Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien" gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten" umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union".

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Redaktion:

Ständige Mitarbeiter der Redaktion:

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 25,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

Vorstand des Vereinsjahres 2013:

M. Drmota (TU Wien): Vorsitzender
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Stellvertretender Vorsitzender
J. Wallner (TU Graz): Herausgeber der IMN
B. Lamel (Univ. Wien): Schriftführer
A. Ostermann (Univ. Unnsbruck): Stellvertretender Schriftführer
G. Larcher (Univ Linz): Kassier
P. Kirschenhofer (MU Leoben): Stellvertretender Kassier
G. Schranz-Kirlinger (TU Wien): Beauftragte für Frauenförderung
G. Teschl (Univ. Wien): Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
U. Dieter (TU Graz)
H. Engl (Univ. Wien)
P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
L. Reich (Univ. Graz)
N. Rozsenich (Wien)
W. Schachermayer (Univ Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
H. Strasser (WU Wien)
R. Tichy (TU Graz)
W. Wurm (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionsvorsitzende gehören statutengemäß dem Beirat an.

Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:

W. Woess (Graz)
G. Kirchner (Innsbruck)
C. Nowak (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
P. Hellekalek (Salzburg)
C. Krattenthaler (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 25,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News
Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 222 (67. Jahrgang) **April 2013**

Inhalt

Die Titelseite illustriert ein Fast-Pi aus G. Maze, L. Minder: A new family of almost identities (*http://arxiv.org/abs/math/0409014*).

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 222 (2013), 1–3

Open Access?

Christian Krattenthaler

Universität Wien – im Namen des Vorstands der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft drückt im folgenden Text nachdrücklich ihre große Skepsis über die derzeitige "Open Access-Entwicklung" aus. Sosehr wir die Bemühungen, wissenschaftliche Literatur frei zugänglich zur Verfügung zu stellen, anerkennen und begrüßen, scheinen uns die Wege, die derzeit propagiert und eingeschlagen werden, in eine falsche Richtung zu führen, jedenfalls die Mathematik betreffend.

Um die Entwicklung der vergangenen Jahrzehnte kurz zusammenzufassen:[1] Während ursprünglich wissenschaftliche Publikation ausschließlich durch wissenschaftliche Gesellschaften und Universitäten geschah, hat sich das im Laufe der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts dramatisch geändert, sodass die „Publikationslandschaft" nun überproportional durch (wenige) kommerzielle Verlage dominiert wird. Insbesondere haben es diese kommerziellen Verlage verstanden, während der Periode 1990–2010 ihre Profitmargen ins Gigantische zu steigern, auf Kosten der Forschungsträger, und somit (da diese jedenfalls in Österreich hauptsächlich von der öffentlichen Hand finanziert werden) auf Kosten der Steuerzahler.

Um dem gegenzusteuern, wird neuerdings "Open Access" propagiert. Die Probleme beginnen aber bereits mit diesem Begriff, der zwei Dinge bedeuten kann: gemäß der neuen Terminologie kann das einerseits "Green Open Access" und andererseits "Gold Open Access" sein. Mit Ersterem meint man *tatsächlichen* "Open Access", nämlich freien Zugang sowohl für Leser *als auch* für Autoren. Das Letztere versteht Open Access so, dass zwar Leser freien Zugang haben, aber die Autoren diesen freien Zugang der Leser „kaufen", sei es aus Mitteln ihrer Institution,

Dieser Text ist insbesondere als eine Reaktion auf den Text "Open Access – aktuelle internationale und nationale Entwicklungen" von Falk Reckling zu verstehen, siehe *http://www.fwf.ac.at/de/public_relations/oai/pdf/FWF_OA-2013.pdf*.

Siehe auch die gemeinsame Deklaration von Société Mathématique de France, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, Société Française de Statistique, die unter *http://smai.emath.fr/IMG/pdf/Open_access_trois_societes-2.pdf* zugänglich ist.

[1] Eine vorzügliche Darstellung – aus Verlegerperspektive – findet man unter *http://www.ams.org/notices/199810/beschler.pdf*.

ISSN 0020-7926

aus Drittmitteln oder aus sonstigen Quellen.

Die akademische Welt müsste größtes Interesse daran haben, dass alle Ergebnisse von wissenschaftlichen Arbeiten im "Green Open Access" veröffentlicht werden. Alles andere ist bestenfalls eine zweitbeste Lösung. Wir fügen hinzu, dass man aus der Erfahrung der letzten Jahrzehnte (und insbesondere des letzten Jahrzehnts) schließen muss, dass die kommerziellen Verlage es sicherlich verstehen werden, auch aus dieser neuen Entwicklung neues Kapital zu schlagen (wie sie es bereits erfolgreich verstanden haben, das Internet zu exorbitanten Profitsteigerungen zu nutzen) – so man ihnen dafür Gelegenheit gibt. Praktisch alle etablierten mathematischen Journale fahren jetzt „dual": Autoren haben die Option, für ihren Artikel "Open Access" zu erkaufen oder nicht. Bibliotheken müssen jedenfalls nach wie vor für diese Journale *ebenfalls* bezahlen.

In der Mathematik *existiert* die Möglichkeit, alle Artikel im "Green Open Access" zur Verfügung zu stellen: Indem man die Artikel auf das arXiv (*http://arxiv.org*) stellt. Dies ist zwar keine „offizielle" Veröffentlichung (in dem Sinne, dass es einen Begutachtungsprozess gab), aber Artikel, die dort hingestellt wurden, sind *frei zugänglich*, und es gibt auch *keine Autorenabgabe*. Ein großer Teil der gegenwärtig produzierten mathematischen Literatur (und der Anteil steigt stetig) steht auf dem *arXiv* zur freien Verfügung.

Aus unserer Sicht ist das Investieren in "Gold Open Access" (und nur diese Art von "Open Access" kostet etwas) äußerst fragwürdig. Es ist offenkundig, dass "Open Access" bei vielen der in letzter Zeit gegründeten Journale einfach nur ein Geschäftsmodell ist. Wie unsere Erwartung aussieht, wie sich die etablierten kommerziellen Journale auf diese Entwicklung einrichten werden, haben wir oben beschrieben.

Um Missverständnissen vorzubeugen: Kommerzielle Verlage *müssen* den optimalen Profit anstreben. Dies ist ihre Aufgabe als Wirtschaftsunternehmen. Es ist daher müßig, diesen irgendetwas „vorzuwerfen". Dass die historische Entwicklung uns in die oben beschriebene jetzige Situation geführt hat, ist ausschließlich *den Wissenschafter(inne)n selbst* zuzuschreiben. Es gab mit dem Aufkommen des Internets Mitte der 1990er-Jahre die Chance, mit der Gründung von qualitätsvollen *freien* elektronischen Journalen ein Gegengewicht zu den immer teurer werdenden kommerziellen Journalen zu schaffen. Diese Chance wurde (mit wenigen Ausnahmen) nicht wahrgenommen und somit vertan. Verstärkt wird der „Zwang", in anerkannten (aber oft teuren) Journalen zu veröffentlichen, dadurch, dass bei der Bewertung von Personen (anlässlich von Postenbesetzungen) oder von Institutionen immer weniger die *tatsächliche* wissenschaftliche Leistung (nämlich der *Inhalt* von Publikationen) angesehen wird, sondern immer mehr bloß sogenannte „metrische Indikatoren" (hier laden auch Universitätsadministratoren und Politik Schuld auf sich, da diese immer mehr darauf drängen, Finanzierungen von solchen „metrischen Indikatoren" abhängig zu machen, weil dies – polemisch gesagt – viel praktischer als ein ernsthafter Evaluationsprozess ist), was ebenfalls dazu führt, dass man „gezwungen“ ist, in bereits lange etablierten Journalen zu veröffentlichen.

Um es kurz zusammenzufassen: Aus unserer Sicht muss die Empfehlung an alle mathematischen Autor(inn)en sein, ihre Artikel auf das *arXiv* zu laden. *Damit ist "Open Access" bereits Genüge getan.* Außerdem sollten sie – nach Maßgabe der Möglichkeit – angehalten werden, in *guten freien elektronischen Journalen* zu veröffentlichen. (Wir sind uns durchaus bewusst, dass Letzteres ein Problem ist, da die *guten* freien elektronischen Journale dünn gesät sind, und die Topjournale praktisch ausschließlich kommerzielle sind. Aber wie gesagt: Ein Artikel auf dem arXiv *ist* bereits im "Open Access".) In diesem Zusammenhang begrüßen wir ausdrücklich die Initiative des FWF, ein frei zugängliches Repertoire (FWF-E-Book-Library) für die Veröffentlichung von durch den FWF finanzierten Buchprojekten ins Leben zu rufen. Wir sind uns durchaus auch bewusst, dass "Gold Open Access" in anderen Wissenschaftsdisziplinen – selbst als zweitbeste Option – ein Fortschritt sein kann.

Trotzdem: Es ist absehbar, dass die Investition in "Gold Open Access" nicht nachhaltig sein wird, und somit viel Geld, das man für andere Zwecke viel nutzbringender verwenden hätte können, umsonst ausgegeben wurde. Die kommerziellen Verlage werden es verstehen, auch diese Entwicklung zu ihren Gunsten auszunutzen. Insbesondere glauben wir nicht, dass "Gold Open Access" die derzeit unleugbar vorhandenen Probleme der Explosion von Publikationskosten und Zugang zu wissenschaftlichen Publikationen lösen wird. Dafür wird es eines fundamentalen Umdenkprozesses (siehe drittletzter Absatz) bei den Wissenschafter(inne)n selbst (und den Universitäten) bedürfen.

Adresse des Autors:

Christian Krattenthaler
Fakultät für Mathematik der Universität Wien
Nordbergstraße 15, 1090 Wien
email Christian.Krattenthaler@univie.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 222 (2013), 5–19

Some Reflections on Alan Turing's Centenary

Philip D. Welch
University of Bristol

We review two of Alan Turing's chief publications in mathematical logic: the classic 1936 paper On Computable Numbers [9] *and the less well known paper* Systems of Logic based on Ordinals [10]. *Whilst the former has rightly received enormous attention the latter is really only known amongst logicians. We outline some of the history and background to the first, whilst emphasising a viewpoint often forgotten in discussions of the so-called 'Church-Turing thesis'; we sketch the development of the second paper and see why its results were equivocal and perhaps somewhat disappointing to Turing.*

Early Life

Alan Mathison Turing was born on 23 June 1912 in London to parents of whom his biographer Andrew Hodges [7] aptly conjectures the English novelist George Orwell would have described as "lower upper middle class", his father holding a position in the Indian Civil Service (ICS). This meant that Turing, like many boys of this time and status, would be educated in England either living with relatives or at boarding school. His father eventually retired from the ICS at a relatively senior position in the Presidency of Madras but then for tax reasons continued to live in France.

