Nachbarbrüche, Medianten und Farey-Reihen – entdeckender und verständiger Umgang mit Brüchen

Hans HUMENBERGER, Universität Wien

In manchen Zahlentheorielehrbüchern (z. B. Scheid 2003) oder mathematikdidaktischen Zeitschriften (z. B. Pickert 2004 oder Hischer 2004) wird das Thema der so genannten Farey-Reihen aufgegriffen, einerseits als fachliches Thema, andererseits als mögliches Thema zum *Entdecken und Beweisen im Schulunterricht*.

Genau dieser Anspruch wird aber dabei nicht immer erfüllt, z. B. sind die in Pickert 2004 angegebenen Beweise sehr zahlentheoretisch-technischer Natur und lassen den Kern der Sache für vermutende und entdeckende Schülerinnen und Schüler nicht besonders gut erkennen. Sie sind im Stile eines nur fachlichen Zahlentheorielehrbuches natürlich nachvollziehbar, aber kaum werden experimentierende und vermutende Schülerinnen und Schüler auf so oder eine ähnliche Art des Beweisens kommen. Hischer 2004 macht zwar Vorschläge zur entdeckenden Arbeit mit Brüchen und nennt die zugehörigen erstaunlichen Phänomene bei Farey-Reihen, gibt aber *keine Begründungen* an, er schreibt abschließend: „Auf *höherem Niveau* lässt sich eine *iterative Konstruktion* von Farey-Folgen beschreiben."

Hier soll es speziell darum gehen, einen genetischeren Weg zu diesem Problemkreis aufzuzeigen (sowohl was die Phänomene an sich als auch eine mögliche Umsetzung im Schulunterricht betrifft).

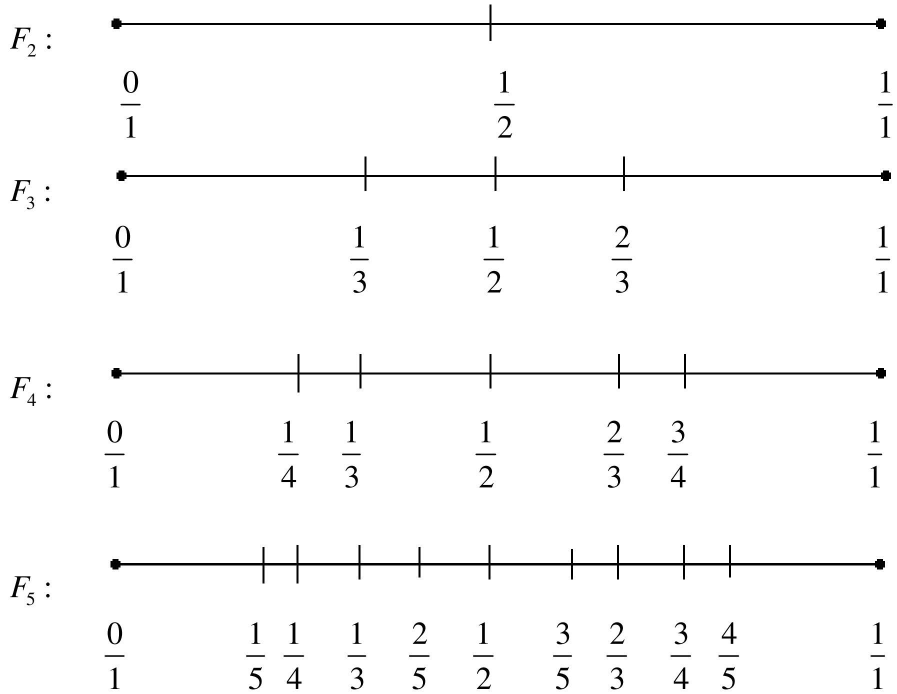
John **Farey** war kein Mathematiker, sondern ein englischer Geologe (1766 – 1826). Er bekam eine Bruch-Tabelle („*Complete decimal quotients*") von Henry Goodwyn in die Hände und machte darin eine Entdeckung über gekürzte Brüche. Dies waren Tabellen, die die gekürzten Brüche bis zu einem gewissen Höchstnenner enthielten samt ihren Dezimalbruchentwicklungen bis zu einer gewissen Dezimalstelle; anhand der Darstellung als Dezimalbruch lassen sich die Brüche auch leicht der Größe nach ordnen. Solche Tabellen konnten auch beim praktischen Rechnen helfen: Approximation von Brüchen durch Dezimalbrüche oder Approximation von Brüchen mit relativ großen Nennern (auch von Dezimalbrüchen) durch welche mit relativ kleinen Nennern etc.1816 schrieb Farey einen Brief an den Herausgeber der nicht speziell mathematischen Zeitschrift *Philosophical Magazine* (heute würde man vielleicht Leserbrief dazu sagen), der dort auch abgedruckt wurde („*On a curious property of vulgar fractions*"). Er beschrieb darin eine erstaunliche Eigenschaft von gekürzten Brüchen; wir beschränken uns hierbei stellvertretend auf das Intervall [0 ; 1]:

Die Farey-Reihe[1] F_n für eine feste natürliche Zahl n besteht aus den *der Größe nach geordneten gekürzten Brüchen aus* [0 ; 1] *mit Nenner* $\leq n$, hier die ersten 5 Fälle für F_n:

F_1 :

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$

[1] Hier ist *Reihe* nicht im mathematischen Sinn zu verstehen, denn sonst müsste man eigentlich von einer *Folge* sprechen, vielmehr ist hier der umgangssprachliche Begriff einer Reihe gemeint.



In solchen „Reihen“ ist Farey aufgefallen, dass jeder innere Bruch dieser Reihe denselben Wert hat wie $\frac{\text{Summe der Nachbarzähler}}{\text{Summe der Nachbarnenner}}$ (in manchen Fällen muss noch gekürzt werden).

Ihm ist dies nur aufgefallen und er hat dies der mathematischen Leserschaft dieser Zeitschrift zum Beweis überlassen, er schreibt am Schluss des Briefes: “I am not acquainted, whether this curious property of vulgar fractions has been pointed out, or whether it may admit of any easy or general demonstration?; which are points on which I should be glad to learn the sentiments of some of your mathematical readers.“ (Farey, 1816)

Ein solcher „mathematical reader“ (einer französischen Übersetzung) war Cauchy, der dafür auch einen Beweis gab. Schon im Jahr 1802 hat C. Haros einen Aufsatz im *Journal de l'ecole polytechnique* publiziert, in dem er auch die Entdeckung an jenem Objekt machte, das in Farey-Diktion F_{99} entspricht, aber auch er hat keinen allgemeinen Beweis angegeben. D. h. die Farey-Reihen sind in einer gewissen Weise zu Unrecht nach Farey benannt, er hat die Phänomene weder als erster entdeckt, noch als erster bewiesen, aber so etwas ist in der Geschichte der Mathematik ja durchaus nichts Ungewöhnliches.

