

# Internationale Mathematische Nachrichten

## International Mathematical News

### Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

#### Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email [imn@tuwien.ac.at](mailto:imn@tuwien.ac.at), <http://www.oemg.ac.at/>

#### Redaktion:

*J. Wallner* (TU Graz, Herausgeber)  
*H. Humenberger* (Univ. Wien)  
*R. Tichy* (TU Graz)  
*R. Winkler* (TU Wien)

#### Ständige Mitarbeiter der Redaktion:

*B. Gittenberger* (TU Wien)  
*G. Eigenthaler* (TU Wien)  
*K. Sigmund* (Univ. Wien)

#### Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 25,-

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria-Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger:  
Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr.  
Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzen-  
druck, 8044 Weinitzen.

© 2014 Österreichische Mathematische  
Gesellschaft, Wien.

ISSN 0020-7926



# Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903  
<http://www.oemg.ac.at/>  
email: [oemg@oemg.ac.at](mailto:oemg@oemg.ac.at)

## **Sekretariat:**

TU Wien, Institut 104,  
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.  
Tel. +43-1-58801-10401  
email: [sekr@oemg.ac.at](mailto:sekr@oemg.ac.at)

## **Vorstand:**

*M. Oberguggenberger* (Univ. Innsbruck): Vorsitzender  
*B. Kaltenbacher* (Univ. Klagenfurt): Stellvertretende Vorsitzende  
*J. Wallner* (TU Graz): Herausgeber der IMN  
*C. Fuchs* (Univ. Salzburg): Schriftführer  
*G. Schranz-Kirlinger* (TU Wien): Stellvertretende Schriftführerin  
*A. Ostermann* (Univ. Innsbruck): Kassier  
*B. Lamel* (Univ. Wien): Stellvertretender Kassier  
*E. Buckwar* (Univ. Linz): Beauftragte für Frauenförderung  
*G. Teschl* (Univ. Wien): Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

## **Beirat (Vereinsjahr 2015):**

*A. Binder* (Linz)  
*M. Drmota* (TU Wien)  
*H. Edelsbrunner* (ISTA)  
*H. Engl* (Univ. Wien)  
*H. Niederreiter* (ÖAW)

*P. M. Gruber* (TU Wien)  
*G. Helmberg* (Univ. Innsbruck)  
*H. Heugl* (Wien)  
*W. Imrich* (MU Leoben)  
*M. Koth* (Univ. Wien)  
*C. Krattenthaler* (Univ. Wien)  
*W. Kuich* (TU Wien)  
*W. Müller* (Univ. Klagenfurt)  
*W. G. Nowak* (Univ. Bodenkult. Wien)  
*L. Reich* (Univ. Graz)  
*N. Rozsenich* (Wien)  
*W. Schachermayer* (Univ. Wien)  
*K. Sigmund* (Univ. Wien)  
*H. Sorger* (Wien)  
*H. Strasser* (WU Wien)  
*R. Tichy* (TU Graz)  
*W. Wurm* (Wien)

## **Vorsitzende der Sektionen und ständigen Kommissionen (2015):**

*W. Woess* (Graz)  
*H.-P. Schröcker* (Innsbruck)  
*C. Pötzsche* (Klagenfurt)  
*F. Pillichshammer* (Linz)  
*P. Hellekalek* (Salzburg)  
*C. Krattenthaler* (Wien)  
*H. Humenberger* (Didaktikkommission)

Diese gehören statutengemäß dem Beirat an.

## **Mitgliedsbeitrag:**

Jahresbeitrag: € 25,-  
Bankverbindung: Konto Nr. AT8312 001435552721 bei der Bank Austria-Creditanstalt (BKAUATWW).



# Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News  
Nouvelles Mathématiques  
Internationales

Nr. 227 (68. Jahrgang)

Dezember 2014

---

## Inhalt

|  |    |
|--|----|
| <i>Mihyun Kang and Zdeněk Petrášek: Random Graphs: Theory and Applications from Nature to Society to the Brain</i> . . . . . | 1  |
| <i>Wilfried Imrich: „Was macht Herbert Fleischner?“, fragte Paul Erdős – ein Gespräch mit Herbert Fleischner</i> . . . . .   | 25 |
| <i>Ludwig Reich: Erinnerungen an die Strudlhofgasse</i> . . . . .  | 31 |
| <i>Robert Tichy: ICM 2014 – ein kurzer Bericht</i> . . . . .   | 37 |
| Buchbesprechungen . . . . .  | 43 |
| Neue Mitglieder . . . . .  | 55 |
| Ausschreibung der Preise der ÖMG . . . . .   | 57 |

*Dodekaeders Stern — Titelseite:* Vor dem neuen Gebäude der Fakultät für Mathematik der Universität Wien am Oskar Morgenstern-Platz 1 (Roßauerlände) wurde am 28.11.2013 eine Skulptur einer algebraischen Fläche enthüllt, die dieselbe Symmetrie wie dasjenige reguläre Dodekaeder aufweist, in dessen Ecken die 20 Singularitäten der Fläche liegen. Die Gleichung „ $f = 0$ “ dieser Fläche wurde in der Forschungsgruppe von H. Hauser im Rahmen einer Diplomarbeit bestimmt. Mit der Symmetriegruppe  $G \cong A_5 \times \mathbb{Z}_2$  des Dodekaeders ergibt sich das  $G$ -invariante Polynom  $f$  als eine geeignete Kombination von bekannten Erzeugern  $u, v, w$  von  $\mathbb{R}[x, y, z]^G$ :

$$u = x^2 + y^2 + z^2, \quad v = (x^2 - \varphi^2 y^2)(y^2 - \varphi^2 z^2)(z^2 - \varphi^2 x^2),$$

$$f = 5c(2\varphi - 3)v - (1 - u)^3 + \frac{5}{27}cu^3 \quad (\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, c = 81).$$

Für mathematische Details siehe: Alexandra Fritz und Herwig Hauser, Platonic Stars. *Math. Intelligencer* 32 (2010), 22–36. Hintergrundinformationen zur Skulptur an der Universität Wien finden sich auf <http://www.dodekaeders Stern.cc>.

# Random Graphs: Theory and Applications from Nature to Society to the Brain

Mihyun Kang and Zdeněk Petrášek

Technische Universität Graz

## 1 Introduction

The theory of random graphs deals with asymptotic properties of graphs equipped with a certain probability distribution; for example, it studies how the component structure of a uniform random graph evolves as the number of edges increases. Since the foundation of the theory of random graphs by Erdős and Rényi five decades ago, various random graph models have been introduced and studied. Graph theory has meanwhile found its way into other sciences as a rich source of models describing fundamental aspects of a broad range of complex phenomena. This article is a gentle introduction to the theory of random graphs and its recent developments (with focus on the phase transition and critical phenomena, a favourite topic of the first author) and applications.

This is an extended version of the article entitled “Random Graphs: from Nature to Society to the Brain” [35] published in *Seoul Intelligencer*, a special issue of the *Mathematical Intelligencer*, on the occasion of International Congress of Mathematicians in Seoul in 2014.

## 2 Erdős-Rényi Random Graphs

### 2.1 The Beginning

Erdős and Rényi initiated the theory of random graphs in their article [27] entitled “On random graphs I” published in 1959, in which they addressed, among other things, the questions of the probability of a random graph being connected, and the probability that the largest component of a random graph covers almost all

vertices. In a subsequent paper entitled “On the evolution of random graphs” published in 1960 [28], Erdős and Rényi discovered that a random graph undergoes a drastic change in the number of vertices of the largest component when the number of edges is around half the number of vertices, i.e. there is a *phase transition* in the evolution of a random graph in view of the *emergence of the giant component*. Before we discuss the phase transition phenomenon in more details, we introduce some basic definitions. A graph  $G = (V, E)$  is a pair consisting of a set  $V$  of vertices (or nodes) and a set  $E$  of edges (or lines), which are 2-element subsets of  $V$ . The number of edges incident to a vertex is called the *degree* of a vertex. A sequence of vertices  $(v_1, \dots, v_k)$  in which each two consecutive vertices form an edge is called a *path* from  $v_1$  to  $v_k$  if  $v_1 \neq v_k$ , and it is called a *cycle* if  $v_1 = v_k$ . We say that a vertex  $v$  is *reachable* from another vertex  $w$  if there exists a path from  $v$  to  $w$ . Reachability is an equivalence relation, and equivalence classes are called *components* of  $G$ . The number of vertices in a component is called the *order* of the component. If a graph has only a single component, then it is called *connected*. A connected graph with no cycle is called a *tree*, and a graph without cycles is called a *forest*. A connected graph with exactly one cycle is called *unicyclic*.

## 2.2 Erdős-Rényi Random Graph Models

There are three random graph models hidden under the name of the Erdős-Rényi random graphs:

- (1) The uniform random graph  $G(n, m)$  is a graph chosen uniformly at random from the set of all graphs with vertex set  $[n] := \{1, \dots, n\}$  and  $m$  edges, for an integer  $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$ .
- (2) The binomial random graph  $G(n, p)$  is a graph with vertex set  $[n]$  in which each pair of vertices is joined by an edge independently with probability  $p$ , for a real number  $0 \leq p \leq 1$ .
- (3) The Erdős-Rényi process  $\{G_n(m) : m = 0, \dots, \binom{n}{2}\}$  begins with a graph  $G_n(0)$  with  $n$  isolated vertices and no edges, and in each step  $1 \leq m \leq \binom{n}{2}$  a new random edge is added to an evolving graph  $G_n(m-1)$  to obtain a new graph  $G_n(m)$ . The graph  $G_n(m)$  created by the Erdős-Rényi process is distributed like the uniform random graph  $G(n, m)$ .

The three models are essentially equivalent when the parameters are appropriately selected, i.e.,  $m = p \binom{n}{2}$ . The uniform random graph and binomial random graph were studied earlier, among others by Gilbert [29]. A quarter of a century later Bollobás [13] observed that the uniform random graph  $G(n, m)$  can be considered as a graph  $G_n(m)$  created by the Erdős-Rényi process.

When discussing properties of the Erdős-Rényi random graphs we shall parametrise  $m = tn/2$  or  $p = t/(n-1)$ , so  $t$  denotes the expected degree of a random



vertex, and shall be concerned with properties that hold *with high probability* (in short *whp*), meaning with probability tending to one as the number  $n$  of vertices tends to  $\infty$ .

### 2.3 Emergence of the Giant Component

One of the most important discoveries by Erdős and Rényi [28] deals with the appearance of the phase transition in the order of the largest component: in short, the order of the largest component in the Erdős-Rényi random graph changes from logarithmic to linear order when the expected degree passes through one (for example, from 0.99 to 1.01) as more edges are added.

To be more precise, we consider the Erdős-Rényi random graph with expected degree  $t > 0$ . If the expected degree  $t$  is smaller than the critical value one, *whp* the Erdős-Rényi random graph consists of trees and unicyclic components and the largest component is a tree of order  $O(\log n)$ ; such components are called “small”. On the other hand, if the expected degree  $t$  is larger than one, *whp* there is a unique largest component of linear order (called “the giant component”), while all but the giant component are trees or unicyclic components of order  $O(\log n)$ ; in other words, all but the giant component are “small”. If the expected degree  $t$  is equal to the critical value one, *whp* the order of the largest component is  $\Theta(n^{2/3})$ .

The reason why the expected degree one is so crucial in view of the emergence of the giant component in  $G(n, p)$  was nicely explained by Karp [40] who used the following component-exposure process based on the breadth-first search. Given a vertex  $v$ , we first expose the neighbours (say children) of  $v$ . And then we expose the neighbours of each of the neighbours of  $v$ , one after another. And we continue until there are no more vertices left in the component of  $v$ . Roughly speaking, when  $k = o(n)$  vertices are exposed so far, the number of children of each vertex is a binomial random variable with parameters  $n - k$  and  $p$ , and thus its expectation is  $(n - k)p \sim t$ . Since the binomial distribution  $\text{Bi}(n - k, p)$  converges to the Poisson distribution  $\text{Po}(t)$  with mean  $t = p(n - 1)$  when  $n \rightarrow \infty$  and  $t$  is a fixed constant, we can approximate the component-exposure process by the Galton-Watson branching process with Poisson offspring distribution  $\text{Po}(t)$ ; it starts with a unisexual organism which generates a random number of children according to  $\text{Po}(t)$ , and each of its children generates a random number of children independently according to  $\text{Po}(t)$ , and so on. The classical branching process theory says that if  $t < 1$ , then with probability one the branching process dies out; this corresponds to small components in  $G(n, p)$ . On the other hand, if  $t > 1$ , with positive probability the process continues forever. The survival probability is given as the unique positive solution  $\rho = \rho(t) \in (0, 1)$  of the equation

$$1 - \rho = e^{-t\rho}. \quad (1)$$

This survival probability corresponds to the probability that a random vertex in

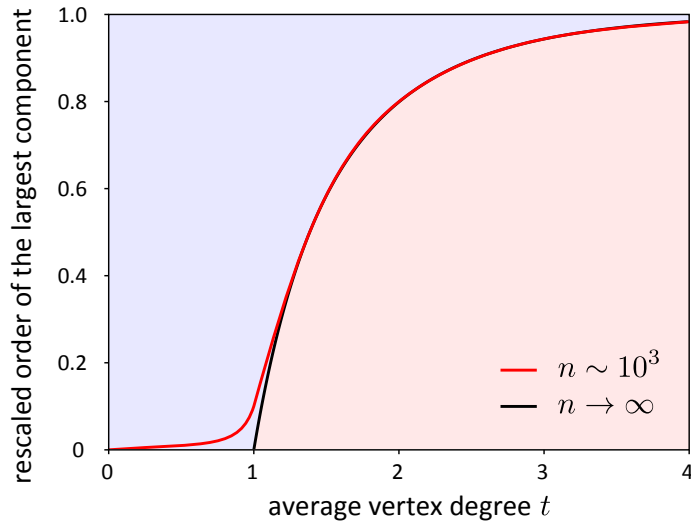


Figure 1: Phase transition in the Erdős-Rényi random graph.

$G(n, p)$  lies in the giant component. This approach can be made mathematically rigorous and yields that if  $t > 1$ , then *whp* the order of the giant component in  $G(n, p)$  is  $\rho n + o(n)$ .

## 2.4 Critical Window of the Phase Transition

Returning to the result of Erdős and Rényi, the order of the largest component changes from logarithmic to sublinear and then to linear order; more precisely it changes from  $O(\log n)$  to  $\Theta(n^{2/3})$  and to  $\Theta(n)$  depending on whether the expected degree  $t$  satisfies  $t < 1$ ,  $t = 1$ , or  $t > 1$ . Erdős and Rényi described this phenomenon as a “double jump” and considered it to be one of the most striking facts concerning random graphs.

But it leads to several natural questions: *are there ‘real’ jumps?* In other words, is the phase transition in the Erdős-Rényi random graph discontinuous? Or is it continuous? If it is continuous, how “smooth” or how “sharp” is the phase transition? How big should the difference between the expected vertex degree and the critical value one be, so as to be able to distinguish the order of the largest component from the order of the second largest component?

Bollobás [13] showed that there is in fact no jump, but a *smooth phase transition with three different phases* when the number of edges is around half the number of vertices: the subcritical phase in which *whp* there are many small components of almost equal order; the critical phase in which *whp* there are a few large components of the same order up to constant factor; and the supercritical phase which is characterised by the fact that *whp* there is a unique largest component that is much

larger than the second largest component. The result of Bollobás was improved by Łuczak [44].

To state the results of Bollobás and Łuczak, we consider the binomial random graph  $G(n, p)$  with  $p = \frac{t}{n-1}$ , where  $t = 1 \pm \varepsilon$  for  $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$  satisfying  $\varepsilon \rightarrow 0$ , so the expected degree converges to one. In order to capture how fast  $\varepsilon$  tends to zero, we let  $\omega(n)$  be any function tending to infinity arbitrarily slowly with  $n$  and let  $\varepsilon = \varepsilon(n)$  satisfy  $\omega(n) \leq \varepsilon^3 n$ . In other words, we let  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $\varepsilon^3 n \rightarrow \infty$ . If  $t = 1 - \varepsilon$ , then for any fixed positive integer  $i$  *whp* the order of the  $i$ -th largest component is asymptotically  $2\varepsilon^{-2} \log(\varepsilon^3 n)$ , which is substantially smaller than  $n^{2/3}$ . On the other hand, if  $t = 1 + \varepsilon$ , *whp* the order of the largest component is asymptotically  $2\varepsilon n$ , which is substantially larger than  $n^{2/3}$ , and the order of the second largest component is substantially smaller than  $n^{2/3}$ .

When  $\varepsilon^3 n = \Theta(1)$ , Aldous [4] provided a precise description of the sequence of the orders (rescaled by  $n^{2/3}$ ) of largest components, using multiplicative coalescent processes and a sequence of lengths of the excursions of a reflecting inhomogeneous Brownian motion.

## 2.5 Limit Theorems for the Giant Component

Can we say more about the distribution of the order of the giant component when the expected degree  $t$  is larger than one?

Let  $I \subset (1, \infty)$  be a compact interval, let  $p = p(n)$  be a sequence such that  $t = p(n-1) \in I$  for all  $n$  and let  $\rho = \rho(t) \in (0, 1)$  be the unique positive solution of the equation (1). Let  $L_1(t)$  denote the order of the giant component in  $G(n, p)$ .

The first limit theorem for the giant component is a *strong law of large numbers* which provides that for any  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , there exists  $n_0 \in \mathbb{N}$  such that for any  $n \geq n_0$

$$1 - \delta_2 \leq \mathbb{P}\left[\left|\frac{L_1(t)}{n} - \rho\right| \leq \delta_1\right] \leq 1 + \delta_2.$$

So, the typical value of  $L_1(t)$  can be determined up to fluctuations of order  $o(n)$ .

A natural question is whether we can characterise the distribution of  $L_1(t)$  more precisely. We define  $\mu = \mu(\rho, n)$  and  $\sigma = \sigma(t, \rho, n)$  as

$$\mu := \rho n \quad \text{and} \quad \sigma := \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{(1-t(1-\rho))^2} n}.$$

We can show that  $\sigma^{-1}(L_1(t) - \mu)$  converges in distribution to  $N(0, 1)$ , where  $N(0, 1)$  denotes the standard normal distribution. This provides a *central limit theorem* for  $L_1(t)$ : for any  $a < b$  with  $a, b \in \mathbb{R}$  and any  $\delta > 0$ , there exists  $n_0 \in \mathbb{N}$  such that for any  $n \geq n_0$

$$\frac{1-\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \leq \mathbb{P}\left[a \leq \frac{L_1(t) - \mu}{\sigma} \leq b\right] \leq \frac{1+\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Thus one can estimate the value of  $L_1(t)$  up to an error of  $o(\sigma) = o(\sqrt{n})$ .

Indeed, one can derive even a stronger result, a *local limit theorem* for  $L_1(t)$ : for any compact interval  $J \subset \mathbb{R}$  and any  $\delta > 0$ , there exists  $n_0 \in \mathbb{N}$  such that for any  $n \geq n_0$  and any integer  $k \in \mathbb{N}$  satisfying  $\sigma^{-1}(k - \mu) \in J$ , we have

$$\frac{1 - \delta}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \leq \mathbb{P}[L_1(t) = k] \leq \frac{1 + \delta}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

These results were established by Stepanov [64] and Pittel and Wormald [54] who used counting techniques, and were reproved by Behrisch, Coja-Oghlan and Kang [10] who applied Stein's method to the total number of vertices outside the giant component.

