

# Medienvielfalt im Mathematikunterricht

Franz Embacher, Thomas Himmelbauer,  
Markus Hohenwarter und Evelyn Stepancik,

Vortrag gehalten auf der *Lehrerfortbildungstagung 2005* der Österreichischen  
Mathematischen Gesellschaft, Universität Wien, 1. 4. 2005

## Medien und Werkzeuge

Dem Mathematikunterricht stehen zahlreiche technologische Werkzeuge (Offline- und Online-Programme, Computeralgebrasysteme, dynamische Geometrie,...), mediale Formen (Lernpfade, CD-ROM- und Internet-basierte Lernumgebungen, ...) und eine große Anzahl unterschiedlich aufbereiteter Lehr- und Lernmaterialien zur Verfügung.

Medien können – geschickt eingesetzt – eine Hilfe sein, um sowohl mathematische Handlungstypen wie Modellieren, Operieren, Interpretieren und Argumentieren auf allen Ebenen zu stärken und zu unterstützen, neue Zugänge zu mathematischen Inhalten zu finden und auch überfachliche Kompetenzen wie Sozialkompetenz, Persönlichkeitskompetenz usw. zu fördern und zu steigern.

## Das Projekt

Ab Ende des Jahres 2004 wird das Thema im Rahmen des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ genauer untersucht. Das Projekt ist eine Kooperation der Initiativen

<b>ACDCA</b>	<a href="http://www.acdca.ac.at/">http://www.acdca.ac.at/</a>
<b>GeoGebra</b>	<a href="http://www.geogebra.at/">http://www.geogebra.at/</a>
<b>mathe online</b>	<a href="http://www.mathe-online.at/">http://www.mathe-online.at/</a>

und wird vom bm:bwk gefördert. Auf der Website

<http://www.austromath.at/medienvielfalt/>

sind Informationen zum Projekt abrufbar.

Im Rahmen des Projekts wird untersucht, wo die Stärken der verschiedenen Werkzeuge, Medien und Materialien liegen, und wie ein optimiertes Zusammenspiel in einem zeitgemäßen Mathematikunterricht aussieht. Aufbauend auf den unterschiedlichen Zugängen und Erfahrungen der beteiligten Initiativen werden Lehr-/Lernhilfen für den Einsatz im Mathematikunterricht entwickelt. Exemplarisch werden für jede Schulstufe Materialien in verschiedenen Medien angeboten und Unterrichtsvorschläge didaktisch reflektiert und aufbereitet. Folgende Themen sind zur Ausarbeitung und Erprobung vorgesehen:

- Geometrische Beweise (Unterstufe)
- Satz von Pythagoras (3. und 4.Klasse)

- Beschreibende Statistik (Unterstufe)
- Funktionen (Schwerpunkt 5.Klasse)
- Vektorrechnung (Schwerpunkt fächerübergreifender Unterricht)
- Ausgewählte Kapitel zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (Oberstufe)
- Einstieg in die Differential- und Integralrechnung (Oberstufe)
- Kryptographie (Oberstufe, Wahlpflichtfach Mathematik, Projektunterricht)

