

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email imn@oemg.ac.at, <http://www.oemg.ac.at/>

Redaktion:

J. Wallner (TU Graz, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
R. Tichy (TU Graz)
R. Winkler (TU Wien)

Ständige Mitarbeiter der Redaktion:

B. Gittenberger (TU Wien)
G. Eigenthaler (TU Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger:
Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzen-druck, 8044 Weinitzen.

© 2017 Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903
<http://www.oemg.ac.at/>
email: oemg@oemg.ac.at

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-10401
email: sekr@oemg.ac.at

Vorstand:

M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Vorsitzender
B. Kaltenbacher (Univ. Klagenfurt): Stellvertretende Vorsitzende
J. Wallner (TU Graz): Herausgeber der IMN
C. Fuchs (Univ. Salzburg): Schriftführer
G. Schranz-Kirlinger (TU Wien): Stellvertretende Schriftführerin
A. Ostermann (Univ. Innsbruck): Kassier
B. Lamel (Univ. Wien): Stellvertretender Kassier
E. Buckwar (Univ. Linz): Beauftragte für Frauenförderung
G. Teschl (Univ. Wien): Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
M. Drmota (TU Wien)
H. Edelsbrunner (ISTA)
H. Engl (Univ. Wien)
H. Niederreiter (ÖAW)

P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
W. Schachermayer (Univ. Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
R. Tichy (TU Graz)
H. Zeiler (Wien)

Vorsitzende der Sektionen und ständigen Kommissionen:

W. Woess (Graz)
H.-P. Schröcker (Innsbruck)
C. Pötzsche (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
V. Bögelein (Salzburg)
I. Fischer (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)

Diese gehören statutengemäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 35,–
Bankverbindung: IBAN AT8312000
22910389200 bei der Bank Austria–
Creditanstalt (BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques
Internationales

Nr. 234 (71. Jahrgang)

April 2017

Inhalt

<i>Andreas Schröder</i> : Error control for variational inequalities	1
<i>Eva Sattlberger, Martin Hofer</i> : Die standardisierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung in Mathematik bzw. Angewandter Mathematik als Ab- schluss der Sekundarstufe II in Österreich	19
Buchbesprechungen	41
Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft	48
Neue Mitglieder	61

Die Graphik auf der Titelseite symbolisiert die Lösung des Problems der dichtesten Kugelpackung im euklidischen \mathbb{R}^8 : Sie ist diejenige Gitterpackung, bei der die Kugelmittelpunkte auf einem E_8 -Gitter $\{(x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^8 \mid x_1 + \dots + x_8 \in 2\mathbb{Z}\}$ liegen. Letzteres tritt auf als die Menge der Ecken der Polyeder der regulären Parkettierung “ 5_{21} ” des \mathbb{R}^8 durch 8-Simplizes und 8-Kreuzpolytope; die Titelseite zeigt das Coxeter-Dynkin-Diagramm dieser Parkettierung. Für Details und Zusammenhänge, insbesondere auch das Packungsproblem im \mathbb{R}^{24} , wird verwiesen auf den Originalartikel von Maryna Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8* (Ann. Math., to appear, arxiv:1603.04246), und den Übersichtsartikel von H. Cohn, *A conceptual breakthrough in sphere packing* (Notices AMS, Februar 2017).

Error control for variational inequalities

Andreas Schröder

Universität Salzburg

Variational inequalities play an important role in the mathematical modeling of problems in mechanical engineering as well as in financial mathematics. They are used, for instance, in the modeling of contact problems [10, 12, 17, 19], in elasto-plasticity [15] and in the modeling of financial options [3]. In Figure 1, the contact of a deformable body with a rigid obstacle (shown as its surface) illustrates a typical application of variational inequalities in contact problems.

The discretization of variational inequalities is often based on finite elements or similar approaches. An important aspect of the discretization is the control of the discretization error, i.e. the difference of the exact solution and the discretization solution measured in a certain norm or in a quantity of interest. A priori error control aims to express the discretization error in terms of the number of degrees

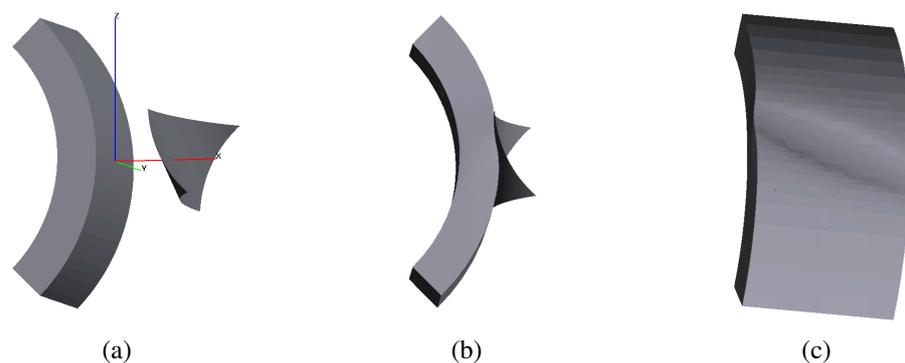


Figure 1: (a) An elastic body and the surface of a rigid obstacle. (b) The body and the obstacle in contact. (c) The deformation resulting from the contact of the body and the obstacle.

of freedom depending on the mesh size and on the polynomial degree of the finite element discretization and to determine the convergence and, in particular, the convergence rate. A priori error analysis for variational inequalities typically relies on the use of Falk's lemma and is widely available in literature, see, for instance, [7, 11, 17].

In a posteriori error control two objectives are essentially pursued. First, the derivation of a computable estimation of the error. Second, in the case that the error estimation provides information about the local error contributions, the provision of adaptive refinement procedures that enables an efficient discretization with as few as possible degrees of freedom [1, 26]. There are several approaches of a posteriori error control for the discretization of variational inequalities. They are mainly transferred from approaches developed for variational equations and rely, for instance, on averaging techniques [2], residual-based approaches [25] or on the use of duality arguments [14]. For the derivation of a posteriori error estimates, one can exploit the fact that the discretization solution defines a certain Lagrange multiplier which is associated with constraints or other conditions defining the variational inequality. This Lagrange multiplier can be included in an auxiliary problem which is just a variational equation. Its discretized formulation is also solved by the discretization solution of the variational inequality and enables the use of error estimates for variational equations [5, 8, 22].

In this paper, we discuss a priori as well as a posteriori error control for variational inequalities of the first kind. This is done in an abstract framework of Hilbert spaces in order to elaborate the key ingredients of the analysis. We present the general assumptions under which convergence is guaranteed and the derivation of convergence rates is possible. For this purpose, we generalize the analysis as introduced in [7, 13] in some respect. Furthermore, we use a mixed formulation to derive a posteriori estimates where we express the error by the residual given by a Lagrange multiplier associated to the constraints. Two applications of the abstract results are discussed in the context of finite element discretizations of low-order: the obstacle problem and a simplified version of the Signorini problem. Finally, we present some numerical results which demonstrate the applicability of the a posteriori estimates within adaptive schemes.

The paper is organized as follows: In Section 1, we introduce a general framework for variational inequalities in Hilbert spaces and summarize the main results of the a priori analysis. Concentrating on problems with linear constraints we show the equivalence of variational inequalities and mixed formulations in Section 2. Based on these considerations, a posteriori error estimates are derived in Section 3. In Section 4 applications of the results to some model problems are presented. The applicability of the a posteriori estimates in adaptive schemes is discussed in Section 5.

1 Variational inequalities of the first kind

We consider a Hilbert space V equipped with the norm $\|\cdot\|_V$ and a V -elliptic, continuous bilinear form $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, i.e., there exist constants $c > 0$ and $\kappa > 0$ such that

$$a(v, w) \leq c \|v\|_V \|w\|_V, \quad \kappa \|v\|_V^2 \leq a(v, v) \quad (1)$$

for all $v, w \in V$. Let $\ell \in V^*$ with the topological dual space V^* . The variational inequality of the first kind is to find $u \in K$ such that

$$a(u, v - u) \geq \langle \ell, v - u \rangle \quad (2)$$

for all $v \in K$, where $K \subset V$ is a closed and convex set with $K^\circ \neq \emptyset$ and $K^\circ \cap B_\varepsilon(v) \neq \emptyset$ for all $v \in K$ and all $\varepsilon > 0$, where $B_\varepsilon(v) := \{w \in V \mid \|v - w\|_V < \varepsilon\}$.

Theorem 1.1. *1. There exists a unique solution $u \in K$ of the variational inequality (2).*

2. The mapping $V^ \ni \ell \mapsto u$ is Lipschitz-continuous with Lipschitz-constant κ^{-1} .*

Proof. The proof can be found in [20, Ch II, Thm. 2.1]. □

Assuming a sequence of finite dimensional spaces $V_i \subset V$, $i \in \mathbb{N}$, the discretization of (2) is to find $u_i \in V_i$ such that

$$a(u_i, v_i - u_i) \geq \langle \ell, v_i - u_i \rangle \quad (3)$$

for all $v_i \in K_i$, where $K_i \subset V_i$ is a closed and convex set. By Theorem 1.1, the existence of a sequence of unique solutions $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ of (3) is guaranteed. The convergence of $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ can generally be shown by using the following theorem [13, Ch. I, Thm. 4.2].

Theorem 1.2. *The sequence $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converges to u if*

- 1. for all $v \in K$ there exists a sequence $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ with $v_i \in K_i$ strongly converging to v ,*
- 2. for all sequences $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ with $v_i \in K_i$ weakly converging to $v \in V$ it holds $v \in K$.*

Proof. Let $v \in K$ and $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ fulfilling assumption 1. From the continuity of a we conclude that

$$a(u_i, u_i) \leq a(u_i, v_i) - \langle \ell, v_i - u_i \rangle \leq c \|u_i\|_V \|v_i\|_V + \|\ell\|_{V^*} (\|v_i\|_V + \|u_i\|_V). \quad (4)$$

Since $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ is bounded, the sequence $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ is bounded as well, which results from the ellipticity of a . Thus, there exists a subsequence $\{u_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ which weakly

converges to $w \in V$. From assumption 2 we conclude that $w \in K$. Furthermore, (4) yields

$$a(w, w) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} a(u_{i_k}, u_{i_k}) \leq a(w, v) - \langle \ell, v - w \rangle.$$

From the uniqueness of solution of (2) we obtain $w = u$. Since

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a(u - u_{i_k}, u - u_{i_k}) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a(u_{i_k}, v_{i_k}) - \langle \ell, v_{i_k} - u_{i_k} \rangle - a(u_{i_k}, u) - a(u_{i_k}, u_{i_k} - u) \\ &\leq a(u, v) - \langle \ell, v - u \rangle - a(u, u) \end{aligned}$$

it follows with $v := u$ that even $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converges to u . \square

To show the convergence using Theorem 1.2, one needs some approximation property of the finite dimensional spaces V_i . This property is usually described by linear and bounded operators $I_i : U \rightarrow V_i$, $i \in \mathbb{N}$, where U is a Hilbert space which is densely contained in V . In the following we assume that there exist I_i such that

1. for all $v \in U$ it holds $\|v - I_i(v)\|_V \leq \delta_i(v)$ with $\delta_i(v) \rightarrow 0$ as $i \rightarrow \infty$,
2. for all $v \in K \cap U$ it holds $I_i(v) \in K_i$.

Proposition 1.3. *Assumption 1 of Theorem 1.2 is fulfilled.*

Proof. Let $v \in K$, $\varepsilon > 0$ and i be sufficiently large so that $\delta_i(v) < \varepsilon/3$. Due to the assumptions on K there exists a $\hat{v} \in B_{\varepsilon/3}(v) \cap K^\circ$. Moreover, there exists an $\tilde{\varepsilon} > 0$ so that $B_{\tilde{\varepsilon}}(\hat{v}) \subset K^\circ$. Since U is dense in V , there exists a $\tilde{v} \in U$ such that $\|\hat{v} - \tilde{v}\|_V < \min\{\varepsilon/3, \tilde{\varepsilon}\}$. In particular, there holds $\tilde{v} \in K$. Define $v_i := I_i(\tilde{v}) \in K_i$. Then,

$$\|v - v_i\|_V \leq \|v - \hat{v}\|_V + \|\hat{v} - \tilde{v}\|_V + \|\tilde{v} - I_i(\tilde{v})\|_V < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \delta_i < \varepsilon.$$

\square

To determine the quality of the convergence in terms of a convergence rate, one may use Falk's lemma [11]. Here, we present the following adaptation of this lemma.

Theorem 1.4. *Let $u \in U$ and $A : V \rightarrow V^*$ satisfy $\langle A(w), v \rangle = a(w, v)$ for all $v, w \in V$. Then, there exist constants $c_0 > 0$ and $c_1 > 0$ such that*

$$\|u - u_i\|_V \leq c_0 \delta_i(u) + c_1 \langle Au - \ell, I_i(u) - u_i \rangle.$$

Proof. For $0 < \varepsilon < \kappa$ and $v_i \in V_i$ we have

$$\begin{aligned}
\kappa \|u - u_i\|_V^2 &\leq a(u - u_i, u - v_i) + a(u - u_i, v_i - u_i) \\
&= a(u - u_i, u - v_i) + \langle Au - \ell, v_i - u_i \rangle + \langle \ell, v_i - u_i \rangle - a(u_i, v_i - u_i) \\
&\leq a(u - u_i, u - v_i) + \langle Au - \ell, v_i - u_i \rangle \\
&\leq c \|u - u_i\|_V \|u - v_i\|_V + \langle Au - \ell, v_i - u_i \rangle \\
&\leq \varepsilon \|u - u_i\|_V^2 + \frac{c^2}{4\varepsilon} \|u - v_i\|_V^2 + \langle Au - \ell, v_i - u_i \rangle.
\end{aligned}$$

Thus,

$$\|u - u_i\|_V^2 \leq \frac{1}{\kappa - \varepsilon} \left(\frac{c^2}{4\varepsilon} \|u - v_i\|_V^2 + \langle Au - \ell, v_i - u_i \rangle \right).$$

With $v_i := I_i(u)$ we obtain the assertion. \square

2 Linear constraints and a mixed formulation

The set K defines constraints on the solution u in the variational inequality (2). It is often given by some linear mappings: Let W be a further Hilbert space and $\gamma \in L(V, W)$ be surjective, where $L(V, W)$ denotes the set of bounded linear operators mapping V to W with the operator norm $\|\cdot\|_{W \leftarrow V}$. For $g \in W$, we define the linear constraints

$$K := \{v \in V \mid g - \gamma(v) \in G\}.$$

Here, $G \subset W$ is a closed convex cone with $0 \in G$. Defining Λ as the dual cone of G , i.e. $\Lambda := \{\mu \in W^* \mid \forall w \in G : \langle \mu, w \rangle \geq 0\}$, the set K can be equivalently characterized in the following way:

Lemma 2.1. *There holds*

$$K = \{v \in V \mid \forall \mu \in \Lambda : \langle \mu, g - \gamma(v) \rangle \geq 0\}.$$

Proof. It is clear that $K \subset \tilde{K} := \{v \in V \mid \forall \mu \in \Lambda : \langle \mu, g - \gamma(v) \rangle \geq 0\}$. Let $v \in \tilde{K}$ and assume $g - \gamma(v) \notin G$. Then, we conclude from the closedness and convexity of G and the separation theorem of Hahn-Banach that there exists a $\mu^* \in W^*$ with

$$\langle \mu^*, g - \gamma(v) \rangle < \inf_{w^* \in G} \langle \mu^*, w^* \rangle. \quad (5)$$

From the cone property of G , we have $tw^* \in G$ for all $t \geq 0$ and $w^* \in G$. Assuming $\inf_{w^* \in G} \langle \mu^*, w^* \rangle < 0$, we obtain

$$\inf_{w^* \in G} \langle \mu^*, tw^* \rangle = t \inf_{w^* \in G} \langle \mu^*, w^* \rangle \rightarrow -\infty$$

as $t \rightarrow \infty$ which is a contradiction to (5). Thus, $\mu^* \in \Lambda$ and, therefore, $\langle \mu^*, g - \gamma(v) \rangle \geq 0$ as $v \in \tilde{K}$, which is a contradiction to $\langle \mu^*, g - \gamma(v) \rangle < 0$ resulting from $0 \in G$. In conclusion, we have $g - \gamma(v) \in G$ and, hence, $v \in K$. \square

Assuming linear constraints we are able to prove assumption 2 in Theorem 1.2.

Proposition 2.2. *Let $v_g \in U$ with $\gamma(v_g) = g$ and $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle \mu, \gamma(I_i(v_g)) - \gamma(v_i) \rangle \geq 0$ for all sequences $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ with $v_i \in K_i$ and all $\mu \in \Lambda$. Then, assumption 2 of Theorem 1.2 is fulfilled.*

Proof. For $\mu \in \Lambda$ we have

$$\begin{aligned} \langle \mu, g - \gamma(v) \rangle &= \lim_{i \rightarrow \infty} \langle \mu, g - \gamma(v_i) \rangle \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \langle \mu, \gamma(v_g) - \gamma(I_i(v_g)) \rangle + \lim_{i \rightarrow \infty} \langle \mu, \gamma(I_i(v_g)) - \gamma(v_i) \rangle \\ &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \langle \mu, \gamma(v_g) - \gamma(I_i(v_g)) \rangle. \end{aligned}$$

The assertion follows from Lemma 2.1 and

$$\begin{aligned} |\langle \mu, \gamma(v_g) - \gamma(I_i(v_g)) \rangle| &\leq \|\mu\|_{W^*} \|\gamma\|_{W \leftarrow V} \|v_g - I_i(v_g)\|_V \\ &\leq \|\mu\|_{W^*} \|\gamma\|_{W \leftarrow V} \delta_i(v_g) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

as $i \rightarrow \infty$. □

For the derivation of a posteriori error controls we make use of the existence of a so-called Lagrange multiplier $\lambda \in \Lambda$, which is directly associated to the constraints. Together with the solution u it fulfills a mixed formulation, which can also be used to obtain discretization schemes [12, 16, 24].

Theorem 2.3. *There exists $\lambda \in \Lambda$ such that (u, λ) is the unique solution of the mixed formulation*

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle \ell, v \rangle - \langle \lambda, \gamma(v) \rangle, \\ \langle \mu - \lambda, \gamma(u) - g \rangle &\leq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

for all $v \in V$ and all $\lambda \in \Lambda$.

Proof. Let $v_0, v_1 \in V$ with $\gamma(v_0) = \gamma(v_1)$. We have $\tilde{v} := v_0 - v_1 \in \ker \gamma$ and, therefore, $\pm \tilde{v} + u \in K$. From (2), we get $a(u, \tilde{v}) = \langle \ell, \tilde{v} \rangle$ and, hence, $\langle \ell, v_0 \rangle - a(u, v_0) = \langle \ell, v_1 \rangle - a(u, v_1)$. Therefore, $\lambda \in W^*$ with $\langle \lambda, w \rangle := \langle \ell, v \rangle - a(u, v)$ for $w \in W$ and $v \in V$ with $\gamma(v) = w$ is well-defined. To show that $\lambda \in \Lambda$, let $w \in G$ and $\hat{v} \in V$ with $\gamma(\hat{v}) = w$ and $v := -\hat{v} + u$. We have $\langle \mu, g - \gamma(v) \rangle = \langle \mu, g - \gamma(u) \rangle + \langle \mu, w \rangle \geq 0$ for all $\mu \in \Lambda$. From Lemma 2.1, we conclude $v \in K$. Thus, we obtain $\langle \lambda, w \rangle = \langle \ell, \hat{v} \rangle - a(u, \hat{v}) = \langle \ell, u - v \rangle - a(u, u - v) \geq 0$ which shows $\lambda \in \Lambda$. For $\mu \in \Lambda$ and $v_g \in V$ with $\gamma(v_g) = g$, we have

$$\begin{aligned} \langle \mu - \lambda, \gamma(u) - g \rangle &\leq -\langle \mu, g - \gamma(u) \rangle + \langle \lambda, \gamma(v_g - u) \rangle \\ &\leq \langle \ell, v_g - u \rangle - a(u, v_g - u) \leq 0 \end{aligned}$$

which means that (u, λ) fulfills (6). The uniqueness of (u, λ) follows directly from the uniqueness of u . □

3 A posteriori error estimates

The aim of a posteriori error control is to estimate the discretization error $\|u - u_i\|_V$ by an evaluable expression η (the so-called error estimator) which only depends on known data, i.e. on u_i as well as ℓ and g . An error estimator η is called reliable if $\|u - u_i\|_V \lesssim \eta$. In this section, we derive a reliable error estimator for variational inequalities, which is based on the use of the Lagrange multiplier $\lambda \in \Lambda$ as introduced in Section 2. We assume that λ is approximated by $\lambda_i \in W^*$ satisfying

$$\langle \lambda_i, \gamma(v_i) \rangle = \langle \ell, v_i \rangle - a(u_i, v_i) \quad (7)$$

for all $v_i \in V_i$. Furthermore, we define the residual $\text{Res}_i : V \rightarrow V^*$ as

$$\langle \text{Res}_i, v \rangle := \langle \ell, v \rangle - \langle \lambda_i, \gamma(v) \rangle - a(u_i, v)$$

for all $v \in V$. We note that u_i can be chosen arbitrarily in the following analysis. In particular, u_i need not be a discretization solution. However, it is typically the discretization solution, so that we use the variable u_i in order to keep the considerations as simple as possible. For simplicity, we omit oscillations terms which are usually taken care of in the derivation of a posteriori error estimates.

Lemma 3.1. *There exist constants $C_0 > 0$ and $C_1 > 0$ such that*

$$\|u - u_i\|_V^2 \leq C_0 (\|\text{Res}_i\|_{V^*}^2 + \|\lambda_i - \mu\|_{W^*}^2) + C_1 \langle \lambda - \mu, \gamma(u_i) - g \rangle \quad (8)$$

for arbitrary $\mu \in \Lambda$.

