Schachbrettaufgaben vom mathematischen Duell

ROBERT GERETSCHLÄGER (GRAZ)

Seit einem viertel Jahrhundert gibt es nun schon das "Mathematische Duell", einen mathematischen Wettbewerb von Schulen aus Österreich, der Tschechischen Republik und Polen mit Olympiade-artigen Aufgaben. In den letzten drei Jahren ist der Wettbewerb in einem Erasmus+ Projekt eingebettet, bei dem im Rahmen der wissenschaftlichen Begleitung u.A. auch die Vorteile derartiger Veranstaltungen für die Lernprozesse der Teilnehmenden Schüler und Schülerinnen untersucht werden.

Nach einer kurzen Vorstellung der Organisationsstruktur des Wettbewerbs wird im Folgenden ein Überblick über einige Aufgaben eines speziellen Typs aus dem Wettbewerb gegeben. Schachbrettaufgaben sind im Wettbewerbsgeschehen sehr beliebt, aufgrund der Tatsache, dass ihre Lösung meist ohne besondere Vorkenntnisse, durch rein elementar-logisches Argumentieren gelingt. Dabei sind aber die Argumente von sehr unterschiedlicher Art, was das Thema dann doch sehr abwechslungsreich macht.

Seit 1993 bietet das mathematische Duell alljährlich den Schülerinnen und Schülern der teilnehmenden Schulen herausfordernde Aufgaben aus dem Bereich der Elementarmathematik. Nach einer gewissen Wachstumsphase ist die Liste der teilnehmenden Institutionen mit dem Gymnázium Mikuláše Koperníka (GMK) aus Bílovec, Tschechische Republik, dem I Liceum
Ogółnokształcące im. Juliusza Słowackiego (jetzt das Akademicki Zespół Szkół Ogólnokształcących) in Chorzów, Polen, dem Bundesrealgymnasium Keplerstraße in Graz, Österreich, und dem Gymnázium Jakuba Škody (GJŠ) in Přerov, Tschechische Republik seit vielen Jahren gleichbleibend.

In den letzten drei Jahren (2015-2017) ist das Duell in einem Erasmus+ Projekt der teilnehmenden Schulen, zusammen mit der Karl-Franzens Universität Graz, der Palacký Universität Olmütz und der Schlesischen Universität Kattowitz eingebettet. Dies ermöglicht zusätzlich die Finanzierung einer wissenschaftlichen Begleitung, sowie weitere mathematische Aktivitäten für alle Teilnehmenden. Weitere Information über das Eramus+ Projekt gibt es unter www.mathematicalduel.eu

Die Duellaufgaben decken das übliche Spektrum olympiadeartiger Wettbewerbe ab. Eine Kategorie derartiger Aufgaben wird in der Olympiadewelt üblicherweise als „Kombinatorik" bezeichnet. In diesem Kontext ist dies ein Überbegriff, der für Aufgaben verschiedener Art verwendet wird. Dazu gehören üblicherweise solche aus der klassischen enumerativen Kombinatorik, aus der Graphentheorie oder Invariantentheorie, oder mathematische Spiele. Ein recht häufig gestellter Aufgabentyp aus diesem Bereich ist die sogenannte „Schachbrettaufgabe". Dies kann irgendeine Aufgabe sein, die sich auf ein Raster von Quadraten bezieht, und dazu gehören unter anderem Färbungsaufgaben, strategische Spiele oder Parkettierungsaufgaben.

In dieser Arbeit stelle ich einige derartige Aufgaben aus dem Archiv des matematischen Duells vor. Die hier angebotenen Beweise sind bloß Skizzen. Interessierte Leserinnen und Leser können ausführlichere Beweise entweder auf der Website finden, oder aber im Buch über die Aufgaben der ersten $4! = 24$ Jahre des mathematischen Duells, von Robert Geretschläger, Józef Kalinowsky und Jaroslav Švrček, welches demnächst bei World Scientific Press erscheint.