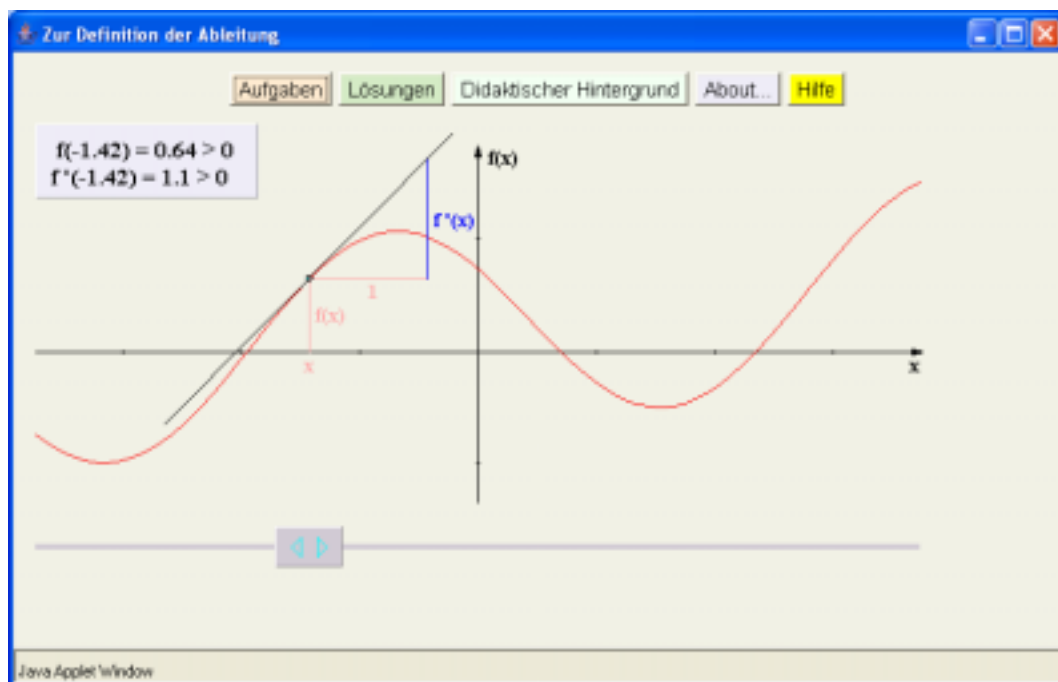
Zur Erprobung der erstellten Lehr-/Lernhilfen im Schuljahr 2005/06 werden interessierte Kolleginnen und Kollegen gesucht. Der zeitliche Umfang eines Testpakets wird 3 bis 6 Unterrichtseinheiten betragen. Genaue Informationen finden sich auf der Website des Projekts.

Es folgen drei Beispiele für mediale und technologische Zugänge zum Thema Differentialrechnung sowie ein Beispiel für die Vernetzung verschiedener Zugänge anhand des Satzes von Pythagoras.

## **mathe online**

Die seit 1997 bestehende Website [www.mathe-online.at](http://www.mathe-online.at) ist bereits vielen Mathematiklehrer/innen bekannt und findet regen Einsatz in den verschiedensten Schulstufen. Wichtige Ressourcen in mathe online werden vom Autorenteam zur Verfügung gestellt. Diese Ressourcen beinhalten Texte, interaktive Lernhilfe und Tests sowie unzählige Werkzeuge zu verschiedenen mathematischen Themenbereichen. Damit stellt mathe online den Benutzer/innen Wissen, aber auch die Möglichkeit zum entdeckenden Lernen bereit. Die folgende Vorgangsweise zeigt einen möglichen Weg zur Einführung der Differentialrechnung mithilfe von mathe online.

Zu Beginn – noch vor der Einführung der Differentialrechnung – kann das Applet zur Definition der Ableitung eingesetzt werden.

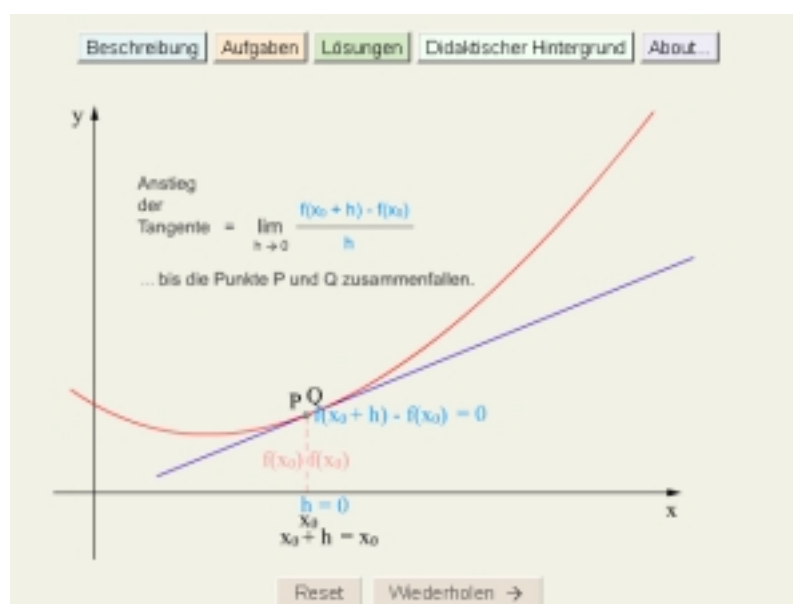


Das Applet inkludiert eine Aufgabenstellung, die von der Lehrkraft übernommen werden oder modifiziert werden kann. Die Aufgabenstellung basiert auf der Betätigung des Schiebereglers und ermöglicht erste Einsichten in Extremstellen, waagrechte Tangenten und Wendepunkte. Die ungeheuer einfache Bedienung verstellt die Schüler/innen nicht die Sicht auf das Wesentliche!

