelpunkt geht), denn mit einer weiteren waagrechten Schnittebene irgendwo zwischen den beiden Breitenkreisen von *A* und *B* – dabei wird also jede „Apfelspalte“ einmal waagrecht geteilt, vgl. Abb. 16a – kann man diesen Ausgleich erzwingen: Durch Umfärben aller Flächen auf dem oberen (oder auch unteren) Teil hat man klarerweise eine Polregion farblich genau „umgepolt“, so dass perfekter Ausgleich zwischen den beiden Polregionen gegeben ist (und zwischen den beiden Breitenkreisen herrscht wegen des Cavalieri-Prinzips natürlich immer noch Ausgleich zwischen Grau und Weiß), vgl. Abb. 16b.



**Abb. 16a:** Zusätzliche waagrechte Ebene



**Abb. 16b:** Nach Umfärbung im oberen Teil

Eine gerechte Teilung eines Apfels (Melone, Kartoffel) wäre also durch folgende Technik möglich (ohne den Mittelpunkt genau treffen zu müssen): Teile den Apfel zunächst mittels eines (fast beliebigen) waagrechten Schnittes in zwei Teile, dieser kann, muss aber nicht durch den Mittelpunkt gehen. Wenn man nun die so geteilte Frucht mit einer 45°-Pizza-Stanze von oben so durchschneidet, dass das Stanzzentrum irgendwie den oberen Teil der Frucht trifft, so entstehen  $2 \times 8 = 16$  Teile (geteilte „Spalten“ bzw. „wedges“), die dann gerecht auf zwei Personen aufgeteilt werden können, wenn sich jede/r die richtigen Teile nimmt (grau, weiß). Jede/r hat dann auch gleich viel „Schale“ bzw. „Oberfläche“ (vgl. Humenberger 2017; das Kerngehäuse eines Apfels wird dabei i. A. nicht gerecht geteilt). Wichtig dabei ist, dass der erste Schnitt waagrecht erfolgt, und dass die Pizzastanze einerseits genau lotrecht<sup>7</sup> auf den Apfel gedrückt wird und andererseits genaue 45°-Winkel hat. Das sind auch keine trivialen Voraussetzungen, aber man braucht eben keinen Mittelpunkt zu treffen. Insgesamt ist die Theorie hier aber ohnehin wichtiger als die „Praxis“.

Wie beim ebenen Pizza-Theorem tritt auch hier – eine Dimension höher – ein interessantes Phänomen zu Tage: Ist man nur an einer Halbierung der Oberfläche interessiert, so reicht eine Stanze, die aus zwei zueinander orthogonalen Stanzmessern besteht. Will man auch eine gerechte Volumenteilung haben, so braucht man mindestens vier Stanzmesser (im 45°-Winkel), d. h. jeder Quadrant muss noch einmal halbiert werden. Dies ist deswegen so, weil man für das ebene Pizza-Theorem auch mindestens vier Stanzmesser (vgl. Abb. 1) braucht, um die Konstanz der weißen bzw. bzw. grauen Flächensum-

<sup>7</sup> Hiermit ist senkrecht zur Auflageebene des Apfels gemeint.

men zu erreichen. Die Konstanz der Bogenlängensummen beim ebenen Pizza-Theorem ist schon mit zwei Stanzmessern zu erreichen.

Das Pizza-Theorem gilt auch für andere Stanzmesser, bei denen jeder Quadrant in 3, 4, . . . gleichwinklige Teile geteilt wird (statt 8 also insgesamt 12,16,20,... Pizzateile entstehen) – vgl. Abb. 9a,b, dort mit drei Teilen pro Quadrant.

Auch solche Stanzmesser kann man zur gerechten Teilung eines Apfels unter zwei Personen verwenden. Dieser Aspekt lässt sich in natürlicher Weise auf die Apfelteilung übertragen. D. h. man kommt zu folgendem Apfel-Theorem.

**Apfel-Theorem:** Ein Apfel (bzw. eine Melone oder eine Kartoffel, mathematisch als Kugel modelliert) wird zunächst waagrecht einmal durchgeschnitten (das wird in Abb. 17 in Grund- und Aufriss dargestellt). Dann teilt man den Apfel noch mit einer „gleichwinkligen“ Stanze (jeder Quadrant ist dabei in gleich viele – mindestens 2 – Teile unterteilt), die man von oben lotrecht auf den Apfel drückt, wobei das Zentrum der Stanze irgendwo das „im Norden“ abgetrennte Kugelsegment trifft. Anschließend färbt man die entstandene Fruchtoberfläche schachbrettartig (weiß und grau); dann gilt: Die Volumina aller grauen Teile zusammen sind genau so groß wie die Volumina aller weißen Teile zusammen. Analoges gilt auch für die Oberflächeninhalte. D. h. man hat eine perfekte Aufteilung unter 2 Personen.