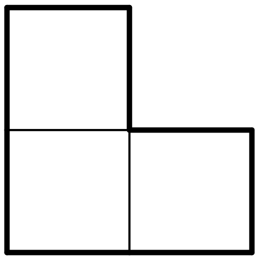
Untersuche ob es möglich ist, Schachbretter mit den Maßen

a) 11×11, bzw.

b) 12×12

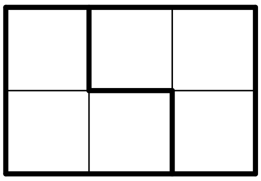
vollständig mit Figuren zu überdecken, die wie in der unten abgebildeten Figur aus jeweils drei Quadraten zusammengesetzt sind.

Ich danke den Autoren der `sisart` Dokumentenklasse, deren Arbeit hier als Vorlage diente.



Lösung: a) Nein, wegen $11 \cdot 11 \not\equiv 0 \pmod 3$.

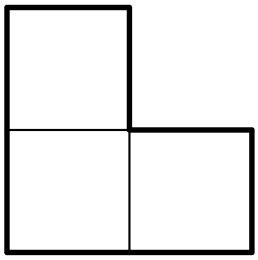
b) Ja.



Ein 3×2 -Rechteck kann wie angebildet mit zwei derartigen Figuren überdeckt werden.

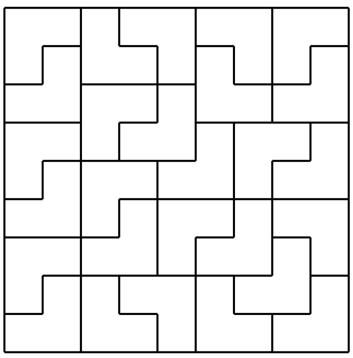
Vier derartige Rechtecke ergeben zusammen ein 12×2 -Rechteck, das von acht Figuren überdeckt wird. Sechs solche Rechtecke übereinander ergeben ein 12×12 -Schachbrett. □

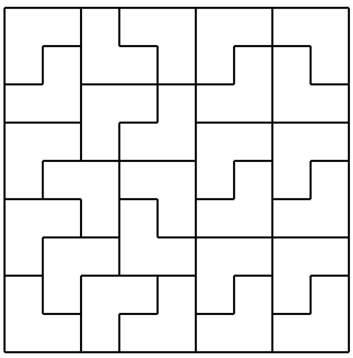
Es sei k eine nicht-negative ganze Zahl. Für welche positiven ganzen Zahlen $n = 6k+3$ ist es möglich ein $n \times n$ -Schachbrett vollständig mit Figuren zu überdecken, die je wie abgebildet aus drei Quadraten zusammengesetzt sind?



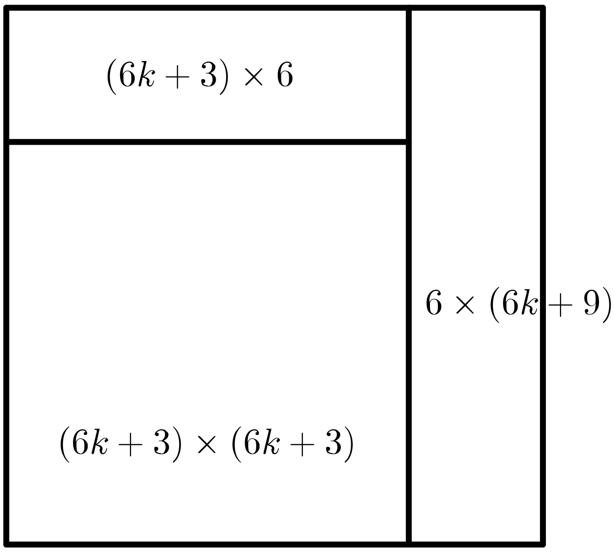
Lösung: Es ist leicht zu bestätigen, dass dies für den Fall $k = 0$ (also im 3×3 -Quadrat) nicht möglich ist.