Es ist vielleicht auf den ersten Blick verwunderlich, dass die Entdeckung einer so einfachen Eigenschaft gekürzter Brüche nicht schon längst vorher geschehen ist, aber ohne eine solche Tabelle wie z. B. jene von Goodwyn, in der diese Brüche direkt neben- oder untereinander stehen, kommt man eben gar nicht zu diesem Phänomen und solche Tabellen hat man eben erst relativ spät aufgestellt (Anfang 19. Jhdt.).

Wir werden im Folgenden dieses Problem *nicht direkt* weiter verfolgen, sondern die Lösung quasi *indirekt* durch andere Betrachtungen mit Brüchen erhalten. Diese müssen nicht notwendig in „Farey-Reihen” münden bzw. durch Farey-Reihen motiviert sein, sie sind auch für sich genommen interessant und laden zu Erkundungen, Entdeckungen und Begründungen ein. Dies auch im normalen Schulunterricht! Mathematisch handelt es sich fast ausschließlich um den Bereich der *elementarsten Bruchrechnung*. Nur ganz zum Schluss *kann* das Prinzip der *vollständigen Induktion* einfließen, muss aber nicht.

Nun zunächst zwei Begriffe, die im Zentrum des Folgenden stehen werden, sie sind sozusagen der Kern des von Farey beobachteten Phänomens: „Nachbarbruch“ und „Mediante“. Dies soll nicht bedeuten, dass ich – sozusagen zu ihrem Selbstzweck – noch viele weitere neue Begriffe in den Schulunterricht bringen möchte, im Gegenteil, man könnte da vermutlich einiges reduzieren[2]. Diese beiden Begriffe sind aber erstens *inhaltlich* sowieso bekannt (sind also nur „Namen“ für ohnehin bekannte und häufige Tatsachen) und zweitens kann man mit ihnen eine ganze substanzielle Lernumgebung schaffen, in der von Schülerinnen und Schülern viel selbständig gefragt, erkundet und begründet wird.

Nachbarbrüche

Bei der Berechnung von Differenzen von Brüchen passiert es oft, dass der Zähler 1 ist, sogar ohne Kürzen, z. B. $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{4-3}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}$. Eine kleinere Differenz als $\frac{1}{12}$ können $\frac{n}{3}$ und $\frac{m}{4}$ nicht haben, so dass es plausibel ist, solche Brüche als *Nachbarbrüche* zu bezeichnen.

Definition: Zwei Brüche $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ heißen *Nachbarbrüche*, wenn $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}=\frac{1}{bd}$
d. h. $bc-ad=1$ gilt.

In diesem Zusammenhang sind natürlich auch andere „Namen“ (Begriffe) dafür denkbar: „Partnerbrüche“, „minimal benachbarte Brüche“ (vgl. Müller/Steinbring/Wittmann 2004, S. 328[3]) etc. Auch die Erfindung sinnvoller Bezeichnungen kann reizvoll sein (vgl. Vogelsberger 1993 oder viele Beiträge von Herrn Weth zum Thema *Kreativität im Mathematikunterricht*).
Insbesondere in jenen Bereichen, wo noch „Wahlfreiheit“ herrscht; bei etablierten Standardbegriffen hätte es natürlich keinen Sinn, dass jede Lerngruppe jeweils eigene Namen erfindet, so dass die Sprache der Mathematik keine eindeutigen Vokabeln mehr hätte.

Mit dem neu geschaffenen Begriff soll nun auch gearbeitet, seine Struktur genauer studiert werden: „lokales Ordnen“ (Freudenthal). Dies ist ja eine typische mathematische Tätigkeit, die hier auf schuladäquatem Niveau exemplarisch durchgeführt werden kann. Solche den neuen Begriff erforschende Tätigkeiten können durch geeignete Fragestellungen angeregt werden (möglichst nicht in der Form: „Man beweise, dass . . .“). Dies ist sicher auch schon in Klasse 6 gut möglich; natürlich noch *nicht* die dann folgenden *algebraischen* Begründungen mit *Variablen*, aber erste Kontakte zu diesem Thema (ausprobieren, rechnen, vermuten, . . ., „mit Brüchen spielen“) anhand konkreter Werte sind auch in Klasse 6 ein lohnendes Thema.

Hier eine kleine Auswahl von Fragestellungen, die geeignet sind, den neuen Begriff besser zu „begreifen“ (auch andere, von Lernenden gemachte Beobachtungen und Vermutungen bzw. gestellte Fragen sind oft interessant und einer näheren Betrachtung wert):

[2] Z. B. sind u. E. in der Bruchrechnung die Begriffe „echte“ und „unechte Brüche“ bzw. „eigentliche“ und „uneigentliche Brüche“ durchaus verzichtbar.
[3] Dort wird eine *Aufgabe* formuliert, deren Bearbeitung von den Leserinnen und Lesern auf eine Art erwartet wird, die wohl ähnlich dem hier vorgeschlagenen Weg ist.

1. Wie sehen Nachbarbrüche von 3/1 (oder allgemeiner: von ganzen Zahlen) aus?

2. Gibt es zu jedem vorgegebenen Bruch einen/mehrere Nachbarbrüche?

3. Kann es einen Bruch geben, der genau einen oder genau 2 (einen „links“ und einen „rechts“) hat?

4. Spiele bzw. Wettbewerbe in der Klasse mit Motivations- und Aufforderungscharakter: Finde *möglichst viele* Nachbarbrüche zu 2/5. Wer findet den Nachbarbruch zu 2/5, der *am weitesten entfernt* von bzw. *am nächsten* zu 2/5 ist?

5. Finde Zähler a und c so, dass die Brüche $a/5$ und $c/7$ *möglichst kleinen Abstand* $(\neq 0)$ haben. Sind sie Nachbarbrüche? Gibt es mehrere Möglichkeiten dafür? Oder anders formuliert: Welche Brüche $a/5$ und $c/7$ sind Nachbarbrüche? Gibt es mehrere?

6. Kann man Nachbarbrüche auch bei beliebigen vorgegebenen Nennern finden, z. B. bei $a/6$ und $c/10$? Worauf wird es dabei ankommen?

7. Gibt es *un*gekürzte Nachbarbrüche? Diese Frage mündet direkt in:

Nachbarbrüche sind immer gekürzt ! **(1)**

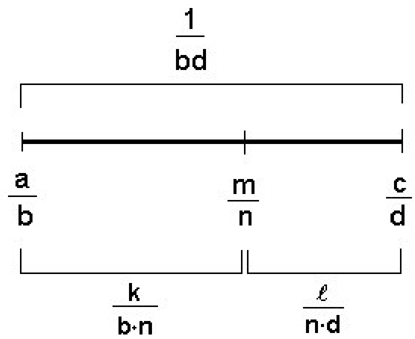
Wenn $\frac{a}{b}$ oder $\frac{c}{d}$ nicht gekürzt wäre, so wäre auch $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}$ nicht gekürzt und könnte somit nicht Zähler 1 haben!