Proof. Using Cauchy's inequality we conclude

$$\begin{aligned} & \kappa \|u - u_i\|_V^2 \\ & \leq a(u - u_i, u - u_i) \\ & = a(u, u - u_i) - \langle \ell, u - u_i \rangle + \langle \lambda_i, \gamma(u - u_i) \rangle + \langle \text{Res}_i, u - u_i \rangle \\ & = \langle \lambda_i - \lambda, \gamma(u - u_i) \rangle + \langle \text{Res}_i, u - u_i \rangle \\ & = \langle \lambda_i - \mu, \gamma(u - u_i) \rangle + \langle \mu - \lambda, \gamma(u) - g \rangle + \langle \lambda - \mu, \gamma(u_i) - g \rangle + \langle \text{Res}_i, u - u_i \rangle \\ & \leq \max\{1, \|\gamma\|_{W \leftarrow V}\} (\|\text{Res}_i\|_{V^*} + \|\lambda_i - \mu\|_{W^*}) \|u - u_i\|_V + \langle \lambda - \mu, \gamma(u_i) - g \rangle. \end{aligned}$$

From Young's inequality with $0 < \varepsilon < \kappa_a$ it follows

$$\begin{aligned} \kappa \|u - u_i\|_V^2 & \leq \frac{\max\{1, \|\gamma\|_{W \leftarrow V}\}}{2\varepsilon} (\|\text{Res}_i\|_{V^*}^2 + \|\lambda_i - \mu\|_{W^*}^2) \\ & \quad + \varepsilon \|u - u_i\|_V^2 + \langle \lambda - \mu, \gamma(u_i) - g \rangle. \end{aligned}$$

Subtraction of $\varepsilon \|u - u_i\|_V^2$ and division by $\kappa - \varepsilon$ yield the assertion. \square

The next step is to estimate the term $\langle \lambda - \mu, \gamma(u_i) - g \rangle$. To this end, we first prove the following assertion.

Lemma 3.2. *There exists $\bar{V} \subset V$ with $\gamma(\bar{V}) = W$ and a constant $c_\gamma > 0$ such that*

$$\|\bar{v}\|_V \leq c_\gamma \|\gamma(\bar{v})\|_W$$

for all $\bar{v} \in \bar{V}$.

Proof. Since γ is surjective, the mapping $\bar{\gamma}: V/\ker\gamma \rightarrow W$ with $\bar{\gamma}(v + \ker\gamma) := \gamma(v)$ is well-defined, bijective and continuous. From the open mapping theorem, we conclude that $\bar{\gamma}^{-1}$ is continuous. Thus, there is a constant $c_\gamma > 0$ such that

$$\inf_{z \in \ker\gamma} \|v - z\|_V = \|\bar{\gamma}^{-1}(\gamma(v))\|_{V/\ker\gamma} \leq c_\gamma \|\gamma(v)\|_W$$

for all $v \in V$. Furthermore, since $\ker\gamma$ is closed and convex, there exists $\bar{z}_v \in \ker\gamma$ with $\|v - \bar{z}_v\|_V = \inf_{z \in \ker\gamma} \|v - z\|_V$. Hence, for $\bar{v} := v - \bar{z}_v \in \bar{V} := \{v - \bar{z}_v \mid v \in V\}$, we obtain $\|\bar{v}\|_V \leq c_\gamma \|\gamma(v)\|_W = c_\gamma \|\gamma(v - \bar{z}_v)\|_W = c_\gamma \|\gamma(\bar{v})\|_W$. \square

In the following the expression $A \lesssim B$ abbreviates $A \leq CB$ with a positive constant C which is independent from B .

Theorem 3.3. *Let*

$$\eta_{\mu,z}^2 := \|\text{Res}_i\|_{V^*}^2 + \|\lambda_i - \mu\|_{W^*}^2 + \|z\|_W^2 + |\langle \lambda_i, z \rangle + \langle \mu, g - \gamma(u_i) \rangle| \quad (9)$$

for an arbitrary $\mu \in \Lambda$ and $z \in Z := \{z \in W \mid g - \gamma(u_i) + z \in G\}$. Then,

$$\|u - u_i\|_{\bar{V}}^2 \lesssim \eta_{\mu,z}^2.$$

Proof. From Lemma 3.2, we conclude that there exists some $\tilde{z} \in V$ with $\gamma(\tilde{z}) = z$ and $\|\tilde{z}\|_V \leq c_\gamma \|z\|_W$. Since $z \in Z$ and $\lambda \in \Lambda$, we obtain

$$\begin{aligned} & \langle \lambda - \mu, \gamma(u_i) - g \rangle \\ &= -\langle \lambda, g - \gamma(u_i) + z \rangle + \langle \lambda, z \rangle + \langle \mu, g - \gamma(u_i) \rangle \\ &\leq \langle \lambda, \gamma(\tilde{z}) \rangle + \langle \mu, g - \gamma(u_i) \rangle \\ &= \langle \ell, \tilde{z} \rangle - a(u, \tilde{z}) + \langle \mu, g - \gamma(u_i) \rangle \\ &= a(u_i - u, \tilde{z}) + \langle \lambda_i, \gamma(\tilde{z}) \rangle + \langle \text{Res}_i, \tilde{z} \rangle + \langle \mu, g - \gamma(u_i) \rangle \\ &\leq c \|u - u_i\|_V \|\tilde{z}\|_V + \langle \lambda_i, z \rangle + \|\text{Res}_i\|_{V^*} \|\tilde{z}\|_V + \langle \mu, g - \gamma(u_i) \rangle \\ &\leq \varepsilon \|u - u_i\|_V^2 + c_\gamma^2 \frac{c^2 + 2\varepsilon}{4\varepsilon} \|z\|_W^2 + \langle \lambda_i, z \rangle + \frac{1}{2} \|\text{Res}(u_i)\|_{V^*}^2 + \langle \mu, g - \gamma(u_i) \rangle \end{aligned}$$

for $0 < \varepsilon < 1/C_1$. From Lemma 3.1 we conclude

$$\|u - u_i\|_{\bar{V}}^2 \leq C_1 \varepsilon \|u - u_i\|_V^2 + \max\{C_0, C_1\} \max\left\{c_\gamma^2 \frac{c^2 + 2\varepsilon}{4\varepsilon}, \frac{3}{2}\right\} \eta_{\mu,z}^2.$$

Subtraction of $C_1 \varepsilon \|u - u_i\|_V^2$ and division by $1 - C_1 \varepsilon$ complete the proof. \square

In order to estimate the dual norm of the residual $\|\text{Res}_i\|_{V^*}$, we find easily that

$$\kappa\|u^* - u_i\|_V \leq \|\text{Res}_i\|_{V^*} \leq c\|u^* - u_i\|_V, \quad (10)$$

where $u^* \in V$ fulfills the variational equation

$$a(u^*, v) = \langle \ell, v \rangle - \langle \lambda_i, v \rangle \quad (11)$$

for all $v \in V$. The unique existence of u^* is guaranteed by the Theorem 1.1 with $K = V$. Hence, the estimation of $\|\text{Res}_i\|_{V^*}$ implies the estimation of $\|u^* - u_i\|_V$ and vice versa. Due to (7) u_i is a discretization solution of u^* in the finite-dimensional discretization space V_i . This means that $\|\text{Res}_i\|_{V^*}$ can be estimated by an arbitrary a posteriori error estimator which is originally derived for variational equations, see, e.g., [1, 26] for such an error estimator. One possibility to calculate the discrete Lagrange multipliers λ_i may be given by a post-processing computation [8]. Another possibility is provided by the discretization of the mixed formulation (6) via the discretization space V_i and some further discretization space of W^* (which have to be appropriately balanced in the sense of a discrete inf-sup condition [16, 21, 23]). In this case the discrete approximations u_i as well as λ_i are available at the same time and automatically fulfill the equation (7).

The variable $\mu \in \Lambda$ as well as $z \in Z$ are freely selectable. Obviously, μ should be chosen closed to λ_i in order to minimize the error contribution $\|\lambda_i - \mu\|_{W^*}$, which can be interpreted as a consistency error. The function z can be seen as a correction function as u_i need not fulfill the condition $g - \gamma(u_i) \in G$. In this sense, the corresponding error contribution $\|z\|_W^2$ measures this correction. Finally, the contribution $|\langle \lambda_i, z \rangle + \langle \mu, g - \gamma(u_i) \rangle|$ measures the error in the complementarity condition $\langle \lambda, g - \gamma(u) \rangle = 0$.

4 Application to some model problems

An important problem of mechanical engineering modeled by a variational inequality is the Signorini problem. This problem describes the contact between a deformable elastic body and a rigid obstacle where a linear elastic material law is used to characterize the deformation of the elastic body. Another typical problem leading to a variational inequality is the obstacle problem, in which the contact (or non-penetration) constraints are defined in the interior of the domain (in contrast to the Signorini problem, where the constraints are defined at the boundary). In this paper, we consider simplified versions of these two problems. In particular, we neglect frictional constraints, which lead to variational inequalities of the second kind.

We firstly introduce some notations: Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a polygonal domain with the boundary $\Gamma := \partial\Omega$. Moreover, let $\Gamma_D \subset \Gamma$ be closed with positive measure and let $\Gamma_C \subset \Gamma_N := \Gamma \setminus \Gamma_D$ with $\bar{\Gamma}_C \subsetneq \Gamma_N$. $L^2(\Omega)$, $H^k(\Omega)$ with $k \geq 1$ and

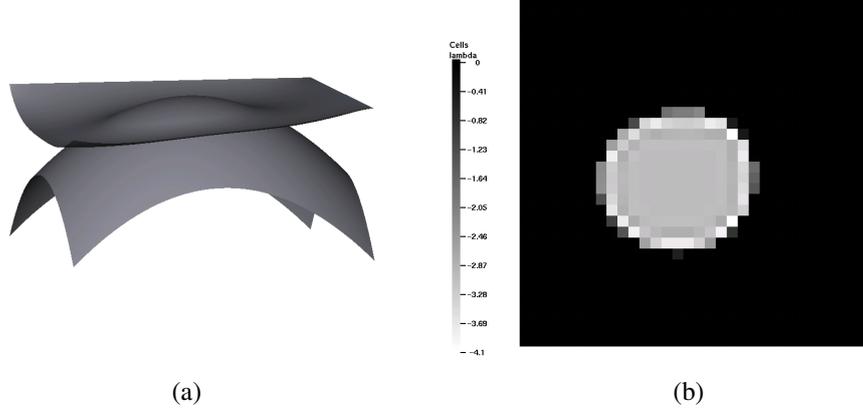


Figure 2: **(a)** An elastic membrane with an obstacle in the interior, which is modeled as an obstacle problem. **(b)** Lagrange multiplier of the obstacle problem.

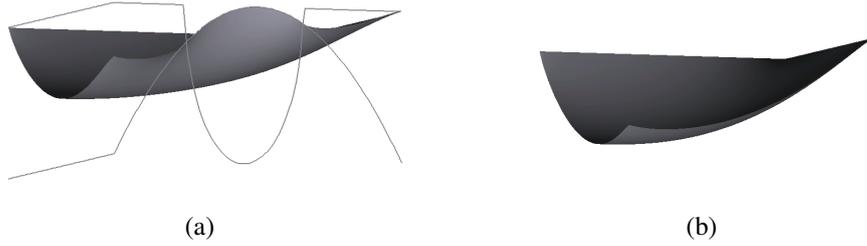


Figure 3: **(a)** An elastic membrane with an obstacle at the boundary, which is modeled by a simplified Signorini problem. Additionally, the Lagrange multiplier is depicted. **(b)** An elastic membrane without an obstacle.

$H^{1/2}(\Gamma_C)$ denote the usual Sobolev spaces of square-integrable functions with weak derivatives. They are equipped with norms $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_k$ and $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_C}$, respectively. We define $V := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma(v) = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$ with the trace operator γ . The space $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_C)$ denotes the topological dual space of $H^{1/2}(\Gamma_C)$ with the norms $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma_C}$ and $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_C}$, respectively. Let $(\cdot, \cdot)_0$ and $(\cdot, \cdot)_{0,\Gamma_N}$ be the usual L^2 -scalar products on Ω and Γ_N . Note that the linear and bounded mapping $\gamma_C := \gamma|_{\Gamma_C} : V \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_C)$ is surjective and continuous due to the assumptions on Γ_C , cf. [19, p.88]. For functions in $L^2(\Omega)$ or $L^2(\Gamma_C)$, the inequality symbols \geq and \leq are defined as “almost everywhere”. For a function v , we define the positive and negative parts by $(v)_\pm := \pm \max\{\pm v, 0\}$.

Both, the obstacle problem as well as the simplified Signorini problem are given

as follows: Find $u \in K$ such that

$$(\nabla u, \nabla(v-u))_0 \geq (f, v-u)_0 + (q, v-u)_{0, \Gamma_N} \quad (12)$$

for all $v \in K$. Here, $f \in L^2(\Omega)$ and $q \in L^2(\Gamma_N)$. Using the notations of Section 1, a is defined as $a(v, w) := (\nabla v, \nabla w)_0$ and $\langle \ell, v \rangle := (f, v)_0 + (q, v)_{0, \Gamma_N}$. The bilinear form a is symmetric, continuous and V -elliptic due to Poincaré's inequality [5]. Moreover, it holds $\ell \in V^*$.

The obstacle problem is specified by $K := \{v \in V \mid v \geq g\}$ for an obstacle function $g \in V$. Thus, $\gamma := \text{id}$, $W := V$, $G := \{v \in V \mid v \leq 0\}$. An example of the obstacle problem is shown in Figure 2, where an elastic membrane is restricted by an obstacle in the interior of the domain. This membrane problem is modeled with $\Omega := (-1, 1)^2$, $\Gamma_N := [-1, 1] \times \{-1\} \cup \{-1\} \times [-1, 1]$, $f := -1$, $q(x_0, x_1) := -\frac{1}{4}x_1^3$ and $g(x_0, x_1) := -\frac{1}{2}(x_0^2 + x_1^2)$ describing the interior obstacle.

The simplified Signorini problem is given by $K := \{v \in V \mid \gamma_C(v) \geq g\}$ for an obstacle function $g \in H^{1/2}(\Gamma_C)$. Here, we set $W := H^{1/2}(\Gamma_C)$, $\gamma := \gamma_C$ and $G := \{w \in H^{1/2}(\Gamma_C) \mid w \leq 0\}$. In Figure 3, an elastic membrane restricted by an obstacle at the boundary is depicted, which is modeled by the simplified Signorini problem. Here, we have the same configuration as in Figure 2, but with $g(x_0, x_1) := -x_0^2$ describing the obstacle at the boundary.

A finite element discretization of low-order is given as follows: Let \mathcal{T}_i , $i \in \mathbb{N}$, be meshes of Ω consisting of finite numbers of triangles (or quadrangles) such that the intersection $\bar{T}_0 \cap \bar{T}_1$ with $T_0, T_1 \in \mathcal{T}_i$ and $T_0 \neq T_1$ is either empty, a common vertex or a common edge and, moreover, $\bar{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_i} \bar{T}$. We assume that all boundary edges of \mathcal{T}_i are completely contained either in Γ_D , $\Gamma_N \setminus \Gamma_C$ or Γ_C . The maximal diameter $h_i := \max_{T \in \mathcal{T}_i} \text{diam}(T)$ of the triangles in \mathcal{T}_i is called the mesh size of \mathcal{T}_i . We assume that the angles of the triangles are bounded away from zero uniformly in the mesh size h_i . A sequence of low-order finite element discretization spaces is then given by

$$V_i := \{v \in V \mid \forall T \in \mathcal{T}_i : v|_T \in P_1(T)\},$$

where $P_1(T)$ denotes the set of linear functions on T . It is well-known that the functions in V_i are continuous and uniquely defined by the values at the vertices of \mathcal{T}_i , cf. [5]. In particular, there holds for the piecewise linear interpolates $I_i : U \rightarrow V_i$ with $U := H^2(\Omega) \cap V$ defined in the vertices of \mathcal{T}_i that

$$\|v - I_i(v)\|_k \leq c_I h_i^{2-k} \|v\|_2$$

for all $v \in U$ and $k = 0, 1$ [9]. In particular, with $\delta_i(v) := c_I h_i \|v\|_2$ assumption 1 holds if $h_i \rightarrow 0$ as $i \rightarrow \infty$. Note that U is densely contained in V as required in Section 1.

4.1 The obstacle problem

The low-order approximation of K in the obstacle problem is given by

$$K_i := \{v_i \in V_i \mid \forall x \in \mathcal{V}_i: v_i(x) \geq g(x)\},$$

where \mathcal{V}_i is the set of the vertices of \mathcal{T}_i . Obviously, there holds $I_i(v) \in K_i$ for $v \in K \cap U$. Thus, assumption 2 is fulfilled. Since the interpolates I_i are piecewise linear, we have $I_i(g) \leq v_i$ and, therefore, $I_i(g) - v_i \in G$ for all $v_i \in K_i$, provided that $g \in U$. From the Propositions 1.3 and 2.2 as well as Theorem 1.2, we conclude that the sequence $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ of the discretization solutions converges to the solution u .

In [6] it is proven that $u \in H^2(\Omega)$. Moreover, integration by parts yields

$$\langle A(u) - \ell, v \rangle = (-\Delta u - f, v)_0 + (\partial_n u - q, v)_{0, \Gamma_N},$$

where n is the outer normal of Ω . It is well-known that $-\Delta u - f \geq 0$ and $(-\Delta u - f)(g - u) = 0$ as well as $\partial_n u = q$ on Γ_N . Hence,

$$\begin{aligned} & \langle A(u) - \ell, I_i(u) - u_i \rangle \\ &= \langle A(u) - \ell, I_i(u - g) - (u - g) \rangle + \langle A(u) - \ell, u - g \rangle + \langle A(u) - \ell, I_i(g) - u_i \rangle \\ &\leq (-\Delta u - f, I_i(u - g) - (u - g))_0 \\ &\leq c_I \|\Delta u + f\|_0 \|u - g\|_2 h_i^2. \end{aligned}$$

From Theorem 1.4, we conclude the convergence rate $\|u - u_i\|_1 \lesssim h_i$.

With $\mu := (\lambda_i)_-$ for some $\lambda_i \in L^2(\Omega)$ fulfilling (7) and $z := (g - u_i)_+$ we immediately obtain the following a posteriori estimate from Theorem 3.3,

$$\begin{aligned} \|u - u_i\|_1^2 &\lesssim \|\text{Res}_i\|_{\mathbb{V}^*}^2 + \|\lambda_i - (\lambda_i)_-\|_{\mathbb{V}^*}^2 + \|(g - u_i)_+\|_1^2 \\ &\quad + |(\lambda_i, (g - u_i)_+)_0 + ((\lambda_i)_-, u_i - g)_0|, \end{aligned}$$

where we can estimate $\|\text{Res}_i\|_{\mathbb{V}^*}^2$ by a standard error estimate for variational equations.

4.2 The simplified Signorini problem

The low-order approximation of K in the Signorini problem is defined as

$$K_i := \{v_i \in V_i \mid \forall x \in \mathcal{V}_{C,i}: v_i(x) \geq g(x)\}$$

where $\mathcal{V}_{C,i} := \{x \in \mathcal{V}_i \mid x \in \bar{\Gamma}_C\}$. Again, $I_i(v) \in K_i$ is true for $v \in K \cap U$ and, hence, assumption 2 is fulfilled. Since $\gamma_C(I_i(v_g)) - \gamma_C(v_i) \in G$ for all $v_i \in K_i$ (provided that $v_g \in U$ with $\gamma_C(v_g) = g$), we conclude from the Propositions 1.3 and 2.2 as well as

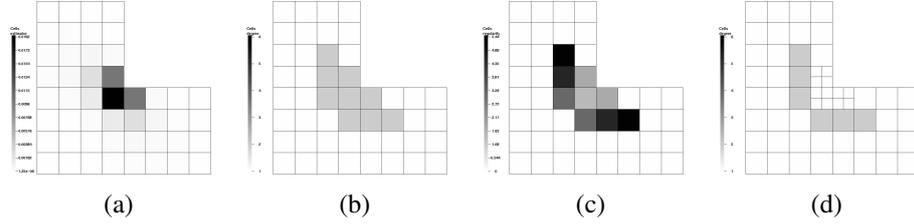


Figure 4: (a) Local error contributions in the ESTIMATE-Step. (b) Portion of mesh elements with highest local error contributions in the MARK-Step. (c) Estimation of the local regularity. (d) Increase of the local polynomial degree and refinement of mesh elements in the REFINE-STEP.

Theorem 1.2 that the sequence $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ of the discretization solutions converges to the solution u . Using similar arguments as for the obstacle problem, we can also show that $\|u - u_i\| \lesssim h_i$, see, for instance, [7, 17].

To derive an a posteriori error estimate, we observe that there exists $z \in V$ with $\gamma_C(z) = (g - \gamma_C(u_i))_+ \in H^{1/2}(\Gamma_C)$ (see, e.g. [12, Ch. I, Cor 2.1]) and $\|z\|_1 = \|(g - \gamma_C(u_{hp}))_+\|_{1/2, \Gamma_C}$. Thus, with $\mu := (\lambda_i)_-$ for some $\lambda_i \in L^2(\Gamma_C)$ fulfilling (7) we directly conclude the following a posteriori error estimate from Theorem 3.3,

$$\begin{aligned} \|u - u_i\|_1^2 \lesssim & \|\text{Res}_i\|_{V^*}^2 + \|\lambda_i - (\lambda_i)_-\|_{-1/2, \Gamma_C}^2 + \|(g - \gamma_C(u_i))_+\|_{1/2, \Gamma_C}^2 \\ & + |(\lambda_i, (g - \gamma_C(u_i))_+)_{0, \Gamma_C} + ((\lambda_i)_-, g - \gamma_C(u_i))_{0, \Gamma_C}|. \end{aligned}$$

Again, $\|\text{Res}_i\|_{V^*}^2$ can be estimated by a standard error estimate for variational equations.