Über das Tangentenproblem gelangt man zur Einführung des Differentialquotienten. Die besondere Schwierigkeit für viele Schüler/innen liegt auch im Zusammenspiel verschiedenster Begriffe (Steigungsdreieck, Grenzwert, ...). Eine entsprechende Flash-Animation vermag den Schüler/innen jenen Vorgang zu visualisieren, den die Lehrenden beim Differentialquotienten verinnerlicht haben.



Beim Drücken des „Start“-Buttons läuft die Animation, die die Näherung zeigt, ab. Dieser Vorgang kann beliebig oft wiederholt werden und ermöglicht so ein besseres Verständnis dieses Begriffs.



In weiterer Folge muss die Lehrkraft den Begriff im Unterricht präzisieren. Das vertiefende Üben von Ableitungen kann nun wieder mithilfe von Ableitungs-Puzzles (<http://www.mathe->

[online.at/galerie/diff1/diff1.html#ablpuzzle1](http://www.mathe-online.at/galerie/diff1/diff1.html#ablpuzzle1)) geschehen. Hier müssen die Lernenden Funktionen ihre Ableitungen und umgekehrt zuordnen.

Ein weiteres Applet (<http://www.mathe-online.at/galerie/diff1/diff1.html#zwabl>) verdeutlicht den Zusammenhang zwischen einer Funktion, ihrer ersten und zweiten Ableitung und interaktiven Lernhilfen ermöglichen ein tieferes und besseres Verständnis der Differentialrechnung ohne besondere Computerkenntnisse. Daher kann die Konzentration ganz auf die zur Verfügung gestellten Inhalte gerichtet werden.

## GeoGebra

Die kostenlose und mehrfach international preisgekrönte Mathematiksoftware *GeoGebra* verbindet dynamische Geometrie, Algebra und Analysis. Das Werkzeug fördert experimentelles, handlungsorientiertes Lernen und bietet Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, selbst mathematische Zusammenhänge zu entdecken. Die folgende Vorgangsweise ist ein Beispiel für eine mögliche Einführung des Tangentenproblems mit GeoGebra.

Zunächst ruft die Lehrkraft mit einer vorbereiteten Konstruktion (Abb. 1) in Erinnerung, wie sich die Steigung einer Geraden durch zwei Punkte mittels Steigungsdreieck berechnen lässt.