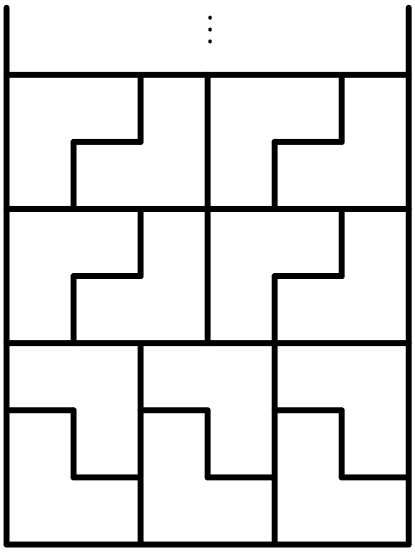
Wie in den beiden folgenden Beispielen ersichtlich, ist es für $k = 1$ (im 9×9 -Quadrat) sehr wohl möglich:





Durch Induktion können wir nun zeigen, dass es für alle $k \geq 1$ möglich ist:



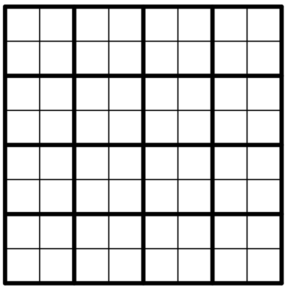


Da es im $(6k+3)\times(6k+3)$ -Quadrat möglich ist, können wir das $(6k+9)\times(6k+9)$ -Quadrat so aufteilen, dass es aus einem derartigen Quadrat und zwei Streifen der Breite 6 und mit ungerader Länge, wie links abgebildet, besteht. In der rechten Abbildung sehen wir, wie die Streifen überdeckt werden können, was den Beweis abschließt. $\square$

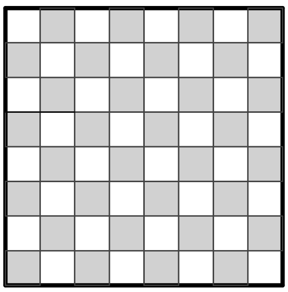
Einige Felder eines $n\times n$ -Schachbretts werden schwarz gefärbt. Bestimme die kleinste Anzahl, die man schwarz färben muss, sodass jedes 2×2 -Quadrat auf dem Schachbrett mindestens zwei schwarze Felder enthält.

Lösung: Zunächst betrachten wir den Fall gerader Werte von n:

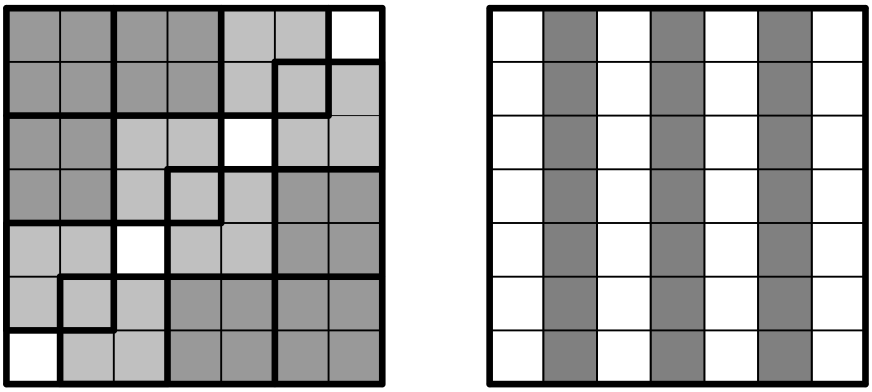
Wie in der folgenden Abbildung zu sehen, können wir das Schachbrett in $\frac{n^2}{4}$ Quadrate der Größe 2×2 zerteilen. Es ist somit sicher notwendig, mindestens $2\cdot\frac{n^2}{4}=\frac{n^2}{2}$ Felder schwarz zu färben.



Die gewöhnliche Schachbrettfärbuzng zeigt uns, dass eine derartige Färbung auch tatsächlich möglich ist.



