Spieltheorie im Schulunterricht – kann es das spielen?

Christoph ABLEITINGER, Petra HAUER-TYPPELT, Universität Wien

1. Einleitung

Wir wollen Spieltheorie in ihren grundlegenden Wesenszügen vorstellen. Klassische Beispiele, aber auch weniger bekannte und neue werden verwendet, um zentrale Ideen und Konzepte zu beleuchten. Im Anschluss daran soll natürlich auch die im Titel gestellte Frage beantwortet werden.
Wie kann man auf eine solche Frage überhaupt kommen, wo im Schulalltag meist ohnehin die Zeit knapp ist? Wir hatten Gelegenheit abseits vom Schulalltag mit Schüler/innen zum Thema Spieltheorie zu arbeiten. Dabei haben wir so positive Erfahrungen gemacht, dass sich diese Frage einfach aufgedrängt hat. Im Sommer 2006 wurde vom Institut für Mathematik der Universität Wien erstmals eine einwöchige Summer School für interessierte Schülerinnen und Schüler der 6. bis 8. Klasse AHS durchgeführt. Es galt zur Gestaltung eines mathematischen Tages ein Thema zu finden, das für Lernende dieser Altersstufe interessant, von den mathematischen Anforderungen her passend und möglichst neu ist. Unsere Wahl fiel auf Spieltheorie und wir konnten mit den Lernenden, die zugegeben ideale Voraussetzungen mitbrachten, sehr erfolgreich arbeiten. Es war der Auftakt zu einer Auseinandersetzung mit Spieltheorie insbesondere aus fachdidaktischem Blickwinkel, die wir in weiterer Arbeit mit Schüler/innen und Lehrer/innen auch praktisch schon einige Male umgesetzt haben und weiterhin umsetzen werden.
Den Startpunkt soll nun ein Spiel bilden, das man auch beim Lesen gedanklich mitspielen kann.

2. Guessing Game

An diesem Spiel können beliebig viele Spieler (≥ 2) teilnehmen:
Die Spieler wählen gleichzeitig und unabhängig voneinander eine natürliche Zahl von 2 bis 100! Diejenige Person gewinnt das Spiel, deren Zahl am nähesten bei $\frac{2}{3}$ des Mittelwertes aller gewählten Zahlen liegt. Für welche Zahl entscheiden Sie sich als Spieler?

Das Spiel brachte auf der oben erwähnten Summer School 2006 das in der nebenstehenden Tabelle zusammengefasste Ergebnis.
Das Guessing Game wurde zweimal gespielt. Beim ersten Mal sollten die Spieler möglichst rasch nach der Erklärung des Spiels ihre Zahl wählen und auf ein vorbereitetes Kärtchen schreiben. Die Kärtchen wurden nicht mit den Namen, sondern nur mit einer Nummer versehen, so dass ein Vergleich zwischen erstem und zweitem Spiel möglich war, aber die Anonymität gewahrt blieb.
Für das zweite Spiel sollten sich die Schüler länger Zeit nehmen und überlegen, ob sie mit ihrer relativ rasch gewählten ersten Zahl zufrieden waren oder doch eine andere vorziehen würden. Das Ergebnis des ersten Spiels wurde zwischenzeitlich nicht mitgeteilt.
Bis auf zwei Spieler haben alle ihre gewählte Zahl im zweiten Spiel kleiner als im ersten Spiel angesetzt. Die in der Tabelle jeweils fett gedruckte Siegerzahl ist daher im zweiten Spiel wesentlich kleiner als im ersten. Wie kommt es dazu? Was ist die Lösung des Spiels? Wie soll man als einzelner Spieler, der keine Ahnung hat, was die anderen wählen werden, entscheiden?

Spieler	1.Spiel	2.Spiel
Nr. 1	**27**	43
Nr. 2	67	37
Nr. 3	44	28
Nr. 4	22	**14**
Nr. 5	20	33
Nr. 6	30	20
Nr. 7	22	8
Nr. 8	60	35
Nr. 9	40	20
Nr. 10	38	34
Nr. 11	43	12
Nr. 12	53	20
$\frac{2}{3}$ *von* $\bar{x}$	**25,9**	**16,9**

Hier die rationale Lösung des Spiels:

$\frac{2}{3}$ des Mittelwerts müssen jedenfalls kleiner als 67 sein, selbst wenn alle Spieler 100 wählen. Es sollte daher kein Spieler eine Zahl wählen, die größer als 67 ist. Halten sich alle Spieler daran, dann ist der Mittelwert aller gewählten Zahlen jedenfalls kleiner als 45. Daher sollte kein Spieler eine Zahl wählen, die größer als 45 ist. Usw., usw.

Die rationale Auflösung des Spiels ist einsichtig, man müsste 2 wählen. Dass man damit in der Praxis nicht gewonnen hätte, zeigt die Tabelle.

3. Das Wesen der Spieltheorie

Das Guessing Game bringt einige der grundlegenden Elemente von Spielen im spieltheoretischen Sinn zutage.

Als Spieltheorie wird jene mathematische Theorie bezeichnet, die Situationen analysiert, an denen verschiedene entscheidungsaktive, oft in Konkurrenz stehende Personen oder Parteien (Spieler) beteiligt sind, und Ideen und Methoden zur Entscheidung in diesen Situationen liefert.

Spieltheorie

- beschreibt Strukturähnlichkeiten zwischen wirtschaftlichen oder soziologischen Phänomenen einerseits und strategischen Spielen andererseits und
- liefert Konzepte, um „optimales“ Verhalten aufzuzeigen.
  Dabei wird rationales Verhalten aller Spieler angenommen. Diese Hypothese des „common knowledge of rationality“ steht mitunter im Widerspruch zur Realität. Unser einfaches Einstiegsspiel Guessing Game wirft genau diese Problematik auf.

Der Mathematiker John von Neumann (1903 – 1957) und der Wirtschaftswissenschafter Oskar Morgenstern (1902 – 1977) gelten als Begründer der modernen Spieltheorie. In ihrem 1944 gemeinsam veröffentlichten Werk „The theory of games and economic behavior“ entwickelten sie Spieltheorie als *das* Instrument zur Theorie ökonomischen Verhaltens.