Turing was thus sent to Sherborne School from the age of 13, which, whilst not Eton or Harrow, would have provided the required respectable education. He seems to have shown early interest in all matters mechanical, chemical and biological and this persisted throughout his life. He showed strong promise in mathematics and a strong ease and facility but without any Gauss-like precocity.

First published in the EMS Newsletter, issue 85, September 2012, pp 32–38. Reprinted with permission.

ISSN 0020-7926 — Österr. Math. Gesellschaft

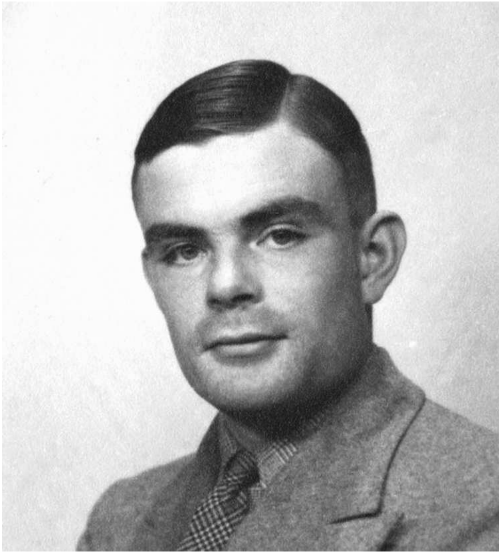


Figure 1: Alan Mathison Turing (1912 London – 1953 Manchester, England)

His mathematical abilities won him a Scholarship to King's College, Cambridge, which he entered in the Autumn of 1931.

The intellectual atmosphere in Cambridge at that time, at least in the areas of interest to Turing, would have been dominated by G. H. Hardy and A. Eddington. Of his own peer group he became friends with the future economist David Champernowne. At Sherborne he had read Eddington's "*Nature of the physical world*" and at Cambridge Hardy and also von Neumann's "*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*".

He attended Eddington's lectures entitled *"The distribution of measurements in Scientific Experiments"* and this must have engaged him as he found for himself a mathematical problem to work on, leading him to rediscover and prove the Central Limit Theorem in February 1934. It seems to have been typical of him to work things out for himself from first principles and he was thus quite unaware that this had already been proven in a similar form by Lindeberg in 1922.

Notwithstanding this his tutor, the group theorist Philip Hall, encouraged him to write up this work as a Fellowship Dissertation for the King's College competition in 1935, which was done, being entitled *On the Gaussian Error Function*. This was accepted 16 March 1936, Hall arguing that the rediscovery of a known theorem was a significant enough sign of Turing's strength (which he argued had not yet achieved its full potential). Turing thus won a three-year fellowship, renewable for another three, with £300 *per annum* with room and board. He was 22 years old.

His first published work was in group theory and was finished in March 1935,[1] this being a contribution to the theory of almost periodic functions, improving

[1] *Equivalence of left and right almost periodicity*, J. of the London Math. Society, 10, 1935.

a result of von Neumann. By coincidence von Neumann arrived the very next month in Cambridge and proceeded to lecture on this subject, and they must have become acquainted from this time.

Probably more decisive than meeting von Neumann was his contact with Max Newman. In Spring 1935 he went on a Part III course of Newman's on the Foundations of Mathematics. (Part III courses at Cambridge were, and are, of a level beyond the usual undergraduate curriculum but preparatory to undertaking a research career.) Newman was a topologist and interested in the theory of sets. Newman attended Hilbert's lecture at the 1928 International Congress of Mathematicians. Logic at this time had disappeared at Cambridge: Russell was no longer present, having left in 1916, and Frank Ramsey had died in 1931. Wittgenstein had moved on from his logical atomistic days and the concerns of the Tractatus to other things (although Turing did attend a Wittgenstein seminar series and conversed with him). Hence Newman was more influenced by Hilbert and Göttingen.

Hilbert had worked on foundational matters for the previous decades and would continue to do so. His aim to obtain a secure foundation for mathematics by finding proofs of consistency of large parts (if not all) of mathematics by a process of systematic axiomatisation, and then showing that these axiomatisations were safe by providing finite consistency proofs, looked both reasonable and possible. By systematic effort Hilbert and his school had reduced the questions of the consistency of geometry to analysis. There seemed reasonable hope that genuinely finitary methods of proof could render arithmetic provably consistent within finite arithmetical means.

The address that Hilbert gave at the 1928 Congress (when Germany had been re-admitted to the International Congress of Mathematicians after being denied this in 1924) not only gave a plea for the internationalist, apolitical nature of mathematical research but also formulated several important questions for this foundational project.

Hilbert's programme and the *Entscheidungsproblem*

- (I. Completeness) His dictum, concerning the belief (engraved as the famous *non ignorabimus* on his gravestone) that any mathematical problem was in principle solvable, can be restated as the belief that mathematics was *complete*. That is, given any properly formulated mathematical proposition P, either a proof of P could be found or a disproof.
- (II. Consistency) The question of *consistency* – given a set of axioms for, say, arithmetic, such as the Dedekind-Peano axioms, PA, could it be shown that no proof of a contradiction can possibly arise? Hilbert stringently wanted a proof of consistency that was finitary, that made no appeal to infi-

nite objects or methods.
- (III. Decidability – the *Entscheidungsproblem*) Could there be a finitary process or algorithm that would *decide* for any properly formulated proposition P whether it was derivable from axioms or not?

Of course the main interest was consistency but there was hope (discernible from some of the writings of the Göttingen group) that there was such a process and therefore a positive solution to the *Entscheidungsproblem*. From others came expressions that it was not:

- Hardy: *"There is of course no such theorem and this is very fortunate, since if there were we should have a mechanical set of rules for the solution of all mathematical problems, and our activities as mathematicians would come to an end."* [6]
- von Neumann: *"When undecidability fails, then mathematics as it is understood today ceases to exist; in its place there would be an absolutely mechanical prescription with whose help one could decide whether any given sentence is provable or not."* [12]

Gödel's Incompleteness Theorems block Hilbert's programme

Theorem 1 (Gödel-Rosser First Incompleteness Theorem – 1931)**.** *For any theory T containing a moderate amount of arithmetical strength, with T having an effectively given list of axioms, then:*
if T is consistent then it is incomplete, that is, for some proposition neither $T \vdash P$ nor $T \vdash \neg P$.

The theorem is, deliberately, written out in a semi-modern form. Here, it suffices that T contain the Dedekind-Peano axioms, PA, to qualify as having a 'moderate amount of arithmetical strength'. The axioms of PA can be written out as an 'effectively given' list, since although the axioms of PA include an infinite list of instances of the Induction Axiom, we may write out an effective prescription for listing them. Hence PA satisfies the theorem's hypothesis. Gödel had used a version of the system of *Principia Mathematica* of Russell and Whitehead but was explicit in saying that the theorem had a wide applicability to any sufficiently strong "formal system" (although without being able to specify completely what that meant).

This immediately established that PA is incomplete, as is *any* theory containing the arithmetic of PA. This destroys any hope for the full resolution of Hilbert's programme that he had hoped for.

However in a few months there was more to come:

Theorem 2 (Gödel's Second Incompleteness Theorem – 1931)**.** *For any consistent T as above, containing the axioms of* PA*, the statement that 'T is consistent' (when formalised as 'Con_T') is an example of such an unprovable sentence. Symbolically:*

$$T \nvdash \mathrm{Con}_T \, .$$

The first theorem thus demonstrated the incompleteness of any such formal system, and the second the impossibility of demonstrating the consistency of the system by the means of formal proofs within that system. The first two of Hilbert's questions were thus negatively answered. What was left open by this was the *Entscheidungsproblem*. That there might be some effective or finitary process is not ruled out by the Incompleteness Theorems. But what could such a process be like? How could one *prove* something about a putative system that was not precisely described, and certainly not *mathematically* formulated?

Church and the λ-calculus

One attempt at resolving this final issue was the system of functional equations called the "λ-calculus" of Alonzo Church. He had obtained his thesis in 1927 and, after visiting Amsterdam and Göttingen, was appointed an assistant professor in Princeton in 1931. The λ-calculus gave a strict, but rather forbidding, formalism for writing out terms defining a class of functions from base functions and a generalised recursion or induction scheme. Church had only established that the simple number successor function was "λ-definable" when his future PhD student Stephen Cole Kleene arrived in 1931; by 1934 Kleene had shown that all the usual number theoretic functions were also λ-definable. They used the term "effectively calculable" for the class of functions that could be computed in the informal sense of effective procedure or algorithm alluded to above.

Church ventured that the notion of λ-definability should be taken to coincide with "effectively calculable".

Church's Thesis (1934 – first version, unpublished)**.** *The effectively calculable functions coincide with the λ-definable functions.*

At first Kleene tried to refute this by a diagonalisation argument along the lines of Cantor's proof of the uncountability of the real numbers. He failed in this but instead produced a theorem: the *Recursion Theorem*. Gödel's view of the suggestion contained in the thesis when Church presented it to him was that it was "thoroughly unsatisfactory".

Gödel meanwhile had formulated an expanded notion of primitive recursive functions that he had used in his Incompleteness papers; these became known as the *Herbrand-Gödel general recursive functions*. He lectured on these in 1934 whilst visiting the IAS, Princeton.

Church and Kleene were in the audience and seem to have decided to switch horses. Kleene:

> "I myself, perhaps unduly influenced by rather chilly receptions from audiences around 1933–35 to disquisitions on λ-definability, chose, after [Herbrand-Gödel] general recursiveness had appeared, to put my work in that format ..."

Preliminary solutions to the *Entscheidungsproblem*

By 1935 Church could show that there was no λ-formula "$A \operatorname{conv} B$" iff the λ-terms A and B were convertible to each other within the λ-calculus. Moreover, mostly by the work of Kleene, they could show the λ-definable functions were co-extensive with the general recursive functions. Putting this "non-λ-definable-conversion" property together with this last fact, there was therefore a problem which, when coded in number theory, could not be solved using general recursive functions. This was published by Church [2]. Another thesis was formulated:

Church's Thesis (1936 – second version)**.** *The effectively calculable functions coincide with the [H-G] general recursive functions.*

Gödel still indicated at the time that the issue was unresolved and that he was unsure that the general recursive functions captured all informally calculable functions.