Nun betrachten wir den Fall ungerader Werte von n:



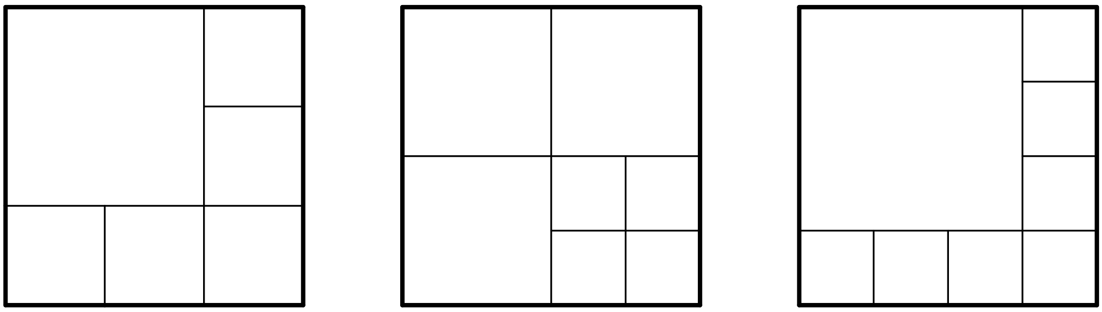
Wir können, wie abgebildet, 2×2 -Quadrate auf dem Schachbrett platzieren. Zwei Felder in jedem dunkelgrauen Quadrat müssen jedenfalls gefärbt werden, was zunächst einmal $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot 2$ gefärbte Felder ergibt. Darüber hinaus müssen mindestens drei Felder in jedem überlappenden Paar hellgrauer Quadrate gefärbt werden, was weitere $\frac{n-1}{2} \cdot 3$ gefärbte Felder ergibt. Es müssen somit mindestens

$$\frac{n-1}{2} \cdot 3 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot 2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Felder gefärbt werden. Die rechts abgebildete Färbung zeigt, dass dies auch sicher möglich ist, was den Beweis abschließt. □

Es sei $n \geq 6$ eine ganze Zahl. Beweise, dass ein gegebenes Quadrat in n (nicht notwendigerweise kongruente) Quadrate zerteilt werden kann.

Lösung: Die folgenden Bilder zeigen möglich Zerteilungen für $n = 6, 7$ und 8:



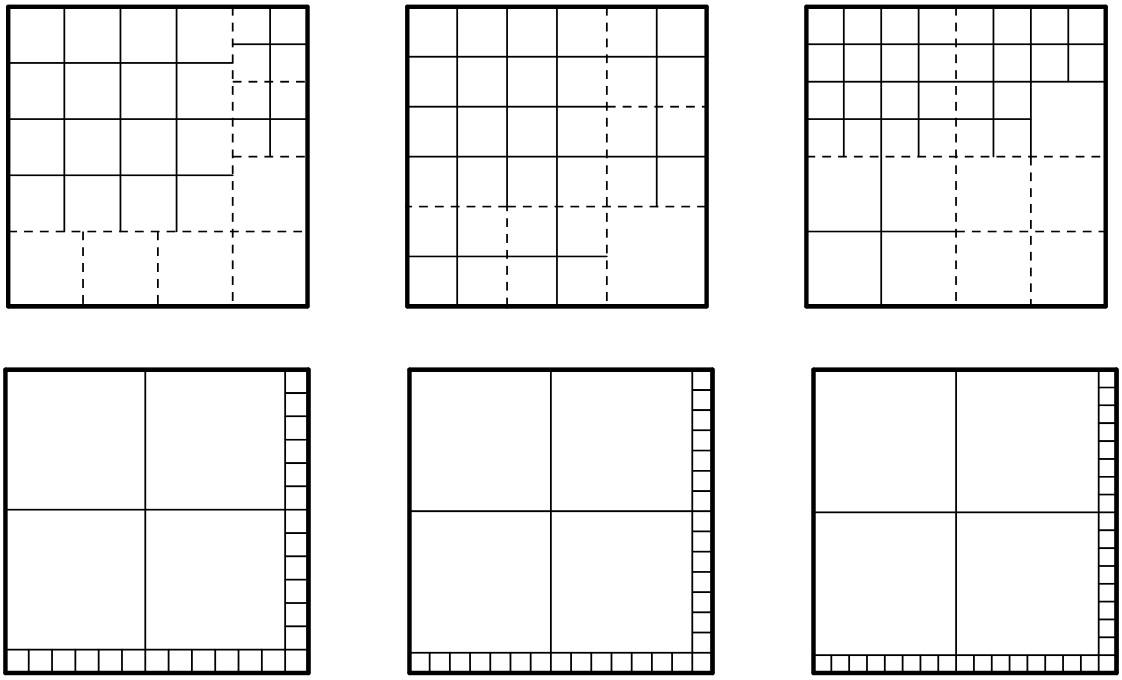
Da ein Quadrat immer durch Mittenparallele zu den Seitenpaaren in vier kongruente kleinere Quadrate zerteilt werden können, ist es immer möglich, die Anzahl der Quadrate, in die man das gegebene Quadrat zerschneiden kann, um drei zu erhöhen. Wegen $6 \equiv 0 \pmod 3$, $7 \equiv 1 \pmod 3$ und $8 \equiv 2 \pmod 3$, ist es nur notwendig, den Rest von $n \pmod 3$ zu bestimmen, wonach es sicher möglich ist, eine Zerteilung des gegebenen Quadrats in n Quadrate von der entsprechenden Ausgangskonfiguration ausgehend zu bestimmen. □