Wurde die praktische Anwendbarkeit auch anfänglich überschätzt, so findet Spieltheorie in vielen Gebieten, wie beispielsweise den Wirtschaftswissenschaften, der Soziologie, der Biologie, der Psychologie und der Militärstrategie Anwendung. Spieltheorie hat daher auch ihren festen Platz im Curriculum von Studien wie Volkswirtschaft oder Soziologie.

4. Das Gefangenendilemma

Das Gefangenendilemma gehört zu den klassischen Beispielen der Spieltheorie, die Ausgangssituation ist folgende:

Zwei Gefangene werden eines gemeinsamen Verbrechens beschuldigt. Dieses Verbrechen haben die beiden auch tatsächlich begangen, es liegen aber nur Indizien dafür vor, der Beweis fehlt.

Nun werden die beiden Gefangenen getrennt voneinander verhört, dazu wird ihnen ein Handel vorgeschlagen:

Gestehen beide Gefangene das Verbrechen, bekommen beide 4 Jahre Haft.

Gesteht ein Gefangener und der andere schweigt, so bekommt der Geständige keine Haftstrafe. Derjenige, der schweigt, bekommt allerdings 5 Jahre Haft.

Schweigen beide Gefangene, erhalten sie wegen geringfügigerer Delikte, wie z. B. unerlaubten Waffenbesitzes, 2 Jahre Haft.

Die Entscheidung müssen die beiden Spieler alleine, völlig unabhängig voneinander treffen.

In der Spieltheorie werden solche 2-Personen-Spiele üblicherweise mit einer sogenannten **Bimatrix** dargestellt:

Gefangener 2

		gestehen	schweigen
Gefangener 1	gestehen	**– 4** **– 4**	– 5 **0**
	schweigen	**0** – 5	– 2 – 2

Die Handlungsmöglichkeiten (**Strategien**) der Spieler und die zugehörigen, sogenannten **Auszahlungen** werden als Einträge in der Matrix angezeigt. Im vorliegenden Beispiel sind die Auszahlungen mit einem negativen Vorzeichen behaftet, da es sich um einen Verlust von Lebensjahren (in Freiheit) handelt.
Im ersten Feld stehen die Auszahlungen (Haftjahre), die die Gefangenen zu erwarten haben, wenn beide die Strategie *Gestehen* wählen. Der Eintrag links unten ist dem Gefangenen 1 zugeordnet, der Eintrag rechts oben dem Gefangenen 2. Entsprechend sind auch die Einträge in den anderen Feldern zu interpretieren.

Wie soll nun ein Gefangener entscheiden?

Betrachten wir die Situation aus der Sicht des Gefangenen 1:
Gesteht der Gefangene 2, so erhält er, wenn auch er gesteht die Auszahlung **–** 4 (4 Jahre Haft), wenn er schweigt die Auszahlung **–** 5. Auf die Strategie *Gestehen* des Gefangenen 2 sollte der Gefangene 1 also mit *Gestehen* reagieren, er erhält damit eine höhere Auszahlung (mehr Lebensjahre in Freiheit) als mit der Strategie *Schweigen*.
Schweigt der Gefangene 2, entgeht er der Haftstrafe (Auszahlung 0), wenn er gesteht. Schweigt er hingegen auch, erhält er 2 Jahre Haft (Auszahlung **–** 2).
Das heißt, auch auf die Strategie *Schweigen* des Gefangenen 2 sollte der Gefangene 1 mit *Gestehen* reagieren.
Gestehen ist in also beiden Fällen die **beste Antwort** auf die Strategie des Gefangenen 2. Beste Antworten sind in der Spieltheorie jene Strategien, die die größte Auszahlung auf die jeweilige Strategie des Gegners einbringen. Jene Auszahlungen, die jeweils die besten Antworten einbringen, sind in der Bimatrix fett gedruckt: z. B. – 4 und 0 in der Zeile *Gestehen* für den Gefangenen 1.

Analog gestalten sich die Überlegungen aus der Sicht des Gefangenen 2. Auch für ihn ist *Gestehen* immer die beste Antwort. Daher sind auch für seinen Fall die jeweiligen Auszahlungen bei *Gestehen* fett gedruckt. Damit erfasst man sofort auch optisch, dass mit der Strategienkombination (*Gestehen, Gestehen*) beste Antworten aufeinander treffen. In diesem Sinn ist die Kombination (*Gestehen, Gestehen*) als Lösung des Spiels zu verstehen.
Damit hat sich auch ein **Gleichgewicht** eingestellt. Für keinen der beiden Spieler zahlt es sich aus, (einseitig) von seiner Strategie *Gestehen* abzuweichen, er würde dadurch seine Auszahlung verringern, d. h. weniger Lebensjahre in Freiheit verbringen können. Beide Spieler können im Nachhinein mit ihrer Wahl der Strategie zufrieden sein. Zu denken gibt natürlich, dass beide mit der Strategienkombination (*Schweigen, Schweigen*) eine höhere Auszahlung erreicht hätten. Allerdings hätte dann jeder für sich mit der Wahl seiner Strategie zu hadern gehabt, denn hätte er doch *Gestehen* gewählt (während der andere schweigt), wäre er sogar ohne Haft ausgegangen. Individuelle Rationalität führt also hier zum „Dilemma“.

Abschließend zum Gefangenendilemma ein interessanter und ganz wesentlicher Punkt: Lernende meinen anfänglich oft, das Dilemma der Situation bestehe darin, dass die beiden Gefangenen sich nicht absprechen dürfen. Dabei würde eine Absprache vor dem getrennten Verhör am Dilemma nichts ändern. Denn wird im spieltheoretischen Sinn überlegt, steht immer das Finden der besten Antwort, also das Erlangen der höchsten Auszahlung aus Sicht *eines* Spielers als oberstes Ziel. *Gestehen* ist in diesem Beispiel eben immer beste Antwort, gerade auch, wenn der andere schweigt. Moralische Werte wie das Halten an Absprachen oder Kalkulieren der Auswirkungen für den anderen bleiben völlig auf der Strecke - ein wunderbarer Ansatzpunkt für fächerübergreifenden Unterricht (siehe Kapitel 8).