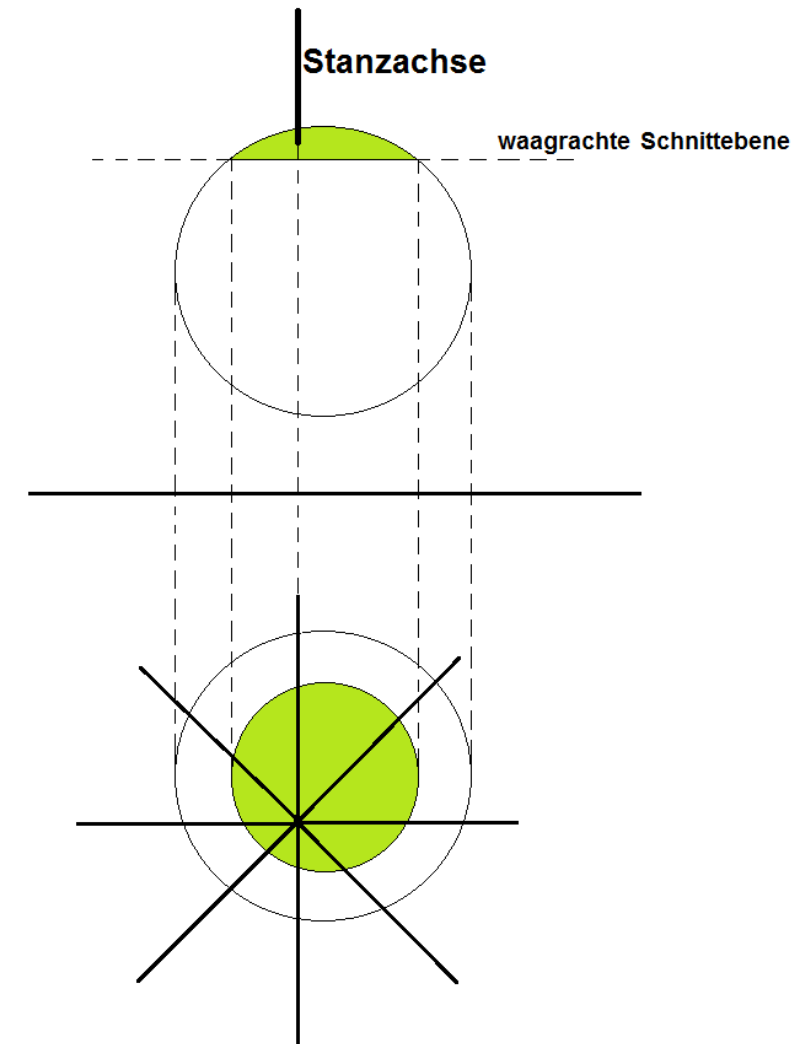


Abb. 17: Apfel-Theorem

In diesem Phänomen ist einerseits eine wirklich schöne Anwendung des Cavalieri-Prinzips zu sehen. Der Beweis des Pizza-Theorems ist nicht ganz einfach (siehe oben), aber diese Verallgemeinerung (Volumen) auf die Apfelteilung benötigt keine weiteren Rechnungen oder formalen Überlegungen mehr, es genügt das Prinzip von Cavalieri und die Idee einer weiteren waagrechten Teilung der Frucht, um die Pole „entgegengesetzt gleich“ zu machen.

Bei den Betrachtungen zur gerechten Teilung der Oberfläche kommt man andererseits auch ohne langwierige Rechnungen aus, wenn man sich die Oberfläche als „unendlich dünne“ Hohlkugel vorstellt (die Gleichheit der Volumina überträgt sich dann auf die Gleichheit der Oberflächeninhalte, vgl. Humenberger 2017). D. h. bei beiden Phänomenen (Volumen, Oberfläche) kommt man ohne Rechnen und abstrakte bzw. streng formale Überlegungen zu schönen und vielleicht überraschenden Resultaten

(wenn man das Pizza-Theorem kennt), und zwar durch Anwendung wichtiger Prinzipien bzw. Vorstellungen.