5 Adaptivity based on a posteriori error control

An important application of a posteriori error estimates is to drive adaptive schemes which, roughly speaking, consist in the determination of a sequence $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ of meshes of Ω such that a nearly optimal convergence rate is ensured. Typically, the convergence rate depends on the regularity of the solution u . For instance, the solution of the obstacle problem or the Signorini problem is in $H^2(\Omega)$ [6]. As shown in Section 4 this leads to the algebraic convergence rate $O(h_i)$, which is optimal for low-order discretizations. The optimal convergence rate of higher-order discretizations (i.e. $P_p(T)$ with $p \geq 2$ instead of $P_1(T)$) is $O(h_i^p)$. However, the use of such discretizations for the obstacle problem or the Signorini problem does not lead to this rate as u is not regular enough, i.e. $u \notin H^{p+1}(\Omega)$ in general. Such a reduced regularity often results from local singularities of the solution at certain points such as, for instance, reentrant corners. Fortunately, if such singularities are appropriately resolved by refining those mesh elements

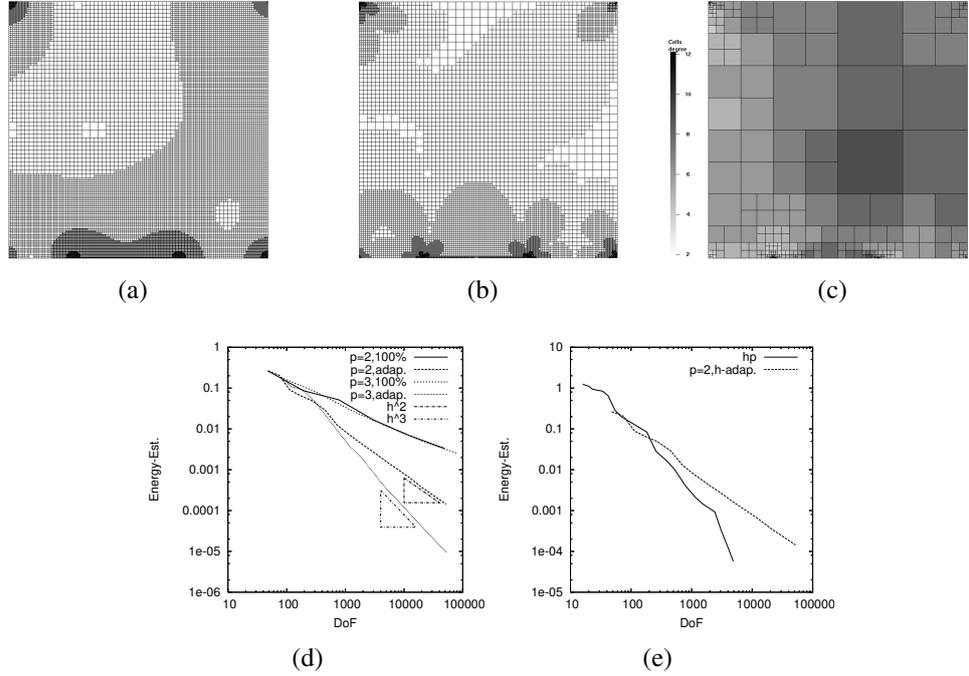


Figure 5: (a) Adaptive finite element mesh for the Signorini problem with polynomial degree $p = 2$. (b) with polynomial degree $p = 3$. (c) hp -adaptive finite element mesh. (d) Optimal algebraic convergence rates for h -adaptive schemes with $p = 2, 3$ and for the non-adaptive scheme with $p = 2, 3$ (100% of the mesh elements are refined). (e) Exponential convergence rates for hp -adaptive schemes.

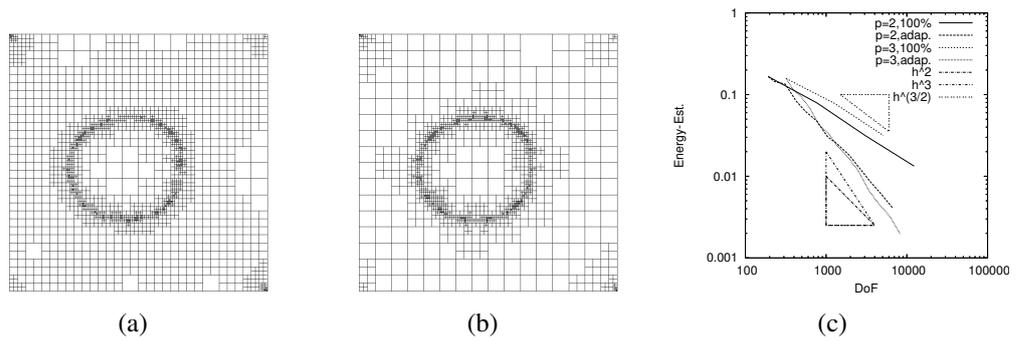


Figure 6: (a) Adaptive finite element mesh for the obstacle problem with polynomial degree $p = 2$. (b) with polynomial degree $p = 3$. (c) Algebraic convergence rates for h -adaptive schemes with $p = 2, 3$ and for the non-adaptive scheme with $p = 2, 3$.

which are located near to the local singularities, a (nearly) optimal convergence rate can often be recovered. In those cases where the locations of the singularities are a priori known this can be done using mesh refinements, for instance, in circles with prescribed radii around these locations [4]. However, the solution of a variational inequality possesses singularities which are unknown a priori since they are typically located at unknown interfaces where, for instance, contact switches to non-contact or gliding switches to sticking or elasticity switches to plasticity. Using a posteriori error estimates η_i such interfaces can be detected provided that these estimates can be decomposed in local error contributions $\eta_{i,T}$, $T \in \mathcal{T}_i$, i.e.

$$\eta_i^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_i} \eta_{i,T}^2.$$

Note that this is possible for the estimates of Section 4.

An adaptive scheme based on a posteriori error control typically consists of a sequence of

SOLVE – ESTIMATE – MARK – REFINE.

In the SOLVE-Step the discretization solution on the finite element mesh \mathcal{T}_i is computed. Then, the discretization error is estimated in the ESTIMATE-Step. In the MARK-Step, a certain portion of those mesh elements with the highest local error contributions is marked for refinement. Finally, the marked elements are refined in the REFINE-Step leading to a new mesh \mathcal{T}_{i+1} . A variant of these so-called h -adaptive schemes are hp -adaptive schemes, in which an additional decision is made in the MARK-Step whether a mesh element should be refined (as in h -adaptive schemes) or the local polynomial degree should be increased. This decision often relies on an estimation of the local regularity of the solution [18]: The polynomial degree is increased if the local regularity is high, otherwise the mesh element is refined. In Figure 4, the ESTIMATE-, MARK- and REFINE-Step of an hp -adaptive strategy is sketched for a finite element mesh of quadrangles resolving a singularity which results from a reentrant corner.

In Figure 5, h - and hp -adaptive finite element meshes (quadrangles with hanging nodes) are shown for the simplified Signorini problem. The discretization solution as well as the approximation of the Lagrange multiplier are computed by a mixed scheme [17]. We see that the points where contact switches to non-contact are resolved by local refinements. Moreover, some corners are resolved, where weak corner singularities are located. In the hp -adaptive finite element mesh we observe local mesh refinements as in the h -adaptive mesh, but also an increase of the polynomial degree (marked by grey colors) away from those points where singularities are located. In the case of h -adaptivity a nearly optimal algebraic convergence rate $O(\text{DoF}^{-p/2})$ is observable which corresponds to $O(h^p)$ provided that u is sufficiently regular and a uniform mesh refinement is used. Here, DoF denotes the number of degrees of freedom, i.e. $\text{DoF} := \dim V_i$. Furthermore, we observe an exponential convergence rate in the case of hp -adaptivity.

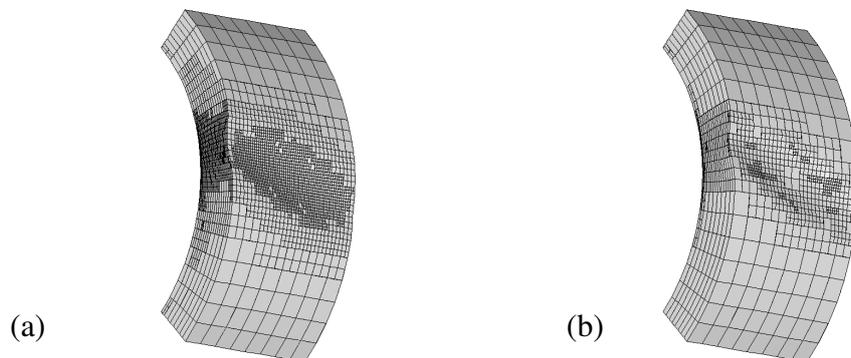


Figure 7: **(a)** Adaptive finite element mesh for the Signorini problem in linear elasticity with polynomial degree $p = 1$. **(b)** with polynomial degree $p = 2$.

In Figure 6, we find similar convergence results for the obstacle problem, when h -adaptive schemes are applied. Here, local refinements occur near to the circled interface from contact to non-contact. We do not expect an exponential convergence rate in the case of hp -adaptivity due to the isotropic mesh refinements.

Finally, in Figure 7 some h -adaptive meshes in 3D are shown for the Signorini problem in linear elasticity, where the contact zone is resolved by local refinements (also see Figure 1). We refer to [23] for more details.

Acknowledgement

The author gratefully acknowledges support from the Sparkling Science research programme of the Federal Ministry of Science, Research and Economy of Austria (BMWF), Sparkling science project “EMMA – Experimentation with mathematical algorithms” (SPA 05/172).

References

- [1] M. Ainsworth and J.T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Wiley, 2000.
- [2] S. Bartels and C. Carstensen. Averaging techniques yield reliable a posteriori finite element error control for obstacle problems. *Numer. Math.*, 99(2):225–249, 2004.
- [3] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.*, 81:637–654, 1973.
- [4] H. Blum. Numerical treatment of corner and crack singularities. Finite element and boundary element techniques from mathematical and engineering point of view, CISM Courses Lect. 301, 171-212, 1988.

- [5] D. Braess. A posteriori error estimators for obstacle problems – another look. *Numer. Math.*, 101(3):415–421, 2005.
- [6] H. Brézis and D. Kinderlehrer. The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities. *Indiana Univ. Math. J.*, 23:831–844, 1974.
- [7] F. Brezzi, W.W. Hager, and P.A. Raviart. Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. Part I. primal theory. *Numer. Math.*, 28:431–443, 1977.
- [8] M. Bürg and A. Schröder. A posteriori error control of hp-finite elements for variational inequalities of the first and second kind. *Comput. Math. Appl.*, 70(12):2783–2802, 2015.
- [9] P.G. Ciarlet. Numerical analysis of the finite element method. *Seminaire de Mathematiques Superieures*, 59. Les Presses de l’Universite de Montreal, 1976.
- [10] G. Duvaut and J.L. Lions. Inequalities in mechanics and physics. Translated from the French by C.W. John. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 219*. Springer, 1976.
- [11] R.S. Falk. Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities. *Math. Comput.*, 28:963–971, 1974.
- [12] R. Glowinski. *Numerical methods for nonlinear variational problems*. 2nd printing. Springer, 2008.
- [13] R. Glowinski, J.-L. Lions, and R. Tremolieres. *Numerical analysis of variational inequalities*. Transl. and rev. ed. *Studies in Mathematics and its Applications*, Vol. 8. North-Holland, 1981.
- [14] W. Han. *A posteriori error analysis via duality theory. With applications in modeling and numerical approximations*. Springer, 2005.
- [15] W. Han and B.D. Reddy. *Plasticity. Mathematical theory and numerical analysis*. Springer, 2nd edition, 2013.
- [16] J. Haslinger and I. Hlavacek. Approximation of the Signorini problem with friction by a mixed finite element method. *J. Math. Anal. Appl.*, 86:99–122, 1982.
- [17] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas, and J. Lovíšek. *Solution of variational inequalities in mechanics*. Springer-Verlag, 1988.
- [18] P. Houston, B. Senior, and E. Süli. Sobolev regularity estimation for hp-adaptive finite element methods. In *Numerical mathematics and advanced applications (Proc. ENUMATH 2001)*, pages 631–656. Springer, 2003.
- [19] N. Kikuchi and J.T. Oden. *Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM, 1988.
- [20] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. *An introduction to variational inequalities and their applications. Reprint of the 1980 original*. SIAM 2000 (reprint of the 1980 original edition).
- [21] A. Schröder. Mixed finite element methods of higher-order for model contact problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(6):2323–2339, 2011.

- [22] A. Schröder. A posteriori error estimates of higher-order finite elements for frictional contact problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 249-252:151–157, 2012.
- [23] A. Schröder, H. Blum, A. Rademacher, and H. Kleemann. Mixed FEM of higher order for contact problems with fiction. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 8(2):302–323, 2011.
- [24] A. Schröder, H. Kleemann, and H. Blum. Mixed finite element methods for two-body contact problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 283:58–70, 2015.
- [25] A. Veerer. Efficient and reliable a posteriori error estimators for elliptic obstacle problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(1):146–167, 2001.
- [26] R. Verfürth. *A posteriori error estimation techniques for finite element methods*. Oxford University Press, 2013.

*Andreas Schröder
Universität Salzburg
Hellbrunner Str. 34
5020 Salzburg
email andreas.schroeder@sbg.ac.at*

Die standardisierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung in Mathematik bzw. Angewandter Mathematik als Abschluss der Sekundarstufe II in Österreich

Eva Sattlberger, Martin Hofer

Bundesministerium für Bildung, Abteilung II/9

Seit dem Schuljahr 2014/2015 ist in Österreich an allgemeinbildenden höheren Schulen (AHS) und seit dem Schuljahr 2015/2016 an berufsbildenden höheren Schulen (BHS) die standardisierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung (SR(D)P) in den beiden Unterrichtsgegenständen Mathematik und Angewandte Mathematik verpflichtend eingeführt. Für die schriftliche Reifeprüfung in Mathematik an AHS wurde ein bildungstheoretisch fundiertes Konzept auf Basis des gültigen Lehrplans erstellt und im Zuge dessen wurden für vier Inhaltsbereiche (*Algebra und Geometrie, Funktionale Abhängigkeiten, Analysis und Wahrscheinlichkeit und Statistik*) Grundkompetenzen formuliert. Das Konzept der SRDP in Angewandter Mathematik (BHS) basiert auf den bildungstheoretischen Grundsätzen, die für diese Unterrichtsgegenstände für die 13. Schulstufe formuliert wurden (vgl. Bildungsstandards Angewandte Mathematik). Dieses Konzept manifestiert sich über die Vielfalt der Bildungswege, fördert unterschiedliche Denk- und Handlungsansätze und schafft ein Potenzial an Qualifikationen, das zu kreativen Problemlösungen befähigt. Die im Zuge der unterschiedlichen Zielsetzungen der beiden Unterrichtsgegenstände verschiedenartigen Stoßrichtungen zeigen sich sowohl in der Aufgabenstruktur als auch in den Richtlinien der Beurteilung. Im Folgenden sollen die einzelnen Konzepte kurz beschrieben sowie erste Ergebnisse aus bereits durchgeführten Klausurterminen dargestellt werden.

1 Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik an AHS

Im Konzept zur SRP in Mathematik an österreichischen Gymnasien wurden die konzeptionellen Überlegungen der „höheren Allgemeinbildung“ von [5] aufgegriffen. Darin wird zum einen präzisiert, wie viel und welche Mathematik Absolventinnen und Absolventen der AHS zu ihrem eigenen Nutzen benötigen und welche Inhalte gesellschaftlich relevant sind. Zum anderen wird für Erziehungsberechtigte, tertiäre (Bildungs-)Institutionen und Abnehmer/innen in der Wirtschaft verdeutlicht, welche mathematischen Inhalte von Schülerinnen und Schülern mindestens erlernt werden und langfristig verfügbar sein sollten, vgl. [15]. „Für Maturantinnen und Maturanten wird die Befähigung zur Kommunikation mit Expertinnen und Experten einerseits und der Allgemeinheit andererseits als das zentrale Lernziel identifiziert“ [6, S. 12].¹

„Um über mathematische Inhalte gewinnbringend kommunizieren zu können, ist sowohl Grund- als auch Reflexionswissen bzw. -vermögen in und mit Mathematik notwendig. Gleichzeitig ist es wichtig, Transferleistungen zu erbringen, d.h., das erlernte Wissen in neuartigen Situationen anwenden zu können.

Unter Grundwissen werden fundierte Kenntnisse hinsichtlich grundlegender (mathematischer) Begriffe, Konzepte, Darstellungsformen und Anwendungsgebiete verstanden. Zudem sollen die Wirkungsweise von Begriffen und Verfahren, ihre Leistung im jeweiligen Kontext oder ihre Grenzen hinterfragt werden können. Auf dieser Grundlage wurden die in [3, 4] formulierten Grundkompetenzen als „sorgsam ausgewählte und gut begründete Kompetenzen, die aufgrund ihrer fachlichen und gesellschaftlichen Relevanz grundlegend und unverzichtbar sind“ [4, S. 6] erarbeitet.“ (zitiert nach [15, S. 19]).

„Um den Nachweis von Grundkompetenzen einer zentralen schriftlichen Überprüfung zugänglich machen zu können, werden Prüfungsaufgaben entwickelt, die definierten Kriterien entsprechen und in einer für alle Schüler/innen unmissverständlichen Sprache formuliert sind.“ [15, S. 19]. Die in der standardisierten Reifeprüfung an AHS eingesetzten Prüfungsaufgaben werden als Typ-1- bzw. Typ-2-Aufgaben bezeichnet und variieren in Bezug auf inhaltlich-strukturelle Merkmale und in Bezug auf mit diesen Aufgaben einhergehende Anforderungen, vgl. [3, S. 23]. Weiters ist zu betonen, dass in der AHS ein Antritt zur SRP in Mathematik verpflichtend ist und ein positives Absolvieren der Abschlussklasse voraussetzt.

Zur Beurteilung der von den Kandidatinnen und Kandidaten im Rahmen der Klausur erbrachten Leistungen wurde ein Modell entwickelt, welches die Vorgaben der geltenden Leistungsbeurteilungsverordnung (LBVO) umsetzt. Dabei kommt den Typ-1-Aufgaben im Rahmen der schriftlichen Prüfung eine wesentliche Rolle zu,

¹ Nähere Ausführungen dazu finden sich in [17] und [15].

da dieser Teil der Klausur entscheidend für eine positive Beurteilung ist. Wird die hinter einer Aufgabe stehende Grundkompetenz nachgewiesen, wird 1 Punkt vergeben. Erfolgt dieser Nachweis nicht, werden 0 Punkte für diese Aufgabe vergeben. Die Typ-2-Aufgaben sind für die Vergabe der Noten *Befriedigend*, *Gut* und *Sehr gut* relevant, wobei Teilaufgaben in diesem Klausurteil gesondert ausgewiesene Komponenten (sogenannte Ausgleichspunkte) enthalten, die zum Ausgleich für die laut LBVO *wesentlichen Bereiche* herangezogen werden können und somit auch für die Erreichung der Note *Genügend* relevant sind. Jede Teilaufgabe wird mit 0, 1 oder 2 Punkten bewertet (auch wieder je nachdem, ob der Nachweis der Grundkompetenz erbracht wurde oder nicht).² Die Beurteilung erfolgt nach einem vorgegebenen Punkteschlüssel. Um die Korrektur und Beurteilung möglichst transparent und vergleichbar zu machen, werden Korrekturanleitungen zu allen Teilaufgaben erstellt, vgl. dazu [3, S. 33].

Für den Haupttermin 2015 (PT1 2015) konnten für die AHS Itemergebnisse von 17.490 Kandidatinnen und Kandidaten ausgewertet werden, für den Haupttermin 2016 (PT1 2016) Itemergebnisse von 16.965 Kandidatinnen und Kandidaten. Abbildung 1 auf der nächsten Seite zeigt die Notenverteilung der Klausur (inkl. Aufschlüsselung nach Geschlecht).

Wie [8] dargestellt, zeigt sich nach ersten Analysen der beiden Haupttermine 2015 und 2016, dass es auf Itemebene erhebliche Schwankungen zwischen den einzelnen Klassen bzw. Unterrichtsgruppen gibt. Die Gründe dafür scheinen vielfältig zu sein und erfordern in den kommenden Jahren genauere (fachliche und fachdidaktische) Untersuchungen.

2 Die standardisierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik an BHS

Das österreichische BHS-Schulsystem ist hochdifferenziert und vereint verschiedene Schulformen mit jeweils unterschiedlichen Anforderungen. Die Differenzierung der berufsbildenden Ausbildungsangebote manifestiert sich in unterschiedlichen Ausbildungszielen, Lehrplänen, Kontexten und Inhalten, in der unterschiedlichen Anzahl und Verteilung von Jahreswochenstunden nach Jahrgang, nicht zuletzt auch in unterschiedlichen Traditionen je nach Schulform. Das Konzept der neuen Reife- und Diplomprüfung aus Angewandter Mathematik sieht die Bildung von Clustern vor, um dieser Differenzierung gerecht zu werden. Grundsätzlich bedeutet Clusterung – sowohl auf inhaltlicher als auch auf Kontextebene – immer eine Reduktion auf den gemeinsamen Durchschnitt. Diesem Umstand wurde bereits

² Da es für die Vergabe von Punkten wichtig ist, dass die Kandidatin/der Kandidat mit der Bearbeitung der Aufgabe nachweisen konnte, dass eine bestimmte Grundkompetenz beherrscht wird, werden die einzelnen Aufgabenstellungen eben mit 0 oder 1 beurteilt, halbe Punkte für „richtige Denkansätze“ [7, S. 26] würden der Intention des Konzepts widersprechen.