5. Das Nash-Gleichgewicht – ein grundlegendes Lösungskonzept der Spieltheorie

Das am Beispiel des Gefangenendilemmas erklärte Lösungskonzept geht auf den Mathematiker John Forbes Nash (geb. 1928) zurück.
Dabei wird jeweils die beste Antwort auf die Strategie des Gegners ermittelt:
Eine Strategie $\hat{s}_1$ heißt **beste Antwort** des Spielers 1 auf eine Strategie s_2 des Spielers 2, wenn sie dem Spieler 1 von allen ihm zur Verfügung stehenden Strategien die höchst mögliche Auszahlung u_1 bringt:

$$u_1(\hat{s}_1, s_2) \geq u_1(s_1, s_2) \quad \forall s_1 \text{ des Spielers } 1$$

Wenn sowohl s_1^* beste Antwort auf s_2^* als auch s_2^* beste Antwort auf s_1^* ist, dann heißt die Strategienkombination (s_1^*, s_2^*) ein **Nash-Gleichgewicht** des Spiels und es gilt:

$$\forall s_1 : \; u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \quad \wedge \quad \forall s_2 : \; u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2)$$

Das Nash-Gleichgewicht ist ein Zustand, von dem ausgehend kein einzelner Spieler einen Vorteil erzielen kann, wenn er von seiner Strategie abweicht.
John Nash erhielt als einer der wenigen Mathematiker einen Nobelpreis, nämlich 1994 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften für die Leistungen auf dem Gebiet der Spieltheorie, gemeinsam mit R. Selten (geb. 1930) und J. Harsanyi (1920 – 2000).
Das Nash-Gleichgewicht ist wohl das prominenteste von verschiedenen Lösungskonzepten der Spieltheorie. Eine weitere Möglichkeit ist beispielsweise die Suche nach Minimax- oder Maximin-Lösungen (siehe z. B. Humenberger oder Wiese). Dabei können unterschiedliche Konzepte durchaus unterschiedliche Lösungen hervorbringen. In diesem Aufsatz werden Lösungen immer mit dem Nash-Konzept ermittelt.

6. Spieltheoretische Modellierung realer Situationen

Aus dem Klassiker „Gefangenendilemma“ gewonnene Ergebnisse und Einsichten lassen sich auch auf ganz andere Situationen übertragen. An den folgenden Beispielen soll gezeigt werden, dass spieltheoretische Modellierung Ergebnisse liefern kann, die gewisse Aspekte realer Situationen gut abbilden.

6.1 Modellieren der Situation „Kalter Krieg“

Zwei Länder befinden sich im kalten Krieg, beide haben die Strategien *Aufrüsten* und *Abrüsten* zur Wahl. Das Spiel sei durch folgende Auszahlungsmatrix beschrieben:

		Land 2: abrüsten	Land 2: aufrüsten
Land 1	abrüsten	2 / 2	0 / **4**
	aufrüsten	**4** / 0	**1** / **1**

(Eintrag jeweils: Auszahlung Land 1 unten links / Auszahlung Land 2 oben rechts)

In diesem Fall spiegeln die Auszahlungen den subjektiven Nutzen wider, den ein Land einer Strategienkombination zuschreibt. Wie können die vorliegenden Matrixeinträge interpretiert werden?

Entscheidet sich ein Land für *Aufrüsten,* während das andere (in falschem Vertrauen) *Abrüsten* wählt, so steigt jenes Land, das besser für einen eventuellen Krieg gerüstet ist, mit einem Nutzen von 4 aus. Denn das andere Land ist in diesem Fall bei jeglichen Verhandlungen, z. B. auch bei wirtschaftlichen, einem Druck ausgesetzt und bekommt daher selbst einen subjektiven Nutzen von 0 zugeschrieben. Rüsten beide Länder auf, wird viel Geld investiert, das ansonsten für andere Zwecke verwendet werden könnte. Außerdem hat keine Nation ein Druckmittel gegenüber der anderen (Nutzen 1). Bei beidseitigem Abrüsten steht beiden Ländern mehr Geld zur Verfügung, die Positionen sind ausgeglichen (Nutzen 2).

Lösung des Spiels:
Betrachten wir die Situation zunächst aus der Sicht des Landes 1. Wählt Land 2 die Strategie *Abrüsten*, ist *Aufrüsten* die beste Antwort, es bringt die höhere Auszahlung. Wählt Land 2 die Strategie *Aufrüsten*, ist ebenfalls *Aufrüsten* die beste Antwort. *Aufrüsten* ist also dominante Strategie.
Die zu den besten Antworten gehörenden Auszahlungen sind in der Matrix fett gedruckt.

Analog gestalten sich die Überlegungen aus der Sicht des Landes 2.
Die Strategienkombination (*Aufrüsten, Aufrüsten*) liefert wechselseitig beste Antworten und ist somit das Nash-Gleichgewicht des Spiels.
Es liegt damit eine mit dem Gefangenendilemma vergleichbare Situation vor. Individuell optimales Verhalten führt zu einem Nash-Gleichgewicht, das für beide Partner eine geringere Auszahlung bereithält als mit der Strategienkombination (*Abrüsten, Abrüsten*) möglich wäre.
Ähnlich gestaltet sich die Situation bei der Modellierung von Preisabsprachen. Nichteinhalten der Absprache entpuppt sich als wechselseitig beste Antwort, obwohl bei beidseitigem Einhalten der Absprache für beide Spielpartner der höhere Gewinn zu erzielen wäre (siehe z. B. Wiese, S.123).

Bereits auf diesem Niveau der Beschäftigung mit Spieltheorie sind Interpretieren und Verbalisieren Lernziele, die besonders gut realisiert werden können. Sie müssen nicht extra ins Spiel gebracht werden, sondern drängen sich ohne Zutun auf.
In diesem Sinn kann auch in umgekehrter Richtung sehr interessant überlegt werden. Wie sind die Matrixeinträge zu setzen, wenn man sich in einer anderen Ausgangssituation befindet? Wenn beispielsweise beidseitiges Aufrüsten mit großer Wahrscheinlichkeit zum Krieg führt? Und wie wird davon die Lösung des Spiels beeinflusst?