8. Wie sieht der Bereich zwischen 2 Nachbarbrüchen aus? Finde zwischen zwei Nachbarbrüchen weitere Brüche mit *möglichst kleinem* Nenner. Als Wettbewerb: wer findet den Bruch mit dem kleinsten Nenner zwischen 2/5 und 1/2? Diese Frage führt wieder zu einer Vermutung:

Zwischen Nachbarbrüchen können nur Brüche mit größerem Nenner liegen. **(2)**

Auch diese Vermutung kann leicht bewiesen werden:

Wenn $\frac{m}{n}$ ein Bruch zwischen den Nachbarbrüchen $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ ist (siehe Skizze), dann müssen die beiden Abstände von $\frac{m}{n}$ zu den Randbrüchen kleiner als die Länge des Gesamtintervalls sein:
$\frac{k}{bn}<\frac{1}{bd}$ und $\frac{\ell}{dn}<\frac{1}{bd}$ mit Zählern $k,\ell \geq 1$.
Daraus folgt unmittelbar $n>d$ und $n>b$.



Medianten

Es ist ein besonders häufiger Schülerfehler bei der Bruchaddition analog zur Multiplikation zu verfahren nach der „Regel“: Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner. Vielleicht könnte eine genauere Beschäftigung mit dieser Rechenart (nicht nur: „sie ist falsch bei der Summenbildung“) dazu beitragen, dass dieser Fehler nicht mehr so häufig vorkommt, wenn nämlich dem Term $\frac{a+c}{b+d}$ im Zusammenhang mit den Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ eine eigenständige (positive) Bedeutung bekommt, nicht nur die negative („falsche Summe“), sondern als probates Mittel, bei zwei gegebenen Brüchen einen *Bruch zwischen ihnen* zu finden.

Man kann leicht einsehen, dass der Wert von $\frac{a+c}{b+d}$ sicher *zwischen* $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegen muss (wie ist die Lage, wenn $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$?):

- Algebraisch: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$,
- oder durch Interpretation der beteiligten Brüche, z. B. als Säurekonzentrationen:

  Säurelösung 1: $\frac{a}{b}$ gebe ihre Konzentration an: a Liter Säure von b Liter Gesamtvolumen;

  Säurelösung 2: $\frac{c}{d}$ gebe ihre Konzentration an: c Liter Säure von d Liter Gesamtvolumen.

  Durch naiv gedachtes Zusammenschütten dieser Säurelösungen erhält man $a + c$ Liter Säure von $b + d$ Liter Gesamtvolumen: $\frac{a+c}{b+d}$; diese Säurekonzentration muss mit Sicherheit irgendwo zwischen den beiden Ausgangskonzentrationen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegen.

Man vergibt für den Term $\frac{a+c}{b+d}$ sogar einen eigenen Namen und hat damit eine sehr schnelle Möglichkeit, *Zwischenbrüche* zu vorgegebenen Brüchen zu finden:

Definition: $\frac{a+c}{b+d}$ heißt *Mediante* zu den Brüchen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ (liegt immer zwischen ihnen).

Manchmal ist dafür auch der Begriff „Chuquet-Mittel“ gebräuchlich (z. B. Hischer 2004).
Zunächst wieder einige lohnende „Forschungsfragen“ für Lernende, die die beiden neuen Begriffe verbinden:

- Nimm nun zwei *Nachbarbrüche* und bilde deren *Mediante*, z. B. $\frac{1}{4}<\frac{1+1}{4+3}=\frac{2}{7}<\frac{1}{3}$. Die Mediante $\frac{2}{7}$ ist hier wieder ein Nachbarbruch zu $\frac{1}{4}$: $\frac{2}{7}-\frac{1}{4}=\frac{8-7}{7\cdot 4}=\frac{1}{7\cdot 4}$; analog stellt sich heraus, dass $\frac{2}{7}$ auch Nachbarbruch zu $\frac{1}{3}$ ist. Ist dies immer so, oder kann man Nachbarbrüche finden, so dass die Mediante *kein Nachbarbruch* zu den Ausgangsbrüchen ist?

- Hier war die Mediante $\frac{2}{7}$ auch ein gekürzter Bruch; kann man Nachbarbrüche finden, so dass deren Mediante ein *nicht gekürzter* Bruch ist? Durch Probieren kommt man bei diesen Fragen schnell zur Vermutung:

Die *Mediante* von *Nachbarbrüchen* ist ihrerseits *Nachbarbruch* zu den Ausgangsbrüchen (und somit nach (1) gekürzt!) .	**(3)**

Die Begründung ergibt sich unmittelbar: Mit $bc-ad=1$ (Nachbarbrüche $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$!) ist

$$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)}=\frac{bc-ad}{b(b+d)}=\frac{1}{b(b+d)}$$

und analog $\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}=...=\frac{1}{d(b+d)}$.

- Welche Brüche zwischen zwei vorgegebenen Brüchen sind Nachbarbruch zu den beiden Ausgangsbrüchen? Gibt es da immer welche? Gibt es manchmal sogar mehrere? Welche Brüche $\frac{1}{4}<\frac{m}{n}<\frac{1}{3}$ sind Nachbarbrüche zu $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$? Welche Brüche $\frac{1}{3}<\frac{m}{n}<\frac{2}{3}$ sind Nachbarbrüche zu $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$?

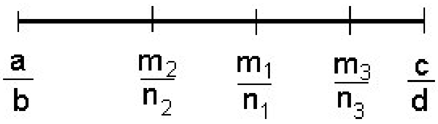
Die Behandlung solcher Fragen hat Freudenthal einmal treffend „Lokales Ordnen" (vgl. Freudenthal 1973, S. 142) genannt: Ordnung bzw. Übersicht schaffen in die unmittelbaren Zusammenhänge eines Begriffes – hier durch die verallgemeinerte Umkehrfrage zu (3). Dieses Umkehren der Betrachtungsweise ist eine besonders wichtige und typische „Arbeits- und Denkweise" in der Mathematik, die eine ihrer expliziten Stärken ist. Wieder ist eine entsprechende allgemeine Untersuchung der Lage sehr leicht:

Wenn der Bruch $\frac{m}{n}$ zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegt und Nachbarbruch zu ihnen ist, so muss er deren gekürzte Mediante sein.	**(4)**

Wenn $\frac{a}{b}<\frac{m}{n}$ und $\frac{m}{n}<\frac{c}{d}$ Nachbarbrüche sind, so gilt: $\begin{matrix} bm-an=1 \\ cn-dm=1 \end{matrix}$. Durch Gleichsetzen der beiden linken Seiten erhält man daraus unmittelbar $\frac{m}{n}=\frac{a+c}{b+d}$. Nach (1) ist klar, dass hierbei die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{m}{n}, \frac{c}{d}$ gekürzt sind; $\frac{a+c}{b+d}$ braucht nicht notwendig gekürzt zu sein. Z. B. hatten wir in F_3 (siehe oben) so einen Fall: $\frac{1}{2}$ ist Nachbarbruch zu $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ und ist deren gekürzte Mediante: $\frac{1}{3}<\underbrace{\frac{1+2}{3+3}}_{1/2}<\frac{2}{3}$, dort haben wir geschrieben „in manchen Fällen muss noch gekürzt werden". Wenn bereits a/b und c/d Nachbarbrüche sind, so muss die Mediante schon gekürzt sein (siehe (3) bzw. (1)).