Leider lässt sich eine gerechte (d. h. volumengleiche) Aufteilung unter mehr als zwei Personen so nicht erreichen, weil es nur zwei Polregionen gibt. In der Kugelschicht zwischen den beiden Breitenkreisen von  $A$  und  $B$  ließe sich das zwar leicht bewerkstelligen (mit einer Stanze, die jeden Quadranten in mehr als zwei gleichwinklige Teile teilt), aber der einfache Trick mit dem Umfärben eines Poles funktioniert bei mehr als zwei Farben (Personen) leider nicht mehr.

Kugeln können mit GeoGebra (3D) auch leicht mit Ebenen geschnitten werden, so dass die entsprechenden Kreise (im Bild dann Ellipsen) und vor allem die entsprechenden Teile (krummlinige Kugeldreiecke) der Kugeloberfläche sichtbar gemacht werden können.

Leider kann man die Volumina und Oberflächeninhalte der einzelnen Stücke nicht leicht ausrechnen, auch mit GeoGebra kann sie nicht einfach bestimmen, und die einzelnen Teile auch nicht unterschiedlich färben<sup>8</sup>, so dass man Bilder wie in Abb. 15 bzw. 16 nicht innerhalb von GeoGebra erzeugen kann. D. h. Experimente mit einer Dynamischen Geometrie Software<sup>9</sup> als Messinstrument mit dem Ziel, dass Lernende dieses Theorem selbst entdecken, sind hier wohl wenig zielführend. Aber eine Aufgabe der folgenden Art könnte evtl. bewerkstelligt: Wie kann man das Pizza-Theorem nutzen, um das Apfel-Theorem zu zeigen? Dabei könnte – je nach Leistungsstand der Lernenden – auch ein Hinweis auf das Cavalieri-Prinzip erfolgen, die Ideen mit dem Umfärben einer Polregion muss dann immer noch selbständig beigesteuert werden. Für reale Experimente mit solchen Teilungen reichen Äpfel (Melonen, Kartoffeln) und ein großes scharfes Messer, um solche Teile auch physisch vor sich zu haben, und nicht nur als Gedankenobjekte.

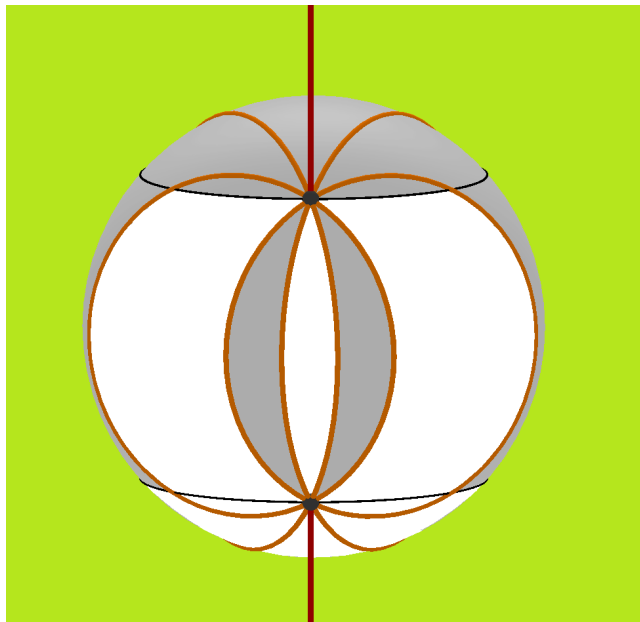


Abb. 18: Andere Apfel-Teilung

**Bemerkung:** Dieser Vorgang und dieser Beweis würde nicht nur bei Kugeln funktionieren, sondern für alle Körper, die rotations-symmetrisch sind und eine waagrechte Symmetrieebene haben (z. B. bei so mancher eher „länglichen“ Melone oder bei Rotationsellipsoiden).

Eine andere Möglichkeit der gerechten Teilung (Halbierung) einer Kugel wäre durch Abb. 18 gegeben.

Hier müsste man beide Polkappen jeweils unterschiedlich (in sich einheitlich) färben. Der Nachteil dieser Methode liegt einerseits darin, dass man kein schönes Schachbrettmuster mehr hat (gleiche Farben grenzen hier aneinander), und andererseits darin, dass man zwei genau zu setzende Horizontalschnitte braucht (diese müssen präzise symmetrisch zur Äquatorebene liegen!).