Aufgabenstellungen aus dem direkten Lebensumfeld der Lernenden regen besonders dazu an, kreativ an die Sache heranzugehen und ein Spiel mit sich verändernden Voraussetzungen unter die Lupe zu nehmen.

6.2 Das Lehrerin-Schüler-Hausübungsspiel

Version I

		Lehrerin: kontrolliert	Lehrerin: kontrolliert nicht
Schüler	macht HÜ	**2** (Schüler) / **2** (Lehrerin)	**1** (Schüler) / 1 (Lehrerin)
Schüler	macht HÜ nicht	– 2 (Schüler) / **1** (Lehrerin)	0 (Schüler) / 0 (Lehrerin)

Interpretation des Spiels:
Es liegt eine gute Lernsituation vor. Der Schüler hat offensichtlich den prinzipiellen Sinn von Hausübungen erfasst. Er schreibt jedenfalls dem Erbringen der Hausübung einen höheren Nutzen zu als sie nicht zu machen und möchte auch, dass sie kontrolliert wird. Für den Fall, dass er die Hausübung nicht macht und das auch nicht auffällt, ist ihm bewusst, dass er keinen Nutzen zieht. Fällt das Fehlen der Hausübung durch Kontrolle auf, bewertet er das subjektiv mit einem Nutzen von – 2.

Die Lehrerin weist den höchsten Nutzen der Kombination (*macht HÜ, kontrolliert*) zu, sie hat Freude daran, engagiertes Arbeiten des Schülers positiv bewerten zu können. Der Kombination (*macht HÜ nicht, kontrolliert*) wird wegen des Wahrnehmens der Kontrollfunktion und der daraus resultierenden Motivation für den Schüler, die Hausübung das nächste Mal zu machen, ein Nutzen von 1 zugeschrieben. Ebenso der Kombination (*macht HÜ, kontrolliert nicht*), denn der gewünschte Übungseffekt für den Schüler ist zwar gegeben, die positive Rückmeldung bleibt aber aus. Im vierten der möglichen Fälle wird aus Sicht der Lehrerin kein Nutzen gezogen.

Lösung des Spiels:
Es ist leicht zu erkennen, dass in dieser idealen Lernsituation für den Schüler immer die Strategie, die Hausübung zu machen, beste Antwort ist. Genauso ist für die Lehrerin *Kontrollieren* immer beste Antwort. Das Nash-Gleichgewicht stellt sich also bei der Strategienkombination (*macht HÜ, kontrolliert*) ein.
Im Gegensatz zum Gefangenendilemma ist hier die Nash-Lösung des Spiels jene Strategienkombination, bei der beide Spieler ihre höchstmögliche Auszahlung erhalten.

Wie wirken sich nun Änderungen der Auszahlungen aus? In der nachstehenden Matrix sind im Vergleich zur obigen die Auszahlungen für die Lehrerin gleich geblieben, die Auszahlungen für den Schüler sind geändert:

Version II Lehrerin

		kontrolliert	kontrolliert nicht
Schüler	macht HÜ	**2** **1**	1 – 1
	macht HÜ nicht	**1** – 1	0 **4**

Interpretation:
Der Schüler hat seine Einstellung geändert oder man hat es mit einem anderen Schüler zu tun.
Jedenfalls ist offensichtlich, dass dem Durchführen der Hausübung nur dann ein Nutzen zugeschrieben wird, wenn es eine Kontrolle gibt. Den höchsten Nutzen sieht der Schüler, wenn er sich den Zeitaufwand für die Hausübung spart und das auch nicht auffällt.

Lösung:
Kontrollieren ist nach wie vor die beste Antwort der Lehrerin auf beide Strategien des Schülers. Wie auch die fett gedruckten Auszahlungen zeigen, stellt sich damit auch bei diesem Spiel das Nash-Gleichgewicht bei der Strategienkombination *(macht HÜ, kontrolliert)* ein. Allerdings erhält der Schüler im Gegensatz zu oben nicht mehr seine höchst mögliche Auszahlung.

In der dritten Version des Spiels sind nun auch die Auszahlungen der Lehrerin geändert:

Version III Lehrerin

		kontrolliert	kontrolliert nicht
Schüler	macht HÜ	1 **1**	**2** – 1
	macht HÜ nicht	**4** – 1	0 **4**

Sie weist als Reaktion auf das geänderte Verhalten des Schülers dem Ertappen des Schülers, wenn er die Hausübung nicht macht, den höchsten Nutzen zu. Er scheint nur noch dadurch zur Hausübung motivierbar zu sein, sein höchster Nutzen liegt nach wie vor in der Strategienkombination (*macht HÜ nicht, kontrolliert nicht*). Diese nicht mehr ideale Lernsituation spiegelt sich auch in den Auszahlungen der Lehrerin bei der Strategienwahl *macht HÜ* des Schülers wider. Dem geringeren Zeitaufwand des Nichtkontrollierens wird höherer Nutzen eingeräumt als der Kontrolle.
Die jeweils besten Antworten sind wieder fett gedruckt. Man ahnte es schon und es ist nun direkt an der Matrix abzulesen, in dieser Lage der verhärteten Fronten gibt es kein **Nash-**

Gleichgewicht in reinen Strategien. D. h. die Wahl der einen oder anderen Strategie eines Spielers liefert keine Lösung im Sinne des Nash-Konzepts. In jeder Kombination ist genau ein Spieler unzufrieden, es zahlt sich für ihn aus, von der gewählten Strategie abzuweichen.

Wir sind damit vor ein neues Problem gestellt. Viele soziologische oder wirtschaftliche Konstellationen im Leben ähneln dem geschilderten Katz-und-Maus-Spiel. Egal welche Entscheidungen in solchen Situationen getroffen werden, immer ist *eine* Partei mit dem Ausgang des Spiels unzufrieden. Durch eine kleine Änderung der Betrachtungsweise lassen sich aber auch solche Spiele, die kein reines Nash-Gleichgewicht aufweisen, lösen. Da Katz-und-Maus-Konstellationen im Schulalltag bekanntlich wenig erfreulich sind, werden wir das anstehende Problem am Beispiel eines anderen Spiels analysieren, das ebenfalls eine vertraute Alltagssituation modelliert.