Hiermit ist übrigens keine Aussage darüber getroffen, zu welchen Brüchepaaren $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ es überhaupt einen Bruch $\frac{m}{n}$ zwischen ihnen gibt, der Nachbarbruch zu beiden ist, nur: *wenn* es einen gibt, dann muss er die gekürzte Mediante sein! Auch das ist eine spannende Frage, deren Beantwortung wir in einen Anhang verschieben.

Mediantenreihen bei Nachbarbrüchen



Wir wollen nun ausgehend von zwei *Nachbarbrüchen* die Mediantenbildung oft hintereinander machen, so dass einige Brüche im Intervall $\left[\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right]$ entstehen („Teilungspunkte"): der erste Teilungspunkt ist also $\frac{m_1}{n_1}$, die Mediante von $\left[\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right]$; als nächstes setzen wir den Teilungspunkt $\frac{m_2}{n_2}$, die Mediante von $\left[\frac{a}{b};\frac{m_1}{n_1}\right]$; dies setzen wir einige Male fort, indem wir immer wieder zu benachbarten Brüchen die Mediante als neuen Teilungspunkt einsetzen (in beliebiger Reihenfolge, d. h. $\frac{m_3}{n_3}$ könnte genau so gut die Mediante von $\left[\frac{a}{b};\frac{m_2}{n_2}\right]$ oder $\left[\frac{m_2}{n_2};\frac{m_1}{n_1}\right]$ sein).

Wir wollen zu so einem Gebilde *Mediantenreihe* sagen. Wegen (3) ist klar, dass je 2 aufeinander folgende Brüche einer Mediantenreihe *Nachbarbrüche* sind, gleichgültig, wie weit man die Mediantenbildung getrieben hat, gleichgültig in welcher Reihenfolge diese erfolgt ist. D. h. durch Mediantenbildung bekommt man nicht nur irgendwelche Zwischenbrüche, sondern sie ist ein leichtes Mittel, zu vorgegebenen Nachbarbrüchen *neue Nachbarbrüche* zu produzieren.

Viele Brüche einer Mediantenreihe sind *laut Konstruktion* die Mediante der benachbarten Brüche (oben z. B. $\frac{m_2}{n_2}$ und $\frac{m_3}{n_3}$). $\frac{m_1}{n_1}$ ist zwar laut Konstruktion Mediante von $\left[\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right]$, aber nicht von $\left[\frac{m_2}{n_2};\frac{m_3}{n_3}\right]$. Wegen (4) muss dies aber doch der Fall sein. D. h. wir können allgemein formulieren (man braucht dazu keinen strengen Induktionsbeweis zu führen):

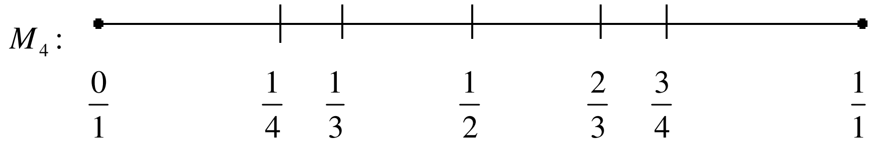
In einer Mediantenreihe, die von 2 *Nachbarbrüchen* ausgeht, sind je 2 aufeinander folgende Brüche *Nachbarbrüche* und jeder *innere Bruch* ist die gekürzte *Mediante* seiner beiden Nachbarn.	**(5)**

In den obigen Betrachtungen spielte das genaue Zustandekommen der Mediantenreihe keine Rolle. Im Folgenden wollen wir *spezielle* Mediantenreihen M_n betrachten, die durch zwei Bedingungen festgelegt sind:

- Die Start-Nachbarbrüche sind $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$.

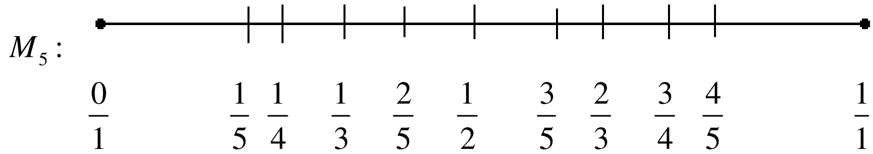
- Wir führen die Mediantenbildung genau so lange durch, bis man keine Medianten mehr mit Nenner $\leq n$ eintragen kann.

Die Mediantenreihe M_4 ist z. B. gegeben durch:



Der Reihe nach ergeben sich zunächst die Medianten $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. Nun kann man bei M_4 die Mediantenbildung nicht in $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ und auch nicht in $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$ fortsetzen, da sich jeweils der Nenner 5 ergäbe; in $\left[\frac{0}{1};\frac{1}{3}\right]$ bzw. $\left[\frac{2}{3};\frac{1}{1}\right]$ kann noch je eine Mediante mit Nenner ≤ 4 gebildet werden: $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$. Jede weitere Mediantenbildung würde zu einem Nenner ≥ 5 führen.

Erweitert man nun M_4 zu M_5, so erhält man:



Bemerkungen:

- In M_n kann es keine benachbarten Brüche geben mit einer Nennersumme $\leq n$ (denn sonst würde deren Mediante in M_n fehlen, M_n wäre noch nicht vollständig).
- Nach (3) bzw. (1) ist nun klar, dass alle auftretenden Brüche in M_n *gekürzt* sind; daher gibt es im Intervall [0 ; 1] außer den Brüchen von M_n sicher noch andere *un*gekürzte Brüche mit Nenner $\leq n$, z. B. für M_4: $\frac{0}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{3}{3}, \frac{0}{4}, \frac{2}{4}, \frac{4}{4}$; zusätzlich in M_5 nicht vorhandene Brüche wären noch 0/5 bzw. 5/5.
- Gekürzte Brüche mit Nenner n + 1 können natürlich nur *zwischen* den Brüchen von M_n liegen, Gleichheit mit einem der Brüche von M_n ist nicht möglich.