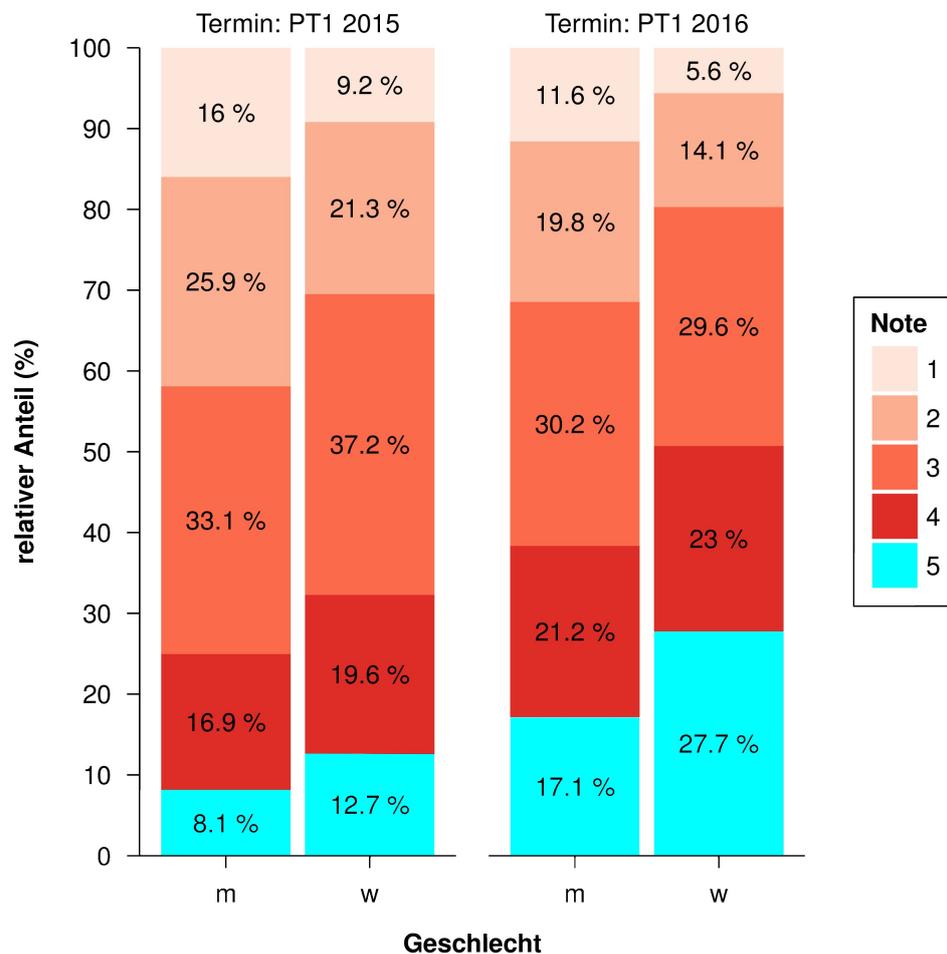


Abbildung 1: Notenverteilung der Prüfungstermine PT1 2015 und PT1 2016 Mathematik (AHS) nach Geschlecht.³

bei der Entwicklung der Bildungsstandards für Angewandte Mathematik Rechnung getragen, die das Grundgerüst des Konzepts der neuen Reife- und Diplomprüfung aus Angewandter Mathematik bilden. Es wurde dabei ein Kompetenzmodell entwickelt, pilotiert und angewendet, das zwischen Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern und schulformspezifischen Kompetenzen (vgl. Kompetenzkataloge für die SRDP in Angewandter Mathematik [2]) unterscheidet. Diese Differenzierung wird auch bei der SRDP in Angewandter Mathematik durch eine Zweiteilung der Prüfung (Teil A und Teil B) abgebildet. Beide Teile werden jedoch stets als Ganzes betrachtet. Das Kompetenzmodell unterscheidet in der Hand-

³ Da die Ergebnisse der SRP in Mathematik durchwegs einen Gendereffekt zuungunsten der Mädchen aufzeigen, konzentrieren sich derzeitige Analysen u.a. auf diese Problematik. Dabei wird davon ausgegangen, dass das Testkonstrukt an sich genderfair ist und bereits bestehende Unterschiede lediglich sichtbar gemacht werden.

lungsdimension vier (*Modellieren/Transferieren, Operieren/Technologieeinsatz, Interpretieren/Dokumentieren* und *Argumentieren/Kommunizieren*) und in der Inhaltsdimension fünf Ausprägungen (Zahlen und Maße, Algebra und Geometrie, Funktionale Zusammenhänge, Analysis, Stochastik). Unter Verwendung dieses Kompetenzmodells wurden Deskriptoren formuliert, die eine Verknüpfung von Handlungs- und Inhaltselementen darstellen und zusammengefasst in den Kompetenzkatalogen für den gemeinsamen Kern und die jeweiligen Cluster die inhaltliche Basis für die SRDP in Angewandter Mathematik bilden.

Die Aufgabenstellungen in Teil A bilden den gemeinsamen Kern der Bildungsstandards gemäß dem Grundkompetenzenkatalog ab:

- enthält mindestens vier voneinander unabhängige Aufgaben
- bildet die Inhalte des Grundkompetenzenkatalogs ab
- liegt ein schulformenübergreifender Kontext zugrunde
- umfasst alle Handlungskompetenzen
- für jede Teilaufgabe werden 0, 1, 2 oder 3 Punkte vergeben.

In Teil B sind insbesondere jene speziellen mathematischen Kompetenzen nachzuweisen, die für die jeweilige Schulform als wesentlich erachtet werden:

- enthält mindestens zwei voneinander unabhängige Aufgaben
- liegt ein schulformspezifischer Kontext zugrunde
- umfasst alle Handlungskompetenzen
- für jede Teilaufgabe werden 0, 1, 2, 3 oder 4 Punkte vergeben.

2.1 Clusterbildung (vgl. Clustereinteilung für die SRDP aus Angewandter Mathematik)

Die Differenzierung der berufsbildenden Ausbildungsangebote manifestiert sich in unterschiedlichen Ausbildungszielen, Lehrplänen, Kontexten und Inhalten, in der unterschiedlichen Anzahl und Verteilung von Jahreswochenstunden nach Jahrgang, nicht zuletzt auch in unterschiedlichen Traditionen je nach Schulform. Das Konzept der neuen Reife- und Diplomprüfung aus Angewandter Mathematik sieht die Bildung von Clustern vor, um dieser Differenzierung gerecht zu werden.

2.2 Mindestanforderungen an die Technologie

Im Berufsleben ist die Verwendung von moderner Technologie beim Anwenden von Mathematik allgegenwärtig. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen und eine Chancengleichheit sicherzustellen, wurden allgemeingültige, produktunabhängige Mindestanforderungen an die verwendete Technologie festgelegt. Folgende Funktionalitäten werden dabei vorausgesetzt:

- Darstellung von Funktionsgraphen
- Möglichkeiten des numerischen Lösens von Gleichungen und Gleichungssystemen
- numerisches Integrieren
- grundlegende Funktionen der Matrizenrechnung
- Funktionen für statistische Kenngrößen, lineare Regression und Korrelation, Binomial- und Normalverteilung.

2.3 Beurteilung

Um eine faire Beurteilung und ein gleichbleibendes Anforderungsniveau der Klausur zu bewerkstelligen, werden die Komplexitäten der zu erreichenden Punkte von Expertinnen und Experten im Rahmen eines Standardsettings anhand des Kompetenzstufenmodells bewertet. Jeder vergebene Punkt in einem Klausurheft ist einer Komplexitätsstufe zugeordnet. Im Beurteilungsmodell für die SRDP in Angewandter Mathematik wird dann zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A* umfasst die unabhängig⁴ erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenmodell.⁵
- *Kompetenzbereich B* umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufe größer 2 aus dem Kompetenzstufenmodell.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (Kompetenzbereich A) stellt die *wesentlichen Bereiche* (gemäß LBVO) eines Klausurhefts dar. Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf einem Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den *wesentlichen Bereichen* wird festgelegt, ab wann die *wesentlichen Bereiche überwiegend (Genügend)* erfüllt sind, d.h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte erreicht werden. Darauf aufbauend, wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt. Um auch für Kandidatinnen und Kandidaten die größtmögliche Transparenz in der Beurteilung zu gewährleisten, wird auf der ersten Seite des

⁴ Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z.B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt), die anschließende Berechnung wäre ein abhängiger Punkt.

⁵ Dieses wurde von Mathematik-Fachdidaktikerinnen und -Fachdidaktikern aus Österreich, Deutschland und der Schweiz erstellt und beschreibt die Handlungskompetenzen je nach Komplexität (1 bis 4).

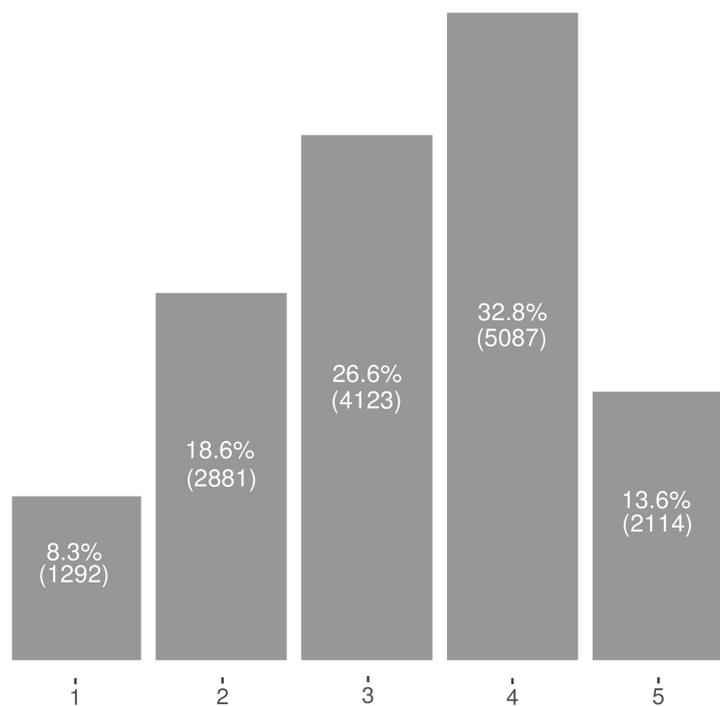


Abbildung 2: Notenverteilung PT1 2016, SRDP Angewandte Mathematik (BHS).

Klausurhefts der Beurteilungsschlüssel angeführt. Zusätzlich wird bei jedem Arbeitsauftrag die zu erreichende Punktezahl ausgewiesen (vgl. PT3 2016, 2. Nebentermin 2015/16). Die Notenverteilung des ersten Haupttermins zur SRDP in Angewandter Mathematik über alle Schulformen wird als erste Benchmark für die weiteren Termine gelten.

3 Umsetzung der Kompetenzorientierung, O-M-A-Modell und Standardsetting

Zur Diskussion um den anscheinend noch immer Widerstand hervorrufenden Kompetenzbegriff sei auf den Grundsatzartikel [2] zu diesem Thema verwiesen; hier soll dies nicht weiter ausgeführt werden. Etwaigen persönlichen Ansichten (vgl. [7]) sei entgegnet, dass Kompetenzorientierung nicht im Gegensatz zu Wissenserwerb stehen muss (dazu sei z.B. auf die Formulierung der Grundkompetenzen im Konzept der AHS verwiesen), dass Kompetenzorientierung nicht automatisch zu einer Senkung des Anspruchsniveaus führen muss (welche wissenschaftlichen Befunde können dafür angeführt werden?) und dass die Verwendung des Wortes *Outputorientierung* nicht zur Folge haben muss, dass das mathematische Verständnis vertrieben wird, vgl. [7, S. 27]. Natürlich ist es möglich, (absichtlich?) missverständliche Behauptungen zu veröffentlichen, viel wichtiger aber wären

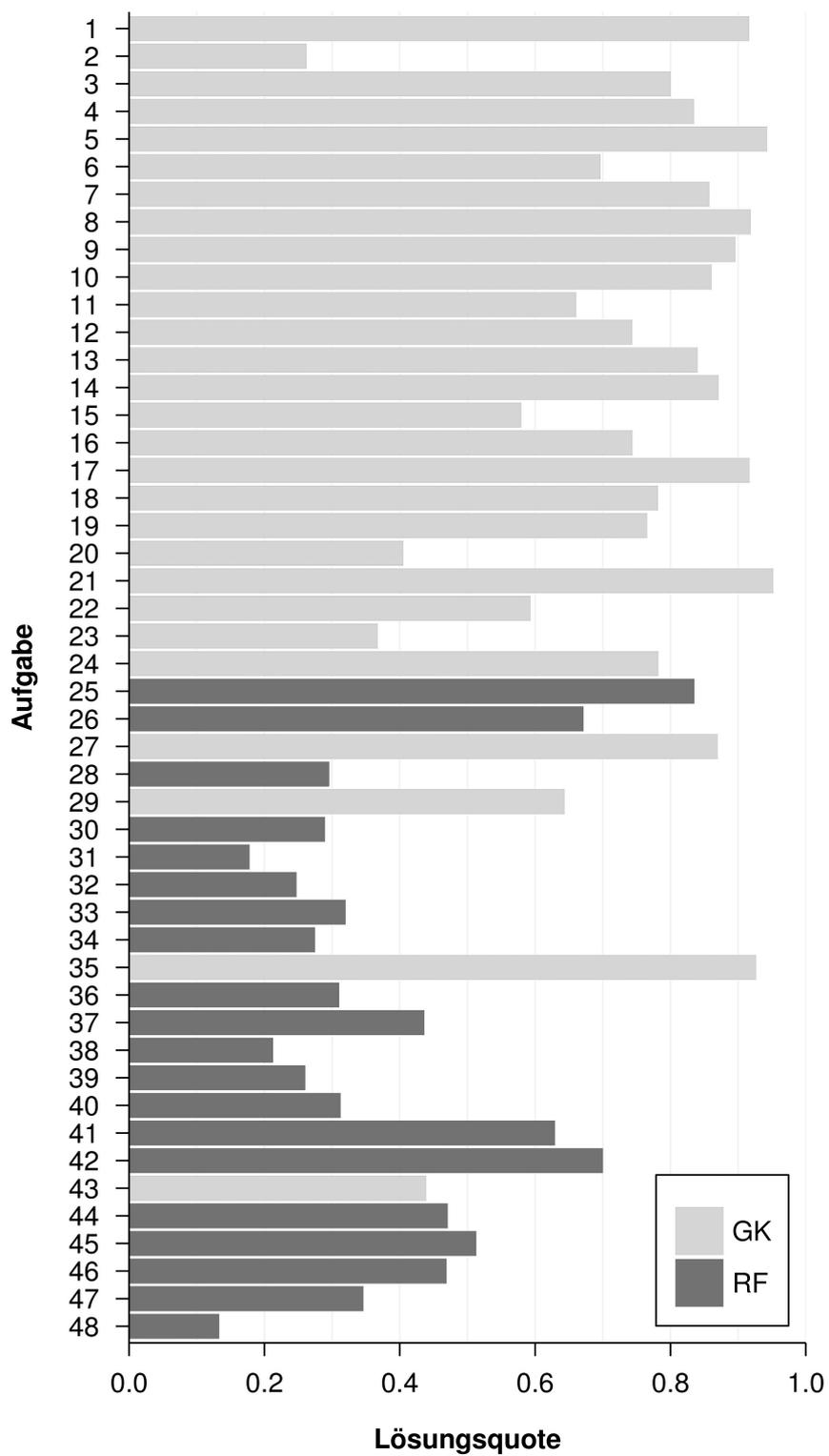


Abbildung 3: Lösungsquoten PT1 2015 (Mathematik AHS) auf Itemebene.

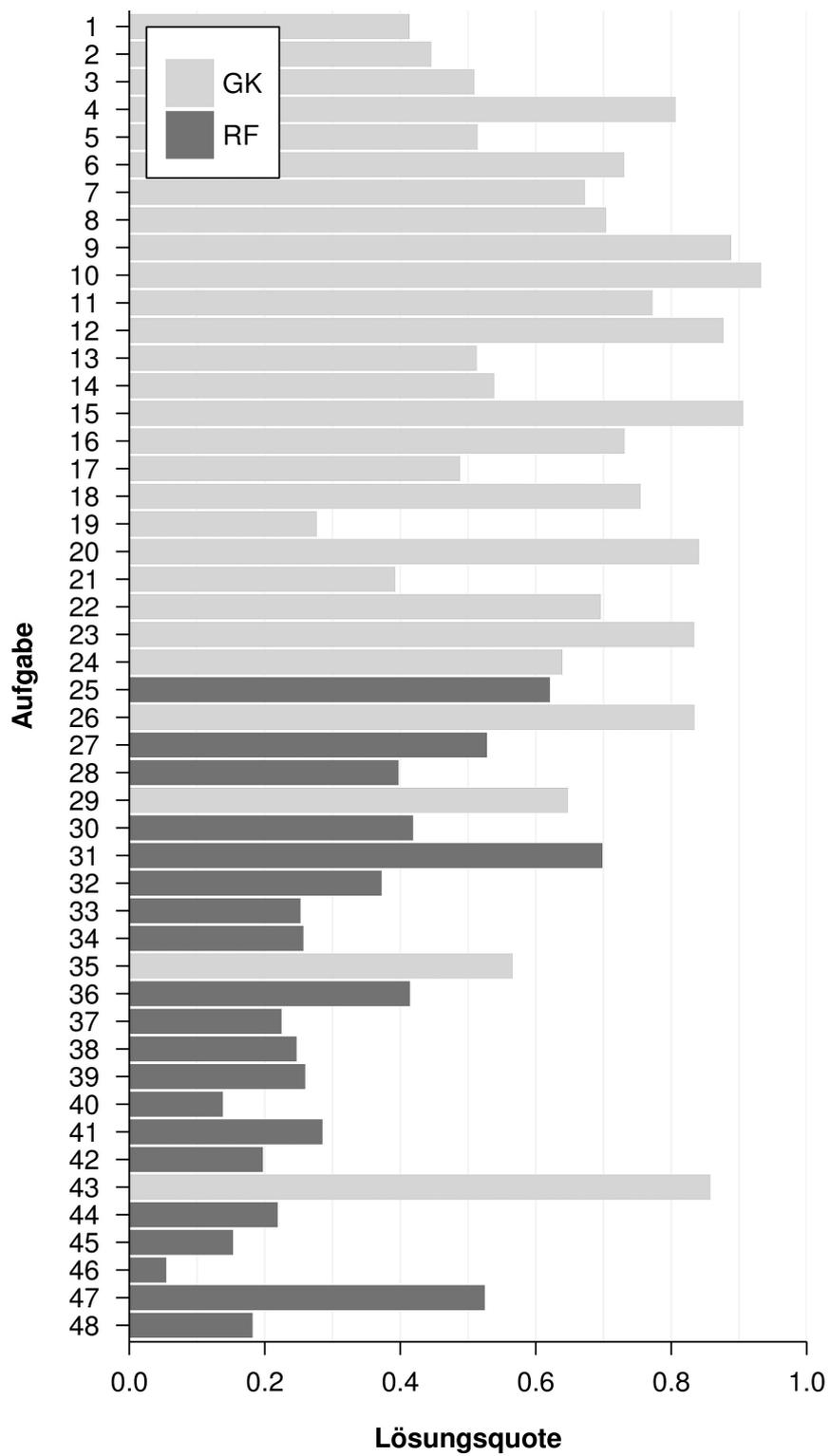


Abbildung 4: Lösungsquoten PT1 2016 (Mathematik AHS) auf Itemebene.

hier – um entsprechende Beiträge auch lesenswert zu machen – faktenbasierte Aussagen, die einer wissenschaftlichen Interpretation unterzogen werden können. Ziel der SR(D)P in Mathematik bzw. Angewandter Mathematik ist es, mathematische Kompetenzen mit geeigneten Methoden zu messen. Die Rahmenbedingungen sind dabei gesetzlich vorgegeben (Prüfungsart, Prüfungsdauer, Beurteilung, Verpflichtung zum Antritt ...). Dabei wird mithilfe einer Aufgabe in Kombination mit einem Aufgabenformat die zu messende Grundkompetenz operationalisiert, vgl. dazu [15, S. 20]. Im Prozess der Aufgabenentwicklung durchläuft jede Aufgabe mehrere Qualitätsschleifen, bevor sie als Prüfungsaufgabe ausgesucht werden kann. In sogenannten *Standardsettings* wird einer Gruppe von Fachkolleginnen und -kollegen eine Auswahl an Aufgaben vorgelegt, die mit bestimmten Kennwerten belegt werden.

Im Rahmen des Standardsettings für die SRDP in Angewandter Mathematik werden abgefragte Handlungskompetenzen nach dem Kompetenzstufenmodell (O-M-A-Modell) von rund 20 Expertinnen und Experten aus BHS-Schulformen in einem mehrstufigen Prozess geratet. Dadurch werden jeder abgefragten Handlungskompetenz bzw. jedem zu erreichenden Punkt eine valide Komplexitätsstufe und ein valider Handlungsbereich zugewiesen.

Zu den Ansprüchen von standardisierten Abschlussprüfungen zählen die Vergleichbarkeit und Transparenz von Anforderungen über verschiedene Klausurtermine hinweg. Dazu wurde für die SR(D)P in Mathematik bzw. Angewandter Mathematik ein Kompetenzstufenmodell (O-M-A-Modell) entwickelt, welches die Einstufung von Prüfungsaufgaben in den Dimensionen *Operieren*, *Modellieren* und *Argumentieren* auf verschiedenen Komplexitätsstufen ermöglicht [9, 14, 16].

Ziele des Einsatzes eines Kompetenzstufenmodells sind:

- Formulierung von Kompetenzstufen, um Testleistungen inhaltlich vergleichbar zu interpretieren
- Orientierungsgrundlage für die Entwicklung und Einstufung von (Lern- und) Prüfungsaufgaben
- theoretisch und empirisch begründeter Erwartungshorizont für die Performanz von Schülerinnen und Schülern.

Die Einstufung der Aufgaben in das O-M-A-Modell ermöglicht es (neben der Zuordnung zu den einzelnen Grundkompetenzen und den Ergebnissen aus der Feldtestung), eine weitere Kennzahl einer Prüfungsaufgabe zu generieren, die als zusätzliches Hilfsmittel zum „Konstanthalten des Schwierigkeitsgrades“ von Klausurheften herangezogen werden kann. Prinzipiell werden Prüfungsaufgaben den Stufen 1 bis 3 zugeordnet, und eine Ausgewogenheit der Handlungsaspekte wird angestrebt.⁶

⁶ Zu weiteren Kriterien der Klausurheftzusammenstellung siehe auch [15, S. 21].

4 Analysen auf Itemebene

4.1 Aufgabenanalyse Mathematik (AHS)

Durch die Erhebung der Daten auf Itemebene (Lösungsquoten) seit dem ersten Prüfungstermin im Schulversuch 2014 und die Rückholung einer Stichprobe von ca. 1.000 Schülerarbeiten im Haupttermin 2016 ist es möglich, genauere Analysen einzelner Aufgaben durchzuführen.