7. Das Schwarzfahrerspiel

Fahrgast Franz fährt jeden Tag mit derselben Straßenbahn zur Arbeit. Er kann dabei täglich zwischen den Strategien *Schwarzfahren* und *Zahlen* wählen. Kontrollor Karl kann unabhängig davon jeden Tag entscheiden, ob er in dieser Straßenbahn *kontrolliert* oder *nicht*. Auch dieses Spiel kann wieder vollständig durch eine Bimatrix beschrieben werden. Die Einträge könnten dabei einfach den Geldwerten entsprechend gewählt werden, die in den einzelnen Fällen bezahlt bzw. kassiert werden. Nachdem in solchen Situationen aber auch die emotionale Komponente eine große Rolle spielt – wenn man etwa beim Schwarzfahren erwischt wird oder sich umgekehrt über ein erspartes Ticket freuen kann – wollen wir auch diese in den Matrixeinträgen berücksichtigen. Es kommt also in diesem Spiel wieder der **subjektive Nutzen** der beiden Spieler zum Tragen.

		Karl	
		kontrolliert	kontrolliert nicht
Franz	fährt schwarz	**3** – 8	– 2 **1**
	zahlt	– 1 **0**	**0** – 1

Wenn Franz *schwarzfährt* und Karl *kontrolliert* ist das natürlich der worst case für Franz. Er muss Strafe zahlen, blamiert sich vor den anderen Fahrgästen und ärgert sich über den Zeitverlust, den die ganze Aktion mit sich bringt. Für Karl ist das allerdings optimal, er verbucht Einnahmen und kann Signalwirkung für die anderen Fahrgäste erzielen. Umgekehrt die Situation, wenn Franz *schwarzfährt*, Karl aber *nicht kontrolliert*. Franz freut sich ein wenig über das ersparte Ticket, Karl ärgert sich über die vergebene Chance. *Zahlt* Franz, wenn Karl *kontrolliert*, ist das für Franz in Ordnung. Karl allerdings bedauert im Nachhinein, überhaupt *kontrolliert* zu haben. Wenn er allerdings *nicht kontrolliert*, dann ist wieder Franz unzufrieden, er hätte sich in diesem Fall das *Zahlen* ersparen können.

Man erkennt sofort, dass in jeder der vier Konstellationen eine der beiden Personen unzufrieden ist, weil sie mit der Wahl der anderen Strategie besser ausgestiegen wäre. Die fett markierten Einträge stellen jeweils die **besten Antworten** der Spieler auf die Strategie des Gegners dar. Es liegen also niemals wechselseitig beste Antworten vor. Muss das Nash-Konzept, also die Suche nach einem Gleichgewichtszustand, bei solchen Spielen scheitern?

Eine neue Sichtweise

Wie würden wir selbst handeln, wenn wir in einer ähnlichen Situation wie Franz wären? Wir würden vermutlich beobachten, wie häufig Karl in der Vergangenheit *kontrolliert* hat, und diese Information bei der Entscheidung über unsere nächste Straßenbahnfahrt zu Hilfe nehmen. Stellen wir uns also vor, Franz weiß über die **relative Häufigkeit** q des *Kontrollierens* in seiner

Straßenbahn Bescheid. Wie soll er nun handeln? Soll er bei der nächsten Fahrt *schwarzfahren* oder *zahlen*? Er muss sich ja für eine der beiden Strategien entscheiden.
Wir können an dieser Stelle die relative Häufigkeit q als **Wahrscheinlichkeit** interpretieren, mit der Karl bei der nächsten Fahrt *kontrolliert*, und die **erwarteten Auszahlungen** u_F für die beiden Strategien von Franz berechnen:

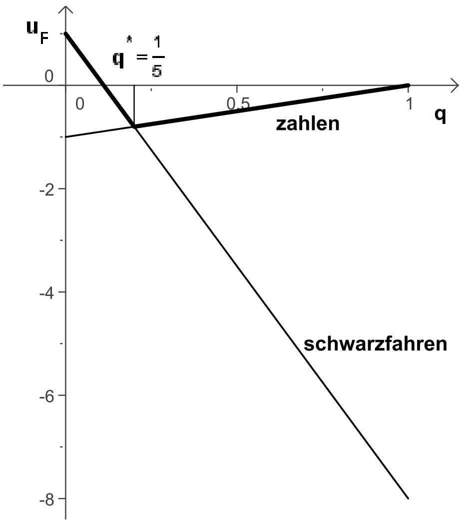
Wählt er *Schwarzfahren*, so hat er mit Wahrscheinlichkeit q eine Auszahlung von **–** 8 und mit Wahrscheinlichkeit *1-q* eine Auszahlung von 1 zu erwarten, das ergibt

$$u_F = -8 \cdot q + 1 \cdot (1-q) = 1 - 9q .$$

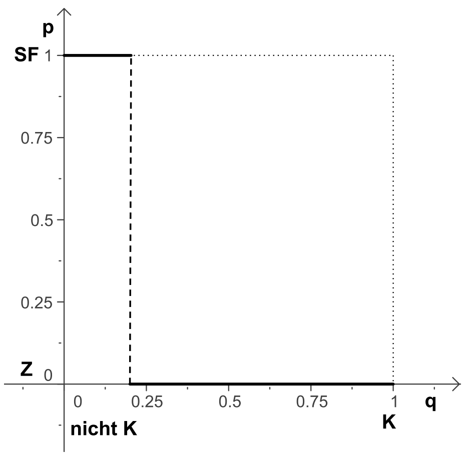
Umgekehrt hat er bei Wahl der Strategie *Zahlen* eine Auszahlung von

$$u_F = 0 \cdot q - 1 \cdot (1-q) = q - 1$$

zu erwarten. Die erwarteten Auszahlungen von Franz sind also lineare Funktionen in q. Welcher der beiden Erwartungswerte[1] der Auszahlungen größer ist, hängt natürlich von q ab. Einen Überblick verschafft die folgende Grafik:



Solange q klein ist ($q < \frac{1}{5}$), liegt die Gerade des *Schwarzfahrens* „oberhalb“ der Gerade des Zahlens. Der Erwartungswert für *Schwarzfahren* ist in diesem Bereich also größer, die beste Antwort von Franz demnach *Schwarzfahren*. Bei $q^* = \frac{1}{5}$ schneiden die beiden Geraden einander, wie man leicht grafisch oder rechnerisch nachprüft. Hier sind die beiden Erwartungswerte also gleich, keine Strategie bringt einen Vorteil. Hat aber Karl häufiger als in einem Füntel aller Fälle *kontrolliert* ($q > \frac{1}{5}$), so liefert die Strategie *Zahlen* die beste Antwort, da sie nun die höhere Auszahlung erwarten lässt. Die soeben gewonnenen Ratschläge für Franz werden wir in der **Grafik der Beste-Antwort-Linien** festhalten.