Indeed, much stronger results hold. Stepanov [64] and Pittel and Wormald [54] derived a *local limit theorem for the joint distribution* of the number of vertices and edges in the giant component. Behrisch, Coja-Oghlan and Kang [10] reproved this result using the so-called two-round exposure and "smoothing technique" as well as Fourier analysis. Let  $E(t)$  denote the number of edges in the giant component in  $G(n, p)$ . We define

$$\begin{aligned} \mu_e &:= \frac{t(1 - (1 - \rho)^2)}{2} n, \\ \sigma_e &:= \sqrt{\left(\frac{t^2(1 - \rho)^2(2 - (2t - 1)\rho(1 - \rho))}{(1 - t(1 - \rho))^2} + \frac{t(1 - (1 - \rho)^2)}{2}\right) n}, \\ \sigma_j &:= \frac{t(1 - \rho)(1 - (1 - \rho)^2 + t\rho(1 - \rho))}{(1 - t(1 - \rho))^2} n^2. \end{aligned}$$

Then for any compact intervals  $J, J_e \subset \mathbb{R}$  and for any  $\delta > 0$ , there exists  $n_0 \in \mathbb{N}$  such that for any  $n \geq n_0$  and any integers  $k, \ell \in \mathbb{N}$  satisfying  $\sigma^{-1}(k - \mu) \in J$  and  $\sigma_e^{-1}(\ell - \mu_e) \in J_e$ , we have

$$(1 - \delta)\Phi(k, \ell) \leq \mathbb{P}[L_1(t) = k \text{ and } E(t) = \ell] \leq (1 + \delta)\Phi(k, \ell),$$

where

$$\begin{aligned} \Phi(k, \ell) &:= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2\sigma_e^2 - \sigma_j^2}} \\ &\cdot \exp\left(-\frac{\sigma^2\sigma_e^2}{2(\sigma^2\sigma_e^2 - \sigma_j^2)} \left(\frac{(k - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{2\sigma_j(k - \mu)(\ell - \mu_e)}{\sigma^2\sigma_e^2} + \frac{(\ell - \mu_e)^2}{\sigma_e^2}\right)\right). \end{aligned}$$

As for local limit theorems in the (more sophisticated) *supercritical regime* when  $t = 1 + \varepsilon$  for  $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$  satisfying  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $\varepsilon^3 n \rightarrow \infty$ , Bollobás and Riordan [17]

gave a simple new proof of a strong law of large numbers for the order of the giant component, using the Galton-Watson branching process. Pittel and Wormald [54] established a central limit theorem for the order of the giant component all the way through the supercritical regime, by counting connected graphs. Their result was reproved recently by Bollobás and Riordan [18], using random walk and martingale arguments.

### 3 Generalisations of Erdős-Rényi Random Graphs

Since the seminal work of Erdős and Rényi [28], various random graph models have been extensively studied. Examples include random hypergraphs, random planar graphs, random graph processes, and inhomogeneous random graphs, each of which we briefly review below.

#### 3.1 Random Hypergraphs

One of the most natural generalisations of the Erdős-Rényi random graph  $G(n, p)$  is the random  $k$ -uniform hypergraph  $H_k(n, p)$ , which is a hypergraph with vertex set  $[n]$  in which each of the  $\binom{n}{k}$  possible edges (i.e.  $k$ -element subsets of  $[n]$ ) is present independently with probability  $p$ .

We say that a vertex  $v$  in a hypergraph  $H$  is reachable from  $w$  (or  $v$  and  $w$  are vertex-connected) if there exists a sequence of edges  $(e_1, \dots, e_\ell)$  such that  $v \in e_1$ ,  $w \in e_\ell$  and  $e_i \cap e_{i+1} \neq \emptyset$  for all  $1 \leq i \leq \ell - 1$ . Reachability is an equivalence relation, and the equivalence classes are called the components of  $H$ .

Phase transition phenomena were discovered also in random hypergraphs. The critical point of the emergence of the giant component in  $H_k(n, p)$  was first determined by Schmidt-Pruzan and Shamir in [61]. To be more precise, let  $p = t(k-1)^{-1} \binom{n-1}{k-1}^{-1}$  for  $t > 0$ . Schmidt-Pruzan and Shamir showed that if  $t < 1$ , then *whp* the number of vertices in the largest component is  $O(\log n)$ , but if  $t > 1$ , then *whp* there is a unique component containing a linear number of vertices. Indeed, more is known: *whp* the number of vertices in the giant component is  $\rho n + o(n)$ , where  $\rho = \rho(k, t) \in (0, 1)$  is the unique positive solution to the equation

$$1 - \rho = \exp(t((1 - \rho)^{k-1} - 1)).$$

When  $k = 2$ , this corresponds to the result of the graph case.

Karoński and Łuczak [39] studied the phase transition in the early supercritical phase, when  $t = 1 + o((\log n / n \log \log n)^{1/3})$ , proving a local limit theorem for the number of vertices in the largest component. Behrisch, Coja-Oghlan and Kang [11] established central and local limit theorems for the number of vertices in the largest component when  $t > 1 + \varepsilon$  for an arbitrarily small but fixed  $\varepsilon > 0$ . In addition, they derived the local limit theorem for the joint distribution of the

number of vertices and the number of edges in the largest component of  $H_k(n, p)$ . As an application, Behrisch, Coja-Oghlan and Kang [11] obtained an asymptotic formula for the probability that  $H_k(n, p)$  is connected. To this end, they applied new purely probabilistic approaches, such as two-round edge exposure, Stein's method, and Fourier analysis. Bollobás and Riordan [18] subsequently proved that the distribution of the number of vertices in the largest component tends to a normal distribution for  $t = 1 + \varepsilon$  whenever  $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$  satisfies  $\varepsilon^3 n \rightarrow \infty$ , i.e. throughout the supercritical regime.

Such local limit theorems are closely related to the *asymptotic number of connected  $k$ -uniform hypergraphs* with  $n$  vertices and  $m$  edges. Using combinatorial enumeration, Karoński and Łuczak [39] derived the asymptotic number of connected  $k$ -uniform hypergraphs with given numbers of vertices and edges in the barely supercritical regime when  $m - \frac{n}{k-1} \ll \frac{\log n}{\log \log n}$ . Behrisch, Coja-Oghlan and Kang derived the corresponding result from the local limit theorem in the strictly supercritical regime when  $m - \frac{n}{k-1} = \Theta(n)$ , and Bollobás and Riordan [19] all the way through the supercritical regime  $m - \frac{n}{k-1} = o(n)$ . Sato and Wormald [60] also derived the asymptotic number of connected 3-uniform hypergraphs using cores and kernels when  $n^{1/3} \log^2 n \ll m - \frac{n}{2} \ll n$ .

### 3.2 Random Hypergraphs as Random Simplicial Complexes

We can view random hypergraphs as random simplicial complexes, for example random 3-uniform hypergraphs as random simplicial 2-complexes, by regarding 3-element subsets as triangular 2-cells and 2-element subsets as 1-cells. Topological aspects of random simplicial complexes – such as collapsibility and vanishing of the top homology – were investigated, for example, in [5, 6, 43].

Motivated partly by the study of random simplicial complexes, we consider higher order connectivity. The notion of higher order connectivity in hypergraphs is however ambiguous and in fact there are several possible definitions. As an example, we shall consider the one suggested by Bollobás and Riordan [18], i.e. the  $j$ -tuple connectivity: a  $j$ -element subset  $J_1$  is said to be *reachable* from another  $j$ -element subset  $J_2$  if there exists a sequence of edges  $(E_1, \dots, E_\ell)$  such that  $J_1 \subseteq E_1$ ,  $J_2 \subseteq E_\ell$  and  $|E_i \cap E_{i+1}| \geq j$  for each  $i = 1, \dots, \ell - 1$ . The reachability is an equivalence relation on  $j$ -element subsets, and the equivalence classes are called  $j$ -tuple connected components, or  *$j$ -components* in short. The case  $j = 1$  corresponds to the notion of vertex-connectedness.

In view of the emergence of a giant  $j$ -component for any  $1 \leq j \leq k - 1$ , Cooley, Kang and Person [25] showed that  $H_k(n, p)$  undergoes a phase transition at the threshold  $p_{k,j} := \frac{1}{\binom{k}{j} - 1} \cdot \frac{1}{\binom{n-j}{k-j}}$ . Let  $p = t \cdot p_{k,j}$  for  $t > 0$  and let  $L_j(t)$  denote the number of  $j$ -element subsets contained in the largest  $j$ -component in  $H_k(n, p)$ . For an arbitrarily small but fixed  $\varepsilon > 0$ , Cooley, Kang and Person showed that

whp  $L_j(t) = \Omega(\varepsilon n^j)$  and the giant component is unique if  $t = 1 + \varepsilon$ , but  $L_j(t) = O(\varepsilon^{-2} \log n)$  if  $t = 1 - \varepsilon$ .

Cooley, Kang and Koch [24] took a closer look at the giant component in the supercritical regime and proved that when  $t = 1 + \varepsilon$  for  $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$  satisfying  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $\varepsilon^3 n \rightarrow \infty$ , whp  $L_j(t) = (1 + o(1))2\varepsilon \frac{1}{\binom{k}{j}-1} \binom{n}{j}$ . For  $k = 2, j = 1$ , the threshold and the number of vertices in the giant component match those for the graph case:  $p_{2,1} = \frac{1}{n-1}$  and whp  $L_1(t) = (1 + o(1))2\varepsilon n$ .

These results open up many new questions. What can we say about  $L_j(t)$  at the criticality when  $t = 1$ ? What about the number of  $j$ -element subsets contained in the second largest  $j$ -component in the supercritical regime? What is the actual distribution of the number of  $j$ -element subsets contained in the giant  $j$ -component? What about central or local limit theorems for the giant  $j$ -component?

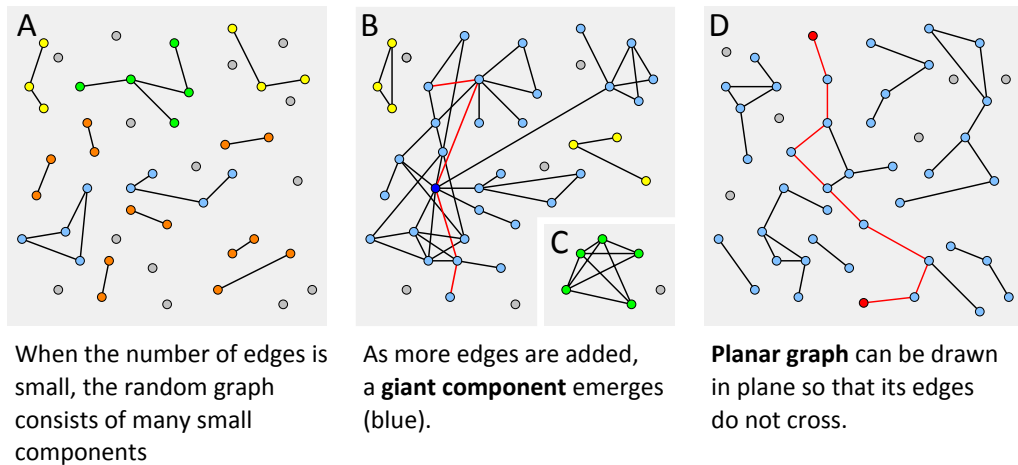
### 3.3 Random Planar Graphs

A graph is called *planar* if it can be embedded in the plane without crossing edges. One of the most well-known results about planar graphs is the Four Colour Theorem: it states roughly that given any separation of a plane into regions, say countries, the countries can be coloured using at most four colours so that no two countries sharing a common border have the same colour.

Random planar graphs have attained a considerable attention since McDiarmid, Steger and Welsh derived important asymptotic properties of random planar graphs [48] and Giménez and Noy determined the exact asymptotic number of labelled planar graphs [30].

Consider a uniform random planar graph  $P(n, m)$  which is a graph chosen uniformly at random among all labelled planar graphs with  $n$  vertices and  $m$  edges. Łuczak and Kang [36] showed that there are, surprisingly, *two critical periods* in the evolution of a random planar graph. The first one takes place when the giant component is formed; this happens when  $m = n/2 + O(n^{2/3})$ , analogously to the uniform random graph  $G(n, m)$ . The second critical period of a random planar graph occurs when the giant component covers nearly all vertices; this happens when  $m = n + O(n^{3/5})$ .

As we have seen in Section 2.3 – after expressing the results in terms of  $G(n, m)$  – the giant component in  $G(n, m)$  suddenly emerges at  $m = n/2 + O(n^{2/3})$ . If  $m = n/2 + s$  and  $-n \ll s \ll -n^{2/3}$ , then whp  $G(n, m)$  consists of isolated trees and unicyclic components, so it is clearly planar, and the largest component is a tree of order  $(1 + o(1)) \frac{n^2}{2s^2} \log \frac{|s|^3}{n^2}$ . On the other hand, if  $n^{2/3} \ll s \ll n$ , then whp  $G(n, m)$  contains exactly one complex component (called the *giant component*) of order  $(4 + o(1))s$ , while the second largest component is whp a tree of order  $(1 + o(1)) \frac{n^2}{2s^2} \log \frac{s^3}{n^2}$ , a remarkable similarity between the subcritical graph and



The **degree of a vertex** is the number of adjacent edges. The dark blue vertex in B has the largest degree 9.

The **order of a component** is the number of vertices it contains. The blue component in B has order 30, the coloured components in A have order 5 (green), 4 (blue), 3 (yellow), 2 (orange) and 1 (grey).

The graph **diameter** is the longest minimum distance between any two vertices. The largest component in A has a diameter three, in B four, in C two, and in D eight.

In a "**small-world**" network, the typical shortest distance between any two vertices in the large component is "short", i. e., the largest component has a small diameter (marked by a red line in B and D).

High **clustering** means that any neighbours of a vertex are also very likely to be connected, as in the green component in C.

Real-world networks often have a small **diameter** and exhibit high **clustering**.

Figure 2: Basic concepts in graph theory.

the supercritical graph after the removal of the giant component. Furthermore, if  $s \gg n^{2/3}$ , then *whp*  $G(n, m)$  contains a topological copy of  $K_{3,3}$  and thus is not planar.

Another random structure relevant to the behaviour of a random planar graph  $P(n, m)$  is a uniform random forest  $F(n, m)$ , i.e. a forest chosen uniformly at random among all labelled forests with  $n$  vertices and  $m$  edges. Łuczak and Pittel [46] found that although the giant component in  $F(n, m)$  emerges at  $m = n/2 + O(n^{2/3})$ , the critical behaviour of  $F(n, m)$  is somewhat different from that of  $G(n, m)$  when  $n^{2/3} \ll s \ll n$ . Let  $m = n/2 + s$ . If  $s \ll -n^{2/3}$ , then the structures of both  $F(n, m)$  and  $G(n, m)$  are similar, e.g. the order of the largest tree in  $F(n, m)$  is *whp*  $(1 + o(1)) \frac{n^2}{2s^2} \log \frac{|s|^3}{n^2}$ . However in the supercritical phase, when  $n^{2/3} \ll s \ll n$ , the giant tree of  $F(n, m)$  is *whp* of order  $(2 + o(1))s$ , which is roughly *half* the or-



der of the largest component of  $G(n, m)$ , while the second largest tree of  $F(n, m)$  is of order  $\Theta(n^{2/3})$ , which is by far larger than the second largest component of  $G(n, m)$ .

Łuczak and Kang showed that as far as  $m = n/2 + s$  with  $n^{2/3} \ll s \ll n$  (i.e. the supercritical regime of the first critical period), the behaviour of  $P(n, m)$  is similar to that of  $F(n, m)$ . Namely, *whp* the order of the largest complex component is  $(2 + o(1))s$ , while the second largest component has  $\Theta(n^{2/3})$  vertices. So, unlike in  $G(n, m)$ , there is no similarity between the subcritical planar graph and the supercritical planar graph after the removal of the giant component.

The second critical period in the evolution of  $P(n, m)$  does not correspond to phase transitions in  $F(n, m)$  and  $G(n, m)$ . To see why  $P(n, m)$  features the second type of the critical behaviour, we note that the maximum number of edges in  $F(n, m)$  is  $n - 1$ , while that in  $P(n, m)$  is  $3n - 6$ , so the growth rate of the order of complex components in  $P(n, m)$  must change at some point. Łuczak and Kang proved that this occurs when  $m = n + O(n^{3/5})$ . To be more precise, we let  $m = n + t$ , where  $t = o(n)$ . If  $t \ll -n^{3/5}$  but  $n/2 + t \gg n^{2/3}$ , the giant component of  $P(n, m)$  contains *whp*  $n - (2 + o(1))|t|$  vertices, while for  $n^{3/5} \ll t \ll n^{2/3}$  the giant component contains  $n - (\alpha + o(1))(n/t)^{3/2}$  vertices for some computable constant  $\alpha > 0$ . The unfortunate condition  $t \ll n^{2/3}$  is a result of the proof method and most likely can be replaced by  $t \ll n$ .

### 3.4 Random Graph Processes

A natural modification of the Erdős-Rényi process is the class of random processes based on the paradigm of the *power of multiple choices*, which are now known as Achlioptas processes. In each step of Achlioptas processes, *two* or more potential edges are chosen randomly, and according to a certain rule, one of them is chosen and added to the evolving graph.

One natural question is whether there is a simple rule that shifts the critical time for the emergence of a giant component. The product rule was suggested as the most likely to delay the critical time: the product rule selects between the two given potential edges the one that minimises the product of the sizes of the components of its endvertices. Shortly thereafter, Bohman and Frieze showed that a much simpler rule, now known as the Bohman-Frieze process, delays the critical time [12]: if the first edge would join two isolated vertices, it is added to the evolving graph; otherwise, the second edge is added. Their work showed that this simple rule delayed the appearance of the giant component, that is, the critical point of the phase transition in the Bohman-Frieze process is strictly larger than one. It initiated three major directions of research into Achlioptas processes.

The first direction is concerned with testing the power and limits of Achlioptas processes. How much can we accelerate or delay the phase transition? How

long can we delay the formation of a Hamiltonian cycle? These questions can be asked in the original context of an Achlioptas process or in the off-line case in which all pairs of edges are given first, then the choices are made. The results often generalise to the case in which  $\ell$  edges are presented at each step instead of 2, for some fixed constant  $\ell$ . Recent results concern mostly the delaying of the phase transition, the avoidance of small subgraphs, and the acceleration of the appearance of Hamiltonian cycles.

The second direction involves choosing one fixed Achlioptas rule and exploring the fine details of the evolution of the graph. For example, Spencer and Wormald [62], Janson and Spencer [34] examined the state of the Bohman-Frieze process after  $m = tn/2$  rounds. Spencer and Wormald [62] showed there is a critical time  $t_c \sim 1.176$  at which the Bohman-Frieze process undergoes a phase transition: in the subcritical region  $t = t_c - \varepsilon$  (for a constant  $\varepsilon > 0$ ) the largest component is of order  $O(\log n)$ , while in the supercritical region  $t = t_c + \varepsilon$  there is a giant component of order  $\Omega(n)$ . Janson and Spencer [34] studied the barely supercritical phase with  $t = t_c + \varepsilon$  for a constant small  $\varepsilon > 0$  and showed that *whp* the largest component is of order  $\Theta(\varepsilon n)$ , and the order of the second largest component is  $\Theta(\varepsilon^{-2} \log n)$ . Kang, Perkins and Spencer [37] looked closer into the component size distribution near the criticality. In fact, the Bohman-Frieze process is shorthand for a much wider class of Achlioptas rules, so-called ‘bounded-size rules’ introduced by Spencer and Wormald [62]. In a bounded-size rule, the choice between the two edges can only depend on the sizes of the components that may be connected by these edges, and all components of order larger than  $K$  must be treated equally, for some fixed constant  $K$ .

The third direction is to understand the detailed behaviour of a general class of Achlioptas processes. The distribution of component sizes in bounded-size rules was determined [58, 59]. The interest in Achlioptas processes increased immensely, when Achlioptas, D’Souza and Spencer [1] conjectured, based on extensive simulations, that the product rule behaves quite differently from the Erdős-Rényi process. It exhibits the so-called *explosive percolation*, in other words, the order of the largest component “jumps” from sublinear to linear order within sublinear steps of the process. However, Riordan and Warnke proved that this is not the case [57, 58]: the phase transition for a large class of generalised Achlioptas processes including the product rule is continuous.

Despite the intensive study of Achlioptas processes, the detailed behaviour of the component size distribution of a large class of Achlioptas processes, including the product rule, is not known. What can be further said about the phase transition for the product rule? What is the critical time for the emergence of a giant component? How large is the giant component shortly after the critical point? What is the size of the critical window?