Welche Frage drängt sich an dieser Stelle nun geradezu auf? Es ist die folgende: Enthält M_n **alle** gekürzten Brüche in [0 ; 1] mit Nenner $\leq n$? Oder gibt es eventuell noch andere?
Hierzu wird man zunächst die Mediantenreihen bis ca. M_8 bilden und sehen, dass die *Vermutung* nahe liegt:

In der Mediantenreihe M_n liegen *alle* gekürzten Brüche mit Nenner $\leq n$ **(6)**

Wenn wir dies allgemein eingesehen haben, dann ist klar: die Farey-Reihe F_n ist dasselbe wie die Mediantenreihe M_n und wegen (5) sind dann die Medianten- und die Nachbarbrucheigenschaft in F_n geklärt.

Für die entsprechende Begründung von (6) haben wir schon das entsprechende Rüstzeug; wir müssen nur noch aus dem Obigen „ernten“, insbesondere aus Aussage (2).

Auch ohne das Prinzip der *vollständigen Induktion* beim Namen zu nennen ist es möglich, eine Einsicht in (6) zu schaffen, indem *exemplarisch* ein Übergang, z. B. ausgehend von der letzten tatsächlich angeschriebenen Mediantenreihe, also z. B. $M_8 \to M_9$, beleuchtet wird:
Wie können wir begründen, dass M_9 vollständig ist, ohne M_9 wirklich hinzuschreiben? Wie kann die Vollständigkeit von M_9 aus jener von M_8 begründet werden?

Man sieht: In M_8 kommen alle gekürzten Brüche mit Nenner ≤ 8 vor. Gekürzte Brüche mit Nenner 9 können nur *zwischen* den Brüchen aus M_8 liegen. Es kann in M_8 keine Nachbarbrüche mit Nennersumme ≤ 8 geben (sonst wäre M_8 noch nicht vollständig). Zwischen Nachbarbrüchen in M_8 mit Nennersumme 9 liegt jeweils die zugehörige Mediante mit Nenner 9, aber wegen (2) sicher kein weiterer Bruch mit Nenner 9. Zwischen Nachbarbrüchen in M_8 mit Nennersumme $s > 9$ liegt die Mediante mit Nenner s und dazwischen kann analog wegen (2) kein Bruch mit Nenner 9 liegen. Also erhält man durch Einfügen der Medianten mit Nenner 9 sicher *alle* gekürzten Brüche mit Nenner 9.

Es ist klar, dass diese Argumentation auch für andere Übergänge und somit allgemein gilt. Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn mit Schülern gearbeitet wird, die das Prinzip der vollständigen Induktion noch nicht kennen (weil es im Curriculum noch zu früh ist, oder vollständige Induktion gar nicht mehr im Lehrplan ist). Bei einem formalen Induktionsbeweis ist diese Erblichkeit $n \to n+1$ *allgemein* zu zeigen: Dazu setzen wir voraus, dass in M_n wirklich alle gekürzten Brüche mit Nenner $\leq n$ stehen, und haben mit dieser Voraussetzung die entsprechende Behauptung für $n+1$ zu zeigen.

Zwischen welchen benachbarten Teilungspunkten (Brüchen) in M_n können überhaupt **gekürzte Brüche mit Nenner $n + 1$** liegen? Benachbarte Brüche mit Nennersumme $< n+1$ gibt es in M_n nicht (siehe obige Bemerkung).

- Zwischen benachbarten Brüchen mit Nennersumme $n+1$ liegt jeweils DIE zugehörige Mediante mit Nenner $n+1$, aber keine weiteren Brüche mit Nenner $n+1$: $\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{\underbrace{b+b'}_{=n+1}} < \frac{a'}{b'}$; nach (2) liegen nämlich in $\left(\frac{a'}{b'} ; \frac{a+a'}{b+b'}\right)$ und in $\left(\frac{a+a'}{b+b'} ; \frac{a'}{b'}\right)$ nur Brüche mit größerem Nenner als $b+b' = n+1$. $\frac{a+a'}{\underbrace{b+b'}_{=n+1}}$ ist also der einzige Bruch mit Nenner $n+1$ in $\left[\frac{a}{b} ; \frac{a'}{b'}\right]$.
- Zwischen benachbarten Brüchen mit Nennersumme $s > n+1$ liegt wieder die Mediante mit Nenner s und dazwischen können aus analogem Grund keine Brüche mit Nenner $n+1$

liegen: Bei $\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{\underbrace{b+b'}_{=:s>n+1}} < \frac{a'}{b'}$ können wegen (2) sowohl in $\left(\frac{a}{b}\,;\,\frac{a+a'}{b+b'}\right)$ als auch in $\left(\frac{a+a'}{b+b'}\,;\,\frac{a'}{b'}\right)$ nur Brüche mit größerem Nenner als $s = b+b' > n+1$ liegen; daher kann es in $\left[\frac{a}{b}\,;\,\frac{a'}{b'}\right]$ keinen Bruch mit Nenner $n+1$ geben.

Der mathematische Kern von Farey-Reihen besteht in „Nachbarbrüchen" und „Medianten". Wenn man *ausgehend von Farey-Reihen* versucht, ihre entsprechenden *überraschenden* Eigenschaften zu beweisen (Medianten- und Nachbarbrucheigenschaft), werden die Beweise meist relativ technisch und unanschaulich.

Dreht man hingegen die Betrachtungsrichtung um, kann man *ausgehend von speziellen Mediantenreihen* auf sehr anschaulichem und genetischem Weg sich davon überzeugen, dass es sich um Farey-Reihen handelt. Vom Kern einer Sache irgendwohin vorzustoßen, ist eben meist leichter und anschaulicher als diesen Kern erst mal zu suchen.

Wenn man Farey-Reihen thematisieren will, so halten wir es für besser, dieses überraschende Phänomen an den Beginn der Betrachtungen zu stellen, denn „Überraschungen" haben oft hohes Motivationspotential. Bei den Begründungen scheint uns der hier dargestellte „umgekehrte" Weg (oder ein ähnlicher) der angemessenere zu sein, insbesondere für die Schule (viel Eigenaktivität und Selbständigkeit der Lernenden möglich).

Bei einem Einstieg mit Nachbarbrüchen und Medianten (ohne Farey-Reihen überhaupt zu erwähnen) wird man von (6) vielleicht nicht mehr so überrascht sein, sondern dies vielleicht sogar erwarten. Wenn aber Farey-Reihen gar nicht das Thema sein sollen, ist die zugehörige Überraschung auch verzichtbar, denn die Zusammenhänge (1) – (6) oder auch nur bis (5) und die damit verbundenen Aktivitäten (vgl. auch die anderen oben genannten Fragen) sind auch für sich genommen ein sehr lohnendes Thema (*produktive* bzw. *substanzielle Lernumgebung*).

Zusammenfassung und didaktischer Kommentar

Wir sehen in diesem Thema eine sehr gute Möglichkeit, viele neuere didaktische Prinzipien zu verwirklichen – siehe die folgenden Punkte, so dass uns dieses Thema insgesamt ein sehr hohes (fachliches und didaktisches) Potential zu haben scheint, also sehr lohnend für den Unterricht in verschiedenen Stufen ist. Insgesamt gibt es unserer Ansicht zu wenige solche Gelegenheiten, wo ausgehend von einem bestimmten Phänomen, Mathematik als Prozess so gut auf ganz elementarem Niveau betrieben werden kann. Mehr solche Gelegenheiten bereitzustellen und für einen konkreten Unterricht aufzuarbeiten, darin sehen wir auch eine sehr wichtige *Entwicklung*saufgabe der Mathematikdidaktik (d. h. „Stoffdidaktik" in einem zeitgemäßen Sinn, nicht im Sinne der 70er Jahre) – neben ihrer ebenso wichtigen *Forschung*saufgabe.

1) **Operative Begriffsbildung:** Die beiden zugrunde liegenden Begriffe *Nachbarbruch* und *Mediante* entstehen unmittelbar aus Operationen: Bei der Differenzbildung von Brüchen passiert es oft, dass sich im Nenner das Produkt der Faktoren und im Zähler (ohne Kürzen!) 1 ergibt, so dass der neue Name *Nachbarbruch* aus Schülersicht etwas durchaus Natürliches ist. Auch der Begriff der *Mediante* entsteht aus einer operativen Fragestellung: Was passiert, wenn man Zähler und Nenner getrennt addiert? Antwort: man erhält einen *Zwischenbruch*, so dass dem zugrunde liegenden Term auch eine positive eigenständige Bedeutung zukommt.

2) **Selbständiges und forschendes Lernen:** Durch beobachten von „Phänomenen“ und geeignete Fragestellungen (siehe z. B. die 8 Aufgabenstellungen zu Beginn des Abschnittes über Nachbarbrüche; auch noch andere möglich!) erarbeiten Schülerinnen und Schüler das Umfeld des neuen Begriffes („lokales Ordnen“ im Sinne von Freudenthal) – „**Mathematik** mehr als **Prozess**“. Diese für die Mathematik besonders typische Tätigkeit kann hier exemplarisch auf ganz elementarem Niveau geschehen, noch bevor zugehörige algebraische Begründungen im Zentrum stehen. Es geht dabei nicht nur um eine Erklärung der Farey-Phänomene, sondern auch um interessante überschaubare Fragen, die zum Erkunden anregen, um einen verständigen Umgang mit Brüchen mit viel Experimentieren und Rechenübungen: *entdeckendes Üben, übendes Entdecken* (im Sinne von Heinrich Winter).

3) **Substanzielle Lernumgebung:** Das Thema hat genügend Potential für eine ganze Lernumgebung auf verschiedenen Niveaustufen: Dabei müssen die Bemühungen nicht zwangsläufig auf die Farey-Phänomene hinauslaufen, auch viele Aktivitäten „davor“ sind für sich genommen spannende Herausforderungen.

   Klasse 6: mit Brüchen spielen – z. B. die genannten 8 Aufgabenstellungen oder auch andere; Klasse 7 – 8: algebraische Begründungen zu den 8 genannten Aufgabenstellungen und die Erkenntnisse (1) bis (5); Klasse 9: „Vollständigkeit“ von M_n, d. h. die Erkenntnis (6); Menge aller möglichen Nachbarbrüche zu einem vorgegebenen Bruch (siehe Anhang).

4) **Historische Bezüge:** Sie machen ein Thema i. A. interessant, spannend und lebendig. Die Geschichte der erstmalige(n) Entdeckung(en) der beschriebenen Phänomene kann durchaus Interesse wecken und Lust auf mehr machen („unbedingtes Verstehen-wollen!“).

Literatur

[1] Bruckheimer, M. u. A. Arcavi (1995): Farey Series and Pick’s Area Theorem. In: The Mathematical Intelligencer **17**, 4, 64 – 67.
[2] Farey, J. (1816): On a curious property of vulgar fractions. In: *Philosophical Magazine* **47** (1816), 385 – 386.
[3] Freudenthal, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. Klett, Stuttgart.
[4] Hischer, H. (2004): Mittelwertfolgen – oder: Mitten inmitten von Mitten. In: Der Mathematikunterricht **50**, 5, 42 – 54.
[5] Müller, G.N.; H. Steinbring; E. Ch. Wittmann (Hrsg., 2004): Arithmetik als Prozess. Kallmeyer, Seelze.
[6] Scheid, H. (2003³): Zahlentheorie. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim.
[7] Pickert, G. (2004): Entdecken und Beweisen bei Farey-Folgen. In: Praxis der Mathematik 46, 4, 161 – 164.
[8] Vogelsberger, K. (1993): „Drachelo-“ und „Trapelo-gramme“. Die abbildungsgeometrische Erschließung der Struktur im „Haus der Vierecke“. In: Mathematiklehren 60, (Oktober 1993) S. 68 – 74.

Hans **HUMENBERGER**
Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Nordbergstraße 15 (UZA 4), A – 1090 Wien.
Mail: Hans.Humenberger@univie.ac.at

Anhang: Wie bekommt man eigentlich die Menge aller NB zu einem vorgegebenen gekürzten Bruch $\frac{m}{n}$?

Diese Frage kann gut Querverbindungen zu „Lineare Funktionen“ und „Gitterpunkte auf Geraden“ herstellen (wenn man möchte auch zu „diophantische“ lineare Gleichungen in 2 Variablen, Lemma von Euklid, elementare Zahlentheorie, Restklassen etc.).

Wir beschränken uns zunächst auf die ***oberen*** **NB** und fragen: Welche Brüche $\frac{c}{d}$ kommen als obere NB von $\frac{m}{n}$ in Frage: $nc - md = 1$?

D. h. *c* und *d* sind die positiven ganzzahligen Lösungen der linearen Gleichung $nx - my = 1$.

Z. B. $\frac{m}{n} = \frac{5}{13}$: $13x - 5y = 1$ bzw. $y = \frac{13}{5}x - \frac{1}{5}$; d. h. wir suchen die **Gitterpunkte** der zugehörigen Gerade[4]. Es handelt sich um eine Gerade mit Steigung $\frac{13}{5}$, so dass allein aus der Praxis des Zeichnens solcher Geraden (verständige Handhabung des Steigungsbegriffs!) klar ist: Mit „5 nach rechts und 13 nach oben“ bekommt man allgemein ausgehend von einem Geradenpunkt einen weiteren; wenn der Ausgangspunkt ein Gitterpunkt war, so ist es auch der zweite Punkt. Dazwischen kann es wegen der Teilerfremdheit von 13 und 5 (d. h. man kann den Bruch $\frac{13}{5}$ nicht kürzen!) keine weiteren Gitterpunkte geben: Man hat damit sofort die Einsicht: Wenn es überhaupt einen Gitterpunkt auf dieser Gerade gibt, dann gibt es gleich unendlich viele und je 2 benachbarte haben Horizontalabstand 5 und Vertikalabstand 13. Den ersten Gitterpunkt findet man am einfachsten durch Probieren kleiner *x*-Werte: 1, 2, 3, 4 und mit $(x_0 \mid y_0) = (2 \mid 5)$ die erste Lösung[5]. Insgesamt ergeben sich die *positiven* Gitterpunkte[6] (die *x*-Werte ändern sich jeweils um 5 und die *y*-Werte jeweils um 13):

x	2	7	12	17	22	. . .
y	5	18	31	44	57	. . .

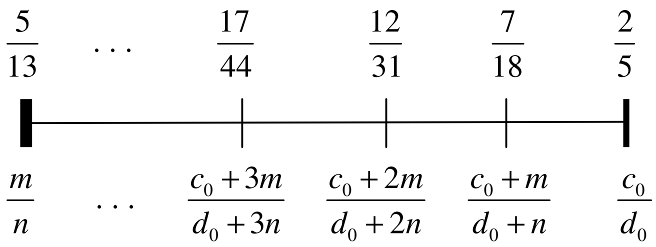
Die gesuchten oberen NB zu $\frac{m}{n} = \frac{5}{13}$ haben also die Gestalt: $\frac{c}{d} = \frac{c_0 + k \cdot 5}{d_0 + k \cdot 13} = \frac{2 + k \cdot 5}{5 + k \cdot 13}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Wegen $\frac{5}{13} < \frac{c_0}{d_0}$ gilt natürlich $\frac{c_0 + 5}{d_0 + 13} < \frac{c_0}{d_0}$ (Mediante!), so dass mit wachsendem *k*

[4] Wir wählen hier bewusst eine Vorgangsweise, die sich eng an dem geometrisch-grafischen Kontext orientiert (weniger an der Theorie „linearer diophantischer Gleichungen in 2 Variablen“), weil dieser uns *anschaulicher* erscheint.

[5] *Dass* es bei gekürztem *m*/*n* immer so einen Gitterpunkt $(0 \le x_0 < m \mid 0 \le y_0 < n)$ gibt, wird hier nicht näher begründet. Die Begründung würde zu weit weg vom eigentlich interessierenden Phänomen führen und ist besser in einer Vorlesung über *Elementare Zahlentheorie* an der Universität zu führen.

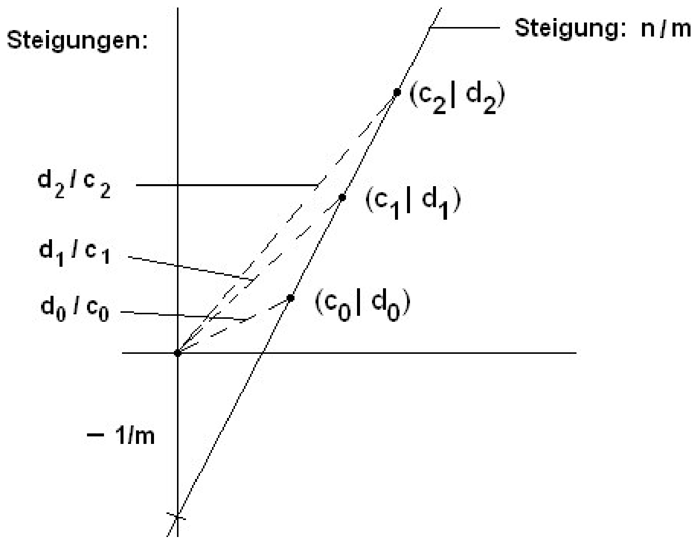
[6] In den 70er-Jahren wurde das Lösen von linearen Gleichungen in 2 Variablen im Zuge der „Neuen Mathematik“ sehr *formal* betrieben in den Schulbüchern: Grundmenge, Lösungsmenge, homogene-inhomogene lineare Gleichungen, diophantische Gleichungen etc.

die Brüche $\frac{c_k}{d_k} := \frac{c_0 + k \cdot 5}{d_0 + k \cdot 13}$ ausgehend von $\frac{c_0}{d_0}$ immer kleiner werden und von oben immer näher an $\frac{5}{13}$ heranrücken. Damit ist auch klar, dass $\frac{c_0}{d_0}$ der **größte obere NB** ist (realisiert durch die *kleinsten* positiven Werte von Zähler und Nenner):



Mit „Medianten“ ausgedrückt bedeutet dies: Alle oberen NB zum gekürzten Bruch m/n gehen durch sukzessive Mediantenbildung aus dem größten oberen NB c_0/d_0 hervor (bei jedem Schritt im Zähler ein m und im Nenner ein n mehr; genau das bedeutet es ja die Mediante zu m/n zu bilden), andere obere NB kann es nicht geben.

Die Tatsache, dass die Werte $\frac{c_k}{d_k} := \frac{c_0 + k \cdot m}{d_0 + k \cdot n}$ mit wachsendem *k* immer kleiner werden und sich schließlich dem Wert $\frac{m}{n}$ beliebig genau von oben annähern, lässt sich auch geometrisch noch schön veranschaulichen und verstehen, nicht nur algebraisch oder mit der Erklärung durch „Mediante“. Wir wissen ja, dass die Punkte $(c_k \mid d_k)$ die äquidistanten Gitterpunkte im 1. Quadranten der Gerade $y = \frac{n}{m}x - \frac{1}{m}$ sind, eine Gerade mit *negativem* „Abschnitt auf der *y*-Achse“, nämlich $-\frac{1}{m}$. Es ist dabei anschaulich völlig klar, dass dabei die zu den Gitterpunkten gehörigen *Steigungen* $\frac{d_k}{c_k}$ mit wachsendem *k* wachsen und daher die Kehrwerte $\frac{c_k}{d_k}$ (obere NB!) fallen und dabei dem Kehrwert $\frac{m}{n}$ der Geradensteigung $\frac{n}{m}$ beliebig nahe kommen.

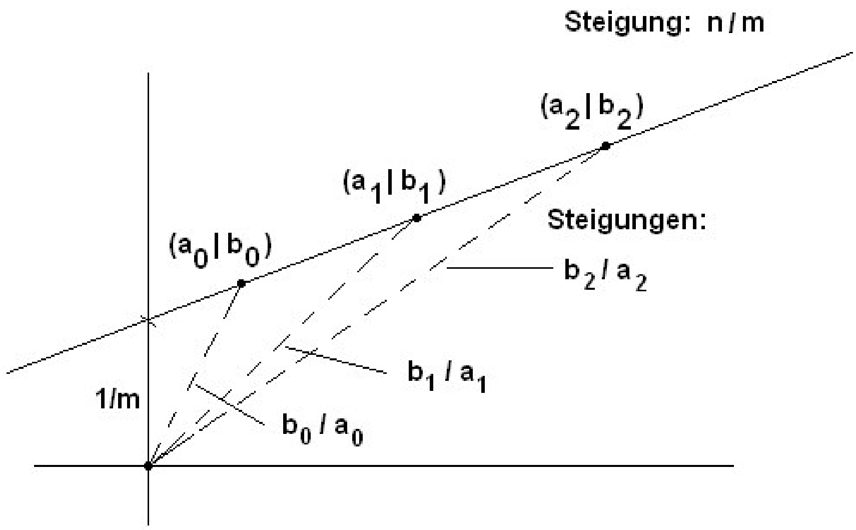


Bei den *unteren* Nachbarbrüchen $\frac{a}{b}$ ganz analog: a und b sind die positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung $nx - my = -1$, d. h. die positiven Gitterpunkte auf der Gerade mit der Funktionsgleichung $y = \frac{n}{m}x + \frac{1}{m}$, d. h. $a_k = a_0 + m \cdot k$ und $b_k = b_0 + n \cdot k$, wobei $(a_0 \mid b_0)$ die Lösung mit den *kleinsten positiven* Werten ist, die wieder am einfachsten durch Probieren zu finden ist ($\frac{a_0}{b_0}$ ist der *kleinste* untere NB zu $\frac{m}{n}$). Damit haben wir: $\frac{a_k}{b_k} = \frac{a_0 + k \cdot m}{b_0 + k \cdot n}$ mit $k \in \mathbb{N}$:

$\frac{3}{8}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{13}{34}$	$\frac{18}{47}$	. . .	$\frac{5}{13}$	. . .	$\frac{17}{44}$	$\frac{12}{31}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{a_0}{b_0}$	$\frac{a_0+m}{b_0+n}$	$\frac{a_0+2m}{b_0+2n}$	$\frac{a_0+3m}{b_0+3n}$	. . .	$\frac{m}{n}$	. . .	$\frac{c_0+3m}{d_0+3n}$	$\frac{c_0+2m}{d_0+2n}$	$\frac{c_0+m}{d_0+n}$	$\frac{c_0}{d_0}$

In Summe können wir also festhalten: Die Menge *aller* NB zu einem gegebenem Bruch $\frac{m}{n}$ besteht jeweils aus dem kleinsten und dem größten NB und den der Reihe nach jeweils mit $\frac{m}{n}$ gebildeten Medianten (im Zähler kommt von außen nach innen jeweils ein m und im Nenner ein n dazu).

Analog dazu wieder die **Darstellung mit den Gitterpunkten:**
Dass die Werte $\frac{a_k}{b_k} := \frac{a_0 + k \cdot m}{b_0 + k \cdot n}$ mit wachsendem k immer größer werden und sich schließlich dem Wert $\frac{m}{n}$ von unten beliebig annähern, lässt sich auch wieder geometrisch veranschaulichen: Die Punkte $(a_k \mid b_k)$ sind die äquidistanten Gitterpunkte im 1. Quadranten der Gerade $y = \frac{n}{m}x + \frac{1}{m}$, eine Gerade mit *positivem* „Abschnitt auf der y-Achse", nämlich $\frac{1}{m}$. Es ist dabei anschaulich völlig klar, dass dabei die zu den Gitterpunkten gehörigen *Steigungen* $\frac{b_k}{a_k}$ mit wachsendem k fallen und daher die Kehrwerte $\frac{a_k}{b_k}$ (untere NB!) wachsen und dabei dem Kehrwert $\frac{m}{n}$ der Geradensteigung $\frac{n}{m}$ von unten beliebig nahe kommen.



Bemerkungen:

- $\frac{a_0}{b_0}$ ergibt sich übrigens auch unmittelbar aus $\frac{c_0}{d_0}$ durch „Ergänzung“ im Zähler und Nenner auf $\frac{m}{n}$, d. h. $a_0 = m - c_0$ und $b_0 = n - d_0$ (warum?).
  [$\frac{m-c_0}{n-d_0}$ ist unterer NB zu $\frac{m}{n}$ und wir wissen: die Menge der unterer NB von einem bestimmten NB abwärts entsteht durch sukzessives Subtrahieren von *m* im Zähler bzw. *n* im Nenner; würde man aber von $\frac{m-c_0}{n-d_0}$ in Zähler noch ein *m* und Nenner noch ein *n* abziehen – um den Bruch kleiner zu machen – käme man bereits in den negativen Bereich! Es kann also keinen kleineren unteren NB geben!]

  $\frac{a_0}{b_0}$ und $\frac{c_0}{d_0}$ sind die einzige Paarung aus einem unteren und einem oberen NB zu $\frac{m}{n}$, die selbst wieder NB sind; in jedem anderen Fall einer Paarung aus einem oberen und einem unteren NB zu $\frac{m}{n}$ erhält man zwei Brüche, deren Mediante zu $\frac{m}{n}$ *gekürzt* werden kann (warum?)!

- $\frac{c_0}{d_0}$ ist nicht nur größter oberer NB zu $\frac{m}{n}$, sondern auch zu $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_0 + m}{d_0 + n}$ (warum genau?).
  [$\frac{c_0}{d_0}$ ist oberer NB zu $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_0 + m}{d_0 + n}$; die Menge aller oberen NB zu $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_0 + m}{d_0 + n}$ ist dann gegeben durch die Brüche $\frac{c_0 + k \cdot (c_0 + m)}{d_0 + k \cdot (d_0 + n)}$ mit positiven Nennern und Zählern und $k \in \mathbb{N}$.
  Der kleinstmögliche Wert für k ist daher $k = 0$: größter oberer NB!]

  Allgemein: $\frac{c_k}{d_k} = \frac{c_0 + k \cdot m}{d_0 + k \cdot n}$ ist größter oberer NB zu $\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}}$! (*)

  D. h. „größter oberer NB“ bzw. „kleinster unterer NB“ zu sein ist keine symmetrische Beziehung: $\frac{2}{5}$ ist größter oberer NB zu $\frac{5}{13}$, $\frac{7}{18}$ und $\frac{3}{8}$, aber der kleinste untere NB zu $\frac{2}{5}$ ist keiner dieser 3 Brüche, sondern $\frac{1}{3}$!