Beschreibe eine Methode, mit der man ein gegebenes Quadrat in

a) 29, b) 33, c) 37

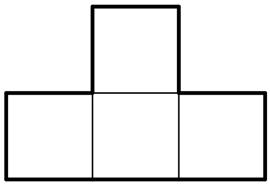
nicht notwendigerweise kongruente Quadrate zerteilen kann.

L{osung: Zwei mögliche Methoden sind in den folgenden Figuren dargestellt:



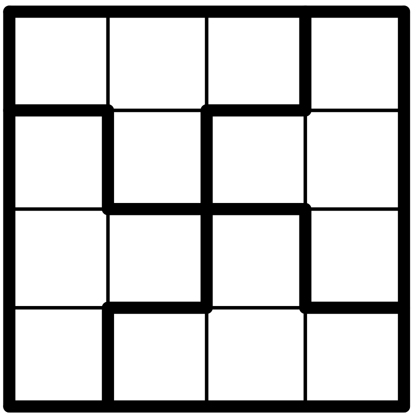
□

Wir haben einen Sack voller T-Tetrominos, wie in untenstehender Figur gegeben.

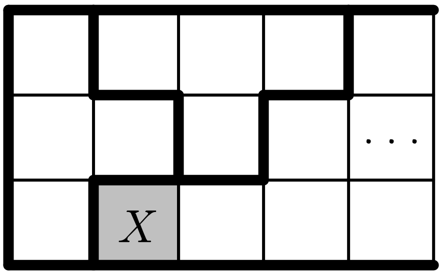


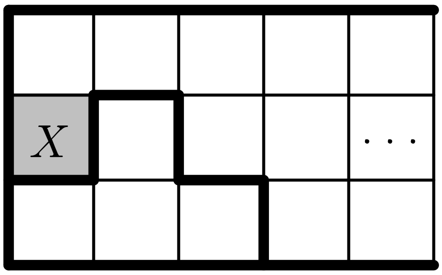
Ist es möglich, ein 8×12 -Schachbrett vollständig ohne Überlappungen mit T-Tetrominos zu überdecken (unter der Annahme, dass die Quadrate des Schachbretts gleich groß wie jene des Tetrominos sind)? Ist es möglich für ein 3×8 -Schachbrett? Ist es möglich für ein 7×10 -Schachbrett? Zeichne in jedem Fall, falls es möglich ist, eine solche Überdeckung. Wenn es nicht möglich ist, begründe warum nicht.

Lösung: Die Überdeckung des 8×12 -Schachbretts ist möglich. Zu diesem Zweck kann man zuerst das Brett in sechs Teile mit dem Format 4×4 zerlegen. Jedes dieser Teile kann dann auf folgende Art überdeckt werden:



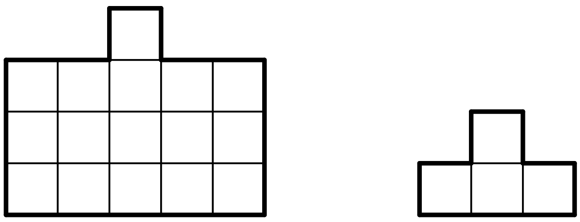
Die Überdeckung des 3×8 -Schachbretts ist nicht möglich. Wie man auch am Ende das erste Tetromino legt, bleibt immer ein Feld (mit einem X gekennzeichnet), das nicht bedeckt werden kann.