Eine Recherche zu diesem Thema hat ergeben, dass auf die Idee des Apfeltheorems auch schon andere Mathematiker kamen. So schreibt<sup>10</sup> z. B. George Berzsenyi 1994, dass dieses Phänomen von Michael

<sup>8</sup> Dieses unterschiedliche Färben der Teile ist mit tiefer liegenden Tricks auf relativ umständliche Art und Weise auch mit GeoGebra möglich ist. Für die Abb. 2 und 3 wurde zum Färben ein anderes Programm benutzt.

<sup>9</sup> Neben GeoGebra gibt es auch noch andere wie Cinderella, SketchPad, etc.

<sup>10</sup> Weitere Hinweise haben wir in der Literatur leider nicht gefunden.

Nathanson<sup>11</sup> als Student entdeckt wurde, er nannte es offenbar „Calzone Theorem“ (dieser Name rührt vermutlich daher, dass in Amerika eine „Calzone“ oft wirklich kugelförmig ist, mit verschiedenen Käsesorten gefüllt. Wikipedia über „Calzone“: As a rule, calzones are usually stuffed with cheeses such as ricotta, mozzarella, Parmesan, provolone or a different local cheese. The dough is folded into a half-moon shape, then either sealed with an egg mixture or shaped into a sphere. It is then either baked or fried):

„Choose any point  $P$  inside or on the boundary of a sphere (calzone), any line through this point, and four planes through this line making eight equal  $45^\circ$  angles at  $P$ . Then these planes, together with the plane perpendicular through this line, divide the calzone into 16 pieces, which can be colored alternately black and white, so that the total volume of the black pieces will be equal to the total volume of the white pieces. The proof can be obtained by using Cavalieri's Principle.“

## Literatur

- Berzsenyi, G. (1994): The Pizza Theorem – Part II. In: Quantum, vol. 4, nr. 4 (April/März 1994), S. 29.  
<http://static.nsta.org/pdfs/QuantumV4N4.pdf> (Zugriff: 17. 04. 2019)
- Blum, W., Kirsch, A. (1996): Die beiden Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. In: mathematiklehren, Heft 78, 60 – 65.
- Carter, L, Wagon S. (1994): Proof without Words: Fair Allocation of a Pizza. Mathematics Magazine **67**(4), 267. Eine neuere farbige Darstellung dieses Beweises findet sich auf Wikipedia:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Pizza\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Pizza_theorem) (Zugriff: 17. 04. 2019)
- Gallin, P. (2011): Exzentrische Kuchenhalbierung. Bulletin des VSMP („Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte“), Nr. 116, Juni 2011, 11 – 19.  
<http://www.gallin.ch/KuchenhalbierungBulletin.pdf> (Zugriff: 17. 04. 2019)
- Humenberger H. (2015): Gerechte Pizzateilung – keine leichte Aufgabe! In: Mathematische Semesterberichte **62**, 2, 173–194.
- Humenberger, H. (2019): Gerechte Apfelteilung – keine leichte Aufgabe! In: Mathematische Semesterberichte **66**, 1, 101–109.
- Herget, W., Jahnke, T., Kroll, W. (2011): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Cornelsen, Berlin. S. 20 und 100 – 105.
- Kohnhauser, J.D.E., Velleman, D., Wagon, S. (1996): Which Way Did the Bicycle Go? Dolciani Mathematical Expositions 18, Mathematical Association of America, Washington.
- Kroll, W., Jäger, J. (2010): Das Pizzatheorem. Ein Thema mit Variationen. mathematica didactica **33**, 79 – 112.  
[http://www.mathematica-didactica.com/altejahrgaenge/md\\_2010/md\\_2010\\_Kroll\\_Jaeger\\_Pizzatheorem.pdf](http://www.mathematica-didactica.com/altejahrgaenge/md_2010/md_2010_Kroll_Jaeger_Pizzatheorem.pdf)  
(Zugriff: 17. 04. 2019)
- Nelsen, R. B. (2004): Proof without words: Four Squares with Constant Area. Mathematics Magazine **77**(2), 135.

## Verfasser

Hans Humenberger  
Universität Wien  
Oskar-Morgenstern-Platz 1  
Fakultät für Mathematik und Zentrum für LehrerInnenbildung  
A – 1090 Wien  
[hans.humenberger@univie.ac.at](mailto:hans.humenberger@univie.ac.at)

---

<sup>11</sup> Momentan Professor am St. Mary's College, Kalifornien. In einer privaten Email schrieb er, dass er nie einen Beweis zu diesem Theorem veröffentlicht, aber schon zahlreiche Vorträge zum Thema „Pizza-Theorem“ und „Calzone-Theorem“ in den letzten Jahren gehalten hat.