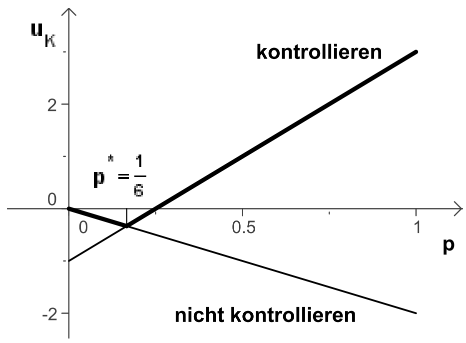
Auf der Abszisse ist abermals die relative Häufigkeit q des *Kontrollierens* aufgetragen, während auf der Ordinate eine neue Variable p ins Spiel kommt, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit Franz *schwarzfahren* sollte. Für jedes $q < \frac{1}{5}$ lautet die beste Antwort von Franz *Schwarzfahren*, also $p = 1$, für jedes $q > \frac{1}{5}$ ist *Zahlen* die beste Antwort, also $p = 0$. Hat Karl in der Vergangenheit genau in einem Fünftel der Fälle *kontrolliert*, so ist völlig egal, was Franz bei der nächsten Fahrt tut. *Schwarzfahren* und *Zahlen* bringen ihm dieselbe erwartete Auszahlung. Er könnte sogar mit einer beliebigen

[1] Genaueres zur Verwendung der Begriffe Erwartungswert und Wahrscheinlichkeit siehe 8.1.

Wahrscheinlichkeit $0 \le p \le 1$ *Schwarzfahren* wählen (d. h. ein Zufallsexperiment darüber entscheiden lassen, was er tun soll), auch das würde ihm auf Dauer denselben erwarteten Nutzen bringen. Wir deuten das in der Grafik durch die strichlierte Linie an.

Analog gehen wir nun für Karl vor. Angenommen, er kennt aus langer Erfahrung das bisherige Verhalten von Franz, d. h. ihm ist die relative Häufigkeit p des *Schwarzfahrens* bekannt. Daraus lässt sich wieder der erwartete Nutzen für beide Fälle, also für *Kontrollieren* und *nicht Kontrollieren*, berechnen. Kontrolliert er, so hat er auf lange Sicht mit

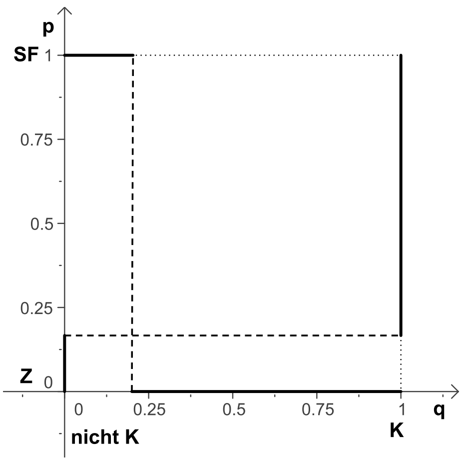
$$u_K = 3 \cdot p - 1 \cdot (1 - p) = 4p - 1$$



zu rechnen, kontrolliert er nicht, so hat er

$$u_K = -2 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = -2p$$

als Auszahlung zu erwarten. Wieder zeigt die Grafik die beiden linearen Funktionen. Ihr Schnittpunkt liegt bei $p^* = \frac{1}{6}$. Ist nun das empirisch ermittelte p kleiner als $\frac{1}{6}$, sollte Karl *nicht kontrollieren*. Wenn allerdings Franz häufiger als in einem Sechstel aller Fälle *schwarzgefahren* ist, dann ist die beste Antwort Karls darauf *Kontrollieren*. Bei $p = \frac{1}{6}$ spielt es wieder keine Rolle, was Karl tut, jeder Wert von q liefert dieselbe erwartete Auszahlung.



Die Grafik der Beste-Antwort-Linien bestätigt nun das Ergebnis unserer Suche nach Nash-Gleichgewichten von vorhin. Man erkennt, dass es bei der Kombination von reinen Strategien (das sind genau die Eckpunkte des Einheitsquadrates) nie zu einem Schnittpunkt der Linien der besten Antworten kommt. Daher muss immer einer der beiden Spieler unzufrieden damit sein.
Man erfasst nochmal deutlich die oben angesprochene Katz-und-Maus-Konstellation. Befindet man sich etwa im rechten oberen Eckpunkt des Einheitsquadrates, so ist Karl auf seiner Linie der besten Antwort – er spielt also optimal. Franz wäre aber lieber beim rechten unteren Eckpunkt, denn dort würde *er* sich auf seiner Linie der besten Antwort befinden. Von rechts unten würde aber Karl lieber nach links unten wechseln, ehe Franz von dort lieber wieder nach oben umsatteln würde usw. Ein nicht wirklich zielführendes Unterfangen also, wenn man nur diese vier Möglichkeiten zur Verfügung hat.
Es gibt allerdings einen Schnittpunkt im Inneren des Einheitsquadrates, nämlich bei $(p, q) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right)$. Dort treffen also beste Antworten aufeinander. Dieser Punkt erfüllt damit gerade die Bedingungen, die wir an ein Nash-Gleichgewicht gestellt haben und ist folglich ein solches. Im Unterschied zu Nash-Gleichgewichten in reinen Strategien werden hier die Strategien *Schwarzfahren* und *Kontrollieren* nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gespielt. Man nennt solche Strategien **gemischte Strategien**. Allerdings gilt freilich auch hier, dass sich einseitiges Abweichen von diesen Wahrscheinlichkeiten für keinen der beiden Spieler lohnt. Die Auszahlungen würden sich dadurch nicht verbessern.