Die Abbildungen 3 und 4 zeigen die Lösungsquoten der einzelnen Items (Teil 1) bzw. Subitems (Teil 2) für die beiden Haupttermine 2015 und 2016. Die hellgrau markierten Säulen stellen dabei die Grundkompetenz- bzw. Ausgleichspunkte dar. Die Betrachtung der Lösungsquoten ermöglicht es, im Rahmen einer fundierten Analyse (Lösungsquoten inkl. rückgeholte Schülerarbeiten) verschiedenste Fragestellungen zu beantworten und deren Ergebnisse dann z.B. im Rahmen von Lehrerfortbildungen im Sinne einer Weiterentwicklung des Unterrichts zu verwenden. Beispielhaft seien hier einige Fragestellungen angeführt:

Gibt es Inhaltsbereiche, in denen Kandidatinnen und Kandidaten besser oder schlechter abschneiden? Gibt es bestimmte Aufgabenstellungen oder einzelne Grundkompetenzen, die über mehrere Termine hinweg hohe bzw. niedrige Lösungsquoten aufweisen? Können durch die Ergebnisse der Prüfungstermine Rückschlüsse auf bestimmte „Gewohnheiten“ im Unterricht gezogen werden? Lässt sich der vorhandene „Gendereffekt“ auf bestimmte Aufgabenstellungen zurückführen?

Beispielhaft im Folgenden zwei Typ-1-Aufgaben aus dem Haupttermin 2016:

Mit 93,2% hat die Aufgabe zu Potenzfunktionen (Abbildung 5, Grundkompetenz FA 3.1: verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können) trotz ihres relativ hohen Formalismus die höchste Lösungsquote aller Aufgabenstellungen aus diesem Termin. Der Grund liegt vermutlich darin, dass derartige Aufgabenstellungen aus dem Unterricht vertraut sind. Anzumerken ist dennoch, dass das Format der Aufgabenstellung (Zuordnung) als eher schwierig einzustufen ist. Hat man aber die dahinterstehende Grundkompetenz verstanden, so kann die Aufgabenbearbeitung strategisch (z.B. teilweise nach dem Ausschließungsprinzip) erfolgen.

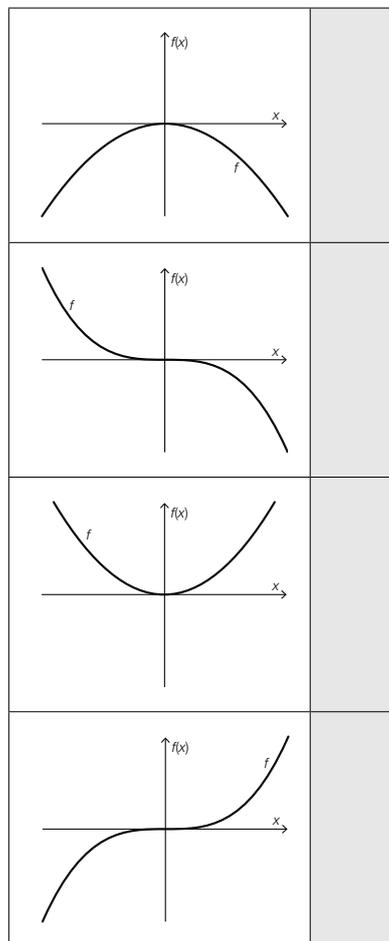
Im krassen Gegensatz dazu steht die Lösungsquote der Histogramm-Aufgabe (Abbildung 6, Grundkompetenz WS 1.2: Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln können). Diese Aufgabe weist mit 27,7% die niedrigste Lösungsquote aller 24 Typ-1-Aufgaben auf. Vom Kontext und der Aufgabenstellung her betrachtet, sollte das Lösen dieser Aufgabenstellung keine Schwierigkeiten bereiten. Auf Basis von Rückmeldungen von Helpdesk und Hotline kann geschlossen werden, dass Histogramme mit unter-

Potenzfunktionen

Gegeben sind die Graphen von vier verschiedenen Potenzfunktionen f mit $f(x) = a \cdot x^z$ sowie sechs Bedingungen für den Parameter a und den Exponenten z . Dabei ist a eine reelle, z eine natürliche Zahl.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die entsprechende Bedingung für den Parameter a und den Exponenten z der Funktionsgleichung (aus A bis F) zu!



A	$a > 0, z = 1$
B	$a > 0, z = 2$
C	$a > 0, z = 3$
D	$a < 0, z = 1$
E	$a < 0, z = 2$
F	$a < 0, z = 3$

Abbildung 5: Potenzfunktionen (Typ-1-Aufgabe 10 aus PT1 2016, Teil 1 Mathematik AHS), Lösungsquote gesamt: 93,2% (männlich: 93,8%, weiblich: 92,8%).

Beladung von LKW

Bei einer Verkehrskontrolle wurde die Beladung von LKW überprüft. 140 der überprüften LKW waren überladen. Details der Kontrolle sind in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst.

Überladung \ddot{U} in Tonnen	$\ddot{U} < 1\text{t}$	$1\text{t} \leq \ddot{U} < 3\text{t}$	$3\text{t} \leq \ddot{U} < 6\text{t}$
Anzahl der LKW	30	50	60

Aufgabenstellung:

Stellen Sie die Daten der obigen Tabelle durch ein Histogramm dar! Dabei sollen die absoluten Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken abgebildet werden.

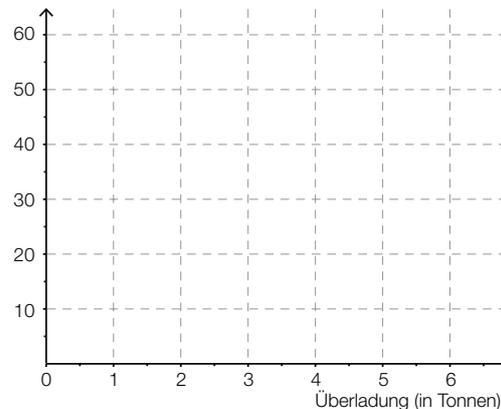


Abbildung 6: Beladung von Lkw (Typ-1-Aufgabe 19 aus PT1 2016, Teil 1 Mathematik AHS), Lösungsquote gesamt: 27,7% (männlich 33,0%, weiblich: 24,4%).

schiedlichen Intervallbreiten im Unterricht eher seltener bearbeitet wurden und daher den Kandidatinnen und Kandidaten weniger vertraut sind. Dennoch gibt es auch hier Rückmeldungen, dass, obwohl die unterschiedlichen Intervallbreiten im Unterricht nicht behandelt wurden, Kandidatinnen und Kandidaten die Aufgabe erfolgreich bearbeiten konnten, weil sie in Kenntnis der dahinterstehenden Grundkompetenz durch Interpretation des Textes und des darin enthaltenen Hinweises in der Lage waren, die Aufgabe korrekt zu lösen.

Im PT2 2016 (erster Nebentermin des Schuljahres 2015/2016 im September 2016) war das Thema einer Typ-2-Aufgabe die Bevölkerungsentwicklung in den USA. Das Spektrum der dahinterliegenden Grundkompetenzen erstreckt sich über die Inhaltsbereiche *Algebra und Geometrie*, *Funktionale Abhängigkeiten* und *Analysis*. Die Subitems bei Typ-2-Aufgaben sind unabhängig voneinander bearbeitbar, sodass das Nichtvorhandensein einer Lösung aus einem Subitem die Bearbeitung eines anderen Subitems nicht unmöglich macht, was andernfalls Verrechnungs-

Bevölkerungswachstum in den USA

Die erste Volkszählung in den USA fand im Jahre 1790 statt. Seit diesem Zeitpunkt werden Volkszählungen im Abstand von zehn Jahren abgehalten. Zwischen den Volkszählungen wird die Zahl der Einwohner/innen durch die Meldeämter ermittelt.

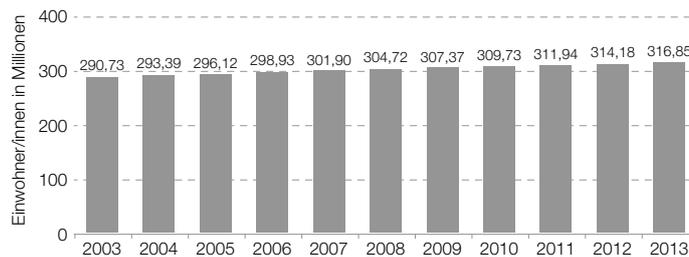
Nachstehend wird ein Überblick über die Bevölkerungsentwicklung in den USA im Zeitraum von 1790 bis 1890 (Tabelle) bzw. 2003 bis 2013 (Grafik) gegeben.

Tabelle: Bevölkerungsentwicklung in den USA von 1790 bis 1890

Jahr	Einwohnerzahl in Millionen	Jahr	Einwohnerzahl in Millionen
1790	3,9	1850	23,2
1800	5,2	1860	31,4
1810	7,2	1870	38,6
1820	9,6	1880	49,3
1830	12,9	1890	62,9
1840	17,1		

Quelle: Keller, G. (2011). *Mathematik in den Life Sciences*. Stuttgart: Ulmer. S. 55.

Grafik: Bevölkerungsentwicklung in den USA von 2003 bis 2013



Datenquelle: <http://de.statista.com/statistik/daten/studie/19320/umfrage/gesamtbevoelkerung-der-usa/> [19.09.2013] (adaptiert).

Für den Zeitraum von 1790 bis 1890 kann die Entwicklung der Zahl der Einwohner/innen der USA näherungsweise durch eine Exponentialfunktion B mit $B(t) = B_0 \cdot a^t$ beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit in Jahren, die seit 1790 vergangen sind, an. $B(t)$ wird in Millionen

Aufgabenstellung:

- a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion B unter Verwendung der Daten aus den beiden Jahren 1790 und 1890!

Interpretieren Sie das bestimmte Integral $\int_0^{50} B'(t) dt$ im gegebenen Zusammenhang!

- b) Die erste Ableitung der Funktion B ist gegeben durch $B'(t) = B_0 \cdot \ln(a) \cdot a^t$.

Geben Sie t^* so an, dass $B'(t^*) = B_0 \cdot \ln(a)$ gilt!

Interpretieren Sie $B'(t^*)$ im Zusammenhang mit dem Bevölkerungswachstum in den USA!

- c) Begründen Sie, warum die Bevölkerungsentwicklung in den USA im Zeitraum von 2003 bis 2013 näherungsweise durch eine lineare Funktion N mit $N(t) = k \cdot t + d$ beschrieben werden kann (dabei gibt t die Zeit in Jahren, die seit 2003 vergangen sind, an)!

Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters k dieser linearen Funktion! Eine Berechnung des Parameters k ist nicht erforderlich.

nachteile bei der Beurteilung mit sich bringen würde. Vom Kontext her passt diese Aufgabe gut in das bildungstheoretische Konzept der SRP in Mathematik AHS, da für die Bearbeitung der Aufgabenstellungen eine bestimmte Situation in mathematische Sprache übersetzt werden muss, um korrekte Aussagen treffen zu können. Teile der Aufgabenstellungen fordern Kandidatinnen und Kandidaten dazu auf, Meinungen zu entwickeln und zu begründen, Expertisen zu beurteilen, zu erstellen und verständlich zu erklären.

Die Kandidatinnen und Kandidaten müssen im Zuge der SRP (AHS) in Mathematik zeigen, dass sie als „höher gebildete Laien“ fungieren können. Um die Fähigkeit zur Kommunikation mit Expertinnen und Experten, welche man als das bildungstheoretische Orientierungsprinzip bezeichnen könnte, in mathematischen Inhalten gewinnbringend einsetzen zu können, ist sowohl Grund- als auch Reflexionswissen bzw. -vermögen in und mit Mathematik notwendig. Bei der Zusammenstellung der Klausuren wird Wert darauf gelegt, auf Basis des Grundkompetenzkatalogs Aufgaben auszuwählen, die dem Konzept der bildungstheoretischen Orientierung genügen und gleichzeitig mathematische Kompetenzen messen, vgl. [3, S. 4].

4.2 Aufgabenanalyse Angewandte Mathematik (BHS)

Die Betrachtung der Lösungsquoten für die im Teil A zu erreichenden Punkte über die unterschiedlichen Schulformen ermöglicht es, im Rahmen einer fundierten Analyse verschiedenste Fragestellungen zu beantworten. Die Ergebnisse können für eine Weiterentwicklung des Unterrichts und auch der Klausur selbst verwendet werden. Beispielhaft seien hier einige Fragestellungen angeführt:

Gibt es Inhaltsbereiche, in denen Kandidatinnen und Kandidaten aus den verschiedenen Schulformen besser oder schlechter abschneiden? Gibt es Handlungsbereiche, in denen Kandidatinnen und Kandidaten aus den verschiedenen Schulformen hohe bzw. niedrige Lösungsquoten aufweisen? Wie korreliert die Lösungshäufigkeit mit dem Rating aus dem Standardsetting?

Mit 85,7% hat die Aufgabe zur Trigonometrie – 6b, Abbildung 9 – (Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern – Teil A, 2.12: Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck durch Sinus, Cosinus und Tangens eines Winkels angeben; Seiten und Winkel anwendungsbezogen berechnen) die zweithöchste Lösungsquote aller Aufgabenstellungen aus diesem Klausurheft. Aus der Analyse im Schulformenvergleich der Lösungshäufigkeiten lässt sich erkennen, dass es hier zu keiner Ausdifferenzierung zwischen den einzelnen Schulformen kommt. Der Grund liegt vermutlich darin, dass der Kontext der Aufgabenstellungen sehr neutral gehalten ist und dass der mathematische Inhalt in Verknüpfung mit der abgefragten Handlungskompetenz *Operieren* in allen Schulformen für die Kandidatinnen und Kandidaten absolut vertraut ist. Die Lösungsquote wird durch das Rating aus dem Standardsetting – Komplexitätsstufe 1 – bestätigt.

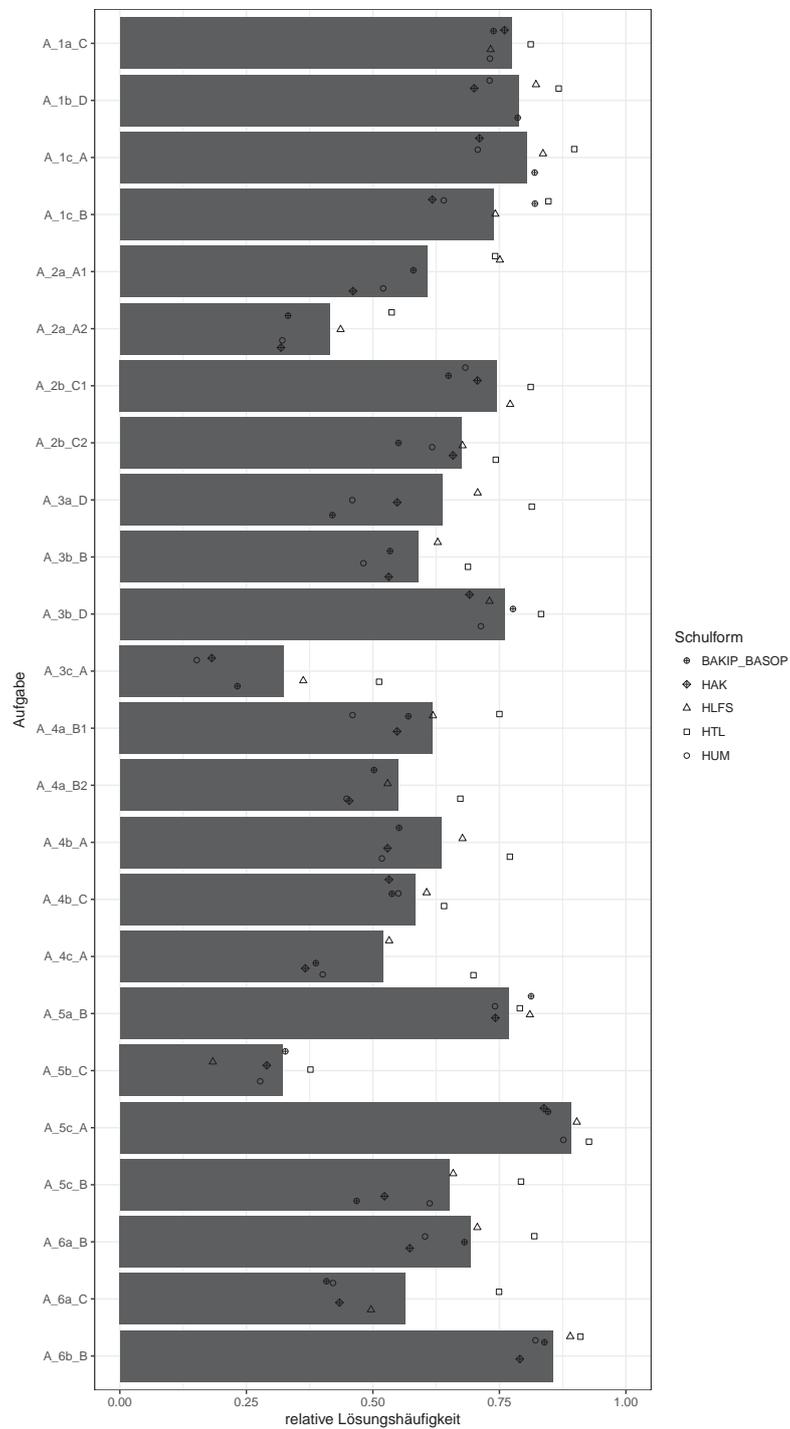
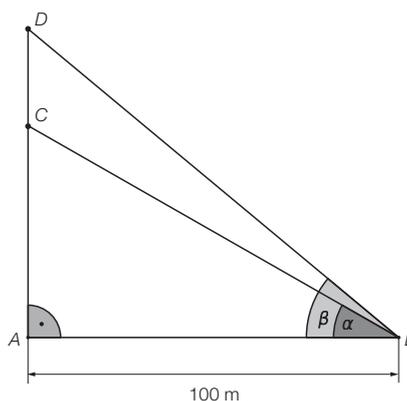


Abbildung 8: Relative Lösungshäufigkeit Teil A PT1 2016 SRDP Angewandte Mathematik (BHS) – durchschnittlich und je Schulform.

Am Fluss

Ein von einem Punkt A senkrecht aufsteigender Ballon wird von einem Punkt B am Flussufer unter dem Höhenwinkel $\alpha = 30^\circ$ gesehen. Etwas später erscheint der Ballon unter dem Höhenwinkel $\beta = 40^\circ$ (siehe nachstehende Skizze).



– Berechnen Sie die Streckenlänge \overline{CD} . [1 Punkt]

Abbildung 9: Aufgabe 6b aus PT1 2016, Teil A (BHS) – Lösungsquote 85,7%.

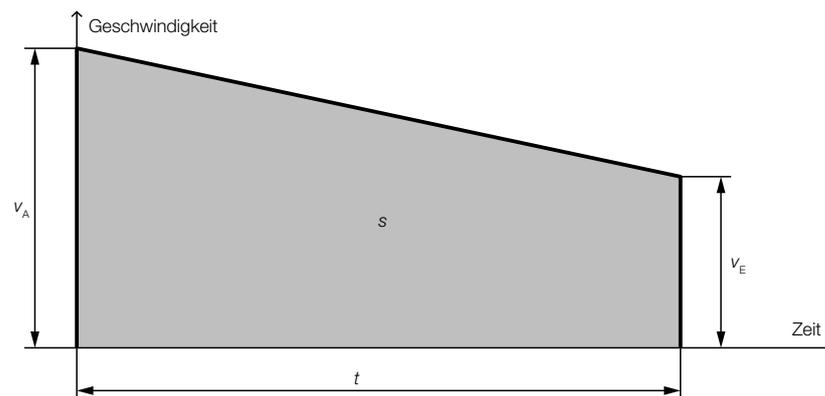
Im Gegensatz dazu steht die Lösungsquote der Bewegungsaufgabe – 3c, Abbildung 10 – (Grundkompetenzen im gemeinsamen Kern – Teil A, 2.5: Formeln aus der elementaren Geometrie anwenden, erstellen und im Kontext interpretieren; 2.6: eine Formel nach einer der variablen Größen umformen und die gegenseitige Abhängigkeit der Größen in einer Formel interpretieren und erklären und 4.5: den Zusammenhang zwischen Funktion und ihrer Ableitungsfunktion bzw. einer Stammfunktion interpretieren und erklären).

Diese Aufgabe weist mit 32,4% die niedrigste Lösungsquote von allen zu erreichenden Punkten aus Teil A des PT1 2016 auf. Der Kontext der Aufgabe sollte für das Lösen keine Schwierigkeiten darstellen, da dieser explizit im Kompetenzkatalog Teil A ausgewiesen ist. Durch die Datenanalyse aus dem Schulformenvergleich lässt sich erkennen, dass die Verknüpfung der abgefragten mathematischen Inhalte in Kombination mit dem Handlungsbereich *Modellieren* eine entsprechend hohe Schwierigkeit generiert, wobei die Kandidatinnen und Kandidaten aus Schulformen mit technischem Schwerpunkt (HTL) eine deutlich höhere Lösungsquote erreichen als die Kandidatinnen und Kandidaten der anderen Schulformen. Das lässt vermuten, dass die Kandidatinnen und Kandidaten aus Schulformen mit technischem Schwerpunkt im Bereich der kompetenzorientierten mehrstufigen Problemlösung über eine bessere Werkzeugkompetenz verfügen als jene Kandidatinnen und Kandidaten, die in ihrer Schulform diesbezüglich weniger Ausbildungszeit zur Verfügung haben. Die Lösungsquote dieser Aufgaben-

Section-Control

Section-Control bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt.

Ein Fahrzeug fährt durch einen Bereich, der durch eine Section-Control überwacht wird. Seine Geschwindigkeit nimmt auf diesem Streckenabschnitt linear ab.



Die Endgeschwindigkeit v_E , die Fahrzeit t und der zurückgelegte Weg s sind bekannt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit v_A des Fahrzeugs:

$$v_A = \underline{\hspace{10em}}$$

[1 Punkt]

Abbildung 10: Aufgabe 3c aus PT1 2016, Teil A (BHS) – Lösungsquote 32,4%.

stellung wird durch das Rating aus dem Standardsetting – Komplexitätsstufe 3 – bestätigt.