### 3.5 Inhomogeneous Random Graphs

Another well-studied natural generalisation of the Erdős-Rényi random graph are random graphs with a given degree sequence – an example of inhomogeneous random graphs. Łuczak [45] and Chung and Lu [23] studied the component structure of a random graph with a given degree sequence. The phase transition in random graphs with a given degree sequence has been much more extensively studied, among others by Molloy and Reed [50, 51], Newman, Strogatz, and Watts [52], Kang and Seierstad [38], and Riordan [56].

Consider a sequence  $\mathcal{D} = \{d_0(n), d_1(n), \dots\}$ , such that  $d_i(n) = 0$  for  $i \geq n$ , and  $\sum_{i \geq 0} d_i(n) = n$ . The value  $d_i(n)$  denotes the number of vertices of degree  $i$  in a graph of order  $n$ . Consider a uniform random graph  $G_n(\mathcal{D})$  with  $\mathcal{D}$  as a degree sequence. Under a mild smoothness condition on  $\mathcal{D}$ ,  $\lambda_i(n) := d_i(n)/n$  converges to a constant: we define  $\lambda_i^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i(n)$  and  $Q(\mathcal{D}) = \sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i^*$ . Molloy and Reed [50, 51] showed that if  $Q(\mathcal{D}) < 0$ , then *whp* all components in  $G_n(\mathcal{D})$  are of order  $\Theta(\log n)$ , while if  $Q(\mathcal{D}) > 0$ , then *whp*  $G_n(\mathcal{D})$  contains a unique giant component of order  $\Theta(n)$ . Kang and Seierstad [38] studied the critical phase when  $\sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i(n)$  converges to 0. To capture how fast the quantity  $\sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i(n)$  converges to 0, we let  $\tau_n$  be the largest zero of the function  $Q_n(x) := \sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i(n)x^i$ , i.e.  $Q_n(\tau_n) = 0$ . Kang and Seierstad determined the order of the largest component in a weakly supercritical regime with a logarithmic gap, i.e. when  $(1 - \tau_n)n^{1/3} \gg \log n$ . Here the parameter  $1 - \tau_n$  plays the same role for  $G_n(\mathcal{D})$  as  $t - 1$  does for  $G(n, p)$  when  $p = t/(n - 1)$ . More recently, Riordan [56] determined the exact width of the critical window and the limiting distribution of the asymptotic order of the largest component when the maximum degree is bounded.

During the last few decades, it was observed that real-world networks – arising in the fields of economy, physics, and social sciences – belong to the class of the so-called *small-world networks* which are characterised by *high clustering* (meaning that vertices are highly but locally connected among each other) and *a small diameter* (meaning that short paths link globally all vertices of the network, so all vertices are linked through relatively few number of steps). Furthermore, the number of connections (i.e. the degree of a vertex) in many real-world networks has a *power law distribution*. This property, among others, motivated the preferential attachment model introduced and studied, for example, by Barabási and Albert [2, 7].

To model and analyse real-world networks, numerous random graphs are introduced as their stochastic models, and many of them are special cases of *inhomogeneous random graphs* introduced by Bollobás, Janson, and Riordan [15], where vertices come in different types, and the probability of realising an edge depends on the types of its terminal vertices. In particular, the edges appear independently and the number of edges is linear in the number of vertices. Among other things,

Bollobás, Janson, and Riordan [15] determined the critical point of the phase transition and the order of the giant component after the transition, by relating their model to multi-type branching processes.

## 4 Related Areas and Applications

Random graphs have been extensively studied since their introduction, and became one of the central themes of contemporary mathematics, partly because they are closely related to various random discrete structures such as random surfaces, random maps, random matrices, random satisfiability problems, Ising and Potts models, and percolation, and partly because they are useful for modelling, analysis, and solving of structural and algorithmic problems arising in mathematics, theoretical computer science, natural sciences, social sciences, and life sciences [2]. The intense study of random discrete structures, in particular the study of their phase transition phenomena, has brought together different fields of research, such as discrete mathematics, probability theory, theoretical computer science, and statistical physics.

### 4.1 Phase Transition

The phase transition deals with a sudden change in the properties of a large structure caused by altering a critical parameter. It is observed in mathematics and natural sciences in many different contexts. We have seen the phase transitions in various random graph models through Sections 2.3–3.5.

The phase transitions that everybody is most familiar with are those of water: from ice (solid) to water (liquid), and from water to vapour (gas). There are two critical temperatures: zero degree Celsius, the freezing point of water, and one hundred degree Celsius, the boiling point of water. At low temperatures, in the solid state, the atoms and molecules interact strongly with their neighbours and are densely packed, typically in a regular pattern. At intermediate temperatures, the interactions are weakened, resulting in a constantly changing short-range order. And at high temperatures, the molecules barely interact and display a sparse, highly dynamic, and a rather random pattern – see Figure 3. The intriguing fact is that these temperature-induced changes do not occur continuously but exhibit two sharp jumps – phase transitions – at the melting and boiling temperatures.

A well-known example that exhibits phase transition is the percolation. In physics, materials science, and geography, the theory of percolation deals with questions related to the passage of fluid or gas through porous or disordered media. It can be applied to a wide range of seemingly unrelated phenomena, for example, the change of the earth's surface caused by weathering or erosion, the spreading of forest fire, the functioning of a cigarette filter or a coffee percolator.

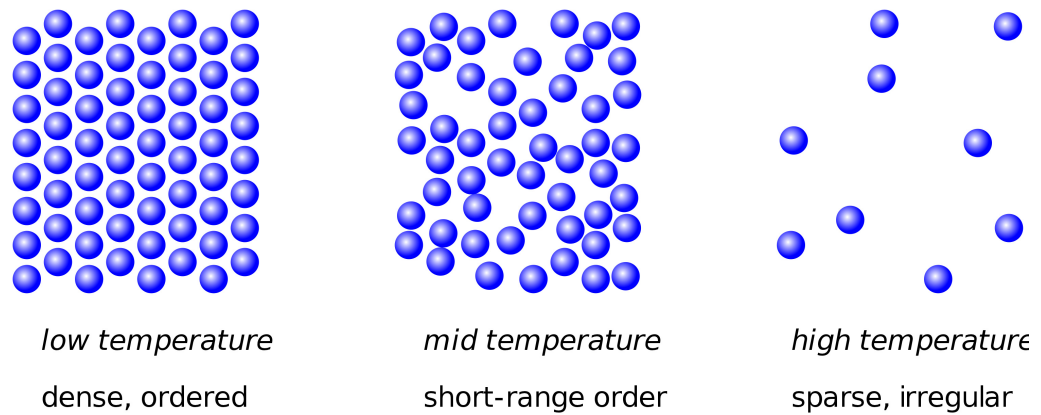


Figure 3: Organisation of atoms or molecules at different temperatures.

Assume that a liquid is poured on top of some porous material. Will the liquid be able to make its way from the top to the bottom? This physical question can be modelled mathematically by *bond percolation*: each bond (or edge or connection) between each two neighbours in a square lattice may be open (allowing the liquid through) with probability  $p$ , or closed with probability  $1 - p$ , independently of each other. The bond percolation on the complete graph  $K_n$  (i.e. the graph with  $n$  vertices and  $\binom{n}{2}$  edges) is just the binomial random graph  $G(n, p)$ . Another useful model is *site percolation*, where each site is occupied with probability  $p$  or empty with probability  $1 - p$ .

The mathematical reformulation of the question from above is: for a given  $p$ , what is the probability that an open path exists from the top to the bottom? Interestingly, it turns out that for an infinite lattice there is a critical value  $p_c$  such that for  $p$  smaller than  $p_c$  the probability that such a path exists is zero, while for  $p$  larger than  $p_c$  the probability is one. In some cases  $p_c$  can be calculated explicitly. For example, for the bond percolation on the square lattice in two dimensions  $\mathbb{Z}^2$ ,  $p_c = 1/2$ , a fact which was an open question for more than 20 years and was finally resolved by Kesten in the early 1980s [41].

Unfortunately, the exact calculation of  $p_c$  for most infinite lattice graphs is not known. For more detailed mathematical discussions on percolation, see the books with the same title “Percolation” by Grimmett [31] and by Bollobás and Riordan [16].

## 4.2 Social Sciences

Analysis of human interactions and communication by means of the theory of deterministic and random graphs is a useful tool in social sciences. One of the oldest and best-known examples is the ‘six degree of separation’ phenomenon described

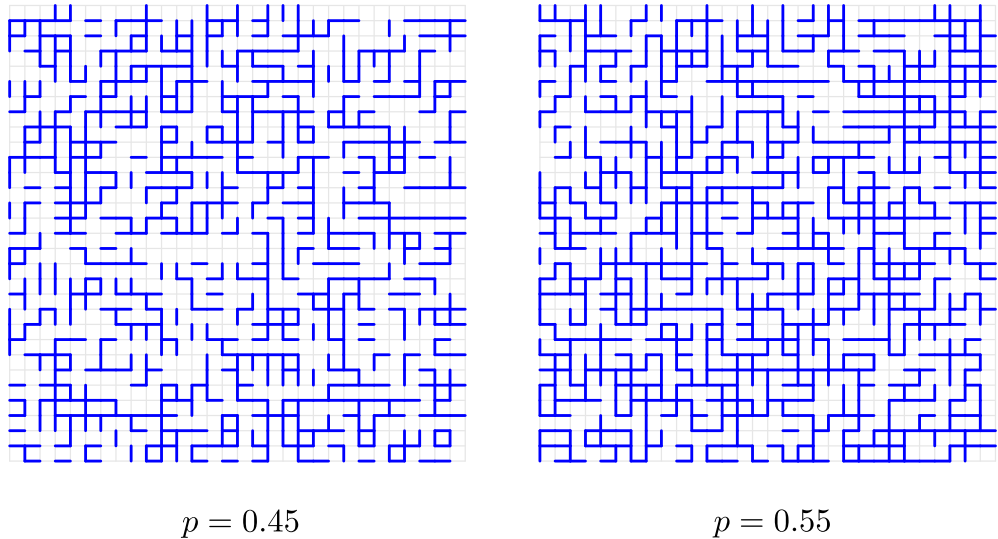


Figure 4: Bond percolation on two-dimensional square lattice for two values of the probability  $p$  that a bond between two sites exists. Left:  $p$  below the percolation threshold  $p_c = 0.5$ ; there is no path connecting two opposing sides of the square. Right:  $p$  above the percolation threshold; a path connecting the top with the bottom (and the left with the right) sides of the square exists.

decades ago [49]: any two people can be connected by a chain of acquaintances on average six persons long. Similarly to the Erdős-Rényi random graph, the graph of human acquaintanceship has a small diameter. However, unlike the Erdős-Rényi random graph, it has a high *clustering coefficient*, making it a ‘small-world network’. The chances that two people who have a common friend also know each other are much higher than in a random graph. Many human interaction networks have this structure, for example, the scientific co-authorship network, known to mathematicians by the concept of the Erdős number.

The expansion of the internet into our daily lives greatly benefited social sciences: the patterns of human activity on the internet, such as navigation between the web pages or communication within virtual communities, is a rich source of data. In a recent example, the analysis of online-gaming patterns in internet identified clusters of players that coincided with the boundaries of traditional Chinese cultural regions [67]. While this coincidence is not surprising in itself, the fact that the player groups can be identified and analysed without using the geographical information is useful. The behaviour in the internet can be used to find culturally distinct groups, monitor their emergence and evolution, interactions, geographical distribution, etc. The network structure and dynamics of these groups can then help to predict their future development and influence on the society far beyond the limits of the internet.

The pattern of human mobility is relevant in many different contexts, for example, it has obvious consequences for the spread of infectious diseases. Modelling the human travel as diffusion on the Erdős-Rényi random graph does not take into account the geographical restrictions, which, unlike the case of communication over the internet, certainly play a strong role here. On the other hand, random walk on a regular lattice neglects the effect of long jumps enabled by air travel. In an interesting experiment reflecting the human mobility, the circulation of bank notes was monitored by volunteers using tracking websites. The analysis of the data revealed a power-law decay of distribution of travelling distances [20]. The presence of long-distance jumps means that the disease spreading across this network is a fast, super-diffusive process. Interestingly, the spread of plague in Europe in 14th century did not follow this trend, suggesting the absence of the long-range links and therefore a different structure of human contacts at the time [47].

The structure of the network determines the efficiency of spreading of information or diseases over it [26]. Will the spreading be more efficient on a well-connected network (a graph with a small diameter), where no two individuals are too far from each other, or is high clustering a more relevant network property? An experiment in which an internet community with a controlled network structure was created showed that a particular human behaviour spreads faster and further on a highly clustered rather than random network [22]. Reinforcement by multiple neighbours proved to be important for adopting the behaviour by an individual, and therefore for its spreading. A similar scenario may apply for spreading of a disease which requires multiple contacts, as opposed to a highly contagious disease that is transmitted on a single encounter. Another recent work identifies models in which some fraction of the network will not be reached [69]; the size of this fraction again depends on the network structure. All these findings have implications for designing strategies for distributing information or for vaccination [65]. At the time of writing this article, a severe Ebola epidemic broke out in West Africa. The variable network structures of the social contacts in different communities across the affected region is being used to explain and predict the differences between the involved countries in the spread and further development of the disease [42].

### **4.3 Man-made Networks**

Large complex structures found in nature are often formed by individual uncorrelated interactions between a large number of their constituents; therefore it is not surprising that random graphs provide good models for many of them. Man-made structures, on the other hand, may be thought of as a result of rational design optimised for a given purpose; one would therefore expect a regular structure without much room for randomness (electrical circuits, cell phone network). Many creations of man that can be viewed as a network, however, exhibit sufficient ‘randomness’, often because their structure developed over time (like the world wide

web), or because they copy a pre-existing network (e.g. airport network, electricity network) or are subject to random or other constraints (e.g. geography). Random graphs with well-chosen characteristics can thus serve as useful models for the evolution and the function of many complex artificial structures.

New insights can be gained by studying the effects of interactions between two or more networks. If the interaction is such that the removal of a vertex in one network can eliminate vertices in the other network, the chain of subsequent vertex removals can lead to a large-scale fragmentation of both networks. A well known example of such a collapse of coupled networks is an electrical blackout in Italy in 2003, when a shutdown of power stations caused failure of internet network controlling the power grid [21]. Studies of interdependent networks can help to design networks resistant to this type of failure [55].

Although scale-free networks, such as internet, are robust against random removal of a vertex, they are highly sensitive against an attack: a targeted removal of a vertex with a high degree [3]. This knowledge can be used to design the ways to control the spread of viruses across the internet, or to identify the weak and sensitive points of the network that require extra protection against attacks. Understanding the properties of the underlying network structure can help in practical design of a real network with a balance between its effectiveness, redundancy, robustness and cost.

#### **4.4 Life Sciences**

The recent boom in life sciences has generated huge amounts of data: genomes of whole organisms have been sequenced, proteins and patterns of their interactions have been identified, metabolic networks relating the biochemical reactions have been mapped. Detailed analysis of gene and protein interaction networks is expected to help us to understand the properties of the network that are determined by its large-scale structure rather than by the details of individual interactions, for example, how a combination of mutations of different proteins increases the risk of a disease, how the topology of a protein network affects its robustness against random mutations, or how the network may have evolved over time [8].

Biological networks are often scale-free, with a broad vertex degree distribution. Such networks are robust against removal of a randomly chosen vertex [3], a property important for resistance against random elimination of one unit, for example, mutation making a protein nonfunctional.

In graphs representing biological networks, some subgraphs (called motifs) can be identified as sub-units fulfilling a well-defined function. Analysis of a biological network in terms of subgraphs can therefore reveal so far unknown sub-units and thus help our understanding of the functionality of a large network [32].



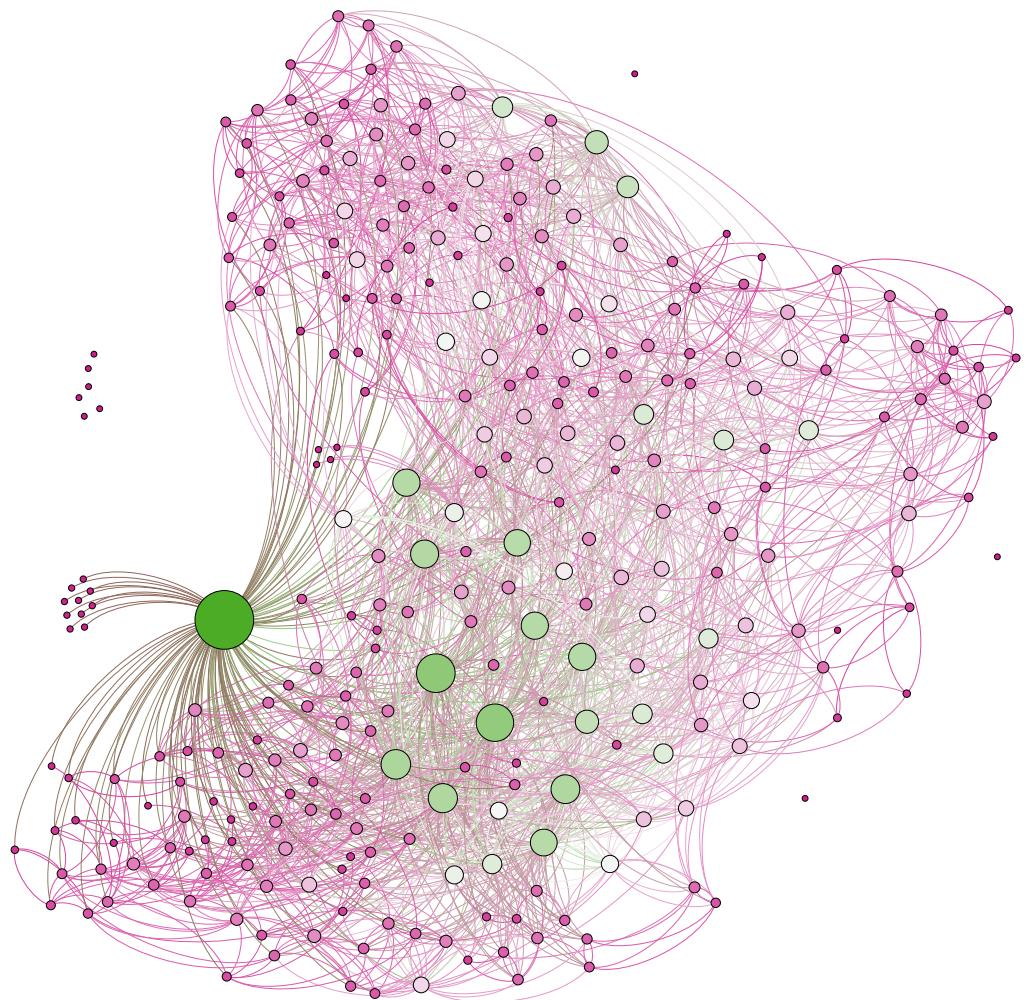


Figure 5: The graph depicting the connections between the neurons of *C. elegans*. The size and the colour of the vertices correspond to their degree. The data originate from ref. [68].

#### 4.5 The Brain

The theory of deterministic or random graphs can help us describe, and in the future hopefully also understand, perhaps the most complex structure found in nature: the brain [53]. The network of interconnected neurons in the brain has been modelled as a random graph with different properties (e.g. scale-free network). While the ‘brain’ of a simple worm *C. elegans*, a widely studied model organism, consists of 302 neurons connected by around 7300 synapses, and has been mapped in detail [66], the human brain contains  $\sim 10^{11}$  neurons, with the number of synapses hard to estimate ( $10^{14}$ – $10^{15}$ ?), let alone map. The way the neurons are

connected and interact with each other largely determines the brain functionality. For example, there is evidence that the functional connectivity structure within the brain changes in patients with Alzheimer’s disease: the activity networks exhibit lower clustering, being closer to a random network than those of a healthy brain [63]. Experimental studies of spontaneous brain activity – the analysis of electric spikes produced by neurons, and of the size and duration of avalanches of this neuronal activity – often produce results that can be described by power-law distributions (scale-free). This has led to a hypothesis that brain, viewed as a network of neurons, may be operating at a critical state, a state close to a phase transition. This is relevant, as various network properties related to the communication efficiency, dynamic range of response, etc., are optimised at the critical point [9].