"On Computable Numbers"

Newman and Turing were unaware of these developments in Princeton. The first subject of Turing's classic paper is ostensibly 'Computable Numbers' and is said to be only "with an application to the *Entscheidungsproblem*". He starts by restricting his domain of interest to the natural numbers, although he says it is almost as easy to deal with computable functions of computable real numbers (but he will deal with integers as being the 'least cumbrous'). He briefly initiates the discussion calling computable numbers those 'calculable by finite means.'

In the first section he compares a man computing a real number to a machine with a finite number of states or '*m*-configurations' $q_1, \ldots, q_R$. The machine is supplied with a 'tape' divided into cells capable of containing a single symbol from a finite alphabet. The machine is regarded as scanning, and being aware of, only the single symbol in the cell being viewed at any moment in time. The possible behaviour of the machine is determined only by the current state q_n and the current scanned symbol S_r which make up the current configuration of the machine. The machine may operate on the scanned square by erasing the scanned symbol or writing a

Figure 2: King's College Rowing Team 1935 (2nd from the left, rear row) after his election to a Fellowship.

symbol. It may move one square along the tape to the left or to the right. It may also change its *m*-configuration.

He says that some of the symbols written will represent the decimal expansion of the real number being computed, and others (subject to erasure) will be for scratch work. He thus envisages the machine continuously producing output, rather than halting at some stage. It is his contention that "these operations include all those which are used in the computation of a number". His intentions are often confused with statements such as 'Turing viewed any machine calculation as reducible to one on a Turing machine' or some thesis of this form. Or that he had 'distilled the essence of machine computability down to that of a Turing machine'. He explicitly warns us that no "real justification will be given for these definitions until Section 9".

In Section 2 he goes on to develop a theory of his machines giving and discussing some definitions. He also states:

> "If at each stage the motion of the machine is *completely* determined by the configuration, we shall call the machine an 'automatic' or *a*-machine."

> "For some purposes we may use machines whose motion is only partly determined. When such a machine reaches one of these ambiguous configurations, it cannot go on until some arbitrary choice has been made . . . "

Having thus in two sentences prefigured the notion of what we now call a *non-deterministic Turing machine* he says that he will stick in the current paper only to *a*-machines, and will drop the '*a*'. He remarks that such a non-deterministic machine 'could be used to deal with axiomatic systems'. (He is probably thinking here of the choices that need to be made when developing a proof line-by-line in a formal system.) The succeeding sections develop the theory of the machines. The theory of a *"universal machine"* is explicitly described, as is in particular the conception of program as input or stored data and the mathematical argument using Cantor's diagonalisation technique, to show the impossibility of determining by a machine, whether a machine program was 'circular' or not. (Thus, as he does not consider a complete computation as a halted one, he instead considers first the problem of whether one can determine a looping behaviour.)

Section 9 "The extent of the computable numbers" is in some ways the heart of the paper, in particular for later discussions of the so-called 'Turing' or 'Church-Turing' theses. It is possibly of a unique character for a paper in a purely mathematical journal of that date (although perhaps reminiscent of Cantor's discussions on the nature of infinite sets in *Mathematische Annalen*). He admits that any argument that any calculable number (by a human) is "computable" (i.e., in his machine sense) is bound to hang on intuition and so be mathematically somewhat unsatisfactory. He argues that the basis of the machine's construction earlier in the paper is grounded on an analysis of what a human computer does when calculating. This is done by appealing to the obvious finiteness conditions of human capabilities: the possibilities of surveying the writing paper and observing symbols together with their writing and erasing.

It is important to see that this analysis should be taken *prior to* the machine's description. (Indeed one can imagine the paper re-ordered with this section placed at the start.) He had asked:

> *"What are the possible* processes *which can be carried out in computing a real number."* [Author's emphasis]

It is as if the difference between the Princeton approach and Turing's is that the former appeared to be concentrating on discovering a definition whose extension covered in one blow the notion of effectively calculable, whereas Turing concentrated on process, the very act of calculating.

According to Gandy [5] Turing has in fact proved a *theorem* albeit one with unusual subject matter. What has been achieved is a complete analysis of human computation in terms of finiteness of the human acts of calculation broken down into discrete, simple and locally determined steps. Hence:

Turing's Thesis. *Anything that is humanly calculable is computable by a Turing machine.*

(i) Turing provides a philosophical paradigm when defining "effectively calculable", in that a vague intuitive notion has been given a unique meaning which can be stated with complete precision.

(ii) He also makes possible a completely precise understanding of what is a 'formal system' thereby making an exact statement of Gödel's results possible (see the quotation below). He claims to have a machine that will enumerate the theorems of predicate calculus. This also makes possible a correct formulation of Hilbert's 10th problem. It is important to note that Turing thus makes expressions along the lines of "such and such a proposition is undecidable" have mathematical content.

(iii) In the final four pages he gives his solution to the *Entscheidungsproblem*. He proves that there is no machine that will decide of any formula φ of the predicate calculus whether it is derivable or not.

He was 23. His mentor and teacher Max Newman was astonished and at first reacted with disbelief. He had achieved what the combined mental resources of Hilbert's Göttingen school and Princeton had not, and in the most straightforward, direct, even simple manner. He had attended Newman's Part III course on the Foundations of Mathematics in Spring 1935 and within 14 months had solved the last general open problem associated with Hilbert's programme.

However, this triumph was then tempered by the arrival of Church's preprint of [1] which came just after Turing's proof was read by Newman. The latter however convinced the London Mathematical Society that the two approaches were sufficiently different to warrant publication; this was done in November 1936, with an appendix demonstrating that the machine approach was co-extensional with the λ-definable functions, and with Church as referee.

Gödel again:[2]

[2]There are several approving quotes from Gödel; this is taken from an unpublished (and ungiven) lecture in the *Nachlass* Gödel, Collected Works, Vol. III, p. 166–168.

> "When I first published my paper about undecidable propositions the result could not be pronounced in this generality, because for the notions of mechanical procedure and of formal system no mathematically satisfactory definition had been given at that time ... The essential point is to define what a procedure is."

> "That this really is the correct definition of mechanical computability was established beyond any doubt by Turing."

Turing's "Ordinal logics"

In 1937 Turing went to Princeton but was somewhat dismayed to find only Church and Kleene there. He first asked von Neumann for a problem, and von Neumann passed on one from Ulam concerning the possibility of approximating continuous groups with finite ones which Turing soon answered negatively.

With this and some other work he published two papers on group theory (described in a letter to Philip Hall as 'small papers, just bits and pieces'; nevertheless they appeared in Compositio and Annals of Mathematics).

He stayed on in Princeton on a Procter Fellowship (of these there were three, one each for candidates from Cambridge, Oxford and the Collège de France). He decided to work towards a PhD under Church. He still had a King's Fellowship and thus a PhD would not have been of great use to him in the Cambridge of that day. He completed his thesis in two years (even whilst grumbling about Church's "suggestions which resulted in the thesis being expanded to appalling length" – it is 106 pages). The topic (probably suggested by Church) concerned trying to partially circumvent incompleteness of formal theories T by adding as axioms statements to the effect that the theory was consistent.

To illustrate the thesis problem with an example (where we may think of T_0 as PA again) set:

$$T_1 : T_0 + \mathrm{Con}(T_0)$$

where "$\mathrm{Con}(T_0)$" is some expression arising from the Incompleteness Theorems expressing that "T_0 is a consistent system"; as $\mathrm{Con}(T_0)$ is not provable from T_0, this is a deductively stronger theory; continuing:

$$T_{k+1} : T_k + \mathrm{Con}(T_k) \text{ for } k < \omega, \quad \text{and then:} \quad T_\omega = \bigcup_{k<\omega} T_k.$$

Presumably we may still continue:

$$T_{\omega+1} = T_\omega + \mathrm{Con}(T_\omega) \text{ etc.}$$

We thus obtain a transfinite hierarchy of theories. As would occur to many people who have spent even a moderate amount of time pondering the Second Incompleteness Theorem, one could ask of this sequence of theories of increasing deductive strength, what can one in general prove from a theory in this sequence? (Indeed this is just one question one can see about the incompleteness results that bubble up from time to time on MathOverflow.)

Turing called these theories "Logics" and used the letter "L" but I shall use the modern convention. He was thus investigating the question as to what extent such a sequence could be 'complete':

Question: Can it be that for any problem A there might be an ordinal α so that T_α proves A or $\neg A$?

Actually he was aiming at a more restricted question, namely what he called *number theoretic problems* which are those that can be expressed in an '$\forall\exists$' form (the twin primes conjecture comes to mind). He does not clarify why he alights on this particular form of the question.

There are several items that must be discussed first, in order to give this sketch of a progression of theories even some modicum of precision. To formally write down in the language of PA a sentence that says "Con(PA)" one really needs a formula $\varphi_0(v_0)$ that defines for us the set of Gödel code numbers n of instances of the axiom set $T_0 = \mathrm{PA}$. There are infinitely many such formulae but we choose one which is both simple (it is Σ_1, meaning definable using a single existential quantifier) and *canonical* in that it simply defines the axiom numbers in a straightforward manner. Assuming we have a φ_0, we then may set $\varphi_{k+1}(\bar{n}) \longleftrightarrow \varphi_k(\bar{n}) \vee \mathrm{Con}(\varphi_k)$ where $\mathrm{Con}(\varphi_k)$ expresses in a Gödelian fashion the consistency of the axiom set defined by φ_k.

But what to do at stage ω? How you choose a formula for a limit stage depends on how you approach that stage, but the problem even occurs for stage ω: how do you define a formula that uniformly depends on the previous stages so that you can express the "union" set of axioms correctly?

Notation and progressions

Turing solved this and devised a method for assigning sets of sentences, so theories, to all constructive (also called *recursive* or *computable*) ordinals by the means of *notations*. In essence a notation for an ordinal is merely some name for it but a system of notations (which Turing used) was invented by Kleene using the λ-calculus. Nowadays we also use the idea of being able to name the ordinal α by the natural number index e of a computable function $\{e\}$ which computed the characteristic function of a well-order of $\mathbb{N}$ of order type α.

This essentially yields a tree order with infinite branching at all and only constructive ordinal limit points.

The set of notations $O \subset \mathbb{N}$ thus forms a tree order, with $n <_O m \leftrightarrow |n| < |m|$, where $|\cdot|$ is the ordinal rank function (defined by transfinite recursion along $<_O$) satisfying:

$$|0| = 0; \quad |2^a| = |a| + 1; \quad |3^e| = \lim_{n\to\infty} |\{e\}(n)|.$$

However O is a *co-analytic* set of integers and is thus highly complex. Let $\mathrm{suc}(a) =_{\mathrm{df}} 2^a$ and let $\lim(e) =_{\mathrm{df}} 3^e$.