Das Aufgabenrating aus dem Standardsetting korreliert mit der durchschnittlichen Lösungshäufigkeit im erwünschten Maße. Dies ermöglicht eine Klausurheftzusammenstellung mit großer Reliabilität in Bezug auf die gleichbleibende Gesamtkomplexität über verschiedene Klausurtermine.

Die bildungstheoretischen Grundsätze der SRDP in Angewandter Mathematik (BHS) fordern von den Kandidatinnen und Kandidaten beim Lösen von Teil B-Aufgaben Kompetenzen, die es ihnen ermöglichen, erworbenes Wissen und Können miteinander zu verbinden und auf reale Problemzusammenhänge kreativ anzuwenden. Die Aufgabenstellungen richten sich dabei nach den Anforderungen der jeweiligen Schulform.

Kondensatoren

- a) Für den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung bei einem Entladevorgang gilt:

$$u_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

t ... Zeit ab Beginn des Entladevorgangs

$u_C(t)$... Kondensatorspannung zum Zeitpunkt t

U_0, τ ... positive Parameter

- Stellen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen dieser Funktion zum Zeitpunkt $t = \tau$ auf. [2 Punkte]
- Zeigen Sie, dass diese Tangente die t -Achse zum Zeitpunkt $t = 2 \cdot \tau$ schneidet. [1 Punkt]

- b) Bei der Entladung eines Kondensators über einen Widerstand R gilt für den Entladestrom:

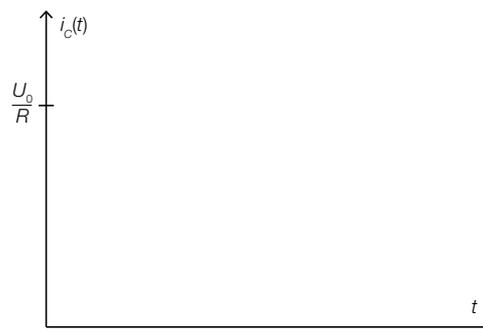
$$i_C(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

t ... Zeit ab Beginn des Entladevorgangs

$i_C(t)$... Stromstärke zum Zeitpunkt t

U_0, R, C ... positive Parameter

- Skizzieren Sie den Funktionsverlauf von i_C im nachstehenden Diagramm. [1 Punkt]



Die in einem Zeitintervall $[0; t_0]$ abfließende Ladung wird mit

$$q(t_0) = \int_0^{t_0} i_C(t) dt$$

ermittelt.

- Veranschaulichen Sie $q(t_0)$ in der von Ihnen erstellten Skizze. [1 Punkt]
- Ermitteln Sie $q(\tau)$ mit $\tau = R \cdot C$. [1 Punkt]

Abbildung 11: Aufgabe 9a und 9b PT1 2016, Cluster 2, Teil B (BHS).

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die obigen Ausführungen sollen im Überblick die Grundlagen und Strukturen der Konzepte der Reife- und Diplomprüfung in Mathematik an AHS und in Angewandter Mathematik an BHS darstellen. Noch einmal sei erwähnt, dass in beiden Prüfungskonzepten Grundkompetenzen formuliert wurden, die jeweils einen Ausschnitt aus den für die jeweiligen Schulformen gültigen Lehrplänen darstellen. Daher dürfen und werden auch nur die Inhalte dieser Ausschnitte für die abschließenden Prüfungen herangezogen. Die Lehrpläne selbst haben ein großes inhaltliches Spektrum, welches insgesamt im Bildungsgang abzudecken ist. Konkrete Umsetzung, Gestaltung und Vertiefung obliegen dabei den Lehrerinnen und Lehrern. Somit können jederzeit individuell auf Klassenebene Schwerpunkte gesetzt werden, die einen größeren operativen Anteil enthalten oder die sich der „anderen“, „wirklichen“ Mathematik – die von manchen in der derzeitigen Prüfungsform so schmerzlich vermisst wird – widmen. Die von Graß zitierte „Teaching-to-the-test-Kultur“ unter Vernachlässigung der „gediegenen Sachorientierung“ [7, S. 42] im Mathematikunterricht muss unseres Erachtens erst empirisch belegt werden (im Übrigen genauso wie jene Aussagen zu mangelnden Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund oder einer anderen Erstsprache als Deutsch, Texte korrekt interpretieren zu können, vgl. [7, S. 27f]).

Für die Zukunft wird es wichtig sein, die Ergebnisse der SR(D)P von den verschiedensten Blickwinkeln her wissenschaftlich zu betrachten. Eine Evaluation der Einführung der SR(D)P nach ein paar Durchgängen ist von enormer Bedeutung, um abschätzen zu können, wo Optimierungspotenzial liegt bzw. in welche Richtung die abschließenden Prüfungen und ihre dahinterliegenden Konzepte (in allen Unterrichtsgegenständen) weiterentwickelt werden können. Es sind Fragen zu stellen, die weniger persönliche Einschätzungen und Befindlichkeiten widerspiegeln, sondern das System als Ganzes betrachten. Die Beantwortung soll Aufklärung darüber verschaffen, ob mit den eingeführten Änderungen auch tatsächlich die intendierten Ziele erreicht werden können. Die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit diesen Fragen ist wichtig, damit Aushandlungsprozesse stattfinden können, deren Ergebnisse so kommuniziert werden können, dass sie nicht sofort aufgrund ihres neuartigen Charakters eine fast schon reflexartige Abwehr erzeugen. Nur durch ein konstruktives Zusammenwirken aller am Prozess beteiligten Kräfte können festgelegte Bildungsziele umgesetzt werden, sodass auf diesen aufbauend Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, unter sich ständig ändernden Rahmenbedingungen zu mündigen Bürgerinnen und Bürgern heranzuwachsen.

Literatur

- [1] BMUKK (Hrsg.): Angewandte Mathematik – BHS, 2009.
<http://www.bildungsstandards.berufsbildendeschulen.at/fileadmin/content/bbs/AGBroschueren/AngewMathe-jan09.pdf>
- [2] BIFIE (Hrsg.): Standardisierte kompetenzorientierte Reife- und Diplomprüfung. Grundlagen – Entwicklung – Implementierung, 2013.
<https://www.srdp.at/downloads/dl/standardisierte-kompetenzorientierte-reifepruefung-reife-und-diplompruefung/>
- [3] BIFIE (Hrsg.): Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen, 2013.
https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Bgleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf
- [4] M. Dangl et al.: Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik“ – Sicherung mathematischer Grundkompetenzen. Institut für Didaktik der Mathematik, Univ. Klagenfurt et al. (Hrsg.), 2009.
http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/sRP-M_September_2009.pdf
- [5] R. Fischer: Höhere Allgemeinbildung. In: F. Fischer (Hrsg.) *Situation – Ursprung der Bildung*. Franz-Fischer-Jahrbuch der Philosophie und Pädagogik 6, S. 151–161. Leipziger Universitätsverlag 2001.
- [6] R. Fischer: Fächerorientierte Allgemeinbildung. Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit ExpertInnen. In R. Fischer et al. (Hrsg.): *Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung*, S. 9–17. Trauner Verlag, Linz 2012.
http://www.uni-klu.ac.at/wiho/downloads/faecherorienterte_Allgemeinbildung.pdf
- [7] K.-H. Graß: Kompetenzorientierung – Gefahren bei der Implementierung und ökonomische Einflüsse. *Int. Math. Nachr.* 232 (2016), 25–45.
- [8] S. Kramer, E. Sattlberger: Habuimus Haupttermin – die SRP in Mathematik (AHS) nach 2015 – wie war’s und wie geht’s weiter? *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* 49 (2017), 60–73.
- [9] T. Linnemann, H.-S. Siller, R. Bruder, T. Hascher, E. Sattlberger, J. Steinfeld: Kompetenzstufenmodellierung am Ende der Sekundarstufe II. In F. Caluori et al. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*, S. 588–591. WTM-Verlag, Münster 2015.
- [10] PT1 2015 (Haupttermin 2014/15), BIFIE 2015.
<https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201415-mathematik-ahs/>
- [11] PT1 2016 (Haupttermin 2015/16), BIFIE 2016.
<https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201516-mathematik-ahs/>
- [12] PT2 2016 (Nebetermin 1 2015/16), BIFIE 2016.
<https://www.srdp.at/downloads/dl/nebetermin-1-201516-mathematik-ahs/>
- [13] PT3 2016 (Nebetermin 2 2015/16), BMB 2017.
<https://www.srdp.at/downloads/dl/nebetermin-2-201516-angewandte-mathematik-bhs-alle-cluster/>
- [14] E. Sattlberger, J. Steinfeld, R. Bruder, T. Linnemann, T. Hascher, H.-S. Siller: Ergeb-

- nisse der Matura 2015 aus der Perspektive des Kompetenzstufenmodells O-M-A. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016*, S. 1403–1406. WTM-Verlag Münster 2016.
- [15] E. Sattlberger, J. Steinfeld: Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik an Gymnasien in Österreich. *Mitt. Ges. Didaktik der Mathematik* 101 (2016), 18–25.
- [16] H.-S. Siller, R. Bruder, T. Linnemann, T. Hascher, E. Sattlberger, J. Steinfeld, M. Schodl: Stufung mathematischer Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe II – eine Konkretisierung. In: J. Roth, J. Ames (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*, S. 1135–1138. WTM-Verlag, Münster 2014.
- [17] H.-S. Siller, R. Bruder, T. Hascher, T. Linnemann, J. Steinfeld, E. Sattlberger: Kompetenzstufenmodell zu Reifeprüfungsaufgaben und deren Eignung für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht. In: S. Keller, C. Reintjes (Hrsg.): *Aufgaben als Schlüssel zur Kompetenz – Didaktische Herausforderung, wissenschaftliche Zugänge und empirische Befunde.*, S. 371–388. Waxmann Verlag, Münster 2016.

*Eva Sattlberger und Martin Hofer
Bundesministerium für Bildung
Stella-Klein-Löw-Weg 15 / Rund Vier B
1020 Wien*

Eva.Sattlberger@bmb.gv.at, Martin.Hofer@bmb.gv.at

Buchbesprechungen

<i>B. Baumgarten</i> : Kompendium der Diskreten Mathematik (W. AUZINGER)	42
<i>J. P. Bourguignon, O. Hijazi, J. L. Milhorat, A. Moroianu, S. Moroianu</i> : A Spinorial Approach to Riemannian and Conformal Geometry (A. ČAP)	42
<i>J. Diestel, A. Spalsbury</i> : The Joys of Haar Measure (P. GRABNER)	43
<i>G. Leng</i> : (Mathematical Olympiad Series, Vol. 12) Geometric Inequalities. Translated by Y. Liu (R. GERETSCHLÄGER)	44
<i>V. L. Hansen</i> : Functional Analysis. Entering Hilbert Space (W. AUZINGER)	44
<i>J. Schultens</i> : Introduction to 3-Manifolds (J. WALLNER)	45
<i>G. Székelyhidi</i> : An Introduction to Extremal Kähler Metrics (J. WALLNER)	46
<i>J.-P. Tignol</i> : Galois' Theory of Algebraic Equations (A. WINTERHOF)	46
<i>R. G. Underwood</i> : Fundamentals of Modern Algebra. A Global Perspective (A. WINTERHOF)	47
<i>B. R. Vogeli (ed.)</i> : Special Secondary Schools for the Mathematically Talented. An International Panorama (R. GERETSCHLÄGER)	47

B. Baumgarten: Kompendium der Diskreten Mathematik. (De Gruyter Studium) De Gruyter, Berlin/Boston, 2014, ix+378 S. ISBN 978-3-486-75697-5 P/b € 34,95.

Das Buch ist inhaltlich umfassend angelegt, die Bezeichnung „Kompendium“ ist also zutreffend, wie bereits ein Blick auf das Inhaltsverzeichnis zeigt. Naturgemäß richtet es sich an Studierende der Mathematik oder Informatik, aber aufgrund seines Umfangs hat es auch etwas vom Charakter einer Referenz für Nicht-Spezialisten (allerdings nicht im Sinne einer Formelsammlung). Von Mengentheorie über Funktionen/Relationen, formaler Logik, Zahlen und Anzahlen über Graphentheorie, Grundlagen der Algebra (inkl. Lineare Algebra) und (diskrete) Wahrscheinlichkeitstheorie ist sozusagen alles da. Z.B. ist das Kapitel über „Zahlen und Anzahlen“ sehr breit gehalten und inkludiert Kombinatorik und Zahlentheorie und auch Themen wie Ordinalzahlen, Abzählbarkeit, etc.

Das didaktische Konzept des Autors ist in dem Sinn streng (und damit eine gewisse Herausforderung für den Studierenden), dass es nicht viel Platz für *hand waving* lässt (Beispiel: Beweis der Kommutativität der Addition natürlicher Zahlen). Dies ist als sinnvoller Kontrast (besser: als wesentliche Ergänzung) zu einer (aus Zeitgründen) manchmal eher pragmatisch-informellen Vorlesungspraxis zu sehen.

Parallel zu diesem strikt formalen Aufbau enthält dieses Kompendium der diskreten Mathematik jedoch auch viele anwendungsorientierte Beispiele, wie z.B. im Abschnitt über diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie.

Die redaktionelle, optische Aufbereitung, insbesondere der Formelsatz, lässt etwas zu wünschen übrig, was sich ein wenig auf die Apperzeption der Inhalte durch die Leserinnen und Leser auswirken dürfte, wie etwa bei der Formulierung des ZFU-Vereinigungssaxioms, $\forall A \exists B (\text{Menge}(B) \wedge \forall X (X \in B \Leftrightarrow \exists Y (X \in Y \wedge Y \in B)))$.

W. Auzinger (Wien)

J. P. Bourguignon, O. Hijazi, J. L. Milhorat, A. Moroianu, S. Moroianu: A Spinorial Approach to Riemannian and Conformal Geometry. (EMS Monographs in Mathematics) EMS, Zürich, 2012, ix+452 S. ISBN 978-3-03719-136-1 H/b € 78,-.

Assuming a basic background in differential geometry and Riemannian geometry, this book offers a detailed and comprehensive introduction to spinorial methods in Riemannian and conformal geometry. The book contains a lot of material which has not been presented in book form before, thus providing a very welcome addition to the literature.

The first part of the book presents in about 120 pages all the basic material on Clifford algebras, spin- and spin^c -structures, Dirac operators, and the analytical background needed to study the spectrum of the Dirac operator and the Laplacian. The second part (about 90 pages) is devoted to the study of the lowest eigenvalue

of the Dirac operator on closed spin manifolds. The cases of Kähler manifolds and of quaternion Kähler manifolds, in which stronger estimates are available, are treated separately.

The third part of the book (again about 90 pages) is devoted to special spinor fields and the special geometries that can be described via spinor fields. Again, the cases of Kähler manifolds and quaternion Kähler manifolds are treated separately. In addition, conformal aspects of spin geometry are discussed in a separate chapter.

The last part of the book (about 120 pages) is devoted to the study of the Dirac spectrum on several model spaces. The first half of this part is formed by an introduction to the representation theory of compact Lie groups. This is then applied to the study of symmetric space structures on spheres as well as complex and quaternionic projective spaces, and to the study of their Dirac spectrum.

A. Čap (Wien)

J. Diestel, A. Spalsbury: The Joys of Haar Measure. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 150) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2013, xiv+320 S. ISBN 978-1-4704-0935-7 H/b \$ 65 € 58,-.

Invariante Maße spielen seit den Anfängen der Maßtheorie eine wichtige Rolle. Das Haar-Maß auf Gruppen ist dabei besonders wichtig, indem es sowohl eine geometrische als auch eine analytische Bedeutung hat. Das vorliegende Buch startet mit der Konstruktion des Lebesgue-Maßes auf \mathbb{R} und \mathbb{R}^n und ist damit Leserinnen und Lesern zugänglich, die umfassende Grundkenntnisse der Analysis erhalten haben. Topologische Gruppen und deren grundlegende Eigenschaften werden bereitgestellt. Auf dieser Basis wird dann zuerst bewiesen, dass es auf jeder kompakten Gruppe ein eindeutig bestimmtes Haar-Maß gibt. Als Anwendungen werden dann homogene Räume und der Satz von Peter-Weyl gezeigt. Die Existenz von invarianten Maßen auf lokalkompakten Gruppen und der Zusammenhang zwischen invarianten Metriken und invarianten Maßen wird als nächstes ausführlich diskutiert.

Abschließende Kapitel behandeln den Satz von Steinlage über die Charakterisierung der Eindeutigkeit des G -invarianten Haar-Maßes auf dem lokalkompakten Raum ausgestattet mit einer gleichstetigen G -Aktion und Oxtobys Resultate über invariante Maße auf polnischen Räumen.

Besonders interessant fand der Rezensent die Zusammenstellung des behandelten Stoffs, der neben den "offensichtlichen" Inhalten behandelt wird. So wird etwa beim Beweis der Existenz einer nicht Lebesgue-messbaren Menge auf einen Satz von F. Bernstein zurückgegriffen, der besagt, dass es eine Menge $B \subset \mathbb{R}$ gibt, sodass jede überabzählbare abgeschlossene Menge mit B und B^c einen nichtleeren Durchschnitt hat. Ebenso wird fast nebenbei die isoperimetrische Ungleichung in \mathbb{R}^n bewiesen.

Insgesamt liegt hier ein mit moderater Vorbildung gut und mit Gewinn lesba-

res Buch vor, das interessierten Studierenden auf Master-Niveau zur Lektüre und Lehrenden als Grundlage von Vorlesungen sehr empfohlen werden kann.

P. Grabner (Graz)

G. Leng: (Mathematical Olympiad Series, Vol. 12) Geometric Inequalities. Translated by Y. Liu. World Scientific, New Jersey, 2016, viii+136 S. ISBN 978-981-4696-48-7 P/b \$ 48,-.

In den letzten beiden Jahren mag die chinesische Mannschaft bei der Internationalen Mathematikolympiade von ihrem scheinbar schon angestammten ersten Platz verdrängt worden sein, aber ihre Spitzenreiterrolle im internationalen Wettbewerbsgeschehen ist ungebrochen. Somit besteht nach wie vor großes Interesse nach den Trainingsmethoden und -unterlagen, die derartige Spitzenleistungen Jahr für Jahr ermöglichen.

Das neu erschienene Buch “Geometric Inequalities” ist bereits der zwölfte Band in der *Mathematical Olympiad Series*, einer Reihe von Unterlagen, die beim Training der international so erfolgreichen chinesischen Mannschaften verwendet werden. Mit ihrer Lektüre bekommt man einen guten Einblick in die Art von Aufgaben, die beim chinesischen Training geübt werden. Freilich sind diese nicht wesentlich anders als die Aufgaben, die anderswo eingesetzt werden, aber dennoch ist dieses Buch jenen zu empfehlen, die sich entweder selbst in Richtung IMO vorbereiten möchten, mit dem Training derartiger Leute beschäftigt sind, oder sich aus sonstigen Gründen für IMO-artige Aufgaben aus dem Bereich der geometrischen Ungleichungen interessieren.

Nach einer Einführung mit (relativ) einfachen Grundlagen steigert sich das Anspruchsniveau der gestellten Aufgaben bis zu einem Schwierigkeitsgrad, wie er von schweren IMO-Aufgaben zu erwarten ist. Da gibt es auf jeden Fall für jeden etwas Neues zu lernen, egal welches Niveau man bereits erreicht haben mag.

R. Geretschläger (Graz)

V. L. Hansen: Functional Analysis. Entering Hilbert Space. World Scientific, New Jersey, 2016, xvi+176 S. ISBN 978-981-4733-92-2 H/b £ 38.

In der aktuellen Auflage wurde der behandelte Stoff so erweitert, dass man tatsächlich ein Lehrbuch zur Funktionalanalysis vor sich hat (nicht ausschließlich auf Hilbertraum-Theorie fokussiert). Im ersten Kapitel werden metrische und normierte Räume samt ihren wesentlichen Eigenschaften eingeführt und einige klassische Resultate bewiesen (bis hin zum Satz von Hahn-Banach). Nach der Diskussion von L^p -Räumen, Vervollständigung, etc. wird ab Kapitel 3 die abstrakte Theorie der Hilberträume entwickelt. Die weiterführenden Kapitel sind der Spektraltheorie und Fredholm-Operatoren gewidmet.

Das Buch ist sehr gut lesbar und notationell konsistent verfasst und daher als Einführung in die abstrakten Konzepte sehr gut geeignet. Positiv zu erwähnen

ist auch die inkludierte Sammlung von weit über 100 sorgfältig ausgewählten Übungsaufgaben. Andererseits werden relevante Anwendungen weitgehend übergangen, wie etwa trigonometrische Fourierreihen in L^2 . Derartige Ergänzungen würden einer allfälligen Neuauflage sicher guttun.

W. Auzinger (Wien)

J. Schultens: Introduction to 3-Manifolds. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 151) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014, x+286 S. ISBN 978-1-4704-1020-9 H/b \$ 67 € 67,-.

This book is a detailed survey of concepts, methods and results relevant to 2-manifolds and 3-manifolds. It starts with a discussion of the different categories of manifolds and their equivalence: In dimensions 2 and 3, the forgetful functor which assigns to a differentiable manifold a topological manifold is an isomorphism, and likewise for triangulated manifolds. Like other “hard” theorems contained in this book, the proof is not given, but the readers are instead shown how the result is employed in the investigation of 3-manifolds.

The next chapters are on surfaces (classification, coverings, the mapping class group, ...), 3-manifolds (Schönflies theorem, decomposition of manifolds, incompressible surfaces, Dehn’s lemma, ...), Knots and their relation to 3-manifolds (knot invariants, the knot complement and its fundamentalgroup, coverings, ...). The next chapters are about different ways a 3-manifold can be decomposed into simpler pieces and results related to such decompositions. Chapter 5 deals with triangulated manifolds, presenting Haken’s normal surface theory and proving, among other things, the uniqueness of the prime decomposition of compact orientable 3-manifolds.

Chapter 6 on Heegard splittings deals with the decomposition of 3-manifolds into handlebodies, showing e.g. Waldhausen’s theorem on the unique decomposition of the 3-sphere of any given genus. The material in this chapter is not easily found in other books. The book concludes with a survey of “further topics” (hyperbolic geometry, Dehn surgery, and others), and appendices on “general position” and Morse functions.