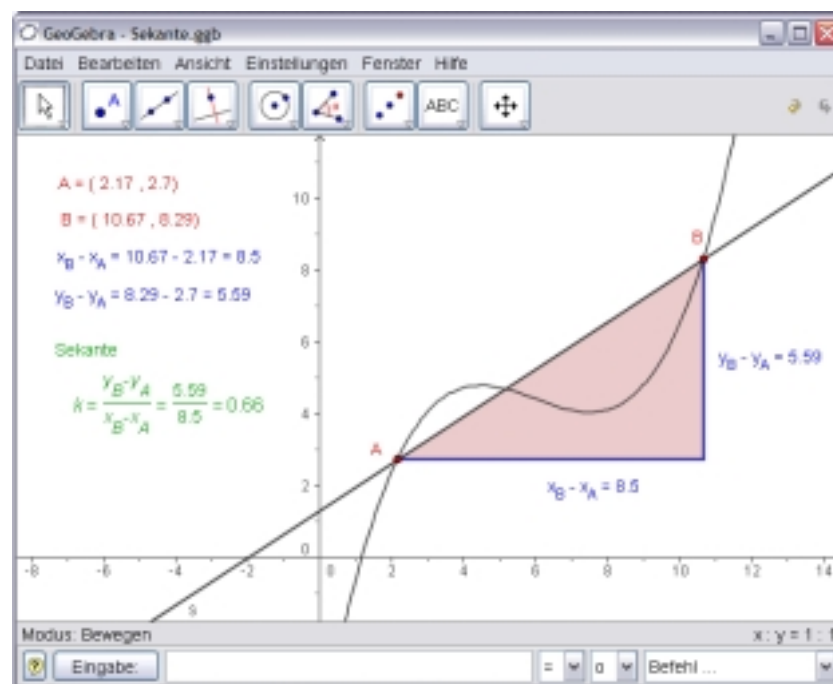


Abb. 1: Sekante und Steigungsdreieck

Danach sollen die Schülerinnen und Schüler selbst Sekantensteigungen bei verschiedenen Funktionsgraphen untersuchen und berechnen. Nach Eingabe der Funktion in GeoGebra genügen zwei Klicks auf den Funktionsgraphen, um die Punkte A und B zu erstellen (Abb. 2). Die Sekante durch diese beiden Punkte wird ebenso einfach mit der Maus erzeugt. Die Punkte A und B können nun mit der Maus entlang des Funktionsgraphen gezogen werden, wobei die Sekante mitwandert und die Koordinaten der Punkte im Algebrafenster laufend aktualisiert werden. Durch Ablesen dieser Koordinaten können die Schülerinnen und Schüler in ihrem Heft bestimmte Sekantensteigungen berechnen und das Ergebnis zur Kontrolle mit der von GeoGebra angezeigten Gleichung der Sekante vergleichen.