Definition 1. *A* progression based on a theory T *is a primitive recursive mapping* $n \longrightarrow \varphi_n$ *where* φ_n *is an* $\exists$ *formula such that* PA *proves:*

$$\begin{aligned}
&(i) && T_0 = T;\\
&(ii) && \forall n\big(T_{\mathrm{suc}(n)} = T_n + \mathrm{Con}(\varphi_n)\big);\\
&(iii) && T_{\lim(n)} = \bigcup_m T_{\{n\}(m)}.
\end{aligned}$$

Thus one attaches *in a uniform manner* formulae φ_a to define theories T_a to *every* $a \in \mathbb{N}$ of the form $\mathrm{suc}(a), \lim(a)$. This does not tell us how to build progressions, which however can be justified by the Recursion Theorem.

An *explicit consistency sequence* is then defined to be the restriction of a progression to a path through O.

With these tools Turing proved a form of an enhanced Completeness Theorem.

Theorem 3 (Turing's Completeness Theorem)**.** *For any true* $\forall$ *sentence of arithmetic,* ψ*, there is a* $b = b(\psi) \in O$ *with* $|b| = \omega + 1$*, so that* $T_b \vdash \psi$*. The map* $\psi \rightarrowtail b(\psi)$ *is given by a primitive recursive function.*

Thus we may for any true ψ find a path through O of length $\omega + 1$,

$$T = T_0, T_1, \ldots, T_{\omega+1} = T_b$$

with the last proving ψ. At first glance this looks like magic: how does this work, and can we use it to discover more $\forall$-facts about the natural number system?

However, there is a trick here. As Turing readily admits, what one does is construct for *any* $\forall$ sentence ψ an extension $T_{b(\psi)}$ proving ψ with $|b(\psi)| = \omega + 1$. Then *if* ψ *is true* we deduce that $T_{b(\psi)}$ is a consistent extension in a proper consistency sequence (notice that conditional in the antecedent of the theorem's statement). However *if* ψ *is false* $T_{b(\psi)}$ turns out to be merely inconsistent, and so proves anything. In general it is harder to answer $?b \in O?$ than the original $\forall$ question and so we have gained no new arithmetical knowledge. The outcome of the investigation is thus somewhat equivocal: we *can* say that some progressions of theories will produce truths of arithmetic but we cannot determine which ones they will turn out to be.

He regarded the results as somewhat disappointing. He had only succeeded in proving a theorem for '$\forall$' problems and not for his chosen 'number theoretic problems'. He had, moreover, proven another theorem that stated that there would be $b, c \in O$, with, for example, $|b| = |c| = \omega + 1$, such that T_b and T_c would prove different families of sentences. Thus *invariance* would fail even for theories of the same "depth".

It does contain a remarkable aside however. Almost as a throw-away comment he introduces what has come to be called a *relativised Turing Machine* or (as he called it) an *oracle machine*. This machine is allowed an instruction state that permits it to query an 'oracle' (considered perhaps as an infinite bit-stream of information about the members of $B \subseteq \mathbb{N}$ written out on a separate tape) whether $?n \in B$? An answer is received and computation continues. With this one can develop the idea of 'relative computability' – whether membership of m in set A can be determined from knowledge of finitely many membership questions about set B. This notion is central to modern computability theory. However, Turing introduces the concept, (dubbing it an 'oracle' or o-machine) and uses it somewhat unnecessarily to prove the point that there are arithmetic problems that are not in his sense number theoretic problems. And then ignores it for the rest of the paper; it is unused in the sequel.

The paper, duly published in 1939, lay somewhat dormant until taken up by Spector and Feferman some 20 years later. Feferman did a far reaching analysis of the notion of general progressions, using not just formalised consistency statements as Turing had done but also other forms that, roughly speaking, ensured the preservation of truth. Note that a *general* consistency sequence step will not necessarily preserve truth of even say existential statements. However, a properly formulated 'existential soundness' statement – that existential sentences provable from the theory are true – when iterated or progressed in the above manner, can result in a '$\forall\exists$'-completeness statement of the Turing kind. Indeed, it can be shown that there are paths through O along which *all* true sentences of arithmetic are provable. However, finding a path through O is no simpler than determining whether a single b is in O, so again there is this equivocal feeling to the results. It is compounded by the fact that there are also paths through O, as Spector and Feferman found, which do *not* establish all truths of arithmetic.

The photograph shows Turing on his election as Fellow of the Royal Society in London in 1951 with a citation for "On Computable Numbers"; he was not the youngest at an age of 38 (Hodges notes that Hardy had been elected at 33 and Ramanujan at 30). Three further small articles appeared on the lambda-calculus, but otherwise Turing published nothing further on mathematical logic.

This article does not aim to discuss his contributions to the wartime decoding effort, the development of actual computers or to morphogenesis but in all these areas he displayed an open mind to ideas no matter whence they came and a startlingly fresh, lucid, when not even slyly mischievious, writing style that is ex-

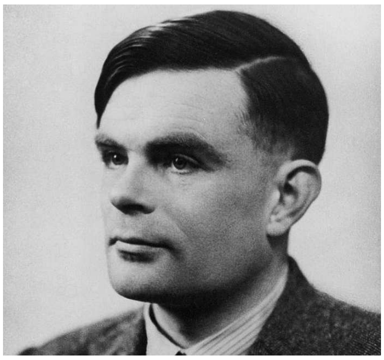


Figure 3: Royal Society Election portrait 1951.

emplified by his *Mind* paper [11]. He had an ability to get to the heart of a problem and express it in simple, clear terms. Robin Gandy told an anecdote of Turing entering the room where two engineers were laboriously testing the permeability of the cores in certain transformers of radio receivers. Robin marvelled to see Turing take a clean piece of paper, write at the top Maxwell's equations and then proceed to derive what they wanted *ab ovo*.

I'll conclude on a more visionary note with a quotation from an interview he gave following a discussion of a famous British neuroscientist's well publicised lecture on the impossibility of the brain being a mere machine. It shows that he was indeed visionary in what computers would be capable of.

Whilst reports to the US Government or military at about this time supposedly emphasised the rarefied nature of the new or even nascent machines, that they would only be used in university (or presumably government) laboratories or that "five or six machines would suffice for the whole country", Turing's view could not have been more different: he suggested that computers would permeate all walks of life and that in 100 years a machine would pass what has come to be called the "Turing Test."

> *"This is only a foretaste of what is to come, and only the shadow of what is going to be. We have to have some experience with the machine before we really know its capabilities. It may take years before we settle down to the new possibilities, but I do not see why it should not enter any of the fields normally covered by the human intellect and eventually compete on equal terms."*
>
> (Press Interview with *The Times*, June 1949)

Acknowledgements. This article emerged from an invited lecture given at the 6ECM. For the biographical details then and here, I am completely indebted to Andrew Hodges' sensitive and thoughtful biography. I am also grateful for exchanges with Martin Davis, Bob Soare, George Dyson and of course for many

conversations with my former supervisor Robin Gandy (1919–1995), who was Turing's only PhD student and to whom the lecture was dedicated.

To the interested reader the following are also recommended; they were consulted once more during my preparation of this lecture: Davis' anthology [3] of the early fundamental papers in the subject, Gandy's paper [5], Soare's article on the early history of computation theory [8] and, for a very readable account of progressions in theories, [4].

References

[1] A. Church. A note on the *Entscheidungsproblem*. *Journal of Symbolic Logic*, 1:40–41, Correction 101–102, 1936.

[2] A. Church. An unsolvable problem of elementary number theory. *American Journal of Mathematics*, 58:345–363, 1936.

[3] M. Davis. *The Undecidable*. Raven Press, 1965.

[4] T. Franzen. *Inexhaustibility: A non-exhaustive treatment*, volume 16 of *Lecture Notes in Logic*. ASL/A.K.Peters, 2004.

[5] R.O. Gandy. The confluence of ideas in 1936. In Herken, editor, *The Universal Turing machine: a half century survey*, pages 55–111. Oxford University Press, Oxford, 1988.

[6] G.H. Hardy. Mathematical Proof. *Mind*, 38:1–25, 1929.

[7] A. Hodges. *Alan Turing, the Enigma*. Simon and Schuster, New York, 1983.

[8] R.I. Soare. Turing oracle machines, online computing, and three displacements in computability theory. *Annals of Pure and Applied Logic*, 160:368–399, 2009.

[9] A.M. Turing. On Computable Numbers with an application to the *Entscheidungsproblem*. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42(2), 1936.

[10] A.M. Turing. Systems of Logic based on Ordinals. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 45:161–228, 1939.

[11] A.M. Turing. Computing machinery and intelligence. *Mind*, 59(236):433–460, 1950.

[12] J. von Neumann. Zur Hilbertschen Beweistheorie. *Mathematische Zeitschrift*, 26:1–46, 1927.

Philip Welch [email *p.welch@bristol.ac.uk*] is Professor of mathematical logic at the University of Bristol. From 1997 to 2000 he was Professor of mathematical logic at the graduate school, Kobe University, setting up a new research group in set theory. He has held a Mercator Professorship at Bonn University and is a regular visitor at the Kurt Gödel Research Center in Vienna.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 222 (2013), 21–32

Die Leiter – ein beziehungsreiches elementarmathematisches Problem

Berthold Schuppar
TU Dortmund

1. Exposition

Das Problem. Eine Leiter von 5 m Länge wird an eine senkrechte Wand gelehnt. Vor der Wand steht eine Kiste, die 1 m breit und 1 m hoch ist. Wie weit ist die Leiter von der Wand entfernt und wie hoch reicht sie, wenn sie die Kiste berührt? Gesucht sind also die in Abb. 1 bezeichneten Größen $\overline{OA} = x$ und $\overline{OB} = y$.

Zeichnet man die Figur in ausreichender Größe (im Maßstab 1:20, also 1 m$\widehat{=}$5 cm, passt sie gut auf ein DIN A4-Blatt), dann kann man grobe Näherungen für x und y ablesen, je nach Zustand des Bleistifts auf 1–2 Nachkommastellen genau.

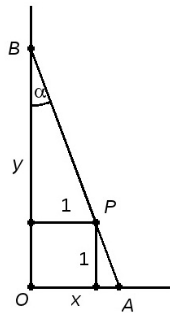
Auch mit „Dynamischer Geometrie-Software" lässt sich eine Näherung ermitteln: Man zeichnet „Boden" und „Wand", dann die quadratische Kiste mit Ecke P, wähle einen Punkt A auf dem Boden und lege eine Gerade durch A und P; deren Schnittpunkt mit der Wand sei B. Dann misst man $\overline{AB}$ und verschiebt A so lange, bis $\overline{AB}$ möglichst genau die Länge 5 hat. Jedoch: Weil sich A nur sprunghaft bewegt (wegen der Pixel-Struktur des Bildschirms), kann man die Länge von x nicht wesentlich genauer bestimmen als mit Handzeichnung.