The indented audience of this book is graduate students and researchers who want to learn about 3-manifold theory. The author concentrates on presenting results and techniques, leaving out proofs unless they provide a good way to demonstrate the techniques presented before. In this way the reader can acquire a working knowledge of the tools necessary for own research in this area.

J. Wallner (Graz)

G. Székelyhidi: An Introduction to Extremal Kähler Metrics. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 152) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2014, xvi+192 S. ISBN 978-1-4704-1047-6 H/b \$ 57 € 51,-.

The topic of this book is canonical metrics, or “best” metrics, on Kähler manifolds, and thus it deals with a mixture of differential geometry and complex algebraic geometry. One particular result, already mentioned on the first page of the introduction, illustrates the flavour of this work very well: “If M admits a constant scalar curvature-Kähler (cscK) metric in $c_1(L)$ for an ample line bundle $L \rightarrow M$ and if M has no non-trivial holomorphic vector fields, then the pair (M, L) is stable.” Here c_1 is the first Chern class. The result is one direction of a central conjecture in the field which was formulated by Shing-Tung Yau, Gang Tian, and Simon Donaldson.

The individual chapters are concerned with the following topics: 1. An introduction to Kähler geometry, 2. Analytic preliminaries (on elliptic operators), 3. Kähler-Einstein metrics, with a proof of Yau’s theorem on the solution of the complex Monge-Ampere equation, 4. Extremal metrics, 5. Moment maps and geometric invariant theory, including the Kempf-Ness theorem, which relates quotient constructions in symplectic geometry and algebraic geometry, 6. K-Stability, starting with an interpretation of scalar curvature as a moment map, 7. The Bergman kernel, which links algebraic and differential geometry, 8. cscK metrics on blow-ups.

This book grew out of lecture notes written for graduate students at the University of Notre Dame. It will be appreciated by students and researchers with a solid background in complex algebraic geometry, and will reward its readers with a wealth of material and a thorough discussion of main developments in the field.

J. Wallner (Graz)

J.-P. Tignol: Galois’ Theory of Algebraic Equations. World Scientific, New Jersey, 2016, xvi+308 S. ISBN 978-981-4704-69-4 H/b £ 38,-.

This is the second edition of Tignol’s book from 2001 where the chapter on Galois was rewritten and the exposition was improved. An earlier version of this book was published 1988.

This beautiful book gives a detailed account of the development of the theory of algebraic equations from its ancient origin via the work of Cardano, Lagrange, Vandermonde, Gauss and Abel to Galois’ completion. The book is accessible to undergraduate students.

A. Winterhof (Linz)

R. G. Underwood: Fundamentals of Modern Algebra. A Global Perspective. World Scientific, New Jersey, 2016, x+220 S. ISBN 978-981-4730-28-0 H/b £ 63,-.

This textbook provides a concise introduction to fundamental algebraic structures and is meant for first-year graduate students assuming only familiarity with linear algebra. It consists of five chapters devoted to groups, rings, modules, simple algebraic extension fields and finite fields. Each chapter begins with a road map for the reader and ends with a collection of exercises which makes this book particularly valuable.

A. Winterhof (Linz)

B. R. Vogeli (ed.): Special Secondary Schools for the Mathematically Talented. An International Panorama. (Series on Mathematics Education Vol. 12) World Scientific, New Jersey, 2016, xvi+437 S. ISBN 978-981-4667-46-3 H/b £ 117,-.

In Österreich gibt es zwar eine Vielzahl von Schulen, die sich besonders nach den Bedürfnissen von Schülerinnen und Schülern richten, deren Interessensschwerpunkte in wirtschaftlicher, künstlerischer oder technischer Richtung liegen, oder die besondere Begabung für das Skifahren oder das Fußballspiel zeigen, aber nicht für jene mit ausgeprägtem mathematischen Talent. Das ist in vielen Ländern anders. In diesem Buch wird ein Überblick über 100 Schulen in 20 Ländern gegeben, die sich besonders um die Förderung mathematischer Talente kümmern. Diese Schulen finden sich auf (fast) allen Kontinenten und in Ländern mit den unterschiedlichsten Gesellschaftssystemen.

Einen solchen Überblick über derartige Schulen hat es in diesem Ausmaß bisher nicht gegeben. Während es auch hier nicht möglich ist, alle derzeit existenten Schulen mit mathematischem Schwerpunkt zu inkludieren, ist der hier gebotene Überblick doch der breiteste, den es bisher auf diesem Gebiet gab.

Da hier erst einmal ein Überblick über bereits existierende Schulen geboten wird, handelt es sich bei diesem Band nicht etwa um eine vollständige Untersuchung über Vor- und Nachteile derartiger Schulen. Dieses Thema wird allerdings sehr wohl an einigen Stellen angeschnitten, und die verschiedenen pro- und contra-Argumente zum Thema schulischer Spezialbegabungsförderung werden jedenfalls zur weiteren Diskussion (und zum eigenen Nachdenken des Lesers) angeboten.

Die Lektüre dieses Buchs wäre besonders Schulpolitikern zu empfehlen, die sich Sorge um den Nachwuchs in den MINT-Fächern machen. Interessant sollte es auch für alle fachdidaktisch engagierten Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler sein. Zumindest sollte allen Personen in diesen Fachgruppen bekannt sein, dass es derartige Ansätze in vielen Ländern dieser Welt gibt, um eine informierte Diskussion über die weitere Entwicklung unseres Schulsystems zu ermöglichen.

R. Geretschläger (Graz)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Peter M. Gruber 1941–2017

Am 7. März 2017 ist Peter Gruber, em.o.Univ. Prof. der TU Wien, im 76. Lebensjahr verstorben. Er war wirkliches Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Träger zahlreicher Ehrungen und Ehrenmitglied der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. Für das nächste Heft der IMN ist ein ausführlicher Nachruf geplant.

Persönliches

Prof. Gerard Baron (TU Wien) erhielt am 10.3.2017 das Große Ehrenzeichen für Verdienste um die Republik Österreich. Damit wurde insbesondere seine Tätigkeit im Rahmen der Österreichischen Mathematikolympiade gewürdigt. Die Redaktion der IMN gratuliert herzlich zu dieser Ehrung.

Protokoll der Generalversammlung der ÖMG am 18.11.2016, TU Wien

Zeit: Freitag, 18.11.2016, 16:00 Uhr.

Ort: TU Wien, Freihaus HS 7, Wiedner Hauptstr. 8-10, 1040 Wien

Tagesordnung:

1. Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit
2. Berichte des Vorsitzenden, des Kassiers und weiterer Vorstandsmitglieder
3. Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands
4. Berichte aus den Landessektionen und den Kommissionen
5. Organisatorische Umstellungen der ÖMG, ÖMG-Datenbank
6. Veranstaltungen und Fördermaßnahmen der ÖMG
7. Wahlen: Landessektionsvorsitzende und Beiratsmitglieder 2017–2018, Nachnominierung Didaktikkommission
8. Allfälliges

TOP 1. Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit. Der Vorsitzende, M. Oberguggenberger, begrüßt die Anwesenden und stellt die Beschlussfähigkeit fest.

TOP 2. Berichte des Vorsitzenden, des Kassiers und weiterer Vorstandsmitglieder. M. Oberguggenberger berichtet zunächst über die Neuausrichtung der Vergabe der Schüler- und Schülerinnenpreise, der Studienpreise und des Förderungspreises sowie der Generalversammlung im Rahmen eines *Tages der Mathematik*. Er dankt dem Planungsteam, bestehend aus C. Krattenthaler, A. Ostermann und W. Woess, für seine Arbeit sowie G. Schranz-Kirlinger für die Übernahme der lokalen Organisation. In diesem neuen Format konnten die Preisverleihungen nun öffentlich durchgeführt werden. Das Programm wurde durch zwei wissenschaftliche Vorträge eingerahmt.

Mitgliederstand: M. Oberguggenberger berichtet weiter, dass die ÖMG aktuell 570 Mitglieder hat. Dies bedeutet eine deutliche Reduktion im Vergleich zum Vorjahr, welche durch die Bereinigung der Mitgliederdatenbank entstanden ist. Die Anzahl der ausländischen Mitglieder beträgt dabei 93, die Anzahl der Ehrenmitglieder liegt bei 6; zudem gibt es 18 institutionelle Mitglieder (Schulen, Bibliotheken und Institute). Seit vergangenem Jahr sind 10 Beitritte und 5 Austritte zu verzeichnen gewesen. Soweit der ÖMG bekannt, sind zwei Mitglieder verstorben: Franz Ziegler (gest. am 4.1.2016) und Hubert Unfried (gest. am 21.2.2016). In einer Schweigeminute wird der verstorbenen Mitglieder gedacht.

Mathe-Brief: Oberguggenberger berichtet, dass der Mathe-Brief hervorragend läuft. Derzeit sind die folgenden Personen aktiv in der Redaktion beteiligt: G. Glaeser, W. Janous, G. Helmberg, B. Krön, G. Pilz, F. Schweiger, L. Summerer und J. Wallner. Es gibt aktuell 264 Abonnenten (im Vergleich zu 255 aus dem Vorjahr).

Tagungen: Oberguggenberger berichtet über diverse Veranstaltungen, welche von der ÖMG unterstützt, ausgerichtet oder mitorganisiert werden: Die CSASC-Tagung hat in Barcelona von 20.–23.9.2016 mit 149 Teilnehmern stattgefunden. Die Veranstaltung war dank der umsichtigen Organisation der katalanischen Kollegen (unter Leitung von Xavier Jarque) sehr erfolgreich. Für den von 11.–15. September 2017 in Salzburg stattfindenden ÖMG-DMV-Kongress ist nun die Konferenz-Webseite online. Der Link lautet <http://oemg-dmv-2017.sbg.ac.at>. Die Konferenzgebühr für ÖMG-Mitglieder beläuft sich auf 190 € (vor dem Stichtag 20.4.2017) bzw. 220 € (ab 1.5.2017). Die Registrierung beginnt am 1.1.2017 und endet am 31.7.2017. Ein Aufruf zu Vorschlägen für Minisymposia (max. 6–8) wird von M. Oberguggenberger noch ausgesandt werden; Vorschläge können bis 15.1.2017 eingereicht werden. Weitere Details und Informationen findet man auf der genannten Kongress-Homepage. Die nächste CSASC findet 2018 in Bratislava statt (Organisator: Roman Nedela). Im selben Jahr findet das General Meeting of European Women in Mathematics in Graz statt (Mitorganisatorin: Karin Baur); die

ÖMG finanziert dabei eine Hauptvortragende. Die nächste ÖMG-Tagung 2019 befindet sich in der frühen Planungsphase; Details werden noch bekannt gegeben. Der ÖMG-DMV-Kongress 2021 soll möglicherweise in Passau stattfinden; die Terminplanung ist aktuell in Diskussion.

Preise: Das Preiskomitee für die Schüler- und Schülerinnenpreise wurde von G. Schranz-Kirlinger geleitet. Es hat 16 Einreichungen (13m/3w) gegeben – siehe den Artikel auf S. 57 in diesen *IMN*. Die Kommission für den Studienpreis wurde von W. Woess geleitet. Es wurden 5 Dissertationen und 2 Masterarbeiten (5m/2w) eingereicht. Die folgenden Preise wurden vergeben: *Dominik Gruber* (Nominierung durch G. Arzhantseva) *Infinitely presented graphical small cancellation groups: Coarse embeddings, acylindrical hyperbolicity, and subgroup constructions*. Universität Wien, Arbeitsgebiet Geometrische Gruppentheorie. *Benjamin Hackl* (Nominierung durch C. Heuberger): *Asymptotic Analysis of Lattice Paths and Related Structures*. Universität Klagenfurt, Arbeitsgebiete Kombinatorik von Gitterpfaden, Methoden der komplexen Analysis und Querverbindung zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Kommission für den Förderungspreis wurde von B. Kaltenbacher geleitet. Es wurden 3 Personen nominiert. Der Preis wurde an *Aleksey Kostenko* vergeben, der von G. Teschl nominiert wurde (Arbeitsgebiete: Operatortheorie, Spektraltheorie, Mathematische Physik).

Bericht des Kassiers: A. Ostermann stellt die Zahlen vor und erklärt die Änderungen im Vergleich zu den Zahlen aus den Vorjahren. Zudem gibt er einen Überblick über das Vermögen der Gesellschaft zum Stichtag 31.12.2016. Schließlich werden noch die Vermögen der Landessektionen dargestellt. Weitere Berichte von Vorstandsmitgliedern gibt es nicht.

M. Drmota stellt den Antrag, den Vorstand zu entlasten. Der Antrag wird auf TOP 3 verschoben, da zunächst der Bericht der Rechnungsprüfer erfolgen muss.

TOP 3. Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands. P. Szmolyan stellt fest, dass die Übersiedlung der Agenden nach Innsbruck vorbildlich funktioniert hat. Alle Daten wurden eingesehen und von den Rechnungsprüfern als richtig empfunden. Der Antrag von M. Drmota zur Entlastung wird von der Generalversammlung einstimmig angenommen.

TOP 4. Berichte aus den Landessektionen und den Kommissionen.

(a) *Steiermark:* W. Woess bedankt sich zunächst für die Benennung als *steirische* und nicht als Grazer Sektion. Er berichtet, dass die Gelder der Landessektion vorsichtig, aber kontinuierlich ausgegeben werden. Es werden unter anderem Tagungen unterstützt, was nicht im Widerspruch zur Haltung der Gesamt-ÖMG steht, indem Kosten übernommen werden, welche nicht von anderer Stelle bezahlt werden dürfen. So wurde z.B. ein Discrete Mathematics Day unterstützt. Dort wurde die musikalische Umrahmung bezahlt, wobei die Sängerin (Mathematikerin L. Cristea) kostenlos aufgetreten ist. Woess kündigt an, dass nach dieser Periode

die Leitung der Landesektion an M. Kang abgegeben werden soll. M. Oberguggenberger bestätigt, dass die Vorgaben der Nichtförderung von Tagungen nicht auf die Landesektionen angewandt werden müssen.

(b) *Tirol/Vorarlberg*: H.-P. Schröcker berichtet, dass die Mathematikolympiade sowie die Austrian Numerical Analysis Days unterstützt wurden. Die Professur „Stochastik“ befindet sich noch in der Verhandlungsphase, die bald abgeschlossen werden soll.

(c) *Kärnten*: B. Kaltenbacher berichtet für C. Pötzsche über die Aktivitäten in Kärnten. Es soll bald mit der Ausschreibung einer §99-Professur für „Stochastische Prozesse“ begonnen werden. Die Evaluierung des Instituts hat diese Woche unter Beteiligung von ÖMG-Mitgliedern stattgefunden, was als sehr positives Erlebnis wahrgenommen wurde.

(d) *Oberösterreich*: F. Pillichshammer berichtet, dass im Rahmen der Nachwuchsförderung die Projektwoche Angewandte Mathematik (mit 80 Schülerinnen und Schülern) sowie der Mathematik-Teamwettbewerb *Náboj* wieder unterstützt wurde. Die Besetzung der Professur „Mathematische Methoden in Medizin und Biowissenschaften“ ist noch offen; Verhandlungen mit dem Listenersten finden gerade statt. Die Nachfolge Clement ist ebenfalls noch offen. Am RICAM hat im Herbst ein Special Semester on Computational Methods in Science and Engineering stattgefunden.

(e) *Salzburg*: Es hat eine Reihe von Workshops stattgefunden (unter anderem: Computational aspects of Diophantine equations, The total variation flow and related nonlinear evolution problems, Salzburg workshop on dependence models & copulas, International statistics workshop Salzburg 2016), wobei keine ÖMG-Finanzierung notwendig war. Der Staatspreis *Award of Excellence* wurde an Alexander Bors für seine an der Universität Salzburg verfasste Dissertation verliehen. Personell hat es keine Änderungen gegeben. C. Fuchs berichtet noch kurz über den Stand der Planungen für den ÖMG-DMV-Kongress 2017 in Salzburg; er lädt sehr herzlich zur Teilnahme am Kongress ein und äußert die Hoffnung, viele Kolleginnen und Kollegen in Salzburg begrüßen zu dürfen. B. Kaltenbacher ergänzt mit einem Aufruf zur Teilnahme an der Studierendenkonferenz 2017, die im Rahmen dieser Tagung stattfinden wird.

(f) *Burgenland, Niederösterreich, Wien*: Der „Entwicklungsverbund Ost“ hat dieses Semester mit dem neuen Lehramtsstudium begonnen (beteiligt sind die Universität Wien sowie mehrere pädagogische Hochschulen aus der Clusterregion Ost); die neue Zusammenarbeit funktioniert gut. Die Nachfolge Schwermer wurde als Universitätsprofessur für Algebra und Zahlentheorie ausgeschrieben. Zudem gibt es eine neue Laufbahnstelle für Analysis und/oder Geometrie. An der TU Wien gibt es derzeit zwei offene Laufbahnstellen (für Algebra und für Optimization with PDEs).

Bericht aus der Didaktikkommission: H. Humenberger berichtet über den neuen Lehrplan, der semesterweise je nach Einstiegsdatum gültig wird. Die Zusammenarbeit mit dem *bife* bei der Begutachtung der Maturaaufgaben funktioniert sehr gut; dazu werden noch dringend Fachmathematiker gesucht (3–4 Personen österreichweit), die die Maturaaufgaben auf fachliche Richtigkeit und Verständlichkeit durchsehen sollen. M. Goldstern fragt nach, ob Aufgaben auch ausgesondert werden; Humenberger klärt darüber auf. Er weist darauf hin, dass die Beurteilung des Schwierigkeitsgrads und der Themenauswahl nicht Aufgabe der Begutachtungsgruppe ist.

W. Müller hat als Entwicklungsbeauftragter aktuell nichts zu berichten. Im Beirat wurde über den Aufgabenbereich des Entwicklungsbeauftragten diskutiert.

TOP 5. Organisatorische Umstellungen der ÖMG, ÖMG-Datenbank. G. Teschl berichtet, dass die Mitgliederdatenbank in eine neue Online-Datenbank (und somit in ein zeitgemäßes System) umgewandelt wird. Dadurch können die Sekretariatskosten stark reduziert und Mittel für mathematische Aktivitäten freigemacht werden. Dies betrifft auch den Versand der *IMN*, die Abwicklung von Zahlungen, etc. Jedes Mitglied sollte möglichst eine E-Mail-Adresse bekannt geben, damit die entsprechenden Informationen elektronisch zugestellt werden können. Von der ÖMG-Homepage kann auf die Datenbank zugegriffen werden. Die Zahlungen sollen in Zukunft automatisch zugeordnet werden. Wichtig dabei ist, dass das *Betreff*-Feld richtig ausgefüllt wird (denn nur dann kann die Zahlung automatisch verarbeitet werden!). Genauere Informationen dazu findet man auf der ÖMG-Homepage. G. Teschl bittet noch um etwas Geduld; er hofft, dass bis Monatsende dann hoffentlich alles funktioniert.

TOP 6. Veranstaltungen und Fördermaßnahmen der ÖMG. Über diverse Veranstaltungen wurde bereits in TOP 2 bzw. 4 berichtet.

Das Vorbereitungskomitee, bestehend aus C. Krattenthaler, A. Ostermann und W. Woess, hat die folgenden Vorhaben betr. Fördermaßnahmen formuliert: Summer Schools: Die Summerer-Veranstaltung (mit 2–16 Personen) soll beworben und sanft erweitert werden. Die ÖMG würde unterstützend eingreifen (auf Antrag gewährt sie eine finanzielle Unterstützung). Mathematikolympiade: Es wurde befürchtet, dass das Ministerium die Subventionen kürzt. Die ÖMG wendet sich vorläufig dazu nicht ans Ministerium, da es laut C. Heuberger aktuell wieder besser geworden ist. M. Oberguggenberger möchte durch persönliche Präsenz an der nächsten Veranstaltung positiv einwirken. Die ÖMG ist bereit, sich hier finanziell zu engagieren. C. Heuberger bedankt sich für das Engagement. Mathe im Advent: Es ist eine Unterstützung bei Reisekosten vorgesehen. Die Vorschläge rund um die Studierendenkonferenz wurden bereits erwähnt. Projekte auf Ansuchen: Vorhaben von Studierenden (Forschungsprojekte) sowie auch Projekte mit Öffentlichkeitswirksamkeit werden auf Antrag unterstützt, Details werden noch ausgearbeitet und kommuniziert.

TOP 7. Wahlen: Landessektionsvorsitzende und Beiratsmitglieder 2017–2018, Nachnominierung Didaktikkommission.

Beiratswahl: Oberguggenberger präsentiert den folgenden Wahlvorschlag:

A. Binder (MathConsult)	C. Krattenthaler (Univ. Wien)
M. Drmota (TU Wien)	W. Müller (Univ. Klagenfurt)
H. Edelsbrunner (IST)	H. Niederreiter (RICAM)
H. Engl (ÖAW)	W.G. Nowak (BOKU Wien)
P. M. Gruber (TU Wien)	W. Schachermayer (Univ. Wien)
G. Helmsberg (Univ. Innsbruck)	K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Heugl (Wien)	H. Sorger (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)	R. Tichy (TU Graz)
M. Koth (Univ. Wien)	H. Zeiler (Stadtschulrat Wien)

Die Aufnahme von Landesschulinspektor Zeiler wurde bereits 2015 vorläufig beschlossen. N. Rozsenich und H. Strasser scheiden aus, L. Reich ebenfalls. Der Beirat soll statutengemäß eine ausgewogene Besetzung haben. Aktuell sind die WU Wien, die Universität Graz sowie die Universität Salzburg nicht vertreten. Es werden Kandidaten von der WU für den Beirat diskutiert, um eine bessere Abdeckung aller Institutionen zu erreichen. Über weitere Details kann und soll zu einem späteren Zeitpunkt noch gesprochen werden. M. Oberguggenberger stellt den Antrag, die vorgeschlagene Liste zu bestätigen; dies erfolgt einstimmig.