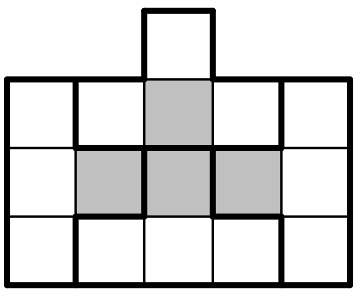


Schließlich ist die Überdeckung des 7×10 -Schachbretts ebenfalls nicht möglich, und zwar wegen $70 \not\equiv 0 \pmod 4$. □

Vor mir liegt ein Brett, das wie abgebildet aus 16 Einheitsquadraten zusammengesetzt ist. Ich möchte nun einige dieser Quadrate grün färben. Wenn ich das abgebidete T-Tetromino auf das Brett so lege, dass jedes Quadrat des Tetrominos genau ein Quadrat des Bretts bedeckt, soll immer mindestens ein Quadrat des Tetrominos auf einem grünen Quadrat liegen. Bestimme die kleinste Anzahl von Quadraten, die ich färben muss um dies zu erreichen und beweise, dass es sich dabei um die kleinste Zahl handelt.



Lösung: Die kleinste Anzahl von Quadraten ist vier. Werden vier Quadrate wie in der Abbildung angedeutet gefärbt, bedeckt jede Lage des Tetrominos ein gefärbtes Feld.

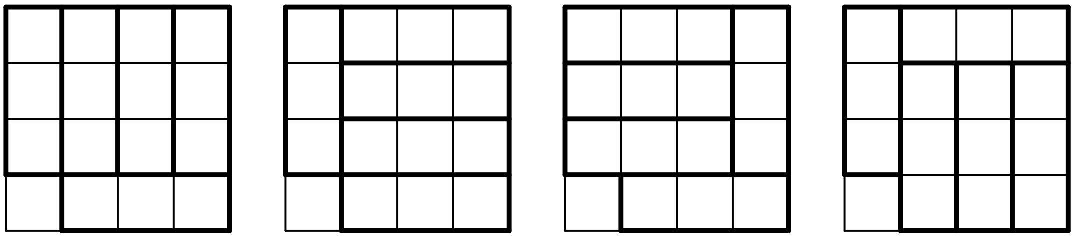


Es ist deswegen nicht möglich, dies mit einer kleineren Anzahl gefärbter Quadrate zu erreichen, da das Brett wie abgebildet in vier Stücke unterteilt werden kann, die jeweils die Gestalt des Tetrominos haben, und von denen keine zwei ein Quadrat gemeinsam haben. □

Gegeben sei ein 4×4 -Schachbrett, bestehend aus 16 Einheitsquadraten. Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten, wie 5 kongruente gerade Triominos (3×1 -Rechtecke) so auf das Brett gelegt werden können, dass genau ein Quadrat unbedeckt bleibt.

Lösung: Es ist leicht zu bestätigen, dass es keine mögliche derartige Belegung gibt, wenn das freibleibende Feld im Inneren des Bretts oder im inneren Teil eines Rands liegt. Das freibleibende Feld muss also ein Eckfeld sein.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, das freibleibende Feld sei unter links. In diesem Fall gibt es die abgebildeten vier Möglichkeiten der Belegung:

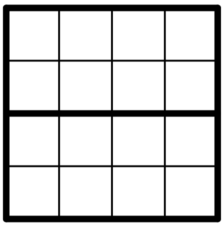


Insgesamt gibt es also $4 \cdot 4 = 16$ mögliche Belegungen der geforderten Art.

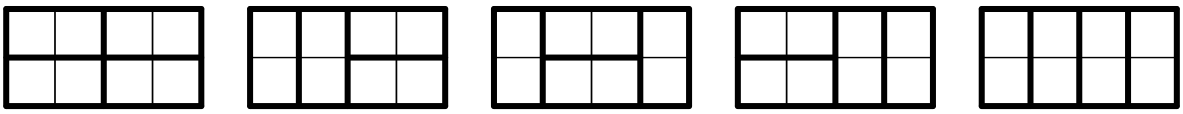
$\square$

Bestimme die Anzahl der möglichen Überdeckungen eines 4×4 -Schachbretts mit acht 2×1 -Dominos.

Lösung: Ist es möglich, das Schachbrett durch eine waagrechte Linie in zwei kongruente Rechtecke zu teilen, kann man jede Hälfte unabhängig von der anderen durch vier Dominos zu überdecken.

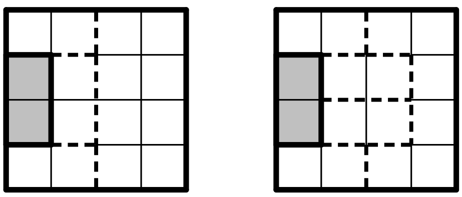


Es gibt fünf Möglichkeiten, ein 2×4 -Rechteck durch vier Dominos zu überdecken. Diese sind wie folgt:



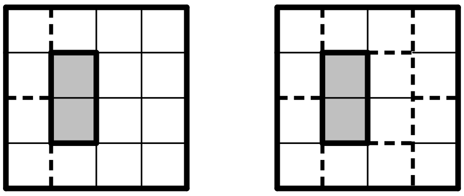
Dieser erste Fall gibt uns also $5 \cdot 5 = 25$ mögliche Überdeckungen.

Ist nun eine derartige Teilung nicht möglich, gibt es ein Domino, das über die mittlere waagrechte Rasterlinie ragt, und ein derartiges muss am weitesten links liegen. Liegt dieses am linken Rand, gibt es zwei Möglichkeiten:



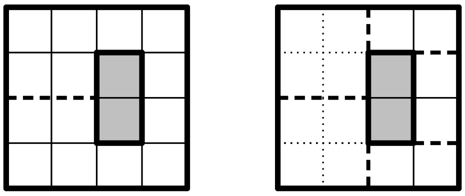
Die linken Eckfelder können nur auf eine Art bedeckt werden. Wird ein zweites Domino senkrecht neben dem ersten gelegt, gibt es eine senkrechte Rasterlinie, die das 4×4 -Schachbrett halbiert, und es gibt, wie wir schon wissen, genau fünf Möglichkeiten, die rechte Hälfte zu bedecken. Werden andererseits zwei Dominos waagrecht orientiert neben dem linken senkrechten Domino gelegt, so gibt es nur eine einzige Möglichkeit, die Überdeckung zu vervollständigen. In diesem Fall gibt es also insgesamt sechs Überdeckungen.

Die nächste Möglichkeit besteht darin, das am weitesten links liegende senkrechte Domino auf der Mittellinie in der zweiten Spalte von links zu platzieren.



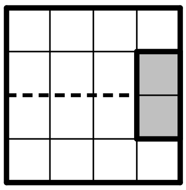
Da es unmittelbar links neben diesem kein einziges Dimino geben kann, muss es in der linken Spalte zwei senkrecht liegende Dominos geben. Es gibt nur eine Möglichkeit, eine derartige Überdeckung zu vervollständigen.

Nun kann das das am weitesten links liegende senkrechte Domino auf der Mittellinie als nächstes in der dritten Spalte von links platziert werden.



In diesem Fall gibt es, wie man in der Abbildung erkennt, $2 \cdot 2 = 4$ mögliche Überdeckungen.

Schließlich gibt es keine mögliche Überdeckung, in der das am weitesten links liegende senkrechte Domino auf der Mittellinie in der rechten Spalte platziert wird.



In diesem Fall teilt nämlich die horizontale Trennlinie in der Mitte den Restbereich in zwei Teile, die aus je sieben Feldern bestehen, und da sieben ungerade ist, können diese Abschnitte nicht durch Dominos überdeckt werden.

In Summe exisitieren also $25 + 6 + 1 + 4 = 36$ Überdeckungen der geforderten Art. $\square$