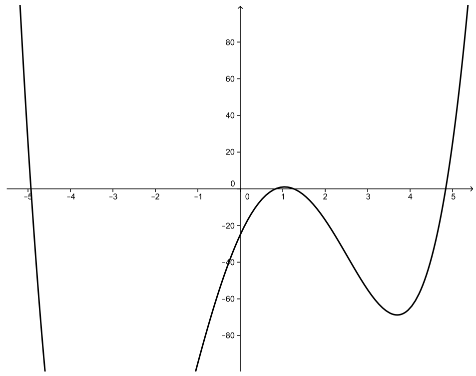
Es ist klar, dass es zwei Lösungen gibt; wenn man die Leiter flach legt, ergibt sich die zweite, allerdings ist sie symmetrisch zur ersten Lösung (Spiegelung an der 1. Mediane, d.h. Vertauschung von x und y), also nicht wesentlich anders.

Erste Untersuchungen. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$x^2 + y^2 = \overline{AB}^2 = 5^2 \iff y = \sqrt{25 - x^2}.$$

ISSN 0020-7926 — Österr. Math. Gesellschaft





Abbildungen 1 (links) und 2 (Graph von $P(x)$, rechts).

Außerdem folgt aus dem Strahlensatz

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x-1} \iff y = \frac{x}{x-1}.$$

Daraus ergibt sich eine Gleichung für x, zukünftig die *Gleichung der Leiter* genannt:

$$\sqrt{25-x^2} = \frac{x}{x-1}.$$

Wem es nur um numerische Werte geht, der sollte die Gleichung in einen Taschenrechner mit Solve-Funktion eintippen, und er bekommt in Sekundenschnelle die Lösungen auf 10 Dezimalstellen genau, aber das ist unbefriedigend: Qualitativ ist das nicht viel anders als die obige „Lösung“ durch Zeichnen und Messen. Schließlich ist das Problem trotz der hübschen Verpackung ein rein mathematisches, ohne Bedeutung in der Realität, und wir sollten eher seine algebraischen und geometrischen Hintergründe ausleuchten.

Durch einige naheliegende Umformungen erhält man eine Polynomgleichung 4. Grades, nämlich:

$$(x-1)^2(25-x^2) = x^2 \iff P(x) := x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 50x - 25 = 0.$$

Der Graph des Polynoms (Abb. 2) zeigt, dass es vier Nullstellen hat, aber keine ganzzahligen (offenbar sind 1 und 5 keine Lösungen der Leiter-Gleichung), d.h. es ist nicht möglich, Linearfaktoren abzuspalten. Auch ein Versuch, das Polynom mithilfe von *Maple* in zwei quadratische Faktoren aufzuspalten, scheitert. Fazit: Eine schnelle algebraische Lösung ist nicht in Sicht.

Plottet man die linke und die rechte Seite der Leiter-Gleichung separat (Abb. 3), dann kann man an den Schnittpunkten der beiden Kurven die Lösungen ablesen, nämlich als die x-Koordinaten der Schnittpunkte.

Die linke Seite stellt einen Kreis mit Radius 5 dar, wenn man den maximalen Definitionsbereich $-5 \leq x \leq 5$ und beide Vorzeichen der Wurzel betrachtet. Die rechte Seite ist eine Hyperbel mit Asymptoten $x = 1$ und $y = 1$, die um 1 nach

Abb. 3

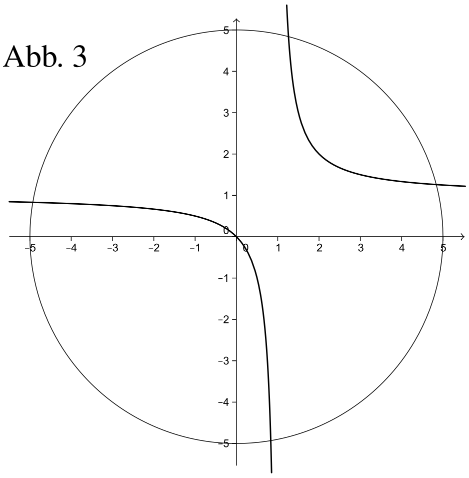
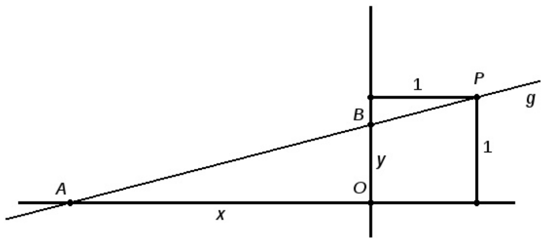


Abb. 4



rechts und nach oben verschobene Normal-Hyperbel $y = 1/x$; das ist anhand des Funktionsterms $y = x/(x-1)$ leicht zu bestätigen.

Es gibt 4 Schnittpunkte dieser Kurven, die den 4 Lösungen der obigen Polynomgleichung genau entsprechen. Auch die Symmetrie der Lösungen ist wieder sehr gut zu erkennen: Beide Kurven sind spiegelsymmetrisch zur 1. Mediane.

Im „realen" Kontext sind zwar nur die Lösungen größer als 1 wichtig. Vielleicht haben die beiden anderen aber auch eine geometrische Bedeutung? Tatsächlich kann man das Problem so verallgemeinern (s. Abb. 4): Man lege eine Gerade g durch den Punkt $P(1,1)$. Wann schneiden die Koordinatenachsen aus dieser Geraden eine Strecke der Länge 5 aus? Gesucht sind die zugehörigen Achsenabschnitte x und y. Dreht man g um P, dann wird klar, dass es zwei weitere Lösungen geben muss, und zwar eine im 2. Quadranten und (symmetrisch) eine im 4. Quadranten. Wir werden diese Lösungen als „virtuelle Leitern" bezeichnen, im Gegensatz zu den „realen Leitern" im 1. Quadranten.

Diskussion verschiedener Lösungsansätze. Der algebraische Ansatz hat sich als schwierig erwiesen; Gleichungen 4. Grades sind zwar auflösbar, aber allgemeine Verfahren zu ihrer Auflösung sind kompliziert und gehören nicht zum Repertoire der Schulmathematik. Gleichwohl ist es zuweilen durch Ausnutzen spezieller Eigenschaften der Gleichung möglich, mit vertretbarem Aufwand die Lösungen zu ermitteln.

Die geometrische Lösung, also die Konstruktion der Figur, ist ganz einfach, wenn man ein Lineal mit Skala benutzt, oder auch ein „Einschiebelineal", auf dem zwei Marken in einem gegebenen Abstand (hier die Leiterlänge 5) angebracht sind. Ein anderes Problem ist die Konstruktion mit Zirkel und Lineal (nach den Regeln der Kunst hat dieses Lineal keine Skala und keine Marken): Ist es überhaupt möglich, eine Strecke der gesuchten Länge x derart zu konstruieren? Das könnte möglich sein – aber wie? Dieses Problem ist zunächst einmal eigenständig, könnte aber auch einer algebraischen Lösung auf die Beine helfen, denn Strecken, die man konstruieren kann, lassen sich auch mithilfe von (evtl. mehrfach verschachtelten) Quadratwurzeln berechnen.

Zunächst werden wir jedoch einen funktionalen Ansatz diskutieren, motiviert durch das Geometriesoftware-Experiment oder auch durch das Gedanken-Experiment mit der drehbaren Geraden: Wir lehnen eine Leiter an die Wand, sodass sie die Kiste berührt, halten aber ihre Länge variabel, abhängig von einem gewissen Parameter (z.B. der x-Koordinaten ihres Fußpunktes oder dem Drehwinkel). Dann kann man fragen: Für welchen Wert des Parameters hat die Leiter eine Länge von genau 5 Einheiten? Es geht also im Prinzip darum, die Umkehrfunktion einer gewissen Funktion zu bestimmen. Es stellt sich heraus, dass das in diesem Fall auch nicht ohne Weiteres möglich ist, aber mit einigen „Tricks“ eben doch – allerdings nicht mit Zaubereien, sondern mit Methoden, die in einen gut sortierten Werkzeugkasten zur Bearbeitung von Funktionen gehören.

2. Funktionale Aspekte

Die Leiterlänge als Funktion. Es sei $x = \overline{OA}$ der Abstand des Leiter-Fußpunkts von der Wand. Wegen $y = \overline{OB} = \frac{x}{x-1}$ (Strahlensatz) erhält man die Länge der Leiter als Funktion von x wie folgt:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2}.$$

Gesucht ist ein x mit $f(x) = 5$ (s. Abb. 5). Es gibt 4 Lösungen, wenn man die virtuellen Leitern mit $x < 1$ hinzunimmt. Die Funktion hat ein lokales Minimum bei $x = 2$ mit $f(2) = 2\sqrt{2}$. Geometrisch ist das klar, denn die Leiter hat ihre minimale Länge in der „symmetrischen“ Lage, senkrecht zur Diagonalen des Kastens, mit $x = y$.

Ebenso ist die Polstelle bei $x = 1$ geometrisch klar: Die senkrecht stehende Leiter schneidet die y-Achse nicht. Auch das asymptotische Verhalten ist sowohl geometrisch als auch mit dem Funktionsterm leicht zu bestätigen: $f(x) \approx |x|$ für $x \to \pm\infty$. Weitere Eigenschaften der Funktion, die eventuell beim Auflösen der Gleichung $f(x) = 5$ helfen könnten, sind aber nicht zu erkennen.

Eine andere Parametrisierung. α sei der Anstellwinkel der Leiter, d.h. der Winkel der Leiter-Geraden zur y-Achse (vgl. Abb. 1: $\alpha = \sphericalangle OBA$.) Dann gilt:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Eine einfach aussehende Darstellung, aber zum Auflösen der Gleichung $f(\alpha) = 5$ ist sie nicht so recht geeignet (wer das nicht glaubt, soll es selbst versuchen).

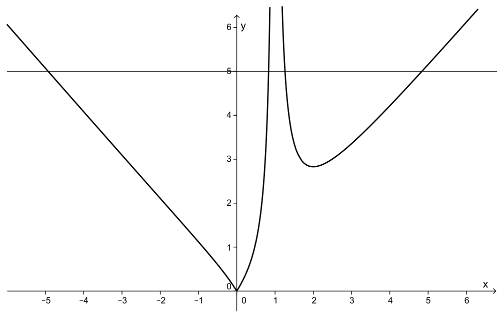


Abbildung 5: Graph von $y = f(x)$.