## 5 Conclusion

This article aims to give a flavour of how the field of random graphs has evolved over the last 50 years from the first definition of a random graph to a rich mathematical theory with applications across many scientific disciplines. It should, however, be mentioned that this article is not an exhaustive survey on the theory of random graphs, but rather a brief collection of special topics and results that are of particular interest to the authors.

From the theory point of view, a special focus was put on the fascinating phenomenon of phase transition in terms of the emergence of a giant component in a random graph. There are, however, also other important and interesting properties of random graphs, such as small subgraphs, long cycles, diameter, cliques, independent sets, and the chromatic number, to name a few. For a comprehensive account of these topics we refer the readers to two excellent books on random graphs by Bollobás [14] and by Janson, Łuczak, and Ruciński [33].

From the viewpoint of application, the theory of random graphs has proven to be appropriate for the description and analysis of complex structures arising everywhere from the nature to the society, even of the brain. On the other hand, diverse applications continue to motivate and inform the study of random graphs.

The expansion of random graph theory and its applications shows us again how much abstract mathematical ideas can teach us about the “real world”.

## Acknowledgements

The first author is supported by Austrian Science Fund (FWF): P26826-N26 and W1230. This work is partially supported by NAWI Graz.

## References

- [1] D. Achlioptas, R. M. D'Souza, and J. Spencer, Explosive percolation in random networks, *Science* **323**:5920 (2009), 1453–1455.
- [2] R. Albert and A.-L. Barabási, Statistical mechanics of complex networks, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002), 47–97.
- [3] R. Albert, H. Jeong and A.-L. Barabási, Error and attack tolerance of complex networks, *Nature* **406** (2000), 378–382.
- [4] D. Aldous, Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent, *Ann. Probab.* **25** (1997), 812–854.
- [5] L. Aronshtam and N. Linial, When does the top homology of a random simplicial complex vanish?, *Random Struct. Alg.* doi:10.1002/rsa.20495.
- [6] L. Aronshtam, N. Linial, T. Łuczak, and R. Meshulam, Collapsibility and vanishing of top homology in random simplicial complexes, *Discrete & Computational Geometry* **49** (2013), 317–334.
- [7] A.-L. Barabási and R. Albert, Emergence of scaling in random networks, *Science* **286** (1999), no. 5439, 509–512.
- [8] A.-L. Barabási, N. Gulbahce, and J. Loscalzo, Network medicine: a network-based approach to human disease, *Nat. Rev. Genet.* **12** (2011), 56–68.
- [9] J. M. Beggs and N. Timme, Being critical of criticality in the brain, *Frontiers in Physiology* **3** (163), 2012.
- [10] M. Behrisch, A. Coja-Oghlan and M. Kang, The order of the giant component of random hypergraphs, *Random Struct. Alg.* **36** (2010), 149–184.
- [11] M. Behrisch, A. Coja-Oghlan and M. Kang, Local limit theorems for the giant component of random hypergraphs, *Comb. Probab. Comput.* **23** (2014), 331–366.
- [12] T. Bohman and A. Frieze, Avoiding a giant component, *Random Struct. Alg.* **19** (2001), 75–85.
- [13] B. Bollobás, The evolution of random graphs, *Trans. Am. Math. Soc.* **286** (1984), 257–274.
- [14] B. Bollobás, *Random graphs*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2001.
- [15] B. Bollobás, S. Janson, and O. Riordan, The phase transition in inhomogeneous random graphs, *Random Struct. Alg.* **31** (2007), 3–122.
- [16] B. Bollobás and O. Riordan, *Percolation*, Cambridge University Press, New York, 2006.
- [17] B. Bollobás and O. Riordan, A simple branching process approach to the phase transition in  $G_{n,p}$ , *Electron. J. Combin.* **19** (2012), no. 4, Paper 21.
- [18] B. Bollobás and O. Riordan, Asymptotic normality of the size of the giant component in a random hypergraph, *Random Struct. Alg.* **41** (2012), 441–450.
- [19] B. Bollobás and O. Riordan, Counting connected hypergraphs via the probabilistic method, <http://arxiv.org/abs/1404.5887>.
- [20] D. Brockmann, L. Hufnagel, and T. Geisel, The scaling laws of human travel, *Nature* **439**:7075 (2006), 462–465.
- [21] S. Buldyrev, R. Parshani, G. Paul, H. Stanley, and S. Havlin, Catastrophic cascade of failures in interdependent networks, *Nature* **464** (2010), 1024–1028.
- [22] D. Centola, The Spread of Behavior in an Online Social Network Experiment,

- Science* **329** (2010), 1194–1197.
- [23] F. Chung and L. Lu, Connected components in random graphs with given expected degree sequences, *Annals of Combinatorics* **6** (2002), 125–145.
  - [24] O. Cooley, M. Kang, and C. Koch, The size of the giant components in random hypergraphs, manuscript.
  - [25] O. Cooley, M. Kang, and Y. Person, Giant components in random hypergraphs, manuscript.
  - [26] S. Eubank, H. Guclu, A. S. Anil Kumar, M. V. Marathe, A. Srinivasan, Z. Toroczkai and N. Wang, Modelling disease outbreaks in realistic urban social networks, *Nature* **429** (2004), 180–184.
  - [27] P. Erdős and A. Rényi, On random graphs I, *Publicationes Mathematicae Debrecen* **6** (1959), 290–297
  - [28] P. Erdős and A. Rényi, On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5** (1960), 17–61.
  - [29] E. N. Gilbert, Random graphs, *Ann. Math. Statist.* **30** (1959), 1141–1144.
  - [30] O. Giménez and M. Noy, Asymptotic enumeration and limit laws of planar graphs, *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), 309–329.
  - [31] G. Grimmett, *Percolation*, Fundamental Principles of Mathematical Sciences 311, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
  - [32] R. Guimerá and L. Amaral, Functional cartography of complex metabolic networks, *Nature* **433** (2005), 895–900.
  - [33] S. Janson, T. Łuczak and A. Ruciński, *Random Graphs*, Wiley, 2000.
  - [34] S. Janson and J. Spencer, Phase transitions for modified Erdős-Rényi processes, *Ark. Mat.* **50** (2012), no. 2, 305–329.
  - [35] M. Kang, Random Graphs: from Nature to Society to the Brain, a special issue of the Mathematical Intelligencer to SEOUL ICM 2014, pp. 42–44, Springer.
  - [36] M. Kang and T. Łuczak, Two critical periods in the evolution of random planar graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), 4239–4265.
  - [37] M. Kang, W. Perkins and J. Spencer, The Bohman-Frieze process near criticality, *Random Struct. Alg.* **43** (2013), 221–250.
  - [38] M. Kang and T. Seierstad, The critical phase for random graphs with a given degree sequence, *Comb. Probab. Comput.* **17** (2008), 67–86.
  - [39] M. Karoński and T. Łuczak, The phase transition in a random hypergraph, *J. Comput. Appl. Math.* **142** (2002), no. 1, 125–135.
  - [40] R. Karp, The transitive closure of a random digraph, *Random Struct. Alg.* **1** (1990), 73–93.
  - [41] H. Kesten, *Percolation theory for mathematicians*, Progress in Probability and Statistics 2, Birkhäuser, Boston, Mass., 1982.
  - [42] M. A. Kiskowski, Description of the Early Growth Dynamics of 2014 West Africa Ebola Epidemic, <http://arxiv.org/abs/1410.5409>.
  - [43] N. Linial and R. Meshulam, Homological connectivity of random 2-complexes, *Combinatorica* **26** (2006), no. 4, 475–487.
  - [44] T. Łuczak, Component behavior near the critical point of the random graph process, *Random Struct. Alg.* **1** (1990), 287–310.
  - [45] T. Łuczak, Sparse random graphs with a given degree sequence, in *Random*

- Graphs 2* (eds. Alan M. Frieze, Tomasz Łuczak), 165–182, Wiley, New York, 1992.
- [46] T. Łuczak and B. Pittel, Components of random forests, *Comb. Probab. Comput.* **1** (1992), 35–52.
  - [47] S. A. Marvel, T. Martin, C. R. Doering, D. Lusseau and M. E. J. Newman, The small-world effect is a modern phenomenon, arxiv131310.2636v1.
  - [48] C. McDiarmid, A. Steger, and D. J. A. Welsh, Random planar graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **93** (2005), 187–205.
  - [49] S. Milgram, The small-world problem, *Psychology Today* **1** (1967), 61–67.
  - [50] M. Molloy and B. Reed, A critical point for random graphs with a given degree sequence, *Random Struct. Alg.* **6** (1995), no. 2–3, 161–179.
  - [51] M. Molloy and B. Reed, The size of the largest component of a random graph on a fixed degree sequence, *Comb. Probab. Comput.* **7** (1998), 295–306.
  - [52] M. Newman, S. Strogatz, and D. Watts, Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications, *Phys. Rev. E* **64** (2001), 026118.
  - [53] D. Papo, J. M. Buldú, S. Boccaletti and E. T. Bullmore, Complex network theory and the brain, *Phil. Trans. R. Soc. B* **369** (2014), 20130520.
  - [54] B. Pittel and N. Wormald, Counting connected graphs inside out, *J. Combin. Theory, Series B* **93** (2005), 127–172.
  - [55] E. Quill, When networks network: Once studied solo, systems display surprising behavior when they interact, *Science News* **182**:6 (2012), 18–25.
  - [56] O. Riordan, The phase transition in the configuration model, *Comb. Probab. Comput.* **21** (2012), 265–299.
  - [57] O. Riordan and L. Warnke, Explosive Percolation Is Continuous, *Science* **333** (2011), 322–324.
  - [58] O. Riordan and L. Warnke, Achlioptas process phase transitions are continuous, *Ann. Appl. Probab.* **22** (2012), no. 4, 1450–1464.
  - [59] O. Riordan and L. Warnke, The evolution of subcritical Achlioptas processes, *Random Structures Algorithms*, DOI: 10.1002/rsa.20530
  - [60] C. M. Sato and N. Wormald, Asymptotic enumeration of sparse connected 3-uniform hypergraphs, <http://arxiv.org/abs/1401.7381>.
  - [61] J. Schmidt-Prizan and E. Shamir, Component structure in the evolution of random hypergraphs, *Combinatorica* **5** (1985), no. 1, 81–94.
  - [62] J. Spencer and N. Wormald, Birth control for giants, *Combinatorica* **27** (2007), no. 5, 587–628.
  - [63] C. J. Stam, W. de Haan, A. Daffertshofer, B. F. Jones, I. Manshanden, A. M. van Cappellen van Walsum, T. Montez, J. P. A. Verbunt, J. C. de Munck, B. W. van Dijk, H. W. Berendse and P. Scheltens, Graph theoretical analysis of magnetoencephalographic functional connectivity in Alzheimer’s disease, *Brain* **132** (2009), 213–224.
  - [64] V. E. Stepanov, On the probability of connectedness of a random graph  $g_m(t)$ , *Theory Prob. Appl.* **15** (1970), 55–67.
  - [65] F. Takeuchi and K. Yamamoto, Effectiveness of realistic vaccination strategies for contact networks of various degree distributions, *J. Theor. Biol.* **243** (2006), no. 1, 39–47.

- [66] L. R. Varshney, B. L. Chen, E. Paniagua, D. H. Hall, D. B. Chklovskii, Structural Properties of the *Caenorhabditis elegans* Neuronal Network, *PLoS Comput. Biol.* **7** (2011), no. 2, e1001066.
- [67] X. Wang, M. Wenli and C. Liu, Games and Culture: Using Online-gaming Data to Cluster Chinese Regional Cultures, <http://arxiv.org/abs/1310.0621>.
- [68] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Collective dynamics of ‘small-world’ networks, *Nature* **393** (1998), 440–442 .
- [69] Z.-K. Zhang, C.-X. Zhang, X.-P. Han and C. Liu, Emergence of Blind Areas in Information Spreading, *PLoS ONE* **9** (2014), e95785.

*Authors' address:*

*Mihyun Kang  
Technische Universität Graz  
Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik  
Steyrergasse 30, 8010 Graz, Austria  
email kang@math.tugraz.at*

*Zdeněk Petrášek  
Technische Universität Graz  
Institut für Biotechnologie und Bioprozesstechnik  
Petersgasse 10-12/I, 8010 Graz, Austria  
email z.petrasek@tugraz.at*

# „Was macht Herbert Fleischner?“, fragte Paul Erdős – ein Gespräch mit Herbert Fleischner

**Wilfried Imrich**

Montanuniversität Leoben

„Was macht Herbert Fleischner?“, fragte Paul Erdős immer, wenn er nach Wien kam. Herbert Fleischner ist ein international anerkannter Graphentheoretiker aus Wien, der heuer seinen 70. Geburtstag feierte. Er ist in erster Linie durch seine Arbeiten über Hamiltonsche Graphen sowie seine Bücher über Eulersche Graphen bekannt. Er hat zahlreiche Schüler und sich in Simbabwe durch den Aufbau eines Kombinatorikstudiums an der Universität in Harare große Verdienste um die Mathematik erworben. Er lebt in Wien und schreibt an seinem dritten Buch über Eulersche Graphen.

**W. Imrich:** *Lieber Herbert, du hast in den Sechzigerjahren Mathematik an der Universität Wien studiert. Was hat dich dazu bewogen, in der Graphentheorie zu dissertieren?*

**H. Fleischner:** Es geschah aus einer gewissen Verlegenheit, da ich als Stipendiat möglichst bald Resultate erzielen mußte. Prof. Hlawka hatte mir daher empfohlen, bei Doz. Izbicki zu dissertieren. Izbicki hat mir völlig freie Hand gelassen. So oder so wollte ich eine theoretische Dissertation verfassen. Letzten Endes habe ich eine allgemeine Strategie entwickelt (so würde ich heute die entsprechenden Sätze nennen), wie man Hamiltonsche Kreise in Graphen mit wenigen Kanten auffindet. In der Dissertation habe ich zwar keine Klassen Hamiltonscher Graphen bestimmt, doch brachte diese Strategie zwei Jahre später Erfolg, als ich bewies, daß das Quadrat jedes zweifach zusammenhängenden Graphen einen Hamiltonschen Kreis besitzt (Plummer-Nash-Williams-Vermutung).

**W. Imrich:** *Wie bist du darauf gekommen, dieses schwierige Problem anzugehen, dessen Lösung dich international bekannt machte?*

**H. Fleischner:** Im Graphentheorieseminar, das wir zusammen mit Izbicki abhielten, machte mich im Jänner 1970 Gerd Baron auf diese Vermutung aufmerksam, die in dem eben erschienenen Buch von Frank Harary angeführt wurde. Ich erkannte sofort aufgrund der Resultate in meiner Dissertation, daß ich diese Vermutung für kubische und etwas allgemeinere (sogenannte pseudo-kubische) Graphen beweisen kann. Tatsächlich hat aber auch Hansjoachim Walther in Ilmenau das Resultat für kubische Graphen erzielt.

**W. Imrich:** *Du warst damals Assistent bei Professor Hornich am 2. Institut für Mathematik der Technischen Hochschule Wien. Wie hat sich Professor Hornich zu deinem Fachgebiet gestellt?*

**H. Fleischner:** Er kannte einige Begriffe der Graphentheorie und ließ mir freie Hand, war aber nicht allzu glücklich über meine Kooperation mit dem Inzinger-Institut, wo du, Gerd Baron und Günter Gaszt eine Graphentheoriegruppe gebildet hattest. Damals entstanden auch meine zwei Arbeiten über Struktur- und Fixpunkteigenschaften von Automorphismen ebener dreifach zusammenhängender Graphen. Ich danke dir noch heute für deine diesbezüglichen hilfreichen Ratschläge.

**W. Imrich:** *Du hast die Jahre von 1970 bis 1973 sowie 1977 bis 1978 in den USA verbracht. Wie hat sich das auf dein Schaffen ausgewirkt?*

**H. Fleischner:** 1970 hatte ich ein Fulbright Travel Grant und fuhr per Bahn im Schlafwagen 1. Klasse (!) nach Genua und dann zehn Tage lang per Schiff nach New York. Bereits auf dem Schiff las ich eine Arbeit von Hudson Kronk, der an der SUNY Binghamton tätig war. Seinetwegen hatte ich eine Stelle als Postdoc an dieser Universität angeboten bekommen und angenommen. In dieser Arbeit fragte er, ob die Plummer-Nash-Williams-Vermutung nicht wenigstens für die totalen Graphen zweifach-zusammenhängender Graphen gelte. Bekanntlich sind die totalen Graphen das Quadrat von Unterteilungsgraphen. Mir wurde sehr schnell klar, daß ich dieses Problem lösen könnte, wenn ich in zusammenhängenden brückenlosen Graphen einen spannenden zusammenhängenden Graphen nachweisen kann, der aus einem nicht notwendigerweise zusammenhängenden Eulerschen Graphen und einer Menge disjunkter Wege besteht. Damit begann ich mich gleich nach meiner Ankunft in Binghamton zu beschäftigen. Kurz darauf wurde mir aufgrund von Arbeiten von G.A. Dirac und M.D. Plummer klar, daß kantenkritische Blöcke zweifach zusammenhängende DT-Teilgraphen enthielten, die den genannten Unterteilungsgraphen ähnlich sind und durch Wege ersetzt werden konnten, um einen Induktionsbeweis durchzuführen. Noch vor Ende 1970 war der erste Beweis der Plummer-Nash-Williams-Vermutung fertig, und im Jänner 1971 trug ich den Beweis an der University of Waterloo im dortigen Seminar vor. Damals gab es bereits eine Mathematische Fakultät an dieser Universität, und das Department of Combinatorics and Optimization war für lange Zeit das Mekka der Kombinatorik und speziell der Graphentheorie. Zu seinen Mitgliedern gehörten



u.a. W.T. Tutte, C.St.J.A. Nash-Williams, Jack Edmonds, V. Chvatal; ebenso J.A. Bondy und U.S.R. Murty, die viele Jahre die Managing Editors *des Journal of Combinatorial Theory* (JCT) waren (damals gab es noch nicht die Teilung in JCT A und JCT B). Alle kamen zu meinem Vortrag, und Nash-Williams trug die erste Version meines Beweises in sieben Doppelstunden seines Graduate Course vor. Erst im Nachhinein wurde mir bewußt, wie groß das Interesse an diesem Problem war, und wie viele arrivierte Kollegen versucht hatten, das Problem zu lösen. Hätte ich das vom Anfang an gewußt bzw. begriffen, hätte ich mich wahrscheinlich gar nicht erst dieses Problem zu lösen getraut. Ich kam mir fast vor wie ein Kind, das den Stier bei den Hörnern gepackt hatte. Viele Jahre später wurden kürzere Beweise meines Satzes gefunden.

Dem Vortrag in Waterloo folgten viele Einladungen, in Seminaren meinen Beweis vorzutragen, nicht nur in den USA, sondern auch in Kanada, Mexiko und an diversen europäischen Universitäten, und schließlich verbrachte ich das akademische Jahr 1972/73 am Institute for Advanced Study in Princeton. Während einer Vortragsreise im Herbst 1971 lernte ich im Greyhound Bus (of all places!!!) eine Studentin aus der Karibik kennen; 1974 heirateten wir schließlich, doch trennten wir uns letztlich Ende 1978. Unser gemeinsamer Sohn wuchs dann bei mir auf.

Bis 1975 entstanden weitere durchaus wichtige Arbeiten zum Thema von Kreisen im Quadrat von Graphen; ab dann begann ich mich verstärkt mit Eulerschen Graphen zu beschäftigen. Und aus dieser Beschäftigung entstand schließlich eine Monographie über Eulersche Graphen und verwandte Gebiete. Das Herbstsemester 1977 verbrachte ich als Gastprofessor an der University of Memphis (damals Memphis State University), wo ich erstmals eine Vorlesung über Eulersche Graphen hielt. Anschließend daran verbrachte ich 1978 dank eines Max Kade-Stipendiums am MIT.