Zugegeben, sie würden sich in diesem Fall aber auch nicht verschlechtern: Weicht etwa Franz von seiner Strategie $p^* = \frac{1}{6}$ ab, so verdrängt er zwar Karl von dessen Linie der besten Antwort, bleibt aber selbst nach wie vor auf seiner eigenen. Dafür sorgt nämlich Karl, wenn er bei seiner Strategie $q^* = \frac{1}{5}$ bleibt. Analog auch umgekehrt. Schauen also beide Spieler nur auf ihre eigenen Auszahlungen, wie wir das ja voraussetzen, hat keiner von ihnen einen Grund, vom Nash-Gleichgewicht abzuweichen.

Man hat also durch diese neue Sichtweise, nämlich auch gemischte Strategien zuzulassen, eine Möglichkeit gewonnen, eine Lösung im Sinne des Nash-Konzepts auch für solche Spiele anzugeben.

8. … kann es das spielen?

8.1 Didaktischer Kommentar

Wir haben den Themenbereich „Spieltheorie“ im Unterricht auf verschiedenen Niveaus als sehr gewinnbringend erlebt. Klarerweise gestaltet sich Unterrichtsarbeit mit einer kleinen Gruppe mathematisch Interessierter (Summer School, Wahlpflichtfachgruppen) ganz anders als mit einer Regelklasse. Einer der Vorteile der Spieltheorie ist aber, dass grundlegende Elemente dieses mathematischen Teilgebietes vergleichsweise rasch von den Lernenden verstanden werden können. Selbst wenn man sich auf das Aufsuchen von reinen Nash-Gleichgewichten beschränkt, kommt das Wesen der Spieltheorie sehr gut zur Geltung. Doch auch das Ermitteln von Nash-Gleichgewichten in gemischten Strategien erfordert an fachlichen Voraussetzungen eigentlich nur das Lösen von linearen $2x2$-Gleichungssystemen und das Begriffsverständnis der relativen Häufigkeit. Begriffe wie Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert sind nicht Voraussetzung, im Gegenteil sie können sogar anhand des Lösungsvorgangs verständig entwickelt werden. Wir hatten Gelegenheit einen Vormittag lang mit einer 5. Klasse AHS in die Spieltheorie einzutauchen und erlangten dabei die Bestätigung, dass es durchaus nicht notwendig ist bis zur 7. oder gar 8. Klasse mit dem Einstieg ins Thema zu warten, so man nicht beispielsweise kontinuierliche Strategieräume ins Spiel bringen möchte (siehe Abschnitt 8.3).
Als wesentliches Ergebnis unserer Unterrichtsarbeit hat sich herauskristallisiert, dass sich ein Zugang mit möglichst wenig Formalismus gut bewährt. Haben wir anfänglich Begriffe detailliert festgelegt, bevor mit ihnen gearbeitet wurde, so sind wir davon im Lauf der Zeit wieder abgekommen. Es stellte sich nämlich rasch heraus, dass sich für viele Basis-Begriffe der Spieltheorie, wie Strategie, beste Antwort, usw. das Verständnis besser anhand von unterschiedlichen Beispielen entwickeln lässt. Die Notwendigkeit der Formalisierung stellt sich durch erweiterte Problemstellungen ohnehin von selbst ein und wird in diesem Zuge besser von den Lernenden aufgenommen und auch zur Anwendung gebracht als in Form von „Vorratsdefinitionen“. Diese Erkenntnis spiegelt sich auch bewusst im vorliegenden Aufsatz, der ja durchaus zum Umsetzten von Spieltheorie im Unterricht anregen möchte, wider.

8.2 Rahmenbedingungen in der Praxis/ Schulrelevanz

Im Lehrplan der AHS-Oberstufe findet sich „Spieltheorie“ in der Liste der möglichen Bereiche für das **Wahlpflichtfach** Mathematik.
Im Regelunterricht sind die fachlichen Voraussetzungen ab der 5. Klasse gegeben. Der Lehrplanbezug ist durch Anwenden und Wiederholen elementarer mathematischer Tätigkeiten im Sinne des Spiralprinzips gegeben (siehe 8.1). Überdies werden die im allgemeinen Teil des Lehrplans eingeforderten Lernziele „Verbalisieren, Interpretieren, Modellieren und Experimentieren“ in bester Manier angesprochen. In der 6. Klasse kann Spieltheorie auch einem ersten Zugang zu den Begriffen „Wahrscheinlichkeit“ und „Erwartungswert“ dienen.

Aus eigener Erfahrung darf Spieltheorie auch als ergiebiges und dankbares **Spezialgebiet** für die mündliche Reifeprüfung empfohlen werden. Ein Thema, bei dem es z. B. über die Modellierung historischer oder gesellschaftspolitisch relevanter Situationen möglich ist, die versammelte Prüfungskommission für einen (zumindest kurzen) Einblick in ein mathematisches Gebiet zu interessieren.
Gerade dieser mögliche Brückenschlag zu anderen Fachgebieten ist es, der die Spieltheorie auch für **fächerübergreifenden Unterricht** empfiehlt. Fächer wie Informatik, PPP, der wirtschaftskundliche Bereich (BHS-Relevanz) aber auch Religion im Sinne eines Ethikunterrichts bieten sich an. Wie soll man entscheiden? Wie steht es mit der Diskrepanz zwischen optimalen Entscheidungen im spieltheoretischen Sinn und Entscheidungen unter Berücksichtigung moralischer Werte? Eine Möglichkeit der Umsetzung sind fächerübergeifende **Projekttage**.
Auch die Möglichkeit der Bearbeitung in Form einer **Fachbereichsarbeit** soll nicht unerwähnt bleiben.