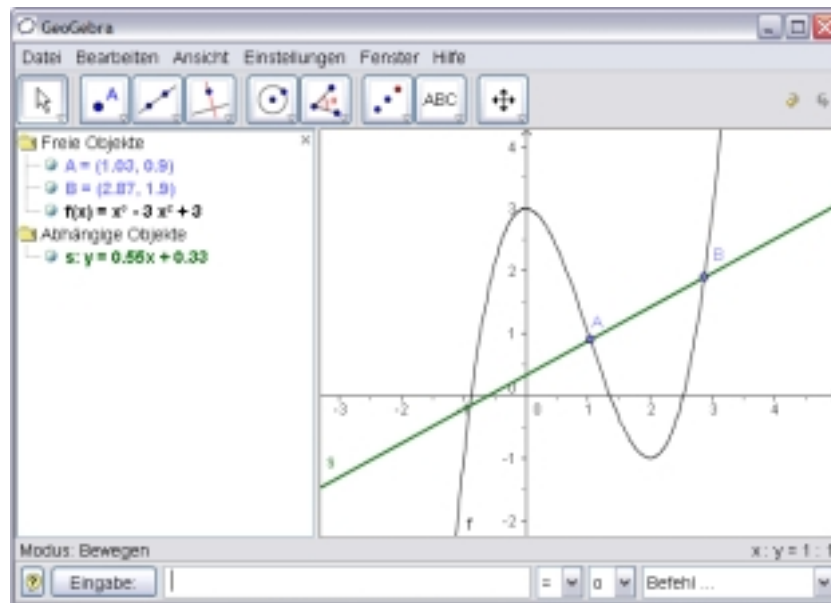


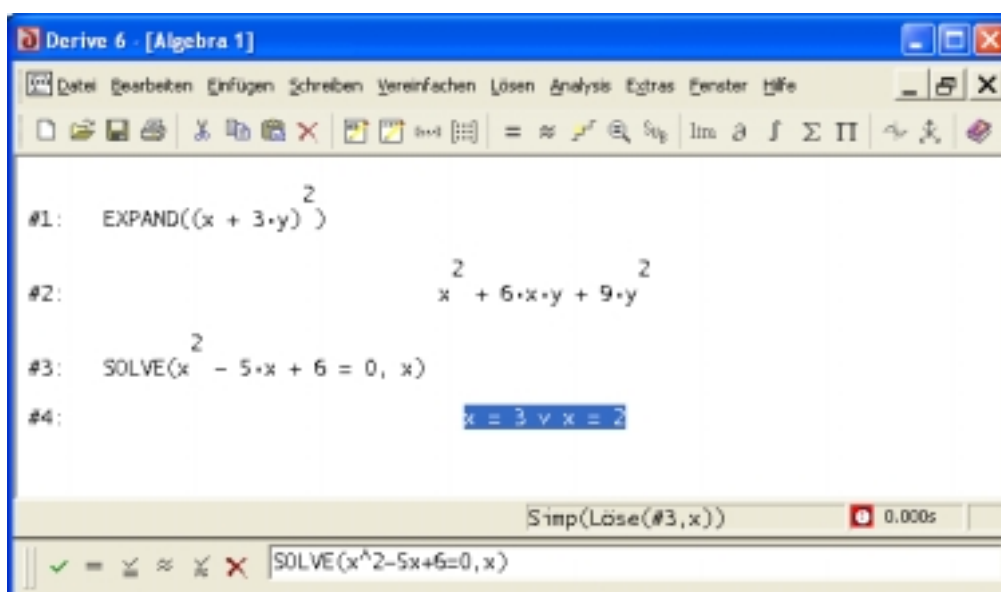
Abb. 2: Sekante an Funktionsgraph

Wie sich im Unterrichtseinsatz zeigte, entdecken hierbei die Schülerinnen und Schüler sehr bald ein Problem: die Sekante „verschwindet“, wenn man die Punkte A und B zusammenfallen lässt. Die sofort aufgeworfene Frage nach dem *Warum* konnten die Schülerinnen und Schüler in einer Diskussion untereinander schnell mit der hier auftretenden Division durch Null beantworten.

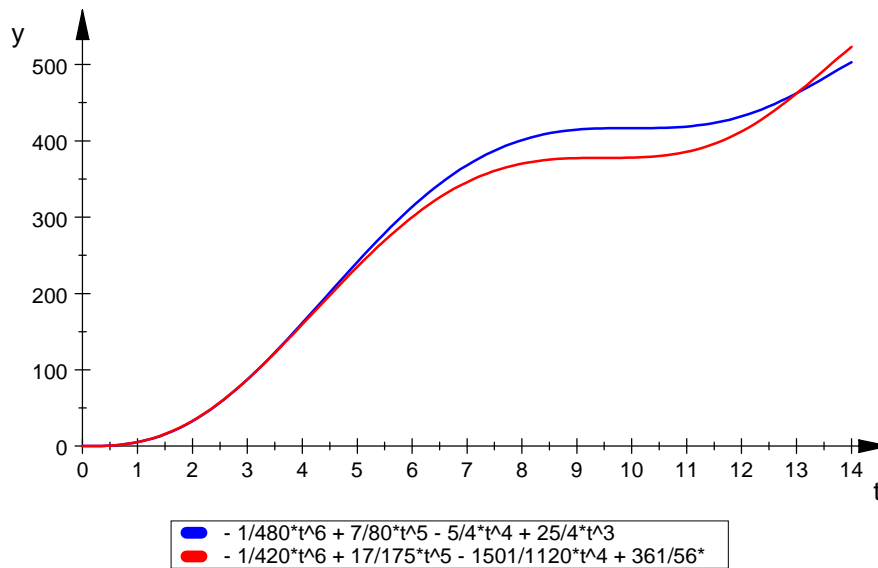
Entscheidend bei diesem kurzen Beispiel ist, dass das Tangentenproblem auf die vorgestellte Weise nicht künstlich von der Lehrperson eingeführt, sondern von den Schülerinnen und Schülern selbst erkannt werden konnte. Dies erhöht die Motivation der Lernenden, im Anschluss gemeinsam mit der Lehrkraft nach einer Lösung des Tangentenproblems zu suchen.