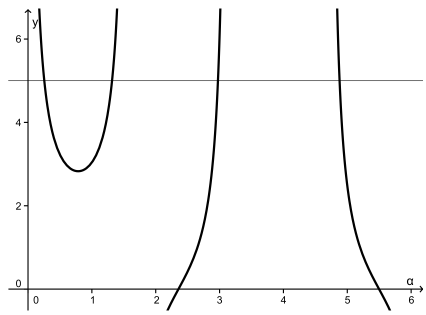


Abbildung 6: Graph von $y = f(\alpha)$.

An dem Plot im Intervall $[0; 2\pi]$ (Abb. 6) ist eine gewisse Symmetrie deutlich zu erkennen, wie eigentlich auch schon am Term. Ist α eine Lösung von $f(\alpha) = 5$, dann auch $\frac{\pi}{2} - \alpha$ („Flachlegen" der Leiter). Die Funktion ist spiegelsymmetrisch zur vertikalen Geraden $x = \pi/4$. Analog ist sie symmetrisch zur Geraden $x = 5\pi/4$ bei der anderen, im Kontext eigentlich irrelevanten Lösung.

Aufgrund dieser Beobachtung können wir versuchen, die Funktion zu *symmetrisieren*, nämlich durch Verschieben um $\pi/4$ nach links. Dadurch wird sie gerade (spiegelsymmetrisch zur y-Achse). Damit α die Bedeutung als Anstellwinkel der Leiter nicht verliert, bezeichnen wir die neue Variable mit β, d.h. wir ersetzen α durch $\beta + \pi/4$ und erhalten:

$$g(\beta) = f(\beta + \pi/4) = \frac{1}{\sin(\beta + \pi/4)} + \frac{1}{\cos(\beta + \pi/4)}.$$

Nach den Additionstheoremen und wegen $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = 1/\sqrt{2}$ ist

$$\begin{aligned} g(\beta) &= \frac{\sqrt{2}}{\sin\beta + \cos\beta} + \frac{\sqrt{2}}{\cos\beta - \sin\beta} \\ &= \sqrt{2}\frac{\cos\beta - \sin\beta + \cos\beta + \sin\beta}{\cos^2\beta - \sin^2\beta} = \sqrt{2}\frac{2\cos\beta}{\cos(2\beta)}. \end{aligned}$$

Die Darstellung hat eine verblüffende Einfachheit, aber für die geplante Lösung der Gleichung $g(\beta) = 5$ ist eine andere Umformung vielleicht interessanter:

$$g(\beta) = \sqrt{2}\frac{2\cos\beta}{2\cos^2\beta - 1}.$$

Setzt man zur Abkürzung $\cos\beta =: c$, so ergibt sich nämlich eine quadratische Gleichung für c:

$$\sqrt{2}\frac{2c}{2c^2 - 1} = 5 \implies c^2 - \frac{\sqrt{2}}{5}c - \frac{1}{2} = 0 \implies c = \frac{1 \pm \sqrt{26}}{5\sqrt{2}}.$$

Zahlenwerte:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.862531\ldots = \cos\beta_1 && \Longrightarrow \beta_1 = 0.5305\ldots \approx 30.4^\circ, \\ c_2 &= -0.579688\ldots = \cos\beta_2 && \Longrightarrow \beta_2 = 2.189\ldots \approx 125.4^\circ. \end{aligned}$$

Um die obige Verschiebung wieder rückgängig zu machen, müssen wir dazu jeweils $\pi/4$ bzw. 45° addieren und erhalten die vier Lösungen für α, den Winkel der Leiter-Geraden zur y-Achse. Die Tabelle fasst sie zusammen und gibt auch die entsprechenden Lösungen der ursprünglichen Gleichung $f(x) = \sqrt{x^2 + (x/(x-1))^2} = 5$ an:

β	$\alpha = \beta + \pi/4$			x
0.530544	1.31594	$\approx$	75.4°	4.83850
-0.530544	0.254854	$\approx$	14.6°	1.26052
2.18914	2.97454	$\approx$	170.4°	0.83138
-2.18914	-1.40374	$\approx$	-80.4°	-4.93039.

Die x-Werte werden aus den Winkeln berechnet durch $x = 5\sin\alpha$. Im Nachhinein ist es nicht verwunderlich, dass die Symmetrisierung der Funktion hier zu einer Lösung führt. Denn ein Term, der Sinus und Cosinus enthält, wird algebraisch komplizierter, wenn man eine der Funktionen durch die andere ersetzen will (z.B. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, dadurch handelt man sich die Wurzeln ein. Dagegen wird, wenn man daraus eine gerade Funktion macht, der ungerade Anteil (hier der Sinus) herausoperiert.

Man hätte auch gleich eine symmetrische Funktion erhalten können, wenn man nicht den Anstellwinkel der Leiter als Parameter gewählt hätte, sondern z.B. den Winkel, den die Leiter mit der 1. Mediane (d.h. mit der Diagonalen des Kastens) einschließt. Die Ergebnisse sind völlig analog.

Schlussbemerkung: Man mag einwenden, dass wir damit auch nicht mehr erreicht haben als eine numerische Lösung. Jedoch haben wir $\cos\beta$ als Wurzelterm (Lösung einer quadratischen Gleichung) erhalten, das könnte ein Hinweis auf rein algebraische Lösungsmöglichkeiten sein.

3. Geometrie und Algebra

Eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Die Diagonale der Kiste hat die Länge $\sqrt{2}$ und ist zudem die Winkelhalbierende des rechten Winkels bei O. Also kann man die Konstruktionsaufgabe wie folgt formulieren:

> *Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck OAB aus der Hypotenuse* $c = \overline{AB} = 5$ *und der Winkelhalbierenden des rechten Winkels,* $w = \overline{OD} = \sqrt{2}$ *(siehe Abb. 7).*

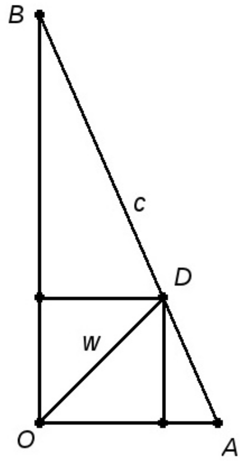


Abb. 7

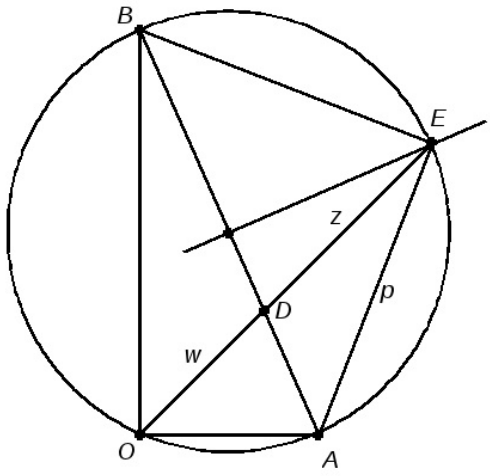


Abb. 8

Das ist ein Fall für Herterich:[1] Dieses umfassende Nachschlagewerk für Dreieckskonstruktionen gibt eine Lösung für das allgemeine Problem an, ein Dreieck aus einem *beliebigen* Winkel γ, der Winkelhalbierenden w_γ und der Gegenseite c zu konstruieren; im Folgenden wird diese Lösung für den Fall $\gamma = 90^\circ$ adaptiert.

Idee (s. Planfigur, Abb. 8): Der Thaleskreis über AB ist der Umkreis des Dreiecks OAB. Die Mittelsenkrechte von AB und die Winkelhalbierende des Gegenwinkels schneiden einander auf dem Umkreis; mit anderen Worten: Ist E der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit dem Umkreis, dann ist OE die Winkelhalbierende von $\sphericalangle AOB$.

Nun ist das Dreieck ABE gleichschenklig-rechtwinklig, also ist der Basiswinkel $\sphericalangle EAB = 45^\circ$. w ist die Winkelhalbierende des rechten Winkels $\sphericalangle AOB$, daher ist auch $\sphericalangle AOE = 45^\circ$. Die Dreiecke OAE und ADE haben somit außer dem gemeinsamen Winkel $\sphericalangle AED$ noch ein Paar gleich großer Winkel, also sind sie ähnlich zueinander. Daraus folgt mit $z = \overline{ED}$, $p = \overline{AE}$:

$$\frac{w+z}{p} = \frac{p}{z} \iff (w+z)z = p^2.$$

Für die gegebenen Größen $w = \sqrt{2}$, $p = 5/\sqrt{2}$ kann diese „quadratische Gleichung“ z. B. mithilfe des Sekanten-Tangenten-Satzes geometrisch gelöst werden (auch der Höhensatz käme dafür infrage). Konstruktion (s. Abb. 9):

1. Zeichne eine Strecke AB der Länge 5 und den Thaleskreis über AB. Die Mittelsenkrechte über AB schneide den Thaleskreis im Punkt E. Dann ist $\overline{AE} = p = 5/\sqrt{2}$.

[1] Herterich, Kurt: Dreieckskonstruktionen. Klett, Stuttgart 1966.

Abb. 9

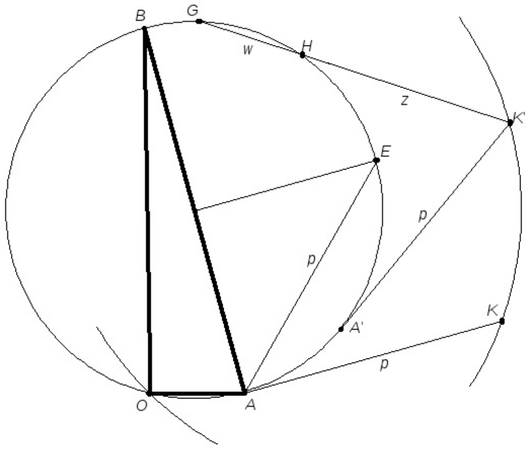
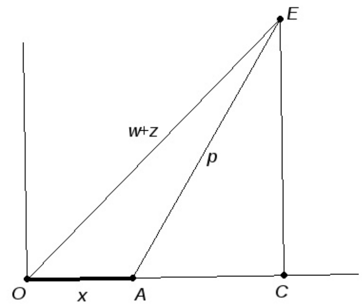


Abb. 10



2. Hilfskonstruktion: Zeichne in dem Kreis eine beliebige Sehne GH der Länge $w = \sqrt{2}$. Konstruiere in A (oder in einem beliebigen anderen Punkt des Kreises) die Tangente und markiere einen Tangentenabschnitt AK der Länge p. Der zum Thaleskreis konzentrische Kreis durch K schneide die Gerade GH in K'. Dann gilt wie gewünscht $\overline{GK'} \cdot \overline{HK'} = (w+z)z = p^2$, denn der Tangentenabschnitt $A'K'$ der Tangente von K' an den Thaleskreis hat ebenfalls die Länge p. (Diese Tangente braucht nicht mehr konstruiert zu werden, sie ist hier nur zur Illustration des Sekanten-Tangenten-Satzes hinzugefügt.)