8.3 Perspektiven

Die in diesem Aufsatz vorgestellten Konzepte stellen naturgemäß nur einige Grundlagen der Spieltheorie dar. Es gibt eine Vielfalt an Fortsetzungsmöglichkeiten oder anderen Wegen, an die Analyse von spieltheoretischen Situationen heranzugehen.

Man stößt etwa bei genauerer Betrachtung des Schwarzfahrerspiels auf eine zunächst sehr unangenehme Frage. Es ist zwar einsichtig, dass die beiden Spieler, wenn sie das Nashgleichgewicht erst einmal spielen, auch dabei bleiben sollten. Allerdings gibt es vorerst keinen Grund, warum sie sich denn überhaupt dazu entschließen sollten, a priori mit den Wahrscheinlichkeiten $p^* = \frac{1}{6}$ und $q^* = \frac{1}{5}$ *schwarzzufahren* bzw. zu *kontrollieren*. Und was heißt denn das überhaupt, eine Strategie mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu spielen? Franz muss doch, bevor er in die Straßenbahn steigt, genau eine der beiden Strategien wählen. Er kann doch bei einer konkreten Fahrt nicht nur „teilweise" *schwarzfahren*. Das alles bekommt erst Sinn, wenn man das Spiel nicht nur einmal spielt, sondern wiederholt. Dabei stellt sich dann die Frage, nach welchen Kriterien die Spieler entscheiden, wann sie welche Strategie wählen und was sie zu einem eventuellen Wechsel der Strategie bewegt. Es drängt sich auf, zu untersuchen, ob sich vielleicht stabile relative Häufigkeiten einstellen, mit denen *schwarzgefahren* bzw. *kontrolliert* wird. Das weite Feld der spieltheoretischen Dynamiken öffnet sich damit (siehe z. B. Sieg, S. 63), der Einsatz des Computers bietet sich an.

Einen anderen Bereich der Spieltheorie stellen Situationen dar, bei denen die Spieler nicht simultan und unabhängig voneinander ihre Strategienwahl treffen, wie das bei den bis jetzt betrachteten **Spielen in Normalform** der Fall war. Eine zeitliche Abfolge bzw. das Wissen um die Strategienwahl des Gegners beeinflussen selbstverständlich die eigene Entscheidung. Solche Situationen beschreibt man mit Hilfe von **Spielen in der extensiven Form**. Dabei werden andere Lösungskonzepte erforderlich (siehe z. B. Amann, S. 15).

Wenn es um Entscheidungen geht, zu welchem Preis eine Firma ein bestimmtes Produkt verkaufen soll, oder welche Ackerfläche für den Anbau eines gewissen Gutes aufzuwenden ist, um möglichst hohen Profit zu erzielen, dann ist man im Gebiet der **kontinuierlichen Strategienräume** angelangt. Hier gibt es also nicht nur zwei, drei oder endlich viele Möglichkeiten für einen Spieler, vielmehr muss er eine aus unendlich vielen Strategien wählen (siehe z. B. Wiese, S. 115).

Mit allen angesprochenen Bereichen haben wir selbst schon Erfahrungen in der Arbeit mit Schülerinnen und Schülern gemacht. Es bieten sich also auch hier Möglichkeiten für den Einsatz im Unterricht. Einen besonders geeigneten Ausgangspunkt sehen wir in Spielen, die von mehr als zwei Personen gespielt werden, wie etwa das Guessing Game. Alle Schüler und Schülerinnen können sich daran beteiligen und auf diese Weise selbst erfahren, was das Wesen spieltheoretischer Situationen ausmacht und in welche Dilemmata man dabei geraten kann (siehe z. B. Mérö).

Schließlich sei noch bemerkt, dass offenbar alleine der Name **Spieltheorie** neugierig macht. Spiel und Theorie – diese beiden Worte spiegeln eine gewisse Ambivalenz wider, die das Interesse der Lernenden weckt. Selbst ohne über den eigentlichen Inhalt dieser Disziplin Bescheid zu wissen, sind Schülerinnen und Schüler nach unseren bisherigen Erfahrungen bereit und interessiert, sich mit der Thematik auseinanderzusetzen. Die Erwartungen *„Lernen wir da, wie man immer gewinnt?“* können zwar in dieser Form nicht erfüllt werden, dennoch lösen die vorgestellten Spiele oftmals aufschlussreiche Diskussionen unter den Lernenden aus. Und sogar Medien zeigen Neugier an der Spieltheorie im Mathematikunterricht (siehe im Internet: http://www.diepresse.com/home/politik/innenpolitik/forumbildung/299259/index.do, link vom 20.09.07).
Nun stehen Ihnen selbst zwei reine Strategien zur Wahl: *Einsteigen* in die Spieltheorie oder *nicht*?

Literatur:

Amann, E. (1999): Evolutionäre Spieltheorie. Physica-Verlag. Heidelberg

Humenberger, H. (1998): Optimieren im Mathematikunterricht. in: Praxis der Mathematik, Jahrgang 1998, Heft 3, S. 101 – 108

Holler, J. und G. Illing (1991): Einführung in die Spieltheorie. Springer Verlag, Heidelberg

Mérö, L. (2000): Die Logik der Unvernunft. Spieltheorie und die Psychologie des Handelns. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbeck bei Hamburg.

Schlee, W. (2004): Einführung in die Spieltheorie. Vieweg Verlag, Wiesbaden.

Sieg, G. (2005): Spieltheorie. Oldenburg Wissenschaftsverlag, München

Sigmund, K. (1995): Spielpläne. Zufall, Chaos und die Strategien der Evolution. Hoffmann und Campe Verlag, Hamburg

Wiese, H. (2002): Entscheidungs- und Spieltheorie. Springer Verlag, Heidelberg

http://www.kirchkamp.de/spiel/pdf/spiel_druck.pdf

Anschrift der Autoren:

MMag. Christoph Ableitinger

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Nordbergstraße 15
1090 Wien
christoph.ableitinger@univie.ac.at

Dr. Petra Hauer-Typpelt

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Nordbergstraße 15
1090 Wien
und
Landstraßer Gymnasium
Kundmanngasse 20-22
1090 Wien
petra.hauer-typpelt@univie.ac.at