**W. Imrich:** *Hattest du nie versucht, eine Dauerstellung, etwa in den USA, zu finden?*

**H. Fleischner:** Das Fulbright Travel Grant war mit der Auflage verbunden, höchstens drei Jahre in den USA zu verbringen. Tatsächlich wurde mir für das akademische Jahr 1973/74 ein Forschungsstipendium an einer großen amerikanischen Computerfirma angeboten, doch wurde mir aus Wien mitgeteilt, daß man die Forschungsstelle an der ÖAW nicht noch ein Jahr für mich reservieren könne. Von anderer Seite in Wien wurde mir auch nahegelegt, nach Wien zurückzukehren, um mich zu habilitieren; und nach einigen Jahren weiterer Forschung hätte ich gute Chancen, eine Professur in Österreich zu bekommen. Aus letzterem wurde dann leider nichts. So oder so war ich aus privaten und politischen Gründen eher an Österreich gebunden; wissenschaftlich hätte ich es allerdings in den USA oder Kanada leichter gehabt, da dort die Graphentheorie als mathematische Disziplin stärker verankert war als in Europa. Das galt für mich auch noch 1978, also hatte ich mich auch damals nicht um eine Stelle in den USA beworben.

**W. Imrich:** *Von 1973 bis 2002 warst du am Institut für Informationsverarbeitung beziehungsweise am Institut für Diskrete Mathematik der Österreichischen Akademie der Wissenschaften tätig. Wie bist du zu den zahlreichen Schülern gekommen, die du hast?*

**H. Fleischner:** Einige meiner Studenten wollten eher in Richtung Datenverarbeitung in der Wirtschaft gehen, und von daher war für sie als Universitätsstudenten eine Dissertation in Graphentheorie naheliegender als eine Arbeit in Analysis oder Algebra oder Zahlentheorie. Erst viel später, etwa ab Mitte der Neunzigerjahre, hatte ich Studenten, die über ihr Doktorat hinaus wissenschaftlich arbeiten wollten. Hier sind Stefan Szeider, der heute Professor an der Informatikfakultät der TU Wien ist, und Arthur Hoffmann-Ostenhof (derzeit durch ein von ihm geleitetes FWF-Projekt finanziert) zu nennen. Beide machten zuerst ihr Diplom bei mir und unmittelbar anschließend daran ihre Doktorarbeiten. Summa summarum möchte ich allerdings feststellen, daß ich mehr Doktoranden als Diplomanden oder Lehramtskandidaten hatte.

**W. Imrich:** *Ich sehe, viele davon sind aus Afrika, insbesondere Simbabwe, Tansania und anderen Ländern des südlichen Afrika. Wieso?*

**H. Fleischner:** Durch Henry A.M. Dzinotyweyi, den ich am ÖMG-DMV-Kongreß 1981 in Innsbruck kennenlernte, und der einigen österreichischen Kollegen (vor allem Funktionalanalytikern) bekannt ist, kam ich mit Simbabwe quasi in Kontakt. 1983 machte ich meine erste Simbabwe-Reise und nahm dort an der University of Zimbabwe an der 2. SAMSA-Konferenz teil. Anfang der Neunzigerjahre formulierten wir ein Lehrplan-Entwicklungsprojekt für Sekundarschulen Simbawwes, das aber auch für die Sekundarschulen des südlichen Afrika von Bedeutung war. Dieses Projekt wurde in mehreren Phasen durchgeführt (1994, 1996 und ab 1998), kam aber 2000 aus mehreren Gründen zum Stillstand. Bereits während der ersten Phase dieses Projekts führte ich Gespräche mit dem Mathematikinstitut der University of Zimbabwe betreffend Academic Staff Development. Dazu entwickelte ich dann ein zweijähriges M.Sc.-Studiumsprojekt mit Schwerpunkt Graphentheorie; ein Durchgang war mehr theorieorientiert, der andere mehr in Richtung angewandter Mathematik, wie Netzplantechnik und Optimierung (allerdings auch hier von einem mehr theoretischen Standpunkt). Diese beiden Durchgänge waren überlappend: Während die Studenten des ersten Durchgangs ihre Diplomarbeiten schrieben, absolvierten die Studenten des zweiten Durchgangs ihr Vorlesungsprogramm. Die Betreuer der Diplomarbeiten waren neben mir Kollegen aus diversen entwickelten Ländern, die im Rahmen des Programms Vorlesungen hielten. Diese waren Gert Sabidussi (Kanada und Österreich), Michael Tarsi (Israel), Michael Plummer und Lowell Beineke (beide USA). Einige der Graduierten dieses M.Sc.-Programms machten später ihr Doktorat: Eric Mwambene (Malawi) erhielt ein zweijähriges Stipendium vom ÖAD und kam nach Wien, wo er von Gert Sabidussi und auch teilweise von mir betreut wurde; Egbert Mujuni (Tansania)

wurde später vom schwedischen ISP gesponsert und kam u.a. für ein Jahr nach Wien, wo er von mir und zum Teil auch von Stefan Szeider (damals University of Durham, UK) betreut wurde. Ein Student aus Swaziland machte sein Doktorat in Durban (Südafrika), ein anderer Student aus Tansania organisierte sich ein Doktoratsstipendium in Großbritannien.

**W. Imrich:** *Der Aufbau so eines Studiums in Afrika ist eine große Leistung. Wie ist das gefördert und anerkannt worden?*

**H. Fleischner:** Das Mathematik-Institut der University of Zimbabwe war sehr positiv diesem Projekt gegenüber eingestellt, das zunächst als Pilotprojekt gedacht war, von dessen Erfolg ein weiterer Ausbau dieses Programms abhängen sollte. Wir hatten bereits vor dem Ende des Programms ein weiteres und weitergehendes Programm konzipiert. Leider machte uns dann die internationale Politik einen Strich durch die Rechnung: Die im Sommer 1998 beginnende Intervention Simbabwe in der DRC Kongo wurde seitens der EU mit einem Boykott Simbawes beantwortet; insbesondere wurden die Kooperationen zwischen EU-Staaten und Simbabwe auf Eis gelegt. Andererseits führte Norwegen sein Mathematical Modelling Project bis 2006 durch, nachdem es zehn Jahre lang gelaufen war. Wir hatten mit diesem Projekt eng kooperiert, ich war nach Abschluß meines Projekts mit einer Vorlesung über Netzwerke im norwegischen Projekt involviert. Die oben genannten Absolventen meines Projekts sind indes in ihren Heimat- oder sonstigen Ländern des südlichen Afrika aktiv.

Der entscheidendste Teil der Finanzierung meines Projekts kam von der österreichischen Entwicklungskooperation im Außenministerium; die Stipendien finanzierte zum größeren Teil das UNESCO HQ in Paris, aber teilweise auch die österreichische Seite. Ein Stipendium wurde von Freunden von mir gesponsert. Reisegelder für die Studenten wurden von der österreichischen UNESCO-Kommission zur Verfügung gestellt. Ich wurde von der ÖAW für zwei Jahre mit Bezügen karenciert, und die University of Zimbabwe zahlte den Vortragenden lokale Gehälter.

Ende 2001 wurde ich zum Chairman des Committee for Developing Countries der European Mathematical Society (EMS-CDC) ernannt und leitete das EMS-CDC bis Anfang 2007. Auch jetzt bin ich mit dem EMS-CDC verbunden, und die Kooperation mit einigen Kollegen aus Entwicklungsländern hält an.

**W. Imrich:** *Paul Erdős fragte immer nach dir, wenn er nach Wien kam. Hast du nicht auch einmal eines seiner legendären Probleme gelöst?*

**H. Fleischner:** Es war 1991, als ich zu einem zweiwöchigen Aufenthalt nach Ilmenau kam und von Michael Stiebitz mit dem \$100-Problem von Paul Erdős konfrontiert wurde, wonach ein 4-regulärer Hamiltonscher Graph, der eine Kreiszerlegung in einen Hamiltonschen Kreis und Dreiecke zuläßt, 3-färbbar ist. Michael wollte das Problem mit Hilfe eines Satzes von Alon-Tarsi beweisen (dabei ging es in diesem Fall um Eulersche Orientierungen). Michael war 1990 bei einer

Konferenz in Dänemark auf das Problem aufmerksam geworden, und der Satz von Alon-Tarsi wurde auf der daran anschließenden Konferenz in Marseille-Luminy präsentiert. Ich scheute zunächst davor zurück, denn ich hatte mir schon einmal an einem Erdős-Problem die Finger verbrannt, dessen Preis dann innerhalb von 15 Jahren von \$50 auf \$500 anstieg – quasi auch aufgrund meiner fehlgeschlagenen Versuche. Dank Michaels Ansatz und zweier Transformationen meinerseits gelang ein Induktionsbeweis innerhalb eines Tages. Damit hatte sich ein Studententraum von mir erfüllt. Ich verpraßte schließlich irgendwie die \$50; aber den von Paul Erdős unterzeichneten Scheck ließ ich einrahmen, so wie viele andere auch.

**W. Imrich:** *Eine Kurzbiographie von dir findet man im Handbuch Österreichischer Autorinnen und Autoren jüdischer Herkunft, erschienen im K. G. Saur Verlag, München 2002. Wie hat sich die Tatsache, daß du in England als Sohn von jüdischen kommunistischen Emigranten aus Wien geboren wurdest, auf dein Leben ausgewirkt?*

**H. Fleischner:** Meine Eltern waren in England im Exil, sie emigrierten nicht aus ökonomischen oder kulturellen Gründen. Mein Vater war 1937 nach Spanien gegangen, um in den Internationalen Brigaden auf Seiten der Spanischen Republik gegen den Faschismus zu kämpfen. Über Frankreich gelangte er 1939 nach England, meine Mutter war bereits im Sommer 1938 nach England geflüchtet; ich wurde 1944 geboren. Im Alter von zweieinhalb Jahren kam ich 1946 nach Österreich. Aus heutiger Sicht würde ich sagen, daß ich nicht nur für politische Vorgänge sensibilisiert wurde, sondern auch eine gehörige Portion Ängstlichkeit mitbekommen habe. Was auch nicht ganz von der Hand zu weisen ist, wenn man an die ‚Schillerfeier‘ 1959 am Rathausplatz oder 1965 an die Demonstrationen gegen Taras Borodajkewycz denkt, wo es zu handfesten Schlägereien mit Ewiggestrigen und Neonazis kam; auch die Prügel von Polizisten bei Demonstrationen gegen den Vietnamkrieg 1965 oder gegen den Putsch der griechischen Obristen 1967 waren nicht von schlechten Eltern. Später, im Zuge meiner Reisen als Wissenschaftler, habe ich mich immer wieder gefragt, ob ich im jeweiligen Gastland auch lange Zeit leben könnte, sei es in den USA oder Kanada oder meinem Geburtsland Großbritannien, aber auch in Mexiko, wo ich mich immer sehr wohl gefühlt hatte. Ich wollte aber immer wieder nach Wien zurück, um dort heimisch zu werden. Vielleicht ist es mir gelungen – leicht war es jedenfalls nicht.

*Adresse des Autors: Wilfried Imrich. Montanuniversität Leoben, Franz Josef-Str. 18, 8700 Leoben. email imrich@unileoben.ac.at.*

# Erinnerungen an die Strudlhofgasse

**Ludwig Reich**

Universität Graz

*Rede am 16.10.2013 anlässlich der Verleihung des Goldenen Doktordiploms*

Spectabilis, sehr geehrte Damen und Herren, liebe Kolleginnen und Kollegen!

Zuerst gebührt mein herzlicher Dank Herrn Dekan Rindler und der Fakultät für Mathematik für die Verleihung des Goldenen Doktordiploms und die Veranstaltung dieser Feier sowie den Damen des Dekanats für Mathematik, besonders Frau Honkisz, die keine Mühe dabei scheuten. Besonders freut es mich, dass die Urkunde noch in lateinischer Sprache verfasst ist.

Dank schulde ich auch dem Verfasser der Laudatio, Herrn Prof. Klaus Schmidt, und dem Vortragenden, Dekan Harald Rindler, insbesondere dafür, dass sie die Zeit fanden, sich mit meiner Person zu befassen. Dank auch dem Festredner, Prof. Jens Schwaiger, mit dem mich seit vielen Jahren eine enge Zusammenarbeit und Freundschaft verbindet. Das Thema seines Vortrags hat mich auch oft beschäftigt. Bei meinen Vorbereitungen zu dieser Feier kamen mir immer öfter Zweifel, ob mir eine solche Ehrung überhaupt zusteht. Dann aber beruhigte ich mich bei dem Gedanken, dass man die Feste feiern muss, wie sie fallen.

Meine Damen und Herren, ich werde nicht mein ganzes bisheriges Leben aus meiner Sicht darstellen, sondern nur einige Erinnerungen an die alte Strudlhofgasse in den Jahren 1958 bis 1963 auskramen.

Nach einem kurzen Schwanken zwischen klassischer Philologie und Mathematik als Studienfach fiel meine Wahl auf Letztere.

Ab Herbst 1958 und noch einige folgende Semester: Abfahrt am Bahnhof Mödling um 6 Uhr 22, um nur ja nicht zu spät zu kommen. Trotzdem: Vor dem großen Hörsaal war bereits eine beträchtliche Menge wissbegieriger junger Leute. Man konnte nur langsam hineingehen und musste froh sein, nicht in den improvisierten 0-ten und  $(-1)$ -ten Reihen zu landen. So gut das Mathematische Institut mit Studierenden gesegnet war, so bescheiden war, nach heutigen Maßstäben, die äußere (nicht die innere) Ausstattung: wenige Professoren, Habilitierte und Assistenten, relativ wenig Platz. Umso bemerkenswerter ist für mich das erstaunliche Wachstum des seinerzeitigen Instituts zur heutigen Größe der Fakultät für Ma-

thematik, zu dem Sie, Herr Dekan Rindler, sicherlich Wesentliches beigetragen haben.

Von meinen Lehrern im Gymnasium war mir schon bekannt, dass große Namen hier gewirkt hatten, wie Furtwängler, Wirtinger, Radon, Hahn. Von den Zeitgenossen genoss Edmund Hlawka einen schon über die Universität hinausgehenden Ruf. Was damals allerdings noch nicht bekannt war: Das tragische und schwierige Schicksal einiger bedeutender Mathematiker, die vor dem Krieg ebenfalls mit dem Institut verbunden waren.

Unvergesslich die Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I und II von E. Hlawka: Schon seine sehr kompakte Einführung der reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche mit der Warnung vor den vielen diffizilen Details war ein intellektuelles Erlebnis. Sehr eindrucksvoll, im zweiten Semester, war seine Einführung des Riemannsches Integrals nach Darboux, die ich später selbst in Vorlesungen verwendete.

Der Andrang zu den Übungen zur Analytischen Geometrie (eine Vorlesung von Prof. Nikolaus Hofreiter) und zur Differentialrechnung war nicht geringer als bei den zugehörigen Vorlesungen. Die Übungsbeispiele wurden von den Leitern der Übungen (bei der Differential-Integralrechnung Prof. Karl Prachar, selbst schon ein hochangesehener Mathematiker) in schönster Schrift an die Tafel geschrieben. Die Beispiele mussten von den Hörerinnen und Hörern abgeschrieben werden, sodass diese wenigstens dabei die Beispiele einmal *sahen*, was bei moderneren Kommunikationsmethoden nicht immer der Fall zu sein scheint. Die Beispiele, die man gelöst zu haben glaubte, musste man in einer Liste eintragen. Auf diesen Listen fanden sich, weit unten, auch Namen von Teilnehmern wie Toni Sailer und N.S. Chruschtschow, offensichtlich ein Verzweiflungsakt von Studenten, die schon vor Weihnachten erkannten, dass sie vielleicht von der Strudlhofgasse näher an das Hauptgebäude übersiedeln sollten.

Durch die Teilnahme an den Übungen konnte ich mein Selbstvertrauen stärken und Mut fassen. Aber es waren nicht nur die überfüllten Lehrveranstaltungen, die mich zuversichtlich stimmten, sondern auch der Besuch von Spezialvorlesungen mit einem viel kleineren Hörerkreis (im sogenannten Kleinen Hörsaal), an die ich mich schon in den ersten Semestern heranwagte. So zum Beispiel eine Vorlesung über „Axiomatik der Geometrie“ von K. Prachar und Vorlesungen über Riemannsche Geometrie und Differentialgeometrie bei H. Brauner. Bei der Vorlesung von K. Prachar kam man mit ihm durchaus in Kontakt. Die Hilbertsche Axiomatik, die K. Prachar vortrug, war für mich ein Schlüsselerlebnis dessen, was Mathematik ist, obwohl ich schon während der Schulzeit in sehr bescheidenem Umfang eigene Studien nach den Göschenbändchen von Hasse, Knopp und Krull betrieben hatte. Ich hatte auch ein wenig in der wunderbaren Algebra von Heinrich Weber geschmökert, die aus der Bibliothek des Mödlinger Gymnasiums entsorgt werden sollte und so bei mir gelandet war.

Aus vermutlich bürokratischen Gründen liefen die Vorlesungen von Prof. Prachar

auch in den folgenden Semestern unter dem Titel „Axiomatik der Geometrie“, aber behandelten Projektive Geometrie und klassische algebraische Geometrie nach van der Waerdens Buch. Daraus erwuchs das Thema meiner Dissertation über ein Thema der klassischen algebraischen Geometrie, über die Verallgemeinerung eines Satzes von Martin Kneser.

In höheren Semestern hörte ich dann auch bei Paul Funk, der als Honorarprofessor lehrte. Paul Funk hatte bei Hilbert in Göttingen promoviert. Obwohl damals schon ungefähr 75 Jahre alt, war er sehr lebhaft und begeisternd und vermittelte mir prägende Einblicke in die Geschichte der Analysis und Mathematischen Physik. Vielleicht kann ich auf Paul Funk später noch zurückkommen, einige Anekdoten verbinden sich mit der Erinnerung an ihn.

Schließlich erwähne ich noch ein Seminar über Eliminationstheorie (wieder nach van der Waerden), bei dem ich sehr viel durch eigene Arbeit und als Ratgeber mehrerer Kommilitonen lernen durfte. Eine Anekdote zu diesem Seminar kann ich nicht unterdrücken. Ein Teilnehmer war ein Doktoratsstudent der theoretischen Physik, die im vierten Stock des Gebäudes Strudlhofgasse residierte. Er wollte zu seiner Absicherung auch die Lehramtsprüfung in Mathematik und Physik versuchen. Während seiner schwungvollen Darbietung sagte Prof. Hlawka: „Herr R., so etwas können Sie vielleicht im vierten Stock machen, aber nicht bei uns.“

Mittlerweile hatte ich mich mit einigen Kommilitonen bekannt gemacht und gut befreundet. Unser Thema war nicht nur Wissenschaft, wir unternahmen auch einige kleinere Ausflüge in den Wienerwald, in die Umgebung meiner Mödlinger Heimat. Einige Kontakte bestehen noch heute, und das ist erfreulich, obwohl ich in dieser Hinsicht mehr tun sollte.

Das Studium war zu diesen Zeiten, natürlich vom Lehramtsstudium abgesehen, nicht sehr straff organisiert (auch Letzteres nicht übermäßig). Trotzdem gehörte es dazu, möglichst am Ende des jeweiligen Semesters, ein sogenanntes (im Prinzip freiwilliges) Kolloquium über den Vorlesungsstoff abzulegen. Man brauchte so etwas zum Beispiel für Stipendien, Beihilfen, etc. Das Kolloquium war, wie der Name nahelegt, in der Regel mündlich. Ich war erstaunt, dass sich einige Professoren und Dozenten, trotz ihrer hohen Belastung, viel Zeit für ein solches Kolloquium nahmen, sodass man, grob gesprochen, „alles“ lernen musste. Jedenfalls stärkten die ersten dieser Kolloquien (bei Hofreiter, Prachar, Hlawka) mein Gefühl, im Studium der Mathematik nicht ganz fehl am Platz zu sein.