## Computeralgebra

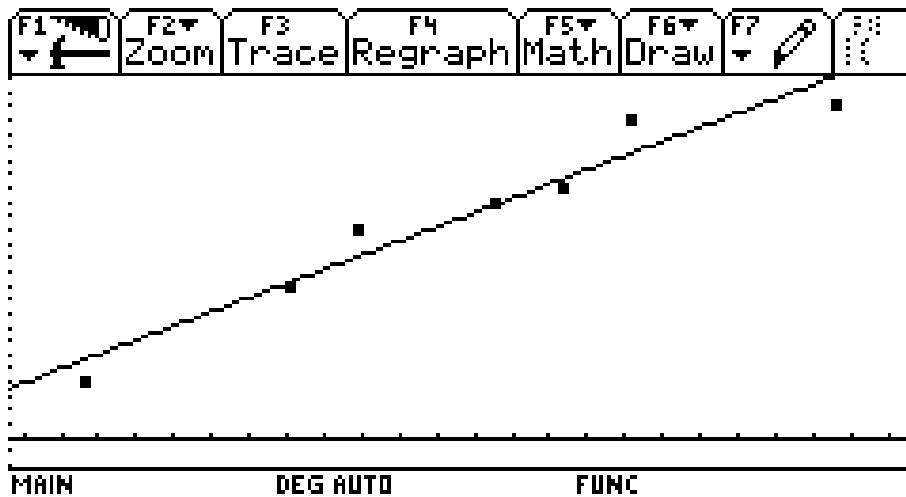
Seit über 10 Jahren beschäftigt sich ACDCA (<http://www.acdca.ac.at/>) mit den Auswirkungen von Computeralgebrasystemen (CAS) auf den Unterricht in der Sekundarstufe 1 und 2. Die Systeme sind in der Lage Terme umzuformen, Gleichungen zu lösen, Funktionen zu differenzieren oder Funktionen zu integrieren. Das folgende Bild zeigt dies an Hand des CAS-Systems Derive 6.



Weiterhin können CAS-Systeme zwei- und dreidimensionale Graphiken erstellen. Das folgende Beispiel wurde mit MuPAD 3.0 erstellt.



Daher kann in einem Unterricht mit CAS-Systemen der Schwerpunkt vom Operieren auf das Erklären und Begründen und auf das Lösen von Problemen verschoben werden. Außerdem lassen sich Dynamische Systeme, Rekursionen, Iterationen oder Regessionen erst mit Hilfe von CAS-Systemen sinnvoll durchführen. Abschließend ein Beispiel einer Regressionsgeraden mit dem Voyage 200:



## Satz von Pythagoras

Mit dem Satz von Pythagoras beschäftigen sich Schüler/innen der 7. und 8.Schulstufe. Für beide gibt es eLearning-Material, das die Begriffsbildung und Anwendung auf entdeckende Weise fördert.

## Pythagoras in der 3.Klasse ([www.informatix.at/pythag](http://www.informatix.at/pythag))

### Vorbemerkung:

Die eLearning-Sequenz wurde speziell für eine eLearning Klasse des BG|BRG Purkersdorf erstellt. Dies wird an einigen Aufgaben, die die Verwendung einer Lernplattform beinhalten, deutlich. Diese Aufgabenstellungen beziehen sich speziell auf Blackboard, können aber so abgeändert werden, dass sie mit jeder anderen Plattform oder im Präsenzunterricht ebenso erfüllt werden können.

Pythagoras

YOU MAY BE RIGHT, PYTHAGORAS, BUT EVERYBODY'S GOING TO LAUGH IF YOU CALL IT A "HYPOTENUSE."

war ein bedeutender Mathematiker.

Bildquellen: <http://fusioonomaly.net/pythagoras.jpg> - <http://sd.st/hs-staendlung/mappen/pythagoras.jpg>

bit media

### Zur Konzeption der eLearning-Sequenz:

Ein grundlegender Gedanke beim Entwurf dieser eLearning Sequenz war die optimale Kombination verschiedener Medien.

### Folgende Medien sollten Eingang finden:

- Internet (dynamische und interaktive Lernhilfen)
- Dynamische Geometriesoftware
- Buch
- Heft
- Papier, Schere, ...
- Taschenrechner

### Die Schüler/innen sollten sich mit folgenden Themenbereichen beschäftigen:

1. Geschichte und Leben von Pythagoras
2. Herleitung des Satzes von Pythagoras
3. Anwendungen in einfachen Aufgabenstellung (+ Einführung der Wurzel)
4. Kennen lernen und nachvollziehen verschiedener Beweise
5. Pythagoreische Tripel (Wahlaufgabe)
6. Pythagorasbäume (Wahlaufgabe)
7. Anwendung des Pythagoras in ebenen Figuren

### Ad 1. Geschichte und Leben von Pythagoras

Speziell in dieser Aufgabenstellung wird deutlich, dass die Schüler/innen an einem schulübergreifenden eLearning Projekt (eLSA) beteiligt waren.

Die Internetrecherche hatte zum Ziel die Erstellung einer Präsentation zum Leben von Pythagoras. Diese wurde anschließend schulübergreifend bewertet. Ein Quiz diente der Abrundung der ersten Aufgabenstellung und sollte die Schüler/innen nochmals daran erinnern, dass die Daten zum Leben von Pythagoras bedeutend sind. Der anschließende Rollenchat war wieder speziell für die Verwendung der Plattform konzipiert und sollte den Schüler/innen eine kreative Auseinandersetzung mit der Zeit und dem Leben von Pythagoras ermöglichen.

## **Ad 2. Herleitung des Satzes von Pythagoras**

Auch hier wurde bewusst ein geschichtlicher Zugang gewählt, um zu zeigen, dass Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken nicht erst seit Pythagoras von Bedeutung sind, sondern schon viele Jahre davor für die Anwendung (zum Bau von Tempeln) wichtig waren. Die Schüler/innen sollten die Erfahrung des Seilspannens selbst erleben, ein derartiges Seil wurde ihnen zur Verfügung gestellt.

Im Anschluss an diese haptische Aufgabe sollten die Schüler/innen mithilfe einer DGS (Euklid – diese Aufgabenstellung kann natürlich mit jeder DGS erfüllt werden, an eine Umformulierung der Aufgabe ist gedacht) das beim Seilspannen entstandene Dreieck zeichnen. Hier wurde bewusst der Umstieg auf das moderne Medium Computer gewählt.

Herleitung des Satzes von Pythagoras erfolgt in kleinen Lernschritten zu denen die Schüler/innen angeleitet wurden und eine Animation (Video) unterstützte die Schüler/innen dabei. Die Schüler/innen sollten ihre Ideen aufschreiben und eine entsprechende Zeichnung – die zum Satz von Pythagoras führen – selbst anfertigen.

## **Ad 3. Anwendung in einfachen Aufgabenstellungen (+ Einführung der Wurzel)**

In der folgenden Unterrichtsphase mussten die Schüler/innen einfache Aufgabenstellungen lösen. Bei der ersten Aufgabe wurde die Wurzel eingeführt (die Notwendigkeit ergab sich von selbst) und den Schüler/innen das Berechnen von Wurzeln mit dem Taschenrechner erklärt. Die Aufgabenstellung bestanden aus einfachen Berechnungen von Hypotenusen und Katheten, aber es mussten auch Skizzen anhand von Texten erstellt werden, deren Lösung dann mithilfe des Pythagoras erfolgte.

Mittels Quiz wurden zum Abschluss dieser Phase die wichtigsten Begriffe noch einmal abgefragt.

## **Ad 4. Kennen lernen und nachvollziehen verschiedener Beweise**

Für diesen Teil der Unterrichtssequenz wurde im Internet zur Verfügung stehende interaktive Beweise ausgewählt, die die Schüler/innen aber auch händisch nachvollziehen mussten. Hier wurde bewusst die Kombination Internet (interaktiv) und Papier gewählt. Die interaktiven Darstellungen sollten den Schüler/innen ein leichteres Nachvollziehen der Beweise ermöglichen. Zudem sind diese Beweise ständig abrufbar und ihr Ablauf ständig nachvollziehbar, dies ist im Heft (am Papier) so nicht möglich, da zum Beispiel die aufgeklebten Dreiecke den „Werdegang“ der Darstellung nicht mehr zeigen. Dieser Teil der Unterrichtssequenz wurde ebenfalls mit einem Rollenchat zu den Beweisen abgeschlossen.

## **Ad 5. Pythagoreische Tripel (Wahlaufgabe)**

Die pythagoreischen Tripel dienten als Wahlaufgabe zur Vertiefung des Wissens. Hier können eventuell Aufgaben mit einem CAS angeschlossen werden.

## **Ad 6. Pythagorasbäume (Wahlaufgabe)**

Diese Aufgabe sollte die kreative Auseinandersetzung mit rechtwinkligen Dreiecken und dem Satz von Pythagoras dienen. Auch hier wurden die Schüler/innen mittels interaktiver Lernhilfen zum Erstellen von Pythagorasbäumen animiert. Die Aufgabe wurde mit großem Interesse angenommen.

## **Ad 7. Anwendung des Pythagoras in ebenen Figuren**



Zum Abschluss dieser Unterrichtssequenz mussten die Schüler/innen den Satz von Pythagoras in verschiedenen ebenen Figuren anwenden. Wichtig dabei war/ist das Erkennen von rechtwinkligen Dreiecken und richtige Anwenden des Satzes von Pythagoras in diesen Figuren. Die den Schüler/innen zur Verfügung gestellten Zeichnungen, sollten eben diesen Prozess unterstützen.

Um das erworbene Wissen zu sichern, mussten die Schüler/innen ein Merkblatt erstellen, selbstständig drei Aufgaben aus dem Buch wählen und lösen, sowie zwei Beispiele erfinden und deren Angabe samt Lösung in der verwendeten Plattform veröffentlichen.

### Pythagoras in der 4.Klasse

(<http://www.bgtulln.ac.at/~dorfmayr/web4f/pythagoras/index.html>)

**Überall Pythagoras**

---

**Teste dein Wissen**

*Vorwissen / Voreinstellungen aktivieren*

1. Pythagoras' Lieblingsdreieck - Lückentext
2. Pythagoras Wirrwarr - Zuordnungsübung
3. Eigenschaften eines Quaders - Lückentext
4. Pythagoras in ebenen Figuren - Programm
5. Kamin à la Pythagoras
6. Überall Pythagoras
  - Multiple Choice Quiz (das noch keines ist)
  - Du kannst die Beispiele von hier auch ausdrucken.

**Neuigkeiten**

*Neue Kenntnisse / Verfahrensweisen erarbeiten*

Das vorliegende Onlinematerial besteht aus folgenden drei Abschnitten:

- **Teste dein Wissen:** Anhand verschiedener Aufgabenstellungen (Lückentest, Zuordnungen, ...) haben Schüler/innen die Möglichkeit ihr Wissen zu testen und zu wiederholen.
- **Neuigkeiten:** Hier erlernen die Schüler/innen den Höhen- und Kathetensatz. Sie erwerben Kenntnisse zur Anwendung des Satzes von Pythagoras in räumlichen Figuren, im Oktaeder und vertiefen ihr Wissen an weiteren Aufgabenstellungen.
- **Herausforderungen:** Ein abschließender Bereich, der weitere Beweise und schwierige Beispiele enthält.

Besonders interessant war der Einsatz des oben beschriebenen Materials, da drei verschiedene Lehrkräfte das vorliegende Material auf ganz unterschiedliche Art und Weise genutzt haben.

Eine Lehrkraft hat das Material als eLearning-Einheit eingesetzt. Die Schüler/innen bekamen einen Arbeitsplan und konnten in einem Diskussionsforum Fragen stellen. Am Ende des Projekts war eine Projektmappe (in Papierform) abzugeben, die vollständig alle Ausführungen enthalten musste. Ebenso mussten die Schüler/innen in der Projektphase vier Hausübungen zum Thema erledigen und abgeben.

Eine andere Lehrkraft erstellte zum vorliegenden eLearning-Material einen Stationenbetrieb, indem die Schüler/innen Wahl- und Pflichtaufgaben vorfanden, die in Einzel-, Partner-, aber

auch Gruppenarbeit zu lösen waren. Die Erstellung einer Projektmappe sowie die Abgabe von vier Hausübungen waren ebenso verpflichtend.

Eine weitere Lehrkraft bettet das eLearning-Material in eine Lernspirale (nach Klippart) ein. Hausübungen und Projektmappe waren ebenfalls verpflichtend.

Dieses Beispiel zeigt sehr gut, dass eLearning-Material in ganz verschiedenen Szenarien eingesetzt werden kann, wenn die Lehrenden das vorhandene Material für ihre Klasse und ihren persönlichen Stil adaptieren.

---

Im Sinne dieser Beispiele werden im Rahmen des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ Unterrichtseinheiten entwickelt und getestet. Nach Fertigstellung werden diese auf der Projekt-Website <http://www.austromath.at/medienvielfalt/> zur Verfügung stehen.