3. Schlage einen Kreis um E mit dem Radius $\overline{GK'} = w + z$; dieser schneidet den Thaleskreis im gesuchten Punkt O. Fertig!

Berechnung aufgrund der Konstruktion. Setzt man die bekannten Größen w, p in die Gleichung $(w+z)z = p^2$ ein, dann können die Sekantenabschnitte z, $w+z$ auch algebraisch berechnet werden:

$$(\sqrt{2}+z)z = \frac{25}{2} \iff z^2 + \sqrt{2}z - \frac{25}{2} = 0 \iff z = \frac{\sqrt{26}-1}{\sqrt{2}}$$

(Die andere Lösung ist negativ, kommt also nicht in Frage.)

$$w+z = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{26}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{26}+1}{\sqrt{2}}.$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Kathete $x = \overline{OA}$ wie folgt (die Zeichnung in Abb. 10 greift die zur Berechnung von x wesentlichen Stücke aus der obigen Konstruktion heraus):

OE ist die Winkelhalbierende des rechten Winkels, also gilt:

$$\overline{EC} = \frac{w+z}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{26}+1}{2}, \quad \overline{AC} = \sqrt{p^2 - \overline{EC}^2} = \ldots = \frac{1}{2}\sqrt{23-2\sqrt{26}}$$
$$x = \overline{OC} - \overline{AC} = \frac{\sqrt{26}+1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{23-2\sqrt{26}}.$$

Die Überprüfung mit dem Taschenrechner ergibt $x \approx 1.2605$, in Übereinstimmung mit dem Wert aus Abschnitt 2.

Die zweite Kathete $y = \overline{OB}$ kann jetzt wie folgt berechnet werden:

$$y = \overline{OC} + \overline{AC} = \frac{\sqrt{26}+1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{23-2\sqrt{26}} \approx 4.8385\,.$$

Man kann dies anhand von Abb. 8 begründen, wenn man von E aus das Lot auf OB fällt: Bezeichnet man den Fußpunkt mit F, dann ist, wie man leicht sieht, $\overline{OF} = \overline{OC}$ und $\overline{FB} = \overline{AC}$.

Wenn man in diesen Termen bei $\sqrt{26}$ die Vorzeichen umkehrt, dann erhält man die entsprechenden Ausdrücke für die beiden anderen Lösungen der Leiter-Gleichung (virtuelle Leitern).

Man könnte jetzt noch eine algebraische Gleichung für x und y aufstellen, um festzustellen, dass sie mit der Leiter-Gleichung (bzw. einer äquivalenten Polynomgleichung) übereinstimmt, was bei den recht komplexen Termen auch nicht ganz einfach ist – das wäre aber nicht mehr als eine algebraische Fingerübung, die numerische Überprüfung reicht wohl aus, um uns von der Richtigkeit zu überzeugen.

4. Algebra und Geometrie

Eine rein algebraische Lösung. Zur Erinnerung: Für $x = OA$, $y = \overline{OB}$, $\overline{AB} = 5$ gilt nach Strahlensatz und Pythagoras

$$\frac{y}{1} = \frac{x}{x-1} \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 = 25. \tag{2}$$

Aus (1) folgt sofort die schöne Beziehung:

$$xy = x + y. \tag{3}$$

(Das gilt für die Achsenabschnitte aller Geraden, die durch den Punkt $(1,1)$ gehen.) Wer algebraisch ein wenig geübt ist, sieht darin sofort einen Ansatz zur Vereinfachung, zu einer möglichen Reduktion auf „kleinere“ Gleichungen.

Setze t := xy = x + y. Dann folgt mit (2):

$$\begin{aligned} t^2 &= (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 25 + 2t \\ \Longrightarrow t^2 - 2t - 25 = 0 &\Longrightarrow t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{26} \end{aligned} \tag{4}$$

Weiter folgt aus $t = x + y$ mit $y = \sqrt{25 - x^2}$:

$$\begin{aligned} &t - x = \sqrt{25 - x^2} \Longrightarrow (t-x)^2 = t^2 - 2tx + x^2 = 25 - x^2 \\ &\Longrightarrow 2x^2 - 2tx + t^2 - 25 = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 2tx + 2t = 0 \quad \text{(nach (4))} \\ &\Longrightarrow x^2 - tx + t = 0 \end{aligned}$$

Da t jetzt bekannt ist, kann man x ausrechnen:

$$x = \frac{1}{2}(t \pm \sqrt{t^2 - 4t}) \tag{5}$$

Setzt man $t^2 = 2t + 25$ nach (4), dann vereinfacht sich der Term:

$$x = \frac{1}{2}(t \pm \sqrt{25 - 2t})$$

Damit sind die Lösungen algebraisch bestimmt. Zum Schluss seien sie hier noch mal explizit aufgeschrieben:

$$\begin{aligned} \text{Mit } t_1 = 1 + \sqrt{26} \text{ ergibt sich } x_{1,2} &= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{26} \pm \sqrt{23 - 2\sqrt{26}}\right) \\ \text{Mit } t_2 = 1 - \sqrt{26} \text{ ergibt sich } x_{3,4} &= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{26} \pm \sqrt{23 + 2\sqrt{26}}\right) \end{aligned}$$

Es sind dieselben Terme wie in Abschnitt 3.

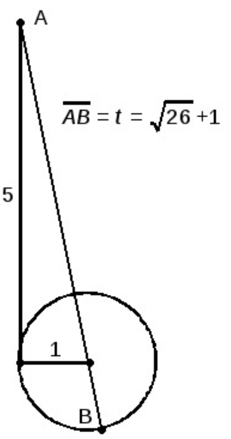
Konstruktion aufgrund der Berechnung. Alle Strecken, deren Längen durch Quadratwurzelterme gegeben sind, kann man mit Zirkel und Lineal konstruieren. Somit ist es möglich, die obige algebraische Berechnung umgekehrt in eine Konstruktion umzusetzen; hierzu gibt es i.A. viele Möglichkeiten, exemplarisch soll jetzt noch eine vorgestellt werden, die sich unmittelbar an den Wurzeltermen orientiert. (Für die Wurzeln verwenden wir jeweils nur eines der möglichen Vorzeichen.)

Eine Strecke der Länge $t = 1 + \sqrt{26}$ ist leicht zu konstruieren: Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 1 und 5; verlängere die Hypotenuse um 1.

Zur Konstruktion von x kann man die Darstellung (5) unter Verwendung der Gleichung (4) verändern, um unter der Wurzel eine Differenz von Quadraten zu erzeugen:

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{t^2 - 2 \cdot 2t}\right) = \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{t^2 - 2(t^2 - 25)}\right) = \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{50 - t^2}\right)$$

Abb. 11



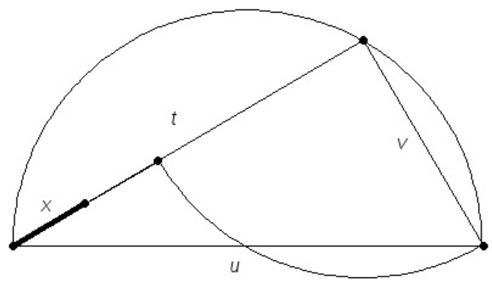


Abb. 12

Nun ist $u := \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ die Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge 5. Also ist $v := \sqrt{u^2 - t^2}$ konstruierbar als die zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse u und einer Kathete t. Wie man dann $x = \frac{1}{2}(t - v)$ konstruiert, dürfte klar sein (s. Abb. 12).

5. Reflexion

Vermutlich wird jeder, der sich mit diesem Problem auseinandersetzt, erst einmal die Gleichung auf Polynom-Form bringen. Man muss zugeben, dass der algebraische Ansatz naheliegend ist, und der Kalkül verspricht eine schnelle Lösung – wenn er reibungslos funktioniert. In diesem Fall geht es aber nicht so glatt wie erwartet; womöglich hat der Problemlöser schon mal gehört, dass Gleichungen 4. Grades sehr schwierig sind (in der Schule kommen nur solche mit ganzzahligen Lösungen vor) und wirft die Flinte ins Korn. Wie man sieht, ist diese Reaktion grundfalsch.

Es geht jetzt darum, sich von der Vorstellung zu lösen, dass es für jedes Problem einen *Kalkül* zu seiner Lösung gibt: Auf die *Idee* kommt es an. Selbst der funktionale Ansatz geht schlicht und einfach von der Idee aus, die Terme als Funktionen zu interpretieren; außerdem ist die Vorstellung wichtig, dass das Lösen einer Gleichung $f(x) = c$ (mit gegebenem Funktionswert c) durch die Berechnung der Umkehrfunktion zu bewältigen ist: $x = f^{-1}(c)$. Zwar führt auch dieser Ansatz nicht auf die schnelle einfache Lösung, aber das liegt wohl in der Natur des Problems: Es erweist sich in jeder Hinsicht als etwas sperrig, aber doch lösbar. Vielleicht macht gerade diese Tatsache seinen Reiz aus.

Dann zeigt sich wieder einmal, dass Geometrie und Algebra stark miteinander verknüpft sind. Übrigens entspricht die Art und der Umfang der Darstellungen in keiner Weise dem tatsächlichen Aufwand beim Problemlösen! Hier greift eher die

Metapher vom Haus: Es sieht viel schöner aus, wenn das Gerüst abgebaut ist. Der Ablauf des Problemlöseprozesses ist auch häufig nicht mehr genau nachvollziehbar; gleichwohl sollte man nicht vergessen, die Ideen in die Darstellung einfließen zu lassen.

Beispielsweise geht die Lösung in Abschnitt 3 von dem Wissen aus, dass Gleichungen 4. Grades *geometrisch* (durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal) lösbar sein können. Auch bei der algebraischen Lösung in Abschnitt 4 wäre es vor allem interessant, wann und wo die entscheidende Beziehung $xy = x + y$ ins Zentrum des Interesses gerückt ist und damit zur Lösung geführt hat.

Mögliche Verallgemeinerungen des Problems sind offensichtlich: Man könnte z.B. die Leiterlänge 5 durch eine beliebige Zahl $L > 2\sqrt{2}$ ersetzen. Aber die Qualität des Problems und der Lösungen ändert sich dadurch nicht; z.T. kann man an den Konstanten in den Termen schon ablesen, wie die allgemeinen Lösungen vermutlich aussehen: 26 ist wohl durch $L^2 + 1$ zu ersetzen, 23 durch $L^2 - 2$. Die Seitenlänge der quadratischen Kiste zu variieren, ergibt nichts Neues; etwas anders wird es vielleicht, wenn man den Kistenquerschnitt rechteckig macht.