Wahl der Landessektionsvorsitzenden: P. Hellekalek und C. Krattenthaler scheiden als Landesvorsitzende aus. M. Oberguggenberger dankt den beiden für ihr Engagement in der Vergangenheit. Der Wahlvorschlag sieht folgendermaßen aus:

- (a) *Graz* (Steiermark): W. Woess, TU Graz
- (b) *Innsbruck* (Tirol/Vorarlberg): H.-P. Schröcker, Univ. Innsbruck
- (c) *Klagenfurt* (Kärnten): C. Pötzsche, Univ. Klagenfurt
- (d) *Linz* (Oberösterreich): F. Pillichshammer, Univ. Linz
- (e) *Salzburg* (Salzburg): V. Bögelein, Univ. Salzburg
- (f) *Wien* (Burgenland/Niederösterreich/Wien): I. Fischer, Univ. Wien

M. Oberguggenberger stellt den Antrag, die vorgeschlagene Liste zu bestätigen; dies erfolgt einstimmig.

W. Schlöglmann scheidet aus eigenem Wunsch aus der Didaktikkommission aus; ein Dankeschreiben wurde verfasst und übermittelt. Als neue Mitglieder sollen F. Embacher (Universität Wien), A. Lindner (PH Oberösterreich) und G. Maresch (Universität Salzburg) aufgenommen werden. M. Oberguggenberger hält dies für einen sehr ausgewogenen Vorschlag und stellt den Antrag, die vorgeschlagene Liste zu bestätigen; dies erfolgt wieder einstimmig.

TOP 8. **Allfälliges.** M. Kang bringt eine Anfrage von M. Grötschel zur Sprache, warum Österreich in der IMU nur in Gruppe 2 vertreten ist. Ausschlaggebend sind die wissenschaftliche Exzellenz einerseits und die Höhe des finanziellen Beitrags andererseits. M. Oberguggenberger antwortet, dass die Akademie der Wissenschaften die „Adhering Organization“ ist und auch den Beitrag bezahlt. M. Oberguggenberger wird nachfragen, ob die Akademie sich auch stärker finanziell engagieren würde. Es wird diskutiert, ob es einen Zusammenhang mit der Anzahl der Hauptvortragenden beim ICM gibt; C. Krattenthaler sieht diesen Zusammenhang nicht. M. Oberguggenberger wird mit M. Ludwig und H. Edelsbrunner sprechen.

M. Oberguggenberger hält fest, dass sich das neue Konzept, die Generalversammlung in einen Tag der Mathematik einzubetten, bewährt hat und sich in einer größeren Teilnahme an der Generalversammlung niedergeschlagen hat. Es gibt keine weiteren Wortmeldungen. Die Sitzung endet um 17:13 Uhr.

Vorsitzender: Michael Oberguggenberger

Schriftführer: Clemens Fuchs

Laudatio aus Anlass der Verleihung des Förderungspreises 2016

Sehr geehrte Damen und Herren! Es freut mich, Ihnen den diesjährigen Förderungspreisträger, Herrn Aleksey Kostenko, vorstellen zu dürfen.

Aleksey wurde 1980 in Schachtarsk, einer Stadt im Oblast Donezk (Ukraine), geboren. Im Jahr 1997 begann er an der Nationalen Universität Donezk Mathematik zu studieren, wo er 2002 seinen Master und 2007 sein Doktorat bei Professor Mark Malamud abschloss; mehr dazu später. Noch im selben Jahr kam er zum ersten Mal nach Österreich und zwar als *Junior Fellow* ans Erwin Schrödinger Institut für Mathematische Physik (ESI), wo wir uns kennenlernten. Sein außergewöhnliches Potential war schnell klar und es war der Anfang einer fruchtbaren Zusammenarbeit und einer inspirierenden Freundschaft, die bis heute anhält. Zunächst zog es ihn aber noch einmal fort aus Österreich, einem Angebot des Dublin Institute of Technology folgend. Zum Glück gelang es aber, ihn 2011 über das Lise-Meitner-Programm des FWF wieder nach Wien zurückzuholen. 2012 habilitierte er sich und leitet inzwischen sein eigenes FWF-Projekt. Vor Kurzem hat ihm die Universität Laibach ein attraktives Angebot gemacht, und so wird er uns wohl leider wieder verloren gehen. Ich hoffe aber, dass er Österreich auch weiterhin eng verbunden bleibt und oft in Wien zu Gast sein wird. Insbesondere, weil er und seine Familie sich in Wien immer sehr wohl gefühlt haben.

Nun aber zur Mathematik. Sein Arbeitsgebiet ist die Mathematische Physik, wo er tiefgreifende Beiträge zu verschiedenen Bereichen geliefert hat. Alle Themenbereiche hier aufzuzählen, würde zu lange dauern, und daher werde ich im Folgenden nur einige Höhepunkte erwähnen.

Bereits als Student begann Aleksey mit dem Studium von indefiniten Sturm-Liouville-Operatoren. Ich erinnere hier daran, dass in der klassischen Sturm-Liouville-Theorie die Gewichtsfunktion, die das Skalarprodukt beschreibt, nichtnegativ ist, während im indefiniten Fall Vorzeichenwechsel bei der Gewichtsfunktion auftreten. Dementsprechend ist der zugehörige Operator nicht mehr selbstadjungiert im Hilbertraum, sondern nur noch selbstadjungiert im zugehörigen Krein-Raum. Das hat aber zur Folge, dass die klassische Theorie der selbstadjungierten Operatoren in Hilberträumen nicht mehr anwendbar ist. Resultate, die im selbstadjungierten Fall klar sind, werden hier zu zentralen offenen Problemen, wie zum Beispiel die Entwickelbarkeit nach verallgemeinerten Eigenfunktionen. Zu diesem Problem hat Aleksey in seiner Diplomarbeit, die 2002 von der Ukrainischen Akademie der Wissenschaften ausgezeichnet wurde, und in seiner Doktorarbeit, für die er 2007 mit dem Lopatinskii Preis gewürdigt wurde, wichtige Beiträge geleistet. Ein weiteres offenes Problem in diesem Zusammenhang ist die Frage, wann ein indefiniter Sturm-Liouville-Operator ähnlich zu einem selbstadjungierten Operator ist. Hier hat Aleksey vor Kurzem einen weitreichenden Zusammenhang mit Spektralasymptotiken und Ungleichungen vom Hardy-Littlewood-Pólya-Typ entdeckt, der zu einem wichtigen Fortschritt beim Verständnis dieser Probleme führte. Diese neuen Ideen erwiesen sich auch in anderen Bereichen als nützlich und führten zum Beispiel zur Lösung eines offenen Problems von W. N. Everitt, D. B. Hinton und J. K. Shaw über Dirac-Operatoren aus dem Jahr 1983.

Ein weiteres Feld seiner Forschung waren (selbstadjungierte) Sturm-Liouville-Operatoren mit stark singulären Potentialen. Relativ bald nach den bahnbrechenden Arbeiten von H. Weyl, E. C. Titchmarsh und K. Kodaira zu Operatoren mit einem singulären Randpunkt gab es erste Versuche, diese Theorie auf zwei singuläre Randpunkte zu erweitern. Ursprünglich begonnen wurde diese Erweiterung von Kodaira, motiviert von der Anwendung auf radiale Schrödinger-Operatoren, die aufgrund des Zentrifugalpotentials auch in der Nähe des Ursprungs stark singulär sind. Inspiriert durch diese Arbeit, gelang es I. S. Kac, die Existenz einer Spektralfunktion für diese Operatoren zu beweisen. Er vermutete jedoch in einer Fußnote, dass die zur Konstruktion einer Weylschen m -Funktion notwendige zweite ganze Lösung im Allgemeinen nicht existiert. Trotz weiterer Versuche gelang das nur für einzelne Potentiale, die explizit mittels spezieller Funktionen lösbar sind. Der nächste Schritt wurde von F. Gesztesy and M. Zinchenko gesetzt, denen es gelang, die Existenz einer Spektralfunktion für eine große Klasse von Potentialen zu beweisen. Es gelang ihnen auch, eine Weylsche m -Funktion zu konstruieren, die aber nicht in der oberen Halbebene analytisch war. Diese Eigenschaft ist aber der Ausgangspunkt für die Anwendung von Techniken aus der Komplexen Analysis, die zu tiefen Resultaten in der inversen Spektralanalyse führt. Gemeinsam konnten wir in einer Reihe von Arbeiten (teilweise in Zusammenarbeit mit Alexander Sakhnovich) dieses Problem vollständig lösen und mehrere klassische Resultate auf diese Operatoren erweitern. Diese Theorie hat inzwischen viele Anwendungen

gefunden und wird von verschiedenen internationalen Gruppen weiterentwickelt. Das nächste Gebiet, auf das ich hier kurz eingehen möchte, ist die Langzeitasymptotik vollständig integrierbarer Wellengleichungen. Als Aleksey ans ESI kam, beschlossen wir die Langzeitasymptotik der Camassa-Holm-Gleichung (CH) zu untersuchen. Diese Gleichung tritt, ähnlich wie die noch berühmtere Korteweg-de Vries-Gleichung, bei der Modellierung von Wasserwellen auf und beinhaltet im Gegensatz zu Letzterer auch die Möglichkeit, dass Wellen brechen. Trotz des enormen Interesses und einiger Versuche war es damals noch nicht gelungen, die genaue Langzeitasymptotik vollständig zu beschreiben. Dieses Problem konnten wir in internationaler Kooperation mit A. Boutet de Monvel und D. Shepelsky durch eine Anwendung der nichtlinearen Methode des steilsten Abstiegs für oszillierende Riemann-Hilbert-Probleme lösen. Ein weiteres Problem im Zusammenhang mit der Camassa-Holm-Gleichung ist das Verhalten sogenannter Peakon-Lösungen. Das sind (schwache) Solitonen-Lösungen, die allerdings nicht glatt sind, sondern einen Knick haben. Gemeinsam mit J. Eckhardt gelang es Aleksey, ein geeignetes Isospektralproblem für konservative Multi-Peon-Lösungen zu formulieren. Durch die Anwendung des indefiniten Momentenproblems von M. G. Krein und H. Langer konnten sie dadurch zeigen, dass in diesem Fall die CH-Gleichung durch die inverse Spektraltransformation lösbar ist. Weiters führte diese Untersuchung auf ein verallgemeinertes indefinites Saiten-Problem, für das sie das inverse Spektralproblem vollständig lösen konnten. Insbesondere wurde dadurch auch ein altes Problem von Krein und Langer gelöst. Diese Arbeit ist vor Kurzem in den *Inventiones* erschienen. Weitere Informationen über dieses faszinierende Problem finden Sie in einem Übersichtsartikel in den *IMN*.¹

Zuletzt erwähne ich noch kurz seine aktuellen Resultate auf dem Gebiet der dispersiven Abschätzungen. Speziell möchte ich hier den Fall der diskreten Laguerre-Operatoren hervorheben, der in Zusammenhang mit Untersuchungen von nichtkommutativen Solitonen in der Quantenfeldtheorie auftritt und von einer Reihe theoretischer Physiker und Mathematiker untersucht wurde. Hier fand Aleksey eine explizite Formel für den Kern der Zeitevolution mithilfe von Jacobi-Polynomen. Dieser Zusammenhang führte nicht nur zu einer weitreichenden Verbesserung der bestehenden Resultate, sondern auch zu neuen Ungleichungen für Jacobi-Polynomen vom Bernstein-Typ. Letztere Resultate stehen in engem Zusammenhang mit aktuellen Resultaten von Haagerup und Koautoren über die Approximationseigenschaften für zusammenhängende einfache Liegruppen.

Ich hoffe, dass ich Ihnen damit einen Einblick in das breite und vor allem auch tiefe Schaffen von Aleksey Kostenko geben konnte. Ich glaube, dass die Kommission mit ihm einen würdigen Kandidaten gefunden hat und gratuliere ihm aus ganzem Herzen zum Förderungspreis 2016. (Gerald Teschl)

¹J. Eckhardt, A. Kostenko, G. Teschl: The Camassa-Holm Equation and The String Density Problem. *Int. Math. Nachr.* 233 (2016), 1–24.

Schülerinnen- und Schülerpreis 2016

Jedes Jahr vergibt die ÖMG Preise für die besten schulischen Arbeiten, die einen Bezug zu Mathematik oder Darstellender Geometrie haben. In der AHS werden als Teil der Matura vorwissenschaftliche Arbeiten verfasst, in den BHS Diplomarbeiten. Diplomarbeiten sind projekt- und praxisorientierte Teamarbeiten, Vorwissenschaftliche Arbeiten sind Einzelarbeiten.

Bei den heuer eingereichten 16 Arbeiten waren zwei Arten von Themen besonders beliebt: Zum einen waren es praktische mathematische Anwendungen, wie zum Beispiel Flüsse in Graphen (Routenplanung, Netzwerke), Kettenlinien in der Architektur, Algorithmen in der Kryptographie, Zufallszahlen in der Informatik, Differentialgleichungen in der klassischen Mechanik (Fall- und Pendelbewegungen, Wachstumsodelle), Kombinatorik und Zahlentheorie für Tricks mit Spielkarten, der Goldene Schnitt und Fibonacci-Zahlen in der Natur.

Ebenfalls gut vertreten waren Themen im Umfeld großer Theoreme und unbewiesener Vermutungen der Mathematik, sei es der große Fermatsche Satz, die Landau-Probleme (z.B. Goldbachsche Vermutung oder Primzahlzwillingsvermutung) oder die Collatz-Vermutung. Für die dreiköpfige, von der ÖMG eingesetzte Jury war es angesichts der vielen sehr guten Einreichungen nicht einfach, sich auf die folgenden vier ausgezeichneten Arbeiten zu einigen.

Leonhard Hochfilzer vom BG/BRG Purkersdorf (Betreuer: Peter Pollak) schrieb über „Anwendungen der Graphentheorie im modernen Leben“. Nach einem histo-



Von links: M. Oberguggenberger, M. Hofer, A. Stadler., T. Oberkofler, P. Pollak, A. Ungersböck, M. Artner., G. Schranz-Kirlinger. Foto: W. Woess.

rischen Teil werden einzelne Anwendungen behandelt. Der Dijkstra-Algorithmus findet den kürzesten Weg zwischen zwei Knoten in Graphen, deren Kanten feste Längen zugeordnet sind. Weitere Anwendungen betreffen die Auslastung von Mobilfunknetzen (Färbungsprobleme), Stromkreise (Kirchhoffsche Regel) oder Irrfahrten (Markov-Ketten). Die Möglichkeiten, eine ampelgeregelte Kreuzung zu überqueren, können graphentheoretisch kodiert werden. In einem solchen Hilfsgraphen entspricht eine endliche Folge maximaler Cliques, in denen jeder Knoten mindestens einmal vorkommt, einer möglichen Ampelschaltung. Nach unterschiedlichen Kriterien kann nun eine optimale Ampelschaltung gesucht werden. Am Beispiel einer realen Kreuzung in Wien wird eine theoretisch gefundene Schaltung mit der tatsächlichen Ampelschaltung verglichen. Ebenfalls wird ein realer Gleichstromkreis mit unterschiedlichen Widerständen aufgebaut, eine Spannung von 5 Volt angelegt und die Spannung an den Widerständen gemessen. Die Messdaten weichen von der Berechnung im Mittel nur um ca. 0,49% ab.

Tobias Oberkofler vom BRG Imst (Betreuer: Matthias Hofer) schrieb über „Die Collatz-Vermutung – eine Betrachtung auf verschiedenen Ebenen“. Das erste Glied einer sogenannten Collatz-Folge ist eine beliebige natürliche Zahl n . Ist n gerade, so wird das nächste Folgenglied als $n/2$ definiert. Ist n ungerade, so ist das nächste Glied $3n + 1$. Die Vermutung besagt, dass jede solche Folge im Zyklus 4, 2, 1 endet. Zunächst werden Ursprung und Entwicklung dieser Vermutung dargestellt. Sie hat ihre Wurzeln in den 1930er-Jahren und erlangte ab 1950 Popularität in fachwissenschaftlichen Kreisen. Zahlreiche berühmte Mathematikerinnen und Mathematiker sind bis heute an ihr gescheitert. Es werden Teilaspekte des Problems dargestellt sowie stochastische Analysen und Prognosen besprochen. Der Autor zeigt in einem eigenständig erarbeiteten Beweis, dass 4, 2, 1 der einzig mögliche Zyklus einer Collatz-Folge ist und daher die Collatz-Vermutung nur dann falsch sein könnte, wenn es eine Zahl gäbe, deren Collatz-Folge in gar keinen Zyklus münden würde. Den Abschluss dieser exzellenten Arbeit bildet die Darstellung von Bestrebungen aus der jüngeren Vergangenheit, sich der Frage nach der möglichen Unbeweisbarkeit der Collatz-Vermutung mithilfe von Tag-Systemen zu nähern.

Alexander Stadler vom Wirtschaftskundlichen Realgymnasium Salzburg in der Josef-Preis-Allee (Betreuer: Wolfgang Schnessl) diskutiert eine „Intuitive Begründung und Anhaltspunkte zur Annahme der Richtigkeit der Landau-Probleme“. Dabei demonstriert er Verständnis im Umgang mit zahlentheoretischen Techniken auf einem fachlichen Niveau, welches viele Studierende im Laufe ihres Studiums nicht erreichen. Es werden unter anderem das Inklusions-Exklusions-Prinzip und die Möbius-Inversion verwendet sowie asymptotische Formeln und Abschätzungen hergeleitet und mit empirischen Daten verglichen. Die Methoden werden zunächst anhand des Primzahlsatzes erörtert und dann auf die Landau-Probleme übertragen. Es war natürlich nicht Ziel der Arbeit, eines der Landau-Probleme zu lösen, sondern ein Verständnis für sie zu entwickeln.

Anja Ungersböck vom BG/BRG Neunkirchen (Betreuer: Markus Artner) verfasste eine spannende und gut recherchierte Literaturarbeit mit dem Titel „Die Frau in der Mathematik im 18. und 19. Jahrhundert, am Beispiel von Sophie Germain und Sofja Kowalewski“. Zunächst wird die allgemeine gesellschaftliche Situation der Frauen in Frankreich und Russland besprochen und speziell auf die Bildungschancen für Frauen in der damaligen Zeit eingegangen. Das Leben beider Mathematikerinnen wird chronologisch dargestellt und ihre mathematischen Forschungen zuerst allgemein und dann exemplarisch anhand originaler Publikationen diskutiert. Auch wird ihr Wirken in der damaligen Zeit sowie über ihren Tod hinaus besprochen. Bekannte Briefkontakte gab es zwischen Sophie Germain und Carl Friedrich Gauß sowie zwischen Sofja Kowalewski und Karl Weierstraß.

Die preisgekrönten Arbeiten können von der Webseite <http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/fba2016/> heruntergeladen werden.

(Bernhard Krön)

Neue Mitglieder

Helmuth Breitenfellner – CTBTO PrepCom, Wagramer Str. 5, 1400 Wien. geb. 1969. Verschiedene Tätigkeiten im EDV-Bereich (IBM, MLS, TRW ISCS, ab 2000 selbstständig) seit 2005 Tätigkeit bei der Vorbereitungskommission zum Vertrag über das umfassende Verbot von Nuklearversuchen (CTBTO). email *helmuth@breitenfellner.at*.

Wolfgang Herfort, ao.Univ.Prof. Dr. – TU Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10/E101, 1040 Wien. geb. 1947. Algebraiker an der TU Wien, seit 2012 im Ruhestand. email *w.herfort@tuwien.ac.at*.

Aike Hinrichs, Univ.Prof. Dr. – Institut für Analysis, Johannes Kepler-Universität Linz, Altenbergerstraße 69, 4040 Linz. geb. 1968. 1996 Doktorat und anschließend bis 2013 Assistent und Associate Professor an der Univ. Jena, unterbrochen durch Tätigkeit 1999–2001 als Emmy-Noether Fellow, Texas A&M University, und 2005–2010 als Heisenberg-Sipendiat. 2013–2014 Prof. für Funktionalanalysis, Univ. Rostock, seit 2014 Professor an der Univ. Linz. email *aicke.hinrichs@jku.at*. Webseite <http://tinyurl.com/aicke-hinrichs>.

Leonhard Hochfilzer – Mooswiesengasse 9b/11, 1140 Wien. geb. 1998. Student der Mathematik, St. John's college, University of Oxford. email *leonhard.hochfilzer@gmail.com*.

Karl Kemminger, Brigittenauer Lände 48a/10, 1200 Wien – geb. 1957. 1980–2009 Siemens PSE, Software Testing. Seit 2010 AUVA, Test Management. email *karl.kemminger@auva.at*.

Aleksey Kostenko, Dr. – Fakultät für Mathematik der Univ. Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien. geb. 1980. Doktorat 2007 Donetsk Univ. (Ukraine), 2012 Habilitation Univ. Wien 2011–2013 FWF Lise Meitner Fellow (Univ. Wien), seit 2013 Tätigkeit an der Univ. Wien im Rahmen von FWF-Projekten. 2016 Förderungspreis der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. Webseite <http://www.mat.univie.ac.at/~kostenko>, email *oleksiy.kostenko@univie.ac.at*.

Christoph Koutschan, Dr. – RICAM, Altenberger St. 69, 4040 Linz. geb. 1978. 2009 Doktorat in Mathematik an der Univ. Linz, 2009–2010 Tulane Univ. (New Orleans), 2010–2011 RISC, 2011–2012 MSR-INRIA Joint Centre, Orsay, seit 2012 Symbolic Computation Group, RICAM. email *christoph@koutschan.de*, Webseite <http://www.koutschan.de>.

Tijana Levajkovic, Dr. – Inst. f. Mathematik der Univ. Innsbruck, Technikerstrasse 13, 6020 Innsbruck. geb. 1974. Postdoc Univ. Innsbruck im Gebiet Stochastische Analysis. email *Tijana.Levajkovic@uibk.ac.at*.

Mueid Samad – Tivoligasse 38/4/3–4, 1120 Wien. geb. 1996. Student der Mathematik an der Univ. Wien. Webseite *http://mojedsamad.net*, email *mojed.samad@gmail.com*.

Florian Stampfer, Dr. – Institut f. Fachdidaktik, Univ. Innsbruck, Technikerstr. 25, 6020 Innsbruck. geb. 1983. 2008–12 Lehrbeauftragter und 2012–16 Senior Lecturer an der Univ. Innsbruck. 2013-16 Wissenschaftlicher Mitarbeiter im EU-Projekt *mascil*, Univ. Innsbruck und Univ. Wien. Seit 2016 PostDoc Institut f. Fachdidaktik, Univ. Innsbruck. email *florian.stampfer@uibk.ac.at*.