Schließlich fragte mich Prof. Hofreiter, ob ich wissenschaftliche Hilfskraft am Institut werden wollte. Das war ehrenvoll und brachte einen Arbeitsplatz, einen Arbeitsmantel als Naturalsubvention, und auch Geld, sodass ich natürlich annahm. Zu den Aufgaben gehörten der Bibliotheksdienst und die Mitwirkung bei Übungen. Die Arbeit in der Bibliothek, die ich zusammen mit meinem Kollegen Roman Schnabl übernahm, war nicht besonders anstrengend, aber vielleicht gefähr-

lich. Denn ich erfuhr erst später, dass einer meiner Vorgänger in diesem Dienst Selbstmord beging. In die Feinheiten in der Bibliotheksarbeit hat mich mein unmittelbarer Vorgänger, der leider schon verstorbene spätere Ministerialrat Eduard Szirucsek, bestens eingewiesen. Zu den Besonderheiten gehörte die Entlehnung und Rückgabe, stündlich ab 8 Uhr für jeweils 15 Minuten. Da wurde eine Tür zwischen der Bibliothek und einem kleinen Nebenraum geöffnet. Das war natürlich schon etwas störend bei der eigenen Arbeit.

Der Höhepunkt war eine Inventur. Dann mussten die zum Teil seit Langem entliehenen Bücher eingemahnt werden. Prof. Hofreiter sagte mir: „Schreiben Sie einen freundlichen, einen weniger freundlichen und einen groben Brief.“ Eines Tages erschien zu der erwähnten Viertelstunde eine ältere Dame mit einem Koffer und einem Rucksack und deponierte nicht zu wenige Bücher über partielle Differentialgleichungen und mathematische Physik. Man muss wissen, dass es zu dieser Zeit ja insgesamt noch nicht so viele Bücher darüber wie heute gab, und dass diese Themen bei Hausarbeiten und für Seminare beliebt waren. Sie sagte zu mir: „Haben Sie diesen saugroben Brief geschrieben?“ Ich sagte voller Stolz: „Ja!“

Die Inventur selbst fand in einer Karwoche statt, war eine eher staubige Angelegenheit, besonders in der höheren Lage des sogenannten Zeitschriftenlesezimmers. Dort befanden sich Bände von alten italienischen Zeitschriften, in denen ich wegen meines damaligen Interesses an klassischer algebraischer Geometrie gern in Arbeiten von Segre, Severi, Castelnuovo und Enriques geblättert hatte, vor mir wohl niemand und nachher auch nicht mehr.

In der Bibliothek fand sich an Nachmittagen auch öfter der von mir schon genannte Prof. Paul Funk ein, der gern in Büchern und Zeitschriften las, hin und wieder auch Zeitschriftenbände aus der Bibliothek der k.k. Technischen Hochschule Wien zu uns zurückbrachte, und der sich zu längeren Gesprächen mit mir Anfänger, wenn niemand von den Professoren mehr anwesend war, nicht zu schlecht war. Vieles lernte ich von ihm von damals schon vergangenen, heute fast versunkenen Zeiten. Ich erinnere mich an seinen Rat, die Klassiker zu studieren, denn er hätte bei der Abfassung seiner Dissertation wichtige Anregungen aus den gesammelten Werken von Niels Henrik Abel erhalten.

Die größte Herausforderung in meiner Zeit als wissenschaftliche Hilfskraft war nicht die Inventur, sondern die Vertretung von Prof. Leopold Schmetterer in einer Vorlesung. Prof. Schmetterer war von Hamburg nach Wien berufen worden, und ich hatte ihn schon in einer Vorlesung über Funktionalanalysis kennengelernt, die für Wiener Verhältnisse modern gehalten war. Eines Tages fragte er mich: „Fahren Sie auch an den Plattensee?“ (gemeint war zu einer Tagung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften über Zahlentheorie). Als ich verneinte, ersuchte er mich, ihn nächste Woche in seiner Vorlesung über Differential- und Integralrechnung zu vertreten. Diese Vorlesung war sechsstündig, eine Stundenzahl, die ich auch heute noch für richtig halte. Prof. Schmetterer hatte die Anfängervorlesung



nicht nur stundenmäßig, sondern auch inhaltlich anspruchsvoller (abstrakter) gestaltet als bisher in Wien üblich war, zum Beispiel auch was die Integration betraf. Er gab mir einige DIN A5-Seiten in seiner typischen Handschrift. Es handelte sich um den Hauptsatz über implizite Funktionen und sein Umfeld, begründet auf einem Fixpunktsatz. Irgendwie habe ich diese Aufgabe geschafft und überlebt, ich hoffe auch mein Auditorium. Jedenfalls gab ich dieser Problematik auch in meinen eigenen Vorlesungen größeren Raum.

Zu den angenehmeren Pflichten einer wissenschaftlichen Hilfskraft gehörte auch der Besuch der Kolloquienvorträge. Prominente Gäste wurden damals im Namen der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft eingeladen; die Vorträge fanden im Winter an der Technischen Hochschule, im Sommer in der Strudlhofgasse statt. Eine Nachsitzung im Gösser Bräu oder Hotel Regina schloss sich an. Von damals jüngeren Gästen habe ich Friedrich Hirzebruch und Reinhold Remmert in Erinnerung. Zu den prominentesten Vortragenden dieser Jahre gehörten Carl Ludwig Siegel, Bartel Leendert van der Waerden und Pawel Sergejewitsch Alexandrow und etliche mehr, zum Beispiel der Geometer Enrico Bompiani, Ludwig Bieberbach und Ernst Witt.

E. Bompiani trug nur 40 Minuten vor und schloss mit den Worten: "The ladies are waiting for us."

L. Bieberbach sprach über Tschebyscheff-Netze ebenso großzügig, wie er in den meisten seiner Bücher geschrieben hat.

E. Witt hatte das elementar klingende Thema „Griechisch-römische Quadrate“, aber ich verstand nicht ein Wort. Ich erinnere mich an die fast weihevollen Atmosphäre beim Vortrag von C.L. Siegel, die durch keine Diskussion und Zwischenfrage aus dem Publikum gestört werden durfte, weshalb weiß ich eigentlich nicht. Es war fast unglaublich, wie Siegel in seinem Vortrag über abelsche Funktionen im ersten Viertel de facto die Grundlagen der Theorie der elliptischen Funktionen meisterhaft darlegte, zumindest für die, die es schon wussten.

Im Vortrag von van der Waerden über Tensoren auf algebraischen Mannigfaltigkeiten ging es weniger feierlich zu. Nach dem ersten, einführenden Teil wünschte er sich bereits eine Diskussion, zu der auch ich etwas offensichtlich nicht völlig Abwegiges beitragen durfte.

Schließlich kamen das Ende der Dissertation und die Rigorosen, darunter auch eine Prüfung über Philosophie bei zwei Prüfern. Ich habe diesen Teil auch ernst genommen. Bis heute werde ich von philosophischen Fragen einmal angezogen, dann wieder abgestoßen. Bald nach den Rigorosen, noch vor meiner Promotion, sagten mir Prof. Hofreiter und Prof. Hlawka, sie hätten von ihrem alten Freund Prof. Ernst Peschl von der Universität Bonn die Nachricht erhalten, dass er einen Assistenten für eine neugeschaffene Assistentenstelle suchte. Damals hatte in einigen deutschen Universitäten eine wunderbare Stellenvermehrung auf allen Ebenen stattgefunden; so hatte E. Peschl gleich drei neue Assistentenstellen bekommen.

Aus rein persönlichen Gründen, aber auch aus Interesse, etwas Neues kennenzulernen, nahm ich dieses schöne Angebot an. Alles ging damals ohne Ausschreibung und Bewerbung. Wir hatten es, verglichen mit dem wissenschaftlichen Nachwuchs heute, wirklich einfacher und besser: Wenn man sich nicht sehr ungeschickt anstellte, konnte man in der universitären Welt Fuß fassen.

Damit bin ich mit meiner Erinnerung an die alte Strudlhofgasse fast fertig. Es fehlt noch die explizite Aussage, dass ich meinem Studium an der Universität Wien eine ausgezeichnete und breite Ausbildung in der klassischen Mathematik verdanke und eine gründliche Schulung zu einer präzisen mathematischen Denkweise – nichts Unexaktes wurde, wenigstens offiziell, geduldet. Darauf aufbauend, konnte ich weiter lernen, lehren und arbeiten.

Möge der Fakultät für Mathematik der Universität Wien eine glänzende Zukunft beschieden sein.

*Adresse des Autors:*

*Ludwig Reich*

*Institut für Mathematik der Universität Graz*

*Heinrichstr. 36, 8010 Graz.*

# ICM 2014 – ein kurzer Bericht

**Robert Tichy**

TU Graz

Seit dem Jahr 1897 findet der Internationale Mathematikerkongress an unterschiedlichen Orten statt, der erste war in Zürich, der zweite im Jahr 1900 in Paris. Bei diesem Kongress formulierte David Hilbert seine berühmten 23 Probleme. Seitdem findet der Kongress im Wesentlichen alle 4 Jahre statt, Ausnahmen waren während der beiden Weltkriege. Zwischen dem 13. und 21. August fand der heurige Kongress ICM 2014 in Seoul, Südkorea (Republic of Korea) statt. Zwei Tage vorher tagte die Generalversammlung der Internationalen Mathematikerunion (IMU) in Gyeongju, einer historischen Stadt im Süden der koreanischen Halbinsel. Bei der Organisation dieser Veranstaltung hat maßgeblich meine Kollegin an der TU Graz, Professor Mihyun Kang, mitgewirkt, wofür ich ihr im Namen der österreichischen Mathematik ausdrücklich danken möchte.

An der Generalversammlung habe ich als österreichischer Vertreter teilgenommen. Insgesamt waren mehr als 100 Delegierte anwesend, welche von den Mitgliedsstaaten entsandt wurden. Die Generalversammlung wurde von der IMU-Präsidentin Ingrid Daubechies geleitet, sie wurde dabei vom Sekretär der IMU, Martin Grötschel, unterstützt. Die wesentlichen Entscheidungen der IMU werden allerdings vom Executive Committee getroffen. Alles, was der Generalversammlung zur Abstimmung vorgelegt wird, wird vom Executive Committee genau vorbereitet, so etwa die Aufnahme neuer Mitglieder oder die Wahl des nächsten IMU Präsidenten. Heuer fiel die Wahl auf den Japaner Shigefumi Mori, einem Fields-Medaillisten und gegenwärtigen Direktor des Forschungsinstituts RIMS in Kyoto. Es wurde auch festgelegt, dass der nächste Internationale Mathematikerkongress 2018 in Rio de Janeiro (Brasilien) stattfinden soll.

Die Eröffnung des ICM 2014 fand am 13. August in einem Konferenzzentrum in Seoul im Beisein von Staatspräsidentin Park statt. Dementsprechend waren die Sicherheitsvorkehrungen, von denen mehr als 5.000 Teilnehmer betroffen waren. Bei der Eröffnung herrschte großer Medienrummel, da dabei die Preise der IMU vergeben werden, also insbesondere die Fields-Medaillen. Die Fields-Medaillen werden seit dem Kongress 1936 in Oslo für außergewöhnliche Leistungen an Mathematiker vergeben, die noch nicht älter als 40 Jahre sind. Diese Auszeichnung ist (abgesehen vom Alterslimit) mit dem Nobelpreis vergleichbar, und es ist besonders erfreulich, dass heuer erstmalig eine Mathematikerin ausgezeichnet wur-

de. Auf der Medaille ist der Kopf von Achimedes abgebildet und ihr Name geht auf den kanadischen Mathematiker Fields zurück. Das Preisgeld ist mit 15.000 kanadischen Dollars vergleichsweise gering, die Reputation umso höher. Heuer wurden vier Personen mit Fields-Medaillen ausgezeichnet, nämlich, in alphabetischer Reihenfolge: Artur Ávila, Manjul Bhargava, Martin Hairer und Maryam Mirzakhani.

Im Folgenden möchte ich kurz auf die Leistungen der Fieldspreisträger eingehen. Für detaillierte Darstellungen verweise ich auf diverse Internetseiten, etwa jene der American Mathematical Society oder des Kongresses ICM 14 selbst.

*Artur Ávila* wurde 1979 in Brasilien geboren, er ist brasilianischer und französischer Staatsbürger und auch beruflich sowohl in Brasilien (am IMPA in Rio de Janeiro) und am CNRS sowie an der Universität Paris 6 (Jussieu) in Frankreich tätig. Sein Forschungsgebiet ist die Theorie dynamischer Systeme. Er hat Publikationen mit einer großen Zahl von Kooperationspartnern und ist ausgesprochen vielseitig. Er beschäftigt sich mit eindimensionaler reeller oder komplexer Dynamik, mit der Spektraltheorie von Schrödinger-Operatoren, mit Billiards und mit hyperbolischer Dynamik. Wahrscheinlichkeitstheoretische Resultate für dynamische Systeme und die Untersuchung von fraktalen geometrischen Strukturen spielen dabei eine große Rolle. So besagt etwa eines seiner Hauptresultate (gem. mit Lyubich und de Melo), dass „fast jede“ zu einer quadratischen Abbildung topologisch konjugierte Abbildung entweder regulär (d.h. hyperbolisch) oder stochastisch ist. In der Theorie der Schrödinger-Operatoren und der Billiards hat Ávila einige lange offene Vermutungen gelöst, darunter etwa das „Zehn Martini-Problem“ über Mathieu-Operatoren. Für solche (diskrete) Operatoren konnte Ávila gemeinsam mit Svetlana Jitomirskaya klären, wann deren Spektrum nirgends dicht in  $l^2(\mathbb{Z})$  ist.

Nun zu *Manjul Bhargava*. Er wurde 1974 in Kanada geboren und wuchs in den USA und Indien auf. Bereits seine Dissertation bei Andrew Wiles in Princeton enthält fundamentale Resultate. Bhargava zeigte, dass die Orbits der Gruppe  $SL(2, \mathbb{Z})^3$  auf dem Tensorprodukt von drei Kopien der Standarddarstellung quadratischer Formen mittels quadratischer Ringe (d.h. vom Rang 2) beschrieben werden können. Dies liefert eine äußerst originelle und auch algorithmisch effektive Formulierung des klassischen Kompositionsgesetzes von Gauss für quadratische Formen. Über derartige Ergebnisse hat Bhargava am Beginn seiner Karriere bei den Journées Arithmétiques (2003) in Graz vorgetragen. Schon damals war Insidern klar, dass von ihm noch bedeutende Resultate in der Zahlentheorie zu erwarten sind. So hat er etwa Orbits wesentlich komplexerer Darstellungen untersucht, die kubischen, quartischen und quintischen Ringen entsprechen. Darüber hinaus erzielte er quantitative Resultate: Er bestimmte die Anzahl solcher Ringe mit beschränkter Diskriminante. Zusammen mit seinem Studenten Arul Shankar wurden präzise Abschätzungen für die Anzahl der ganzzahligen Orbits von beschränkter Höhe herangezogen, um den „durchschnittlichen“ Rang elliptischer Kurven abzuschätzen. Es sei hier bemerkt, dass die Untersuchung elliptischer Kur-

ven im Zentrum der modernen Zahlentheorie steht. Konstruktionen elliptischer Kurven von „hohem“ Rang sind insbesondere für Anwendungen in der Kryptographie von Interesse. Bis jetzt waren nur spezielle Beispielklassen bekannt, Bhargavas Ergebnisse sind weitreichend und von allgemeiner Natur. So konnte er etwa auch zeigen, dass „die meisten“ hyperelliptischen Kurven  $y^2 = f(x)$  vom Geschlecht  $\geq 2$  keine rationalen Punkte enthalten. Sein Zugang ist äußerst innovativ: Er kombiniert in effizienter Weise die moderne algebraische Sichtweise mit klassischer Geometrie der Zahlen und mit analytischen Methoden.

Die dritte Fields-Medaille ging an *Martin Hairer*, einem österreichischen Staatsbürger, der an der Universität of Warwick (UK) forscht und lehrt. Sein Vater Ernst Hairer (er hat in Innsbruck promoviert) ist ebenfalls ein bekannter Mathematiker, der an der Universität Genf tätig ist. Dort hat Martin Hairer im Jahr 2001 im Fach Physik promoviert. Martin Hairer arbeitet im Bereich stochastische Analysis und Mathematische Physik, insbesondere untersucht er durch Rauschen gestörte partielle Differentialgleichungen. So hat er etwa gemeinsam mit Matingly den Malliavin-Kalkül mit neuen Methoden kombiniert, um die Ergodizität der zweidimensionalen stochastischen Navier-Stokes-Gleichung nachzuweisen. Bedeutende Fortschritte erzielte er durch einen Ansatz analog zur Taylorentwicklung aus der Differentialrechnung. Diese neue Theorie gestattet die systematische Konstruktion von Lösungen von singulären nichtlinearen stochastischen partiellen Differentialgleichungen als Fixpunkte eines Renormalisierungsverfahrens. Dabei spielt die “rough path”-Methode eine zentrale Rolle. Diese Methode hat Terrence Lyons für gewöhnliche Differentialgleichungen entwickelt (und er hat darüber einen Plenarvortrag beim ÖMG-Kongress 2005 in Klagenfurt gehalten). Hairers Ergebnisse sind ein großer Fortschritt bei der rigorosen Behandlung stochastischer partieller Differentialgleichungen.

Besonders bemerkenswert ist die Vergabe der Fields-Medaille an *Maryam Mirzakhani*, da mit ihr erstmalig eine Frau diese Auszeichnung erhielt. Maryam Mirzakhani wurde 1977 in Teheran (Iran) geboren und war dort bis zu ihrem Bachelor-Abschluss. Ihr Doktorat erwarb sie an der Harvard University unter der Anleitung von Curtis McMullen. Gegenwärtig ist sie Professorin in Stanford. Sie hat bedeutende Beiträge zur Dynamik und Geometrie von Riemannschen Flächen geleistet. Die verwendeten Methoden kommen aus der algebraischen Geometrie, der Topologie und der Wahrscheinlichkeitstheorie. In der hyperbolischen Geometrie hat Mirzakhani asymptotische Formeln für die Anzahl der einfachen geschlossenen geodätischen Linien auf Riemannschen Flächen gezeigt. Es gelang ihr, holomorphe und symplektische Aspekte der Theorie der Modulräume zu verbinden und damit zu zeigen, dass der *earthquake flow* von Thurston ergodisch und mischend ist. Ein besonders fundamentales Ergebnis ist das folgende: Während der Abschluss einer reellen Geodätischen in einem Modulraum ein fraktales Gebilde sein kann, ist der Abschluss einer komplexen Geodätischen stets eine algebraische Untermannigfaltigkeit.

Neben den Fields-Medaillen wurden der Rolf Nevanlinna-Preis, der Carl Friedrich Gauss-Preis und die Chern-Medaille vergeben. Der Nevanlinna-Preis ging an Subhash Khot (New York University, USA) für seine Untersuchungen zur Komplexitätstheorie und von effizienten Approximationsalgorithmen bei Optimierungsproblemen. Dieser Preis wird einmal alle 4 Jahre vergeben für hervorragende Leistungen in den Mathematischen Computerwissenschaften. Der Carl Friedrich Gauss-Preis ging an Stanley Osher (University of California, Los Angeles, USA). Er wird vergeben für “impact outside mathematics – in technology, in business, or simply in people’s everyday lives”. Osher ist ein angesehener angewandter Mathematiker, der sich vor allem mit numerischen Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen, mit kontinuierlicher Optimierung und mit inversen Problemen beschäftigt. Mehrere österreichische Kollegen stehen in regem wissenschaftlichen Kontakt mit ihm, Otmar Scherzer (Universität Wien) hat mit ihm gemeinsam publiziert. Stanley Osher hat ebenso wie Lyons beim ÖMG-Kongress 2005 in Klagenfurt einen Hauptvortrag gehalten. Großen Einfluss haben seine Arbeiten auf die Entwicklung von Computer Vision, Image Processing und Computergaphik. Die Chern-Medaille ging an Phillip Griffith (Institute for Advanced Studies, Princeton, USA) für seine grundlegenden Arbeiten in algebraischer Geometrie und Differentialgeometrie.

Nach dem Eröffnungstag begann der eigentliche Mathematikerkongress mit mehreren Plenarvorträgen täglich und einer Unzahl paralleler Sektionsvorträge. In diesen Vorträgen wurde über die wichtigsten Fortschritte in der Mathematik innerhalb der letzten Jahre berichtet. Aufgrund des dichten Programms war es leider nur möglich, einen Bruchteil aller Vorträge zu besuchen. Der Kongress hat aber in eindrucksvoller Weise gezeigt, dass auf dem Gebiet der Mathematik spektakuläre Ergebnisse erzielt und neue Methoden entwickelt wurden.

Hier möchte ich nur drei Themen aus meinem eigenen Arbeitsgebiet, der Zahlentheorie, erwähnen, über die beim Kongress ausführlich berichtet wurde:

(1) *O-minimale Strukturen und ihre Anwendung in der diophantischen Geometrie.* Dabei finden modelltheoretische Methoden Eingang in die Zahlentheorie, Jonathan Pila hat über seine fundamentalen Ergebnisse zu diesem Gebiet einen Plenarvortrag gehalten. Es sei hier mit einem gewissen Lokalpatriotismus bemerkt, dass kürzlich Fabrizio Barroero an der TU Graz eine Dissertation zu diesem Themenkreis fertiggestellt hat.

(2) Das Ergebnis von Yitang Zhang, wonach es unendliche viele Primzahlen gibt, deren Abstand zur jeweils nächstgrößeren Primzahl durch eine absolute Konstante  $K$  beschränkt ist. In der Originalarbeit von Zhang ist die Konstante  $K$  gleich  $7 \cdot 10^7$ , in dem von Terence Tao organisierten Polymath-Projekt, an dem viele Mathematiker mitwirkten, konnte  $K$  inzwischen auf eine dreistellige Zahl reduziert werden. Die berühmte Primzahlzwillings-Vermutung besagt, dass  $K = 2$  gilt. Beim ICM 2014 gab es dazu zwei eingeladene Vorträge, nämlich einen von Zhang selbst und

einen von János Pintz, der gemeinsam mit Dan Goldston und Cem Yıldırım wichtige Vorarbeiten dazu geleistet hat.

(3) *Das ternäre Goldbachproblem*, das kürzlich von Harald Helfgott vollständig gelöst wurde. Es besagt, dass jede ungerade Zahl  $> 5$  als Summe von 3 Primzahlen dargestellt werden kann. Helfgott hat in einem eingeladenen Vortrag seinen Beweis sehr klar beschrieben. Er besteht aus Fortschritten bei den analytischen Methoden sowie in einem gekonnten Einsatz von Computer-Algorithmen.

Natürlich gab es auch in anderen Teilgebieten der Mathematik ähnliche bedeutende Fortschritte. Aber die ungeheure Breite unserer Wissenschaft zu überblicken, ist heute kaum mehr möglich. So habe ich mich hier auf meine unmittelbaren eigenen Interessen beschränkt und nur exemplarisch berichtet. Das komplette Programm findet man auf der Homepage des ICM 2014. Von den eingeladenen Vorträgen sind auch Videoaufzeichnungen im Internet verfügbar.

Der Internationale Kongress hat auch gezeigt, dass die Mathematik in Südkorea während der letzten 20 Jahre einen gewaltigen Aufschwung erlebt hat – das Interesse am Kongress war enorm und die Organisation perfekt. Zu dieser großartigen Leistung ist den koreanischen Kolleginnen und Kollegen besonders zu gratulieren.

*Adresse des Autors:*

*Robert Tichy*

*Institut f. Analysis und Computational Number Theory, TU Graz.*

*Steyrergasse 30, 8010 Graz.*

*email tichy@tugraz.at*





# Buchbesprechungen

|   |    |
|---|----|
| <i>D. Delbourgo</i> : Elliptic Curves and Big Galois Representations<br>(P. GRABNER) . . . . .  | 44 |
| <i>V. Diekert, M. Kufleitner, G. Rosenberger</i> : Diskrete Algebraische<br>Methoden. Arithmetik, Kryptographie, Automaten und Gruppen<br>(P. HELLEKALEK) . . . . . | 44 |
| <i>S. Dineen</i> : Probability Theory in Finance. A mathematical guide to the<br>Black-Scholes formula (W. SCHACHERMAYER) . . . . .                                 | 45 |
| <i>O. Forster</i> : Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Verän-<br>derlichen (G. SCHRANZ-KIRLINGER) . . . . .                                       | 46 |
| <i>O. Forster, R. Wessoly</i> : Übungsbuch zur Analysis 2. Aufgaben und<br>Lösungen (G. SCHRANZ-KIRLINGER) . . . . .  | 46 |
| <i>C. Karpfinger</i> : Höhere Mathematik in Rezepten. Begriffe, Sätze und<br>zahlreiche Beispiele in kurzen Lerneinheiten (E. WERNER) . . . . .                     | 46 |
| <i>F. Labourie</i> : Lectures on Representations of Surface Groups (K. BAUR) .  | 47 |
| <i>R. J. Marsh</i> : Lecture Notes on Cluster Algebras (H. VOGEL) . . . . .   | 48 |
| <i>N. Ortner, P. Wagner</i> : Distribution-Valued Analytic Functions<br>(M. KUNZINGER) . . . . .  | 49 |
| <i>S. Paycha</i> : Regularised Integrals, Sums and Traces: An Analytic Point<br>of View (P. GRABNER) . . . . .  | 50 |
| <i>G. Shimura</i> : Arithmetic of Quadratic Forms (P. GRABNER) . . . . .  | 50 |
| <i>A. N. Siegel</i> : Combinatorial Game Theory (S. WAGNER) . . . . .   | 51 |
| <i>P. Soberón</i> : Problem-Solving Methods in Combinatorics. An approach<br>to olympiad problems (S. WAGNER) . . . . .   | 51 |
| <i>R. P. Stanley</i> : Algebraic Combinatorics. Walks, Trees, Tableaux, and<br>More (S. WAGNER) . . . . .   | 52 |
| <i>J. Stedall</i> : From Cardano's great art to Lagrange's reflections: filling a<br>gap in the history of algebra (M. KRONFELLNER) . . . . .                       | 52 |

**D. Delbourgo: Elliptic Curves and Big Galois Representations.** (London Mathematical Society Lecture Note Series 356.) Cambridge University Press, 2008, ix+281 S. ISBN 978-0-521-72866-9 P/b £ 35,—.

Modulare Formen und elliptische Kurven stehen im Zentrum der modernen Zahlentheorie. Das vorliegende Buch entwickelt die Methode der Euler-Systeme, die von Wiles beim Beweis der Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung verwendet wurden, für Deformationsringe in zwei Variablen weiter. Die Resultate werden verwendet, um die Arithmetik elliptischer Kurven, besonders die in der Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer auftretenden Größen, zu studieren. Darüber hinaus werden auch Werte von  $L$ -Reihen zu modularen Formen höheren Gewichts behandelt, die Bestandteil der allgemeineren Vermutung von Bloch und Kato sind. Das Buch behandelt ein Thema der aktuellen Forschung, es ist sozusagen „mit der heißen Nadel gestrickt“. Die Lektüre setzt entsprechend tiefe Kenntnisse der Materie voraus.

P. Grabner (Graz)

**V. Diekert, M. Kufleitner, G. Rosenberger: Diskrete Algebraische Methoden. Arithmetik, Kryptographie, Automaten und Gruppen.** (De Gruyter Studium) De Gruyter, Berlin/Boston, 2013, xi+318 S. ISBN 978-3-11-031260-7 P/b € 24,95.

Das vorliegende Buch behandelt ein großes Spektrum an Themen. Leitmotiv der Autoren ist die algebraische Kryptographie. Das erste Kapitel, *Algebraische Strukturen*, umfasst die elementare Gruppen-, Ring- und Körpertheorie auf dem Niveau einer einführenden Vorlesung. Dies bildet die Grundlage für das daran anschließende Kapitel *Kryptographie*, in dem eine kurze Darstellung klassischer Konzepte (Substitutionschiffre, perfekte Sicherheit nach Shannon, One-Time-Pad) gegeben wird und in dem zentrale Konzepte der asymmetrischen Kryptographie (RSA, Rabin-Kryptosystem, usw.) kurz vorgestellt werden. Nach dem dritten Kapitel, *Primzahlerkennung in Polynomialzeit* (im Wesentlichen der AKS-Primzahltest), folgt eine Einführung in elliptische Kurven mit Schwerpunkt Anwendungen in der Kryptographie. Die weiteren Teile dieses Buchs bilden ein kurzes Kapitel über Kombinatorik auf Wörtern, eine etwas ausführlicher geschriebene Darstellung der Automatentheorie und als achtes Kapitel das Thema Diskrete unendliche Gruppen.

Es ist verständlich, dass die Autoren bei diesem beträchtlichen Umfang an Themen nicht in die Tiefe gehen können. Der Referent empfiehlt, dieses Werk in die lokalen Bibliotheken aufzunehmen. Diese Empfehlung erfolgt nicht aufgrund einer etwaigen besonderen Qualität der Darstellung, eine solche ist im kryptographischen Teil nicht erkennbar, sondern aufgrund der Tatsache, dass dieses Buch einen ersten Einblick in gleich mehrere interessante Themengebiete bietet (siehe die obige Inhaltsübersicht) und, wenn auch in manchen inhaltlichen Details

unausgereift, technisch solide geschrieben ist.

Die ersten vier Kapitel dieses Buchs sind nach Ansicht des Referenten in den Standardwerken zur Kryptographie, D.R. Stinson: "An Introduction to Cryptography" sowie W. Trappe und L.C. Washington "Introduction to Cryptography with Coding Theory", wesentlich gehaltvoller nachzulesen. Beide Referenzen fehlen bedauerlicherweise in den Literaturangaben, ebenso wie die kompakte „Einführung in die Kryptographie“ von J. Buchmann, der Klassiker "Prime Numbers and Computer Methods for Factorization" von H. Riesel und das "Handbook of Applied Cryptography" von A.J. Menezes, P.C. van Oorschot und S.A. Vanstone.

Peter Hellekalek (Salzburg)

**S. Dineen: Probability Theory in Finance. A mathematical guide to the Black-Scholes formula.** (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 70.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2013, xiv+305 S. ISBN 978-0-8218-9490-3 H/b € 51,06.

Eine Einführung in die Finanzmathematik, die zumindest bis zu einem Verständnis der „Black-Scholes-Formel“ für die Bewertung von Optionen führen soll, sehen inzwischen zahlreiche Curricula von Mathematik-Studien oder auch Wirtschafts-Studien vor. Dementsprechend reichhaltig ist das Angebot an einführenden Texten, die diese Lehrveranstaltungen unterstützen.

Diese Texte sind von durchaus unterschiedlicher Qualität. Um ein Verständnis für die stochastische Finanzmathematik aufzubauen, ist es unabdingbar, zumindest einen intuitiven Zugang zu anspruchsvollen Begriffen wie Brownsche Bewegung und stochastische Integration zu entwickeln. Hier tut sich regelmäßig das Dilemma auf, in welchem Ausmaß technisch sperrige Notationen, wie z.B. Sigma-Algebren oder Filtrationen, in mathematisch zufriedenstellender Weise entwickelt werden können.

Das vorliegende Buch meistert diese Schwierigkeit in hervorragender Weise. Der 70-jährige Autor Seán Dineen – er ist Funktionalanalytiker und hatte mit der Finanzmathematik als Lehrender am University College Dublin zu tun – beweist seine exzellenten didaktischen Fähigkeiten und baut alle Begriffe mit einem hohen Niveau an Motivation und historischem Hintergrund auf. Das Buch enthält auch viele sorgfältig ausgewählte Beispiele, die den Stoff ergänzen. Es ist damit eine ausgezeichnete Grundlage für eine einführende Vorlesung zur Finanzmathematik, etwa für Mathematik-Studierende ab dem dritten Semester.

Die relevanten Grundlagen aus der Maßtheorie (Lebesgue-Integral) und der Wahrscheinlichkeitstheorie (bedingte Erwartungen, Martingale) werden didaktisch gut präsentiert, ohne den Text zu überladen. Dies erlaubt es, die Black-Scholes-Formel sauber herzuleiten. Auch das Lemma von Ito und der Begriff der quadratischen Variation werden am Ende des Buchs präsentiert.

Das Buch ist sehr gut lesbar und für den genannten Zweck hervorragend geeignet.  
W. Schachermayer (Wien)

**O. Forster: Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.** Springer Spektrum (Grundkurs Mathematik), Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2013, ix+332 S. ISBN 978-3-658-00316-6 P/b € 19,48.

**O. Forster, R. Wessoly: Übungsbuch zur Analysis 2. Aufgaben und Lösungen.** Springer Spektrum (Grundkurs Mathematik), Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2013, viii+192 S. ISBN 978-3-658-00335-7 P/b € 16,40.

Die 11. Auflage des Lehrbuchs Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen unterscheidet sich von früheren Versionen im Wesentlichen nur durch zusätzliche Beispiele und Aufgaben, der Inhalt ist kaum verändert. Die 23 Kapitel umfassen eine typische erste Vorlesung in Analysis, wobei (wie im Titel des Buchs schon klar ist) der Inhalt ausschließlich in *einer* Dimension bleibt. Das Buch behält eine formelle Definition-Satz-Beweis-Struktur, und zahlreiche Beispiele illustrieren eingeführte Begriffe. Auch Fourier-Reihen werden eingeführt. An verschiedenen Stellen des Buchs werden verwandte Themen der Numerik diskutiert. Der Autor bietet einen kostenlosen und kompakten Interpreter ARIBAS auf seiner Homepage an, den er für alle Programmier-Beispiele verwendet hat.

Das zugehörige Übungsbuch ist wie in früheren Auflagen in Aufgaben und Lösungen aufgeteilt. Die 6. Auflage bezieht sich auf die 11. Auflage des Lehrbuchs Analysis 1 und wurde mit einigen neuen Beispielen erweitert. Für jedes Kapitel des Lehrbuchs sind 5–20 teilweise vom Lehrbuch übernommene Beispiele durchzuarbeiten. Sie sollten einerseits als Hilfsmittel für das Selbststudium dienen aber andererseits kein Ersatz für eine Übung im Hörsaal sein. Der Autor ist überzeugt, dass das Vorliegen aller Lösungen dazu führen würde, dass Studierende zu schnell beim Lösen der Aufgaben aufgeben. Deswegen sind Lösungen nur zu ausgewählten Beispielen vorhanden und teilweise auch nur skizzenhaft durchgeführt.

G. Schranz-Kirlinger (Wien)

**C. Karpfinger: Höhere Mathematik in Rezepten. Begriffe, Sätze und zahlreiche Beispiele in kurzen Lerneinheiten.** (Lehrbuch) Springer Spektrum, 2014, xix+838 S. ISBN 978-3-642-37865-2 P/b € 35,97.

Während sich die Stoffauswahl des vorliegenden Buchs weitgehend an den Bedürfnissen eines ingenieurwissenschaftlichen Curriculums orientiert, weichen Darstellungsweise und mathematische Nuancierung von üblichen Werken zur Höheren Mathematik ab. Motiviert durch die Erfahrungen einer mehrjährigen Lehrtätigkeit für die Ingenieur fakultäten der TU München, entscheidet sich Karpfinger, den Inhalt einer viersemestrigen Grundlagenvorlesung in Form von kompakten Anleitungen („Rezepten“) zu vermitteln. Dabei verzichtet er weitgehend

auf Beweise, ohne dass dadurch die Präzision der mathematischen Darstellung leidet. Der Autor verwendet den dadurch gewonnenen Raum für eine ausführliche Behandlung numerischer Aspekte und für eine unaufdringliche, begleitende Nutzung von *matlab*.

Das Buch ist in 90 etwa gleich lange Kapitel unterteilt, die wohl in sich abgeschlossen sind, jedoch in der vorgegebenen Reihenfolge zu konsumieren sind. Die Kapitel enthalten – im Text durch Rahmen gesondert gekennzeichnet – mehr als 120 kompakte Lösungsanleitungen und den an vielen Stellen nützlichen *matlab*-Code, der die Studierenden zum selbstständigen Experimentieren ermuntert. Am Ende der Kapitel findet man zahlreiche Übungsbeispiele, die Studierenden eine Selbstkontrolle ermöglichen, da es sich überwiegend um Klausuraufgaben handelt. Sehr positiv ist zu vermerken, dass Karpfinger ausführliche Lösungsvorschläge zu diesen Übungsbeispielen in einem begleitenden Arbeitsbuch niedergelegt hat. Zusammen mit einer frei erhältlichen Einführung in *matlab* gelang es Karpfinger, ein sich gegenseitig ergänzendes Unterrichtspaket zu entwickeln.

Karpfingers Buch und die gewählte Lehrmethode erfreuen sich bei den Studierenden ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge der TU München großer Beliebtheit. Er wurde dafür mehrfach ausgezeichnet. Der Rezensent wünscht diesem erfrischenden Buch weite Verbreitung und empfiehlt es vorbehaltlos Lernenden und Lehrenden an Universitäten und Fachhochschulen.

E. Werner (München)

**F. Labourie: Lectures on Representations of Surface Groups.** (Zurich Lectures in Advanced Mathematics) EMS, Zürich, 2013, vii+138 S. ISBN 978-3-03719-127-9 P/b € 28,-.

This books grew out of a course on the representation variety (character variety)

$$\text{Rep}(\pi_1(S), G) := \text{Hom}(\pi_1(S), G)/G$$

(where  $G$  acts by conjugation) of the fundamental group  $\pi_1(S)$  of a closed connected surface  $S$  of genus greater than two, with values in a Lie group  $G$ . This course was aimed at advanced undergraduate students and hence only assumes an elementary background in differential geometry and topology. The book starts with two introductory chapters before going to more advanced material. The text leaves out some of the more involved proofs as they would require more theory. Some of the proofs are presented for special cases. This allows the reader to get a flavor of the general proofs. Each chapter ends with a few comments and hints towards further reading and complete proofs. All this makes for a smooth reading and the references round it up very well.

The first chapters provide the theory needed on surfaces, vector bundles and connections. The author in particular describes differential geometric and combinatorial aspects. With this, he is then able to describe twisted cohomology from

differential and combinatorial points of view (chapter 4). Chapter 5 studies the representation variety as a moduli space and shows its structure as a smooth manifold. In the case of  $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , the Milnor-Wood Inequality is proved. Chapter 6 then studies the symplectic structure of the moduli space. Two algebras of observables are introduced: the algebra of Wilson loops and the algebra of spin networks, and their Poisson brackets are computed. For compact groups, Witten's formula computing the symplectic volume of the character variety is proved. The topic of the last chapter is the integrability of the symplectic form and the relation with 3-manifolds and the Chern-Simons invariant.

K. Baur (Graz)

**R. J. Marsh: Lecture Notes on Cluster Algebras.** (Zurich Lectures in Advanced Mathematics) EMS, Zürich, 2013, 117 S. ISBN 978-3-03719-130-9 P/b € 28,-.

This book grew out of a graduate course in cluster algebras. The book begins with some motivation on how cluster algebras were discovered and why they are interesting to study. Cluster algebras have many realizations and have connections to many areas of mathematics. This text serves as an introduction to cluster algebras, and surveys a variety of these realizations and connections without going into too much depth in any one of them. Each chapter begins with a short description of the topic covered in the chapter, and incorporates many pictures and examples, making it a comprehensive read.

The first chapter gives a motivation for studying cluster algebras. It mentions that the well-known Somos recurrence corresponds to a cluster algebra. This correspondence is later explained in Chapter 7, along with other periodicity properties of cluster algebras.