Schlussbemerkung: Es sollte klar sein, dass dieses Problem exemplarisch für viele andere dieser Art steht. Es sollte unser Anliegen sein, solche Probleme zu finden und die Vielfalt ihrer Bezüge herauszustellen. Allerdings braucht man sich dabei nicht auf solche „schwierigen“ Aufgaben zu beschränken: Auch Standardaufgaben (oder gerade diese?) können attraktiver werden, wenn man sie unter möglichst vielen Aspekten betrachtet.

Adresse des Autors:

Berthold Schuppar
Fakultät f. Mathematik, TU Dortmund
Vogelpothsweg 87, D 44227 Dortmund
email berthold.schuppar@tu-dortmund.de

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 222 (2013), 33–42

Mathematik in Salzburg

Clemens Fuchs, Peter Hellekalek und Maximilian Thaler

Universität Salzburg

1 Zur Geschichte und aktuellen Situation

Der heutige Fachbereich Mathematik an der Paris-Lodron-Universität Salzburg ist im Zuge der Umsetzung des Universitätsgesetzes 2002 aus dem früheren Institut für Mathematik hervorgegangen. Dessen Gründung erfolgte 1967, nachdem die Universität Salzburg 1962 wiedererrichtet worden war. In letzter Zeit hat es eine Reihe von personellen Veränderungen gegeben, bedingt durch die Pensionierung mehrerer Kollegen und durch Kollegen auf befristeten Stellen, die teilweise nur einen kurzen Zwischenaufenthalt an unserem Fachbereich eingelegt haben.

In den Zielvereinbarungen 2013–2015 hat sich das Rektorat klar für eine Stärkung des Fachbereichs in personeller Hinsicht ausgesprochen, sodass in naher Zukunft drei unbefristete Professuren in den Gebieten Analysis, Diskrete Mathematik und Technische Mathematik besetzt werden können, letztere als Brückenprofessur in Zusammenarbeit mit dem Fachbereich Materialforschung und Physik. Diese drei Professuren werden die befristeten Professuren, die es derzeit am Fachbereich gibt, ersetzen. Der aktuelle Personalstand umfasst zwei unbefristete und drei befristete Professoren (eine dieser Stellen ist zurzeit unbesetzt), sieben außerordentliche Professoren, zwei Postdocs und drei Doktoranden und Doktorandinnen sowie zweieinhalb Sekretariatsstellen.

Dieser Bericht gibt den aktuellen Stand in Forschung und Lehre wieder. Die vertretenen Forschungsgebiete verteilen sich auf die Säulen Analysis, Diskrete Mathematik, Geometrie und Stochastik/Statistik (siehe Abschnitt 2). Die Forschungsrichtungen innerhalb der Säulen sind vielfältig und reichen von theoretischen Fragestellungen bis hin zu konkreten Anwendungen. In der Lehre bietet der Fachbereich vier Studien an: Bachelor- und Masterstudium Mathematik, Lehramtsstudium Mathematik und Doktoratsstudium (siehe Abschnitt 3). Zu den Aufgaben des Fachbereichs gehört auch die Abhaltung von Lehrveranstaltungen für naturwis-

ISSN 0020-7926 — Österr. Math. Gesellschaft

senschaftliche Studien. Dazu zählt das Bachelorstudium Ingenieurwissenschaften, das von der Universität Salzburg in Zusammenarbeit mit der TU München angeboten wird. Des Weiteren werden mathematische Lehrveranstaltungen für das Bachelorstudium Geologie und das Lehramtsstudium Physik betreut. Im Rahmen des Salzburg Institute of Actuarial Studies (SIAS) gibt es die Möglichkeit, Kurse aus Finanz- und Versicherungsmathematik zu absolvieren, die Teil der Aktuarausbildung sind und auch im Rahmen der regulären Studien belegt werden können.

2 Forschungsprofil

Im Folgenden werden die einzelnen Forschungsschwerpunkte am Fachbereich Mathematik beschrieben. Die beteiligten Personen werden zur Strukturierung jener der vier Säulen zugeordnet, zu der die größte Affinität in der Forschung besteht. Diese Zuordnung kann inhaltlich klarerweise nicht trennscharf sein, auch wenn sich die Säulen im Kern durch die Denkweisen und die methodischen Ansätze voneinander unterscheiden. Es sind jeweils die zurzeit am Fachbereich Mathematik beschäftigten Personen in alphabetischer Reihenfolge angeführt.

Analysis. *M. Bertolim (Dynamische Systeme) · G. Racher (Funktionalanalysis) · M. Revers (Approximationstheorie) · A. Schröder (Numerik)*

Die derzeitigen Forschungsschwerpunkte in der Säule Analysis betreffen Dynamische Systeme, Funktionalanalysis, Interpolations- und Approximationstheorie und Numerik für partielle Differentialgleichungen. Naturgemäß gibt es zahlreiche Überschneidungen der anderen Säulen mit der Analysis. Dieser Arbeitsbereich wird in naher Zukunft durch eine unbefristete Professur „Analysis“ verstärkt werden. Der Analysissäule zugeordnet ist auch die Professur „Technische Mathematik“. Deren Hauptaufgabe ist die Etablierung von interdisziplinären Forschungskooperationen mit den Fachbereichen der naturwissenschaftlichen Fakultät, insbesondere mit dem Fachbereich Materialforschung und Physik, sowie die Gestaltung, Organisation und Durchführung von mathematischen Lehrveranstaltungen im Bachelorstudiengang Ingenieurwissenschaften und weiteren naturwissenschaftlichen Studiengängen.

• *Dynamische Systeme* (M. Bertolim). Forschungsthemen sind topologische Dynamik, Indextheorie, Morse-Conley-Indizes, Lyapunov-Funktionen und Stabilität. Die Forschung wird in zwei Hauptlinien betrieben: In der ersten Linie werden stetige dynamische Systeme betrachtet. Dabei gilt das Interesse der Frage der Realisierung sowie kombinatorischen Problemen. Das grundlegende Werkzeug bildet die Theorie von Morse-Conley. Ein wichtiges Untersuchungsobjekt ist der Lyapunov-Graph, ein kombinatorisches Konzept, welches topologische und dynamische Invarianten beinhaltet. Die zweite Linie betrifft unstetige dynamische Systeme. Hier liegt das Hauptinteresse im Studium von Differentialgleichungen, insbesondere in der Analyse der Existenz von periodischen Lösungen. Internationale Kooperationen bestehen mit der State University of Campinas und der University of Sao Paulo (Brasilien) sowie mit der Université de Bourgogne (Frankreich).

• *Funktionalanalysis* (G. Racher). Thema der Forschung ist die Mittelbarkeit von Gruppen und Algebren.

• *Approximationstheorie* (M. Revers). Es werden einerseits Fragen aus der Theorie der Interpolation bearbeitet, insbesondere in Zusammenhang mit Lebesguefunktionen und Lebesguekonstanten für verschiedene Nodalsysteme, und Fragen der Konvergenz und Divergenz auf Mengen mit positivem Maß. Andererseits gilt das Interesse der Bestapproximation stetiger Funktionen durch Polynome, hier insbesondere Fragen zur Berechnung der sogenannten Bernstein-Konstante. Ebenso interessieren Fragestellungen zur numerischen Berechnung von Bestapproximationen bezüglich der Supremumsnorm, beispielsweise der Remez-Algorithmus, sowie weitere Fragestellungen aus der Numerik und Analysis.

• *Numerik partieller Differentialgleichungen* (A. Schröder). Die Entwicklung, Analyse und Anwendung von numerischen Verfahren für partielle Differentialgleichungen und -ungleichungen bilden die wesentlichen Forschungsschwerpunkte. Im Mittelpunkt stehen vornehmlich adaptive Finite-Elemente-Methoden für Variationsungleichungen, p- und hp-Methoden sowie die erweiterte Finite-Elemente-Methode (XFEM). Betrachtet werden insbesondere gemischte Finite-Elemente-Methoden für Kontaktprobleme sowie deren a priori- und a posteriori-Fehleranalyse. Materialgesetze der linearen Elastizität und Elastoplastizität für ingenieurwissenschaftliche Anwendungen sowie hyperelastische Materialgesetze für biomechanische Problemstellungen bilden die Grundlage der untersuchten strukturmechanischen Materialmodellierungen. In einem DFG-geförderten Forschungsprojekt (SPP1480) werden hp-adaptive Finite-Elemente-Methoden mit Fictitious Domain-Techniken kombiniert. Ziel ist die Simulation des Wärmeeintrags und der daraus resultierenden thermoelastisch gekoppelten Deformation bei der Fräsbearbeitung von geometrisch komplexen Formen. Darüber hinaus werden XFEM-Ansätze und andere FE-Diskretisierungsverfahren für die Simulation von Rissausbreitungsphänomenen entwickelt und analysiert.

Diskrete Mathematik. *C. Fuchs (Diophantische Gleichungen und Diophantische Geometrie) · P. Hellekalek (Metrische Zahlentheorie und Anwendungen) · W. Schmid (Quasi-Monte Carlo-Methoden) · P. Padić (Elliptische Kurven)*

Die Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik ist schwerpunktmäßig in Richtung Algebra und Zahlentheorie ausgerichtet. Die Forschungsthemen reichen von der Erforschung von speziellen Diophantischen Gleichungen und anderen Problemen aus der Diophantischen Analysis und Diophantischen Geometrie, über metrische Zahlentheorie, Monte Carlo und Quasi-Monte Carlo-Methoden, bis hin zum Studium von elliptischen Kurven. Konkrete Bezüge zu Fragen der Datensicherheit sowie zu Anwendungen in der Computersimulation und der Finanzmathematik finden sich in diesem Forschungsspektrum an unterschiedlichen Stellen. Die regelmäßige Anwesenheit von Harald Niederreiter (RICAM Linz) bedeutet eine wesentliche Bereicherung dieser Forschungsaktivitäten.

• *Diophantische Gleichungen und Diophantische Geometrie* (C. Fuchs). Das Studium von Diophantischen Gleichungen hat seine Wurzeln in den Untersuchungen des griechischen Mathematikers Diophantus von Alexandria. Eine Diophantische Gleichung ist dabei eine polynomielle Gleichung in n Unbestimmten, wobei Lösungen in den ganzen Zahlen (oder entsprechenden Verallgemeinerungen in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern) gesucht werden. Weite Teile der Algebra sind im Zuge der Untersuchung von speziellen solchen Gleichungen entwