# Unbedingt „Bedingte Wahrscheinlichkeit“? Der Satz von Bayes im Schulunterricht

Petra Hauer-Typpelt

## 1 Einleitung

Der „neue“ Lehrplan für die AHS-Oberstufe (gültig ab 2004) fordert in der sechsten Klasse das *„Kennen des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit“* ein und legt bei mehr als 3 Wochenstunden das *„Arbeiten mit dem Satz von Bayes“* als obligatorisch fest.

Der Themenbereich „Bedingte Wahrscheinlichkeit“ bietet die Möglichkeit sehr lebendigen Mathematikunterricht zu gestalten. Einerseits durch die Möglichkeit anwendungsorientierte Beispiele zu bearbeiten, die Berührungspunkte mit der Lebenswelt der Schüler/innen haben. Andererseits weil zum Begriff Wahrscheinlichkeit meist intuitiv Einschätzungen vorliegen, die auch dann, wenn man sich als Lehrperson bewusst der „reinen“ Stochastik zuwendet, Schüler/innen zu regen Diskussionen anstacheln.
Als Einstieg in die Thematik stelle ich ein lebenspraktisches Beispiel aus dem Bereich der Medizin vor, anhand dessen sich grundlegende Begriffe erarbeiten lassen. Dahinter steht die grundsätzliche didaktische Überlegung für den Schulunterricht, in ein neues Thema mit einem Problem oder einer Aufgabenstellung mit Bezug zur realen Lebenswelt einzusteigen, wann immer dies möglich ist. Der Weg zur Lösung des Problems führt über neue mathematische Begriffe und Methoden, die vorerst immer mit Bezug zum konkreten Problem besprochen werden und im Anschluss eine Verallgemeinerung und Formalisierung erfahren.

## 2 Ein anwendungsorientiertes Beispiel als Grundlage

Im Folgenden wird eine Problemstellung aus der Pränataldiagnostik vorgestellt.
Diagnostische Tests spielen in der Medizin eine tragende Rolle, auf Grund ihrer Ergebnisse werden bedeutende Entscheidungen getroffen. Wohl kaum ein Mensch ist im Laufe seines Lebens vor der Konfrontation mit solchen Testergebnissen gefeit. Ein Grundverständnis von bedingten Wahrscheinlichkeiten hilft dem medizinischen Laien als Patient oder zumindest indirekt Betroffenem mit Ergebnissen dieser Tests umzugehen. Dabei kann das vorgestellte Beispiel stellvertretend für viele ähnliche Testverfahren gesehen werden, etwa zu Früherkennung verschiedener Krebsarten, HIV-Infektion etc. Wobei hier mit „ähnlich“ nicht eine Ähnlichkeit im medizinischen Verfahren, sondern eine Ähnlichkeit der Überlegungen bei der Beurteilung der Bedeutung von Testergebnissen gemeint ist.
Im didaktischen Sinn ist das Beispiel paradigmatisch, die Überlegungen können gut auf den allgemeinen Fall übertragen werden und führen direkt zum Satz von Bayes[1].

*Beispiel:*
**Erkennung des Down-Syndroms bei Ungeborenen mittels „combined test“**
Bei den Vorsorgeuntersuchungen in der Schwangerschaft wird in Österreich der so genannte „combined test“ angeboten. Dabei wird das Ungeborene auf Vorhandensein einer Trisomie[2] untersucht.
Der Test setzt sich aus einzelnen Teiluntersuchungen – Untersuchung des mütterlichen Blutes und Ultraschallscreening – zusammen.

---

[1] zu der in der Schule üblichen Version, siehe Abschnitt 3;
[2] Konkret geht es dabei um Trisomie 21, d.h. ob das Chromosom 21 dreifach statt zweifach vorhanden ist.

Dieser Test liefert bei Vorliegen einer Trisomie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,92 ein positives Testergebnis. In der medizinischen Fachsprache wird dieser Wert als Sensitivität des Tests bezeichnet.
Liegt keine Trisomie vor, liefert der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 ein negatives Ergebnis (Spezifität des Tests).
In Österreich tritt das Down-Syndrom bei 1 von 800 Ungeborenen auf (Prävalenz).

Welche Bedeutung haben nun bestimmte Testergebnisse? Betrachten wir den schlimmeren der beiden möglichen Fälle:

**Der Test ist positiv!**

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ungeborene tatsächlich Trisomie hat ?

| | | |
|---|---|---|
| □ 90% | □ 60% | □ 10% |
| □ 8% | □ 1% | □ 0,5% |

■

An dieser Stelle die Schüler/innen ihre Ersteinschätzung treffen zu lassen ist in verschiedener Hinsicht nützlich. Erstens macht diese Aufforderung eine intensive Auseinandersetzung mit der Problemstellung notwendig. Zweitens sind aus den Antworten, insbesondere deren Begründungen, viele Vorstellungen und Ideen heraus zu hören. Das Wissen, wie Schüler/innen an die Aufgabenstellung herangehen, z.B. welche Werte werden für ihre Einschätzung besonders berücksichtigt, welche vielleicht sogar vernachlässigt, ist essentiell für die Gewichtung nachfolgender Erklärungen.
Und nicht zuletzt will der Mensch im Allgemeinen wissen, ob die eigene Einschätzung richtig war, was hier im Besonderen helfen soll, die Schüler/innen bei der Stange zu halten.

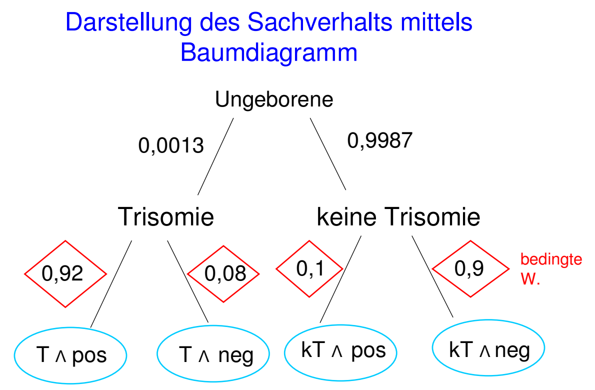
Im Anschluss daran kann es zu einer ersten Begriffsbildung kommen.
Direkt aus der Angabe sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten
$P(pos/T)=0{,}92$ und $P(neg/\neg T)=0{,}9$
zu entnehmen.
Neben der Einführung der formalen Schreibweise muss der Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit" so weit es für die Lösung des Beispiels notwendig ist, transparent gemacht werden. In Anlehnung an das Beispiel ist eine Deutung der bedingten Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile sehr hilfreich: 92% derjenigen, die Trisomie haben, erhalten ein positives Testergebnis.

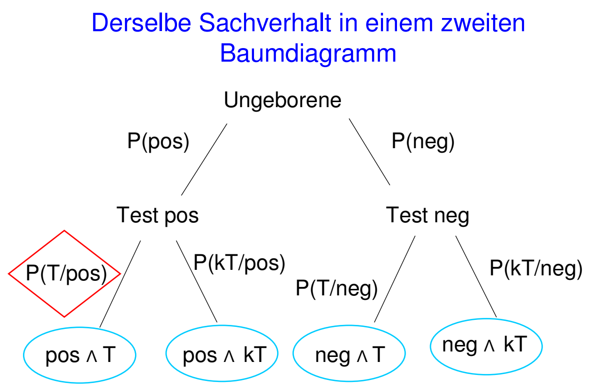
Das zusätzliche Besprechen leicht zu erfassender Angaben wie beispielsweise die Gegenüberstellung der bedingten Wahrscheinlichkeiten
*P(Person ist Mann/ Person ist Vater)* versus *P(Person ist Vater/ Person ist Mann)*
hilft beim Aufbau des Grundverständnisses. Weitere Beispiele dazu und eine Analyse möglicher Probleme werden in Abschnitt 4.2 besprochen.
Nicht anzustreben ist an dieser Stelle, eine Begriffsfestlegung, die für alle denkbaren Fälle zureichend ist.
Götz u. Reichel schreiben in ihrem Buch für die 6.Klasse folgendermaßen:
*„... bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A unter der Bedingung (Voraussetzung, Annahme, Hypothese), dass B eintritt (eingetreten ist), als bedingte Wahrscheinlichkeit P(A/B).“* (Götz u. Reichel, 2005, S. 186)
Diese (völlig zu Recht) ausführliche Begriffsbeschreibung würde Schüler/innen meines Erachtens am Beginn des Lernprozesses überfordern. Erst durch die Behandlung verschiedener, möglichst interessanter Beispiele, aus denen sich weitere Aspekte ergeben, kann ein umfassenderes Verständnis des Begriffs der bedingten Wahrscheinlichkeit entwickelt werden.

Nun zurück zum Beispiel:

Neben *P(pos/T)=0,92* und *P(neg/¬T)=0,9* liefert die Angabe *P(T)=0,0013*, gefragt ist die bedingte Wahrscheinlichkeit *P(T/pos)*.

Zur Veranschaulichung des Sachverhalts eignet sich das dynamische Werkzeug des Baumdiagramms, das als bekannt vorausgesetzt werden darf:



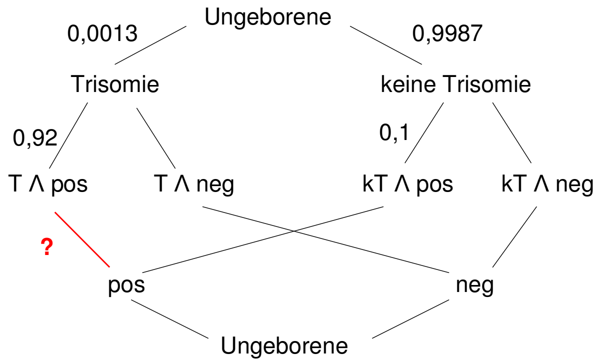




Mit der Berechnung von konjunktiven Wahrscheinlichkeiten – die zugehörigen Ereignisse stehen eingekreist am Ende der Baumdiagramme – mittels Pfadregeln sind Schüler/innen dieser Ausbildungsstufe vertraut. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten stehen entlang der Pfade, können daher durch einfache Division ermittelt werden:

$$P(T\,/\,pos) = \frac{P(pos \wedge T)}{P(pos)}$$

Durch Zusammenfügen der beiden Baumdiagramme kann der Zusammenhang zwischen gegebenen (bedingten) Wahrscheinlichkeiten und der gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeit noch deutlicher herausgestrichen werden:

Zusammenfügen der beiden Baumdiagramme

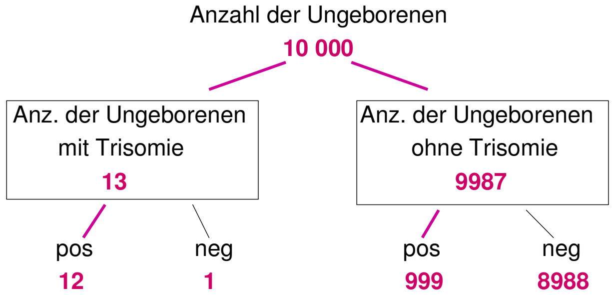



Die Berechnung für *P(T/pos)* ergibt sich daraus durch Ablesen

$$P(T\,/\,pos)=\frac{P(pos\wedge T)}{P(pos)}=\frac{0{,}0013\cdot 0{,}92}{0{,}0013\cdot 0{,}92+0{,}9987\cdot 0{,}1}\approx 0{,}012$$

Dieses Ergebnis stimmt erfahrungsgemäß häufig nicht mit der Ersteinschätzung von Schüler/innen überein. In der Praxis stoßen Ärzte mit der Information „Das Testergebnis ist positiv, die Wahrscheinlichkeit für die Krankheit liegt trotzdem nur bei 1,2%“, bei Patient/innen in der Regel auf Unverständnis.
Im Unterricht muss es daher als zentrales Anliegen gelten, den Brückenschlag zwischen formalem Ergebnis und intuitiver Einschätzung zu bewerkstelligen.
Die klassische Frage „Wozu führt man einen solchen Test durch, wenn er doch den überwiegenden Teil der Patientinnen mit positivem Ergebnis unberechtigt beunruhigt?“ sollte ausführlich diskutiert werden. Als Hilfestellung dazu eignet sich eine Darstellung der Sachlage in absoluten Häufigkeiten:

Verwendung von absoluten Häufigkeiten




Antworten auf die obige Frage lassen sich direkt ablesen:

- Von 10 000 getesteten Ungeborenen tritt nur in einem Fall der „worst case“ auf: Bei vorliegender Trisomie ist das das Ergebnis negativ.
- Von 9987 Untersuchten (ohne Trisomie) werden 8988 zu Recht beruhigt und sehen so von anderen, gefährlicheren Untersuchungen ab, die sie ohne Test vielleicht sicherheitshalber durchführen hätten lassen.[3]

[3] Im konkreten Fall wäre das eine Fruchtwasseruntersuchung, die das Risiko einer Fehlgeburt birgt (in einem von 100 Fällen).

- Von 1011 Ungeborenen mit positivem Testergebnis haben nur 12 tatsächlich Trisomie. Hier findet sich klarerweise das Ergebnis 0,012 ($\approx \frac{12}{1011}$) wieder, dessen kleiner Wert in der Prävalenz der Krankheit begründet ist. Von 10 000 Ungeborenen haben eben nur 13 Trisomie.

Insofern ist eine Durchrechnung des Beispiels mit erhöhter Prävalenz dem Verständnis dienlich und hat im vorliegenden Beispiel auch Realitätsbezug, da das Risiko für Trisomie beim Ungeborenen mit dem Alter der Mutter steigt.

*Bemerkung:* Das Risiko für Trisomie 21 beim Ungeborenen liegt z.B. für eine 25-jährige Schwangere bei 1:1000, hingegen bei einer 35-jährigen Mutter bei 1:250. Diese Werte gehen natürlich in die jeweilige Berechnungen mit ein, daher ist ein positives Testergebnis für jede Schwangere anders zu beurteilen.

Erst, wenn das Beispiel auch hinsichtlich solcher und ähnlicher Überlegungen, die sich aus der konkreten Unterrichtssituation ergeben, abgeschlossen ist, kann eine Verallgemeinerung zum Satz von Bayes erfolgen.

# 3 Formalisierung – Der Satz von Bayes

Der Satz von Bayes fasst obige Überlegungen zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten formal zusammen und wird im Schulgebrauch meist für *zwei* Ereignisse $A$ und $B$ formuliert:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B/A)\cdot P(A) + P(B/\neg A)\cdot P(\neg A)}, \qquad P(B)\neq 0$$

Der Satz von Bayes ist nach Thomas Bayes (1702 – 1761) benannt, der als presbyterianischer Pfarrer in der Nähe von London wirkte und sich auch ausführlich mathematischen Fragen widmete. Aus seinem posthum veröffentlichten Werk „Essay towards solving a problem in the doctrine of chances“ lassen sich folgende grundlegenden Ideen zusammenfassen (vgl. Henn, S. 183):

Für das Eintreten eines Ereignisses B bei einem Zufallsexperiment gibt es gewisse Ursachen (Hypothesen) $A_1, A_2, \ldots, A_m$.
Bayes nennt die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ **a-priori-Wahrscheinlichkeiten**.
Neben diesen sind auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B/A_i)$ bekannt, also die Wahrscheinlichkeit, dass $B$ eintritt, wenn $A_i$ bereits eingetreten ist.
Nun wird das Zufallsexperiment durchgeführt und B tritt ein.
Was bedeutet dieses Wissen für die Neueinschätzung der a-priori-Wahrscheinlichkeiten , wie groß ist also $P(A_i/B)$?
Bayes nennt $P(A_i/B)$ die **a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten**. Der Satz von Bayes gibt an, wie sich die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten aus den a-priori-Wahrscheinlichkeiten und den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B/A_i)$ bestimmen lassen.

**Satz von Bayes**

$(\Omega, P)$ sei ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \quad mit \quad A_i \cap A_j = \{\} \quad für\ i \neq j$

Dann gilt für jede Zahl $j$ und jedes Ereignis $B$ mit $P(B) \neq 0$

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B / A_j)}{\sum_{i=1}^{m} P(A_i) \cdot P(B / A_i)}$$

Verbindung zum Beispiel in Abschnitt 2 $(m = 2)$:
Die a-priori-Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ sind mit den Wahrscheinlichkeiten für das Vorliegen einer Trisomie beim Ungeborenen mit $P(T)=0{,}0013$ und daraus folgend $P(\neg T) = 0{,}9987$ gegeben. Nun tritt das Ereignis *B*, ein positives Testergebnis, ein.
Wie hat sich nun die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer Trisomie verändert, wie groß ist die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit *P(T/pos)*?

# 4 Aspekte beim Arbeiten mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

## 4.1 Die Rolle der Intuition

Der durch den Satz von Bayes präzisierte Zusammenhang zwischen bedingten Wahrscheinlichkeiten ist mathematisch bzw. formal gesehen einfach. Deutlich schwieriger hingegen ist das Zusammenfügen des intuitiven Vorverständnisses mit den formalen Ergebnissen und Konzepten.
Intuitionen spielen bei jeder Art von Schulunterricht und damit verbundenen Lernprozessen eine wesentliche Rolle, im Rahmen des Stochastikunterrichtes wohl eine besonders tragende. Wir wollen unter Intuition die unmittelbare Vorstellung bzw. Einschätzung einer Sache verstehen, die sich bei Konfrontation mit dem Sachverhalt einstellt. Tietze et al. unterscheiden zwischen primärer und sekundärer Intuition (Tietze, Klika u. Wolpers, S.139).

- **primäre Intuition:**

Vorstellung, die sich ohne vorangehende (systematische) Auseinandersetzung mit einem Sachverhalt aufgrund von Vorerfahrung entwickelt.

Wie herrlich lässt es sich unterrichten, wenn die primäre Intuition mit den (nachfolgenden) Definitionen und Formalismen zusammenpasst. Dann ist die Forderung vieler Mathematikdidaktiker/innen, dass mathematische Theorien und Anwendungen aus dem intuitiven Vorverständnis entwickelt werden sollen, gut zu erfüllen. Klarerweise kann man mit Schüler/innen der 1.Klasse über Kreise sprechen, längst bevor sie eine Exaktifizierung der Begriffe Kreislinie, Kreisfläche etc. über die entsprechenden Punktmengendefinitionen gehört haben. Die primäre Intuition zum Begriff „Kreis" ist in der Regel geeignet, um den Unterricht darauf aufzubauen.
Bei bedingten Wahrscheinlichkeiten ist dies oft nicht so, freilich muss man sich die Frage stellen: Gibt es zu einem Begriff wie bedingte Wahrscheinlichkeit überhaupt so etwas wie angemessene Primärintuition?
Jedenfalls ist man im Schulunterricht häufig damit konfrontiert, dass untaugliche Primärintuitionen vorliegen, daher muss es darum gehen, angemessene Sekundärintuitionen herauszubilden.

- **sekundäre Intuition:**

Vorstellung, die sich aufgrund vorangegangener (systematischer) Auseinandersetzung mit einem Sachverhalt entwickelt. Bei dieser Auseinandersetzung ist es bereits zur Verbindung (Konfrontation) der primären Intuition mit formalen Konzepten gekommen.

Der Brückenschlag zwischen formalen Konzepten und intuitivem Verständnis soll gelingen – ein hoher, aber zentraler Anspruch an den Unterricht.

## 4.2 Versuch einer Konkretisierung

Um eben genannten Anspruch zu erfüllen und damit ein tragfähiges Grundverständnis von bedingten Wahrscheinlichkeiten aufzubauen, werden im Folgenden mögliche Schwierigkeiten im Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten aufgezeigt. Grundlage dafür war auch die eigene Unterrichtserfahrung, die so manche in der Literatur angeführten Punkte bestätigt (siehe z.B. Tietze, Klika u. Wolpers, S.158 f.).

Bei dieser Zusammenstellung handelt es sich um einen Versuch, da nie alle möglichen Aspekte, die sich in Unterrichtssituationen möglicherweise ergeben, vorausgesehen werden können. Es liegt also keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit vor, außerdem gelingt nicht immer eine konkrete Abgrenzung der Fehler gegeneinander.

### Mögliche Schwierigkeiten:

❖ **P(A/B) und P(B/A) werden verwechselt oder gleichgesetzt.**

Diese Schwierigkeit tritt vor allem (hoffentlich nur!) am Beginn der Arbeit mit bedingten Wahrscheinlichkeiten auf. Daher empfiehlt es sich, gleich bei der ersten Begriffsfestlegung leicht zu erfassende Beispiele, wo die beiden Wahrscheinlichkeiten von jedem/jeder als unterschiedlich erkannt werden, zu besprechen.

*Beispiele:*
*P(Person ist Mann/ Person ist Vater)* versus *P(Person ist Vater/ Person ist Mann)*

*P(Person kann Schifahren/ Person ist Schülerin der 6.B)* versus
*P(Person ist Schülerin der 6.B/ Person kann Schifahren)*

*P(Person verursacht als Lenker einen Autounfall/ Person besitzt Führerschein)* versus
*P(Person besitzt Führerschein/ Person verursacht als Lenker einen Autounfall)*

□

Selbst, wenn das grundsätzliche Verständnis aufgebaut ist, kann es durch unklare Formulierungen oder Formulierungen, die unterschiedliche Deutungen zulassen, zu Problemen kommen.
Der Satz „Die idealistische Lehrerin denkt an sich selbst zuletzt." lässt scheinbar nur *eine* mögliche Deutung zu. Jedoch, etwas anders betont „Die idealistische Lehrerin denkt an sich, *selbst* zuletzt,“ ändert sich der Sinn gewaltig.
Ebenso lassen bei manchen Aufgabenstellungen die Formulierungen verschiedene Deutungen zu.

*Beispiel:*
Es gibt zwei Gefäße. Im ersten Gefäß liegen 7 blaue und 2 gelbe Kugel, im zweiten Gefäß liegen 3 blaue und 5 gelbe Kugeln. Zuerst wird zufällig das Gefäß gewählt, dann eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gelbe Kugel aus dem ersten Gefäß stammt?

□

Hier kann neben der Deutung:
Gelbe Kugel ist bekannt, mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus dem ersten Gefäß?
Gesucht ist also die bedingte Wahrscheinlichkeit P(Kugel stammt aus dem 1.Gefäß/ Kugel ist gelb).
auf Grund der Formulierung auch die folgende Deutung bestehen:
Erstes Gefäß ist bekannt, mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine gelbe Kugel daraus?
Gesucht ist also die bedingte Wahrscheinlichkeit P(Kugel ist gelb/ Kugel stammt aus dem 1.Gefäß).

Ist die erste Deutung gewünscht, sollte man besser formulieren:
„Zuerst wird zufällig das Gefäß gewählt, dann eine Kugel gezogen. Sie ist gelb. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus dem ersten Gefäß?"

Solche und ähnliche Beispiele bieten einen günstigen Anlass im Unterricht, um auf die Schwierigkeit eindeutiger Formulierungen einzugehen und Schüler/innen, eventuell auch durch Übungen zum selbständigen Formulieren, diesbezüglich zu sensibilisieren.

❖ **Wahrscheinlichkeiten werden fälschlicherweise zu 1 ergänzt.**

Zu Beispielen, ähnlich jenem in Abschnitt 1, bekommt man im Unterricht häufig Aussagen – manchmal mit dem Unterton einer Frage versehen – wie die folgende zu hören:
„Wenn ich nicht krank bin, bekomme ich mit 10%-iger Wahrscheinlichkeit einen positiven Test. Das heißt doch, dass ich bei einem positiven Test zu 90% krank bin." (Originalzitat einer Schülerin, 6.Klasse)
Welcher Gedankengang steckt dahinter? Die Addition
$P(pos/\neg K) + P(K/pos) = 1$ (K für krank),
ist vermutlich Grundlage der Aussage. Unter Umständen steckt aber auch eine Verwechslung von $P(K/pos)$ mit $P(pos/K)$ dahinter. Eine Fehleranalyse gemeinsam mit der betroffenen Schülerin oder dem betroffenen Schüler ist Voraussetzung für die Klärung.

Als bekanntes Beispiel, wo mit bedingten Wahrscheinlichkeiten in dieser Form falsch umgegangen wurde, ist folgendes aus dem juristischen Bereich in die Literatur der Mathematik-Didaktik eingegangen (siehe z.B. Henn und Büchter S.190 oder Götz und Reichel S.194 f.).

*Beispiel:*
In einem Mordprozess in Deutschland des Jahres 1973, zu einer Zeit als DNA-Analyse noch nicht verfügbar war, errechneten Gutachter eine Wahrscheinlichkeit größer als 99% für die Täterschaft des Angeklagten.
Eine der Überlegungen dabei wurde folgendermaßen geführt:
*K* bezeichnet das Ereignis, dass der vermeintliche Täter Kontakt mit dem Opfer hatte, was dieser bestritt.
An der Kleidung des Angeklagten wurden Blutspuren der Blutgruppe des Opfers gefunden (Ereignis *A*). Aus der Blutgruppenverteilung in der Bevölkerung – 15,69% der Bevölkerung besitzen diese Blutgruppe – ergibt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A/\neg K)=0,1569$.
Unter den Fingernägeln des Opfers wurden Blutspuren der Blutgruppe des vermeintlichen Täters gefunden (Ereignis *B*). Mit der Verteilung für diese Blutgruppe ergibt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B/\neg K)=0,1727$.
Die Ereignisse *A* und *B* dürfen als unabhängig angenommen werden, damit ergibt sich für das Zusammentreffen der beiden Ereignisse
$P(A \wedge B / \neg K) = P(A / \neg K) \cdot P(B / \neg K) = 0{,}027$
Die Wahrscheinlichkeit für den Untersuchungsbefund unter der Voraussetzung, dass kein Kontakt zwischen Angeklagtem und Opfer statt gefunden hat, beträgt also 2,7%, woraus die Gutachter eine Wahrscheinlichkeit von 97,3% schlossen, dass es doch einen Kontakt zwischen Opfer und Angeklagtem gab. Auch hier wurde offensichtlich die falsche Beziehung

$P(A \wedge B / \neg K) + P(K / A \wedge B) = 1$ als Argumentationsbasis verwendet.
Im Verkauf des Verfahrens stellte sich übrigens heraus, dass der Angeklagte zum Zeitpunkt der Tat ca. 100km vom Tatort entfernt war.

□

❖ **Bedingte Wahrscheinlichkeit wird mit konjunktiver Wahrscheinlichkeit verwechselt:**
$P(A \wedge B) = P(A / B)$

Ein Fehler, dem man mit der Verwendung von Baumdiagrammen gut begegnen kann.

❖ **Ein kausaler Zusammenhang zwischen den Ereignissen A und B wird angenommen.**

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sagen aber natürlich nichts über Kausalität aus. Die nüchterne Deutung als relative Anteile kann hier Abhilfe schaffen. Auch die Darstellung von bedingten Wahrscheinlichkeiten als anteilige Fläche (siehe Borovcnik, S.189) findet hier eine Einsatzmöglichkeit, allerdings nur wenn Vertrautheit mit grafischen Darstellungen dieser Art vorausgesetzt werden darf.

❖ **Die Zeitgebundenheit des Denkens führt zu Fehlschlüssen.**

*Beispiel (Tietze, Klika u. Wolpers, S.9):*
Aus einem Behälter mit 2 schwarzen und 2 weißen Kugeln werden nacheinander, ohne Zurücklegen, zwei Kugeln gezogen.
(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel weiß ist, falls die erste Kugel weiß ist?
(2) Die erste Kugel wird vorläufig versteckt. Die zweite Kugel ist weiß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die erste Kugel weiß ist?

□

(1) Die richtige Antwort wird von Schüler/innen in der Regel über folgende Argumentation sehr leicht gefunden: Nach dem ersten Ziehen sind noch drei Kugeln vorhanden, nur eine davon ist weiß, damit ergibt sich mit Laplace $\frac{1}{3}$.
(2) Die Zeitgebundenheit des Denkens führt hier oft zu der falschen Lösung $\frac{1}{2}$, mit der Argumentation, dass das Ergebnis des zweiten Ziehens keinerlei Einfluss auf das erste Ziehen hätte. Die Frage, ob man im Falle der praktischen Durchführung des Experiments, das Ergebnis des zweiten Ziehens also gar nicht wissen möchte, um die Farbe der ersten Kugel einzuschätzen, unterstützt die Loslösung von der gedanklichen Bindung an den zeitlichen Ablauf, die hier störend ist. Dadurch wird die Symmetrieüberlegung besser erfassbar: Man weiß nur, dass die zweite Kugel weiß ist, von den restlichen drei Kugeln ist nur eine weiß, daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel auch weiß war $\frac{1}{3}$.

Die Berechnung mittels Satz von Bayes liefert natürlich dasselbe Ergebnis.
Es ist die bedingte Wahrscheinlichkeit P(1.Kugel ist weiß / 2.Kugel ist weiß) zu ermitteln:

$$P(1.w / 2.w) = \frac{P(2.w / 1.w) \cdot P(1.w)}{P(2.w)} == \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

# 5 Töchter – Paradoxon[4]

Steht das mathematische Rüstzeug zur Verfügung, hat die Auseinandersetzung mit Paradoxa ihren besonderen Reiz. Passend zum Satz von Bayes ist die folgende Problemstellung:

Sie treffen einen Kollegen, von dem Sie wissen, dass er zwei Kinder hat. Er hat ein Kind dabei, das ist ein Mädchen.

(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das zweite Kind auch ein Mädchen?[5]
(2) Sie erinnern sich, dass das ältere Kind des Kollegen sicher ein Mädchen ist. Sie wissen aber nicht, ob das Mädchen, das er dabei hat, das ältere Kind ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das zweite Kind auch ein Mädchen?

□

(1) Die Frage reduziert sich auf die Frage nach dem Geschlecht eines bestimmten Kindes – jenes, das man nicht sieht. Die gefragte Wahrscheinlichkeit ist damit klarerweise $\frac{1}{2}$.
Zugehörige Überlegungen mittels bedingten Wahrscheinlichkeiten liefern natürlich dasselbe Ergebnis und werden hier geführt, um die Analogie zu den Überlegungen in Frage 2 aufzuzeigen:
Da der Kollege 2 Kinder hat, sind die a-priori-Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Kombinationen $P(MM) = P(MK) = P(KM) = P(KK) = \frac{1}{4}$. Gefragt ist nach der bedingten Wahrscheinlichkeit P(MM/M)= P(beide Kinder sind Mädchen / sehe ein Mädchen):

$$P(MM/M) = \frac{P(M/MM)\cdot P(MM)}{P(M)} = \frac{1\cdot\frac{1}{4}}{1\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

(2) Es stellt sich die prinzipielle Frage, ob das zusätzliche Wissen, dass das *ältere* Kind ein Mädchen ist, gegenüber (1) etwas an der Wahrscheinlichkeit ändert?
Nicht schwer vorzustellen, dass diese Frage die Geister scheidet und impulsive „Ja" und „Nein" – Rufe durch die Klasse schießen.
Mittels Satz von Bayes ergibt sich in diesem Fall a-apriori $P(MM) = P(MK) = \frac{1}{2}$ und für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(MM/M) = \frac{P(M/MM)\cdot P(MM)}{P(M)} = \frac{1\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

□

---

[4] Aufgabenstellungen dieser Art finden sich an vielen Literaturstellen, z.B. Büchter und Henn, S.302 oder Barth und Haller, S.101 bzw. 139 oder Kütting, S.151, teilweise ist von Knaben anstelle von Mädchen die Rede, was an der grundsätzlichen Aufgabenstellung natürlich nichts ändert.

[5] Mädchen- und Knabengeburt werden als gleich wahrscheinlich mit jeweils $\frac{1}{2}$ angenommen. (Laut Statistik ist die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Knaben mit 0,52 etwas größer.)

Das Wissen, dass das ältere der beiden Kinder ein Mädchen ist, hebt also die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{2}{3}$.

Hier lassen sich noch weitere interessante Fragestellungen anknüpfen. Z.B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind, wenn man nur weiß, dass mindestens eines der beiden Kinder ein Mädchen ist?

In vielen Literaturstellen wird die Frage mit $\frac{1}{3}$ beantwortet, über die Argumentation, dass nur die Kombination KK aus den vier möglichen auszuschließen ist. (siehe z.B. Büchter und Henn, S. 302). Erfährt man, dass es mindestens ein Mädchen gibt, durch das Sehen eines Mädchens, ergibt sich aber für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ (vgl. Frage (1) ).

# 6 Abschließende Bemerkungen

„Bedingte Wahrscheinlichkeit" ist ein Stoffgebiet, das nach meiner Unterrichtserfahrung von Schüler/innen als interessant eingestuft wird, nämlich insbesondere auch von jenen, die diese Bewertung sonst nur selten für mathematische Themengebiete gelten lassen. Das liegt meines Erachtens an den lebensnahen Beispielen, die nicht künstlich konstruiert werden müssen oder besonderes Vorwissen erfordern, und an dem intuitiven Wissen, das zum Begriff „Wahrscheinlichkeit" in der Regel existiert und an vielen Stellen des Unterrichts Diskussion im besten Sinn provoziert. Wie oft erlebt man schon im Mathematikunterricht aufgebracht miteinander diskutierende Schüler/innen, die unbedingt mit ihren mathematischen(!) Argumenten überzeugen möchten und daher bemüht sind, diese schlagend zu formulieren? Da lassen sich auch Schüler/innen mitreißen, die sich sonst im Mathematikunterricht wenig beteiligen. Interessanterweise werden dabei von der inhaltlichen Fragestellung her uninteressante Beispiele – das Ergebnis, mit welcher Wahrscheinlichkeit beispielsweise eine Kugel nun gelb oder blau ist, hat je keinerlei Relevanz – bestens akzeptiert und können recht heftige Diskussionen hervorrufen, aus denen echtes Begriffsverständnis resultiert. Konkret habe ich dies am Kugelbeispiel (Frage 2) aus Abschnitt 4.2 erlebt.
Vermutlich spielt auch eine Rolle, dass das notwendige handwerkliche mathematische Rüstzeug auf einfaches Bruchrechnen beschränkt ist. Damit fällt eine wesentliche Hürde, die so manchem/r Schüler/in den Zugang zu anderen interessanten Stoffgebieten der Sekundarstufe II, die eben mehr mathematische Vorkenntnisse erfordern, erschwert.

Ein Grundverständnis von bedingten Wahrscheinlichkeiten ist im Privatleben oft nützlich, um nicht Trugschlüssen zum Opfer zu fallen, und in einer Reihe von Berufen vonnöten. Neben dem medizinischen und juristischen Bereich gilt das auch für den wirtschaftlichen Bereich. Tietze et al. stellen dazu ein Beispiel aus dem Bankenwesen vor, in dem es um die Bewertung der Kreditwürdigkeit von Kunden geht (Tietze, Klika u. Wolpers, S.157).

In diesem Sinne empfiehlt sich der Themenbereich „Bedingte Wahrscheinlichkeit" für jeden Mathematikunterricht, unabhängig von Vorgaben des Lehrplans, die in den ersten Zeilen dieses Artikels beschrieben sind.

## Literatur:

BARTH F. und R. HALLER (1998): Stochastik Leistungskurs. München: Oldenburg Verlag. 432 S.

BOROVCNIK M. (1992): Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 10. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag 453 S.

BÜCHTER A. und H.-W. HENN (2005): Elementare Stochastik. Berlin/ Heidelberg: Springer Verlag. 452 S.

GÖTZ S. u. H.-C. REICHEL (Hrsg. 2005): Mathematik Lehrbuch 6. Wien: öbv&hpt Verlagsgesellschaft. 264 S.

KÜTTING H. (1999): Elementare Stochastik. Heidelberg/Berlin: Spektrum, Akademischer Verlag. 233 S.

MARTIGNON L. und C. WASSNER (2001): Repräsentation von Information in der Wahrscheinlichkeitstheorie. in: Borovcnik M., Engel J., Wickmann D.: (2001): Anregungen zum Stochastikunterricht. S. 163-169. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker

REICHEL H.-C. (Hrsg., 1992): Wahrscheinlichkeit und Statistik. Mathematik für Schule und Praxis Band 1. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky 304S.

SCHUPP H. (2004): Allgemeinbildender Stochastikunterricht. in: Stochastik in der Schule 24, Heft 3, S.4 – 13

TIETZE U.-P., KLIKA M. u. H. WOLPERS (2002): Didaktik der Stochastik. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 3. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag. 319 S.

Informationsquellen für die Aufgabe „combined test“ in Abschnitt 2:
www.fetalmedicine.com und
Oberarzt Dr. Helmut Musil, Abteilung Frauenheilkunde und Geburtshilfe am LK Weinviertel

### Anschrift der Verfasserin:

Dr. Petra Hauer-Typpelt

Universität Wien
Fakultät für Mathematik
A-1090 Wien, Nordbergstraße 15
und
Landstraßer Gymnasium
A-1030 Wien, Kundmanngasse 20-22

petra.hauer-typpelt@univie.ac.at