The second chapter gives a representation-theoretic definition of cluster algebras of geometric type. The author describes how to record a matrix as a quiver, and describes the exchange graph of a cluster algebra. The third chapter describes how to define mutation by substitution and how this corresponds to the matrix mutations that were given in Chapter 2. Cluster algebras of finite type have corresponding Weyl groups and root systems. Chapter 4 gives a brief summary of this classification theory, and mentions some important properties of these objects. Chapter 5 goes on to explain what it means for a cluster algebra to be of finite type, and Chapter 8 explains what it means for a cluster algebra to be of finite mutation type. Chapter 6 associates a simplicial complex and a corresponding polytope to a cluster algebra of finite type. The polytope, known as the generalized associahedron, has a correspondence with the roots of the cluster algebra. The last chapter, Chapter 9, gives an introduction to Grassmannians. The homogeneous coordinate ring of the Grassmannian of  $k$ -subspaces of an  $n$ -dimensional space can be regarded as a cluster algebra. The combinatorics to show this involves alternating strand diagrams labeled by minors. The text references many sources for further reading in each area.

H. Vogel (Graz)

**N. Ortner, P. Wagner: Distribution-Valued Analytic Functions.** Theory and Applications. Edition.swk, tredition, Hamburg 2013. ix+133 S. ISBN 978-3-8491-1968-3 H/b € 28,90.

Distribution-Valued analytic functions arise naturally in the study of linear, constant coefficient partial differential equations. To demonstrate this fact, the book starts out by recalling M. Riesz' derivation of the fundamental solution of the Laplace operator via analytic continuation of the holomorphic distribution-valued function  $\lambda \mapsto |x|^\lambda$ . More generally, this work provides a systematic study of meromorphic distribution-valued functions of the form  $\lambda \mapsto F_\lambda \cdot \rho^\lambda$ , with quasihomogeneous modulus  $\rho : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$  and characteristic  $F_\lambda$  which is a distribution on the hypersurface  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 1\}$ .

Based on some standard references in distribution theory and locally convex spaces, Chapter 1 lays the foundations of what is to come by providing supplements to these works, in particular concerning distributions on hypersurfaces and on holomorphic functions with values in topological vector spaces.

In Chapter 2 the authors introduce the concept of quasihomogeneous distribution and prove a general structure theorem to the effect that any quasihomogeneous distribution is, up to derivatives of the Dirac measure, of the form  $F_\lambda \cdot \rho^\lambda$ . In addition, this chapter provides a thorough analysis of representations in generalized polar coordinates, the  $S'$ -solvability of division problems with quasihomogeneous polynomials, Fourier transforms of quasihomogeneous distributions, as well as of fundamental solutions (in particular, of iterated wave-, Cauchy-Riemann-, and ultrahyperbolic operators) and convolution kernels.

The final chapter is devoted to convolution with quasihomogeneous distributions. To this end, the authors introduce weighted  $\mathcal{D}'_{L^p}$ -spaces as a generalization of L. Schwartz'  $\mathcal{D}'_{L^p}$  spaces. They then go on to study the action of homogeneous distributions of the form  $F \cdot \rho^\lambda$  on these spaces by convolution. The results obtained thereby are then applied to convolution groups of elliptic, hyperbolic, ultrahyperbolic, and quasihyperbolic operators, as well as of certain singular integral operators.

This book is a most valuable addition to the literature on partial differential equations and distribution theory. Not only does it collect in a well-structured form and for the first time many results that so far were only available in journal publications, but in many places it contains new results and substantial improvements of classical theorems. Concerning the presentation, it is a paradigm of precision and completeness.

M. Kunzinger (Wien)

**S. Paycha: Regularised Integrals, Sums and Traces: An Analytic Point of View.** (University Lecture Series 59) American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, ix+190 S., ISBN 978-0-8218-5267-2, P/b \$ 43, € 34,40.

Divergente Reihen und Integrale treten in unterschiedlichem Kontext in Mathematik und Physik auf. Beispiele sind etwa die analytische Fortsetzung von Dirichlet-Reihen, der Gamma-Funktion und allgemeiner von Mellin-Transformierten, weiters Feynman-Integrale, Fredholm-Determinanten oder verschiedene Spur-Begriffe von Differentialoperatoren. Die Autorin zeigt, wie regularisierte Summen, Integrale und Spuren mittels verschiedener bausteinartiger Ideen behandelt werden können. Dabei kommen Methoden der asymptotischen und der komplexen Analysis zum Einsatz. Nicht immer liefern die verschiedenen Regularisierungsmethoden dieselben Ergebnisse. Diese sogenannten Anomalien werden ebenfalls genauer untersucht und erklärt.

Das vorliegende Buch gibt eine einheitliche und in sich geschlossene Einführung in grundlegende Methoden der Regularisierung und ist damit eine wertvolle Referenz für dieses Thema. Durch die konzise Darstellung ist das Buch auch gut zum Selbststudium geeignet.

P. Grabner (Graz)

**G. Shimura: Arithmetic of Quadratic Forms.** (Springer Monographs in Mathematics.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, xi+237 S. ISBN 978 dash 1 dash 4419 dash 1731 dash 7 H/b € 79,95.

Die Arithmetik quadratischer Formen ist ein klassisches Thema der Zahlentheorie und datiert zurück bis zu Lagrange und den *Disquisitiones Arithmeticae* von Gauß. Ziel des vorliegenden Buchs ist die Klassifikation der quadratischen Formen über algebraischen Zahlkörpern bzw. deren Ganzheitsringen sowie die Untersuchung quadratischer diophantischer Gleichungen über Ganzheitsringen algebraischer Zahlkörper. Das Buch stellt die notwendigen Voraussetzungen in den ersten fünf Kapiteln zur Verfügung, die auf einer Vorlesung des Autors an der Princeton University basieren. Um das Buch in sich geschlossen und konzise zu halten, hat der Autor bei den Beweisen zumeist den Fall der rationalen Zahlen bzw. der ganzen Zahlen behandelt; die Resultate sind aber jeweils allgemein über Zahlkörpern formuliert. So wird eine Darstellung der Klassenkörpertheorie in den einleitenden Kapiteln vermieden; für ein vollständiges Verständnis der Sätze und ihrer Beweise in den beiden abschließenden Kapiteln in ihrer vollen Allgemeinheit ist sie aber notwendig.

Das Buch gliedert sich in sieben Kapitel: I. behandelt das quadratische Reziprozitätsgesetz, II. und III. geben eine konzise Darstellung der Arithmetik algebraischer Zahlkörper, IV. diskutiert Algebren über Körpern, V. beginnt mit der Behandlung quadratischer Formen über Körpern. Nach der Vorbereitung in den ersten fünf Kapiteln behandelt VI. die tiefere Arithmetik quadratischer Formen; hier



greift der Autor eine von Eichler 1952 vorgestellte Methode als Alternative zum Hasseschen Zugang auf. In VII. werden quadratische diphantische Gleichungen über Zahlkörpern untersucht.

P. Grabner (Graz)

**A. N. Siegel: Combinatorial Game Theory.** (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 146.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2013, xiv+523 S. ISBN 978-0-8218-5190-6 H/b \$ 89, € 64,-.

Dieses 500 Seiten starke Werk zeigt deutlich, dass sich die kombinatorische Spieltheorie in den drei Jahrzehnten seit dem Erscheinen der klassischen Bücher *On Numbers and Games* von John Conway und *Winning Ways for Your Mathematical Plays* von Elwyn Berlekamp, John Conway und Richard Guy zu einem vollwertigen mathematischen Gebiet mit einer umfangreichen Theorie entwickelt hat, und dass einfache „Spielereien“ so einfach gar nicht sind. Dabei ergeben sich auch erstaunliche Verbindungen zu verschiedensten mathematischen Gebieten, wie der Gruppentheorie, der Theorie partiell geordneter Mengen oder der Theorie der Ordinalzahlen.

Das Buch kann als Vorlesungsunterlage oder auch zum Selbststudium verwendet werden, wobei einige Vorkenntnisse der kombinatorischen Spieltheorie sicher nützlich sind, aber nicht zwingend erforderlich. Neben einer ausführlichen Behandlung der wesentlichen Ideen, die anhand klassischer Beispiele wie *Hackensbush* und *Nim* erläutert werden, findet sich auch ein Anhang zur historischen Entwicklung und ein Abschnitt, in dem diverse offene Probleme und Vermutungen aufgelistet werden. Das Buch ist schwerere Kost, als es der Titel vielleicht vermuten ließe, kann aber jedem mit einem allgemeinen Interesse für Kombinatorik und Strategiespiele empfohlen werden.

S. Wagner (Stellenbosch)

**P. Soberón: Problem-Solving Methods in Combinatorics. An approach to olympiad problems.** (Birkhäuser) Springer Basel, Heidelberg, New York, Dordrecht, London 2013, ix+174 S. ISBN 978-3-0348-05965-4 P/b € 54,99.

Kombinatorik ist eines der klassischen Gebiete der Mathematik-Olympiade, und jedes Jahr ist mindestens eine der Aufgaben der Internationalen Mathematik-Olympiade und auch zahlreicher anderer nationaler und internationaler Wettbewerbe kombinatorischer Natur. Diese Aufgaben verlangen oft einen speziellen Zugang und gezieltes Training, und mit diesem Buch hat der Autor, in der Vergangenheit selbst erfolgreicher Teilnehmer, eine äußerst nützliche Quelle für Teilnehmer an Mathematik-Olympiaden und deren Betreuer geschaffen. In sieben Kapiteln werden verschiedene nützliche Problemlösungstechniken erläutert und mit zahlreichen Beispielen verdeutlicht. Jedes Kapitel schließt mit einem Aufgabenteil zum weiteren Training, und es gibt zu allen Übungsbeispielen sowohl kleine Hinweise als auch vollständige Lösungen.

Alle wesentlichen Gebiete, wie elementare Zählmethoden, das Schubfachschlussprinzip, der Gebrauch von Invarianten, graphentheoretische Konzepte und erzeugende Funktionen, sind vertreten, und es finden sich auch einige klassische Sätze der Kombinatorik (z.B. der Satz von Erdős-Ko-Rado) in dem Buch wieder. All dies wird in einem angenehm zu lesenden Stil präsentiert.

Ich kann dieses Buch uneingeschränkt allen interessierten Schülern empfehlen, die an mathematischen Olympiaden teilnehmen und ihre Kombinatorik-Fertigkeiten verbessern wollen. Auch für Lehrer, die einen Olympiadekurs betreuen, stellt das Buch jedenfalls eine wertvolle Ressource dar.

S. Wagner (Stellenbosch)

**R. P. Stanley: Algebraic Combinatorics. Walks, Trees, Tableaux, and More.** (Undergraduate Texts in Mathematics) Springer New York, Heidelberg, Dordrecht, London 2013, xi+223 S. ISBN 978-1-4614-6997-1 H/b € 32,12.

Dieses Buch beinhaltet das Material für eine einführende Vorlesung in die algebraische Kombinatorik. Der Autor ist einer der prominentesten Vertreter dieses Gebiets und ein ausgewiesener Experte. Zahlreiche klassische Themen werden abgedeckt, die das Zusammenspiel zwischen Algebra und Kombinatorik sehr schön illustrieren: dazu zählen Aspekte der algebraischen Graphentheorie (spektrale Ideen, Random Walks, Matrix-Baum-Satz, elektrische Netzwerke), die Theorie partiell geordneter Mengen, die Pólyasche Abzählmethode und Young-Tableaus.

Es werden dabei im Allgemeinen nur Grundkenntnisse der linearen Algebra, der Gruppen- und Körpertheorie vorausgesetzt. Jedes Kapitel schließt mit einem reichhaltigen Schatz an Übungsaufgaben ab. Ein Gustostück ist das letzte Kapitel, in dem einige besonders schöne und elegante Anwendungen der algebraischen Kombinatorik präsentiert werden.

S. Wagner (Stellenbosch)

**J. Stedall: From Cardano's great art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of algebra.** (Heritage of European Mathematics.) EMS, Zürich, 2011, xii+224 S. ISBN 978-3-03719-092-0 H/b € 68,00.

Das Buch ist in drei Abschnitte gegliedert: I From Cardano to Newton: 1545 to 1707; II From Newton to Lagrange: 1707 to 1771; III After Lagrange. Die drei Kapitel des ersten Abschnitts beschäftigen sich mit den ersten Versuchen, Gleichungen höheren Grades in ähnlicher Art wie Cardano und Ferrari zu lösen. Neben den in der Überschrift genannten Personen wird vor allem auf Viète und Descartes eingegangen, aber auch – in deutlich geringerem Umfang – auf del Ferro, Tartaglia, Bombelli, Ferrari, van Schooten, Hudde, de Beaune, Dulaurens, Wallis, Collins, Gregory, Tschirnhaus, Leibniz, Barrow, Warner, Mercator, Pell, Rolle und Kinckhuysen. Abschnitt II besteht aus acht Kapiteln und behandelt neben den Beiträgen von Newton und Lagrange auch MacLaurin, Campbell, Colson,

de Moivre, Euler, Bezout, Cramer, Raphson, Waring und Vandermonde. Inhalte dieses Abschnitts sind Untersuchungen zur Natur von Lösungen algebraischer Gleichungen, deren Darstellung als Summe von Radikalen, Elimination von Gliedern, Reduktion des Grades, Resolventen, numerische Lösungen und Funktionen von Lösungen. Abschnitt drei besteht nur aus einem Kapitel und widmet sich der endgültigen Bestätigung der Nichtlösbarkeit der allgemeinen Gleichungen 5. und höheren Grades durch Radikale und dabei vor allem Bezout, Ruffini, Abel, Cauchy und Galois. Daneben werden auch kurz Paoli, Malfatti, Fontana, Legendre, Lacroix, Hamilton, u.a. erwähnt, insbesondere in Zusammenhang mit der Kritik an Ruffinis Beweis.

Die Autorin hat eine Vielzahl von Originalquellen verarbeitet. Die Darstellung folgt meist der Chronologie, nur an wenigen Stellen wird diese durchbrochen, wenn eine Arbeit nicht unmittelbar von anderen Mathematikern aufgegriffen wurde, sondern erst zu späterer Zeit Beachtung fand. Mathematische Passagen werden meist in originaler Schreibweise wiedergegeben, nur an einigen Stellen, wenn diese für den Leser zu mühsam wären, werden sie in die heute vertraute Symbolik transkribiert.

Das Werk liefert einen sehr authentischen Eindruck von dieser entscheidenden Phase der Entwicklung der Algebra. Absolut lesenswert!

M. Kronfellner (Wien)



# Neue Mitglieder

**Arne Bathke**, Univ.-Prof. Dr. – Fachbereich Mathematik, Universität Salzburg, Hellbrunner Str. 34, 5020 Salzburg. geb. 1972. Dissertation Göttingen 2000, anschließend Univ. Kentucky (zuletzt full professor), ab 2012 Professor für Statistik an der Universität Salzburg. email *arne.bathke@sbg.ac.at*.

**Christopher Cashen**, Dr. – Fakultät für Mathematik der Univ. Wien, Oskar Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien. geb. 1977. 2007 Ph.D. an der University of Illinois at Chicago. Seit 2012 Postdoc an der Univ. Wien (geometrische und analytische Gruppentheorie). email *christopher.cashen@univie.ac.at*.

**Peter Hofbauer**, Mag.rer.nat. – Gartengasse 1, 3580 Horn. geb. 1972. Studium der Mathematik und Physik an der Universität Wien, seit 1996 Lehrer an der Handelsakademie Horn. Tätigkeiten im regionalen Fachdidaktikzentrum für Mathematik und Informatik, für das Bildungsministerium und das Bundesinstitut BIFIE. email *peter.hofbauer@hakhorn.ac.at*.

**Daniel Smertnig**, Dr. – Universität Graz, Heinrichstr. 36, 8010 Graz. geb. 1986. 2004 Doktorat an der Karl Franzens-Universität Graz, danach Postdoc am Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen der KFU. email *daniel.smertnig@uni-graz.at*.

**Wolfgang Trutschnig**, Dr. – Fachbereich Mathematik, Universität Salzburg, Hellbrunnerstr. 34, 5020 Salzburg. geb. 1977. 2006 Doktorat an der TU Wien, anschließend European Centre for Soft Computing (Mieres, Spanien), seit 2013 Ass.Prof. Univ. Salzburg. Webseite <http://www.trutschnig.net>, email *wolfgang@trutschnig.net*.

**INDIANA UNIVERSITY MATHEMATICS JOURNAL**

(Formerly the Journal of Mathematics and Mechanics)

Edited by

E. Bedford, H. Bercovici, D. Fisher, C. Judge, M. Larsen, K. Pilgrim, P. Sternberg, V. Turaev, K. Zumbrun.

*For institutions, the print and online subscription rates are \$460.00 and \$365.00. Individual subscribers' fees are \$150.00 and \$50.00, respectively. The JOURNAL appears in 6 annual issues averaging more than 500 pages each.*

**Indiana University, Bloomington, Indiana U.S.A**

**PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS**

V. S. Varadarajan (Managing Editor), Paul Balmer, Don Blasius, Vyjayanthi Chari, Daryl Cooper Robert Finn, Kefeng Liu, Jiang-Hua Lu, Sorin Popa, Jie Qing, Paul Yang.

The Journal is published 12 times a year. The subscription price is \$ 535,00 per year for print and \$ 410,00 for electronic-only.

**PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS  
AT THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY, CA 94720-3840**

# Ausschreibung der Preise der ÖMG

## Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2015

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2015 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematiker oder Mathematikerinnen, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind und welche einen wesentlichen Teil ihrer Arbeiten in Österreich erbracht haben. Dabei soll die Promotion mindestens zwei bis maximal zehn Jahre zurückliegen (Überschreitungen sind möglich bei Kindererziehungszeiten und bei nachweislichen Präsenz- oder Zivildienstzeiten).

Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten habilitierten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen. Der Vorschlag muss in elektronischer Form bis spätestens 15. März 2015 beim Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung; 2. Publikationsliste; 3. Wissenschaftlicher Lebenslauf.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine Begutachtungskommission den Preisträger oder die Preisträgerin aus. Der Preis ist mit 1.000 € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird der Preisträger oder die Preisträgerin eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er oder sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

*Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Michael Oberguggenberger, Universität Innsbruck. email michael.oberguggenberger@uibk.ac.at.*

## Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2015

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2015 wieder zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2013 oder 2014 eine Diplom- oder Masterarbeit bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Diplomarbeiten ist ein Abschluss eines Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Doktoratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlos-

senen Master- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss in elektronischer Form bis spätestens 15. März 2015 beim Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Ein Exemplar der als besonders hochqualifiziert bewerteten mathematischen Diplomarbeit bzw. Dissertation; 2. Zwei begründete Bewertungen dieser Diplomarbeit bzw. Dissertation; 3. Einen Lebenslauf des Kandidaten bzw. der Kandidatin einschließlich kurzer Beschreibung des Studienablaufs.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachtungskommission die Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500 € dotiert. Jeder Preisträger erhält eine Urkunde. Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er bzw. sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

*Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Michael Oberguggenberger, Universität Innsbruck. email michael.oberguggenberger@uibk.ac.at.*

### **Ausschreibung der Schülerinnen- und Schülerpreise der ÖMG**

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft zeichnet herausragende vorwissenschaftliche Arbeiten oder Fachbereichsarbeiten, die 2014 oder 2015 an österreichischen Schulen entstanden sind, und die einen starkem Bezug zu Mathematik oder Darstellender Geometrie aufweisen, mit Preisen aus. Diese Arbeiten müssen in elektronischer Form, als PDF-Datei, bis 10. Juli 2015 bei der ÖMG einlangen und werden von einer Jury begutachtet.

Die Verfasserinnen und Verfasser jener Arbeiten, die im Zuge dieser Begutachtung durch die Jury ausgewählt werden, werden zu einem Kurzvortrag eingeladen, in dem sie ihre Arbeit präsentieren können. Anschließend erfolgt die Preisverleihung. Die Präsentationen und die Preisverleihung der prämierten Arbeiten finden im Herbst 2015 zu einem noch festzusetzenden Termin statt.

Die ÖMG bittet alle ihre Mitglieder und die Leserinnen und Leser der IMN, potentielle Interessentinnen und Interessenten von dieser Einladung zu informieren und Schulen zur Teilnahme zu ermuntern.

*Adresse für Einsendungen: Univ.Prof. Dr. Michael Oberguggenberger, Universität Innsbruck. email michael.oberguggenberger@uibk.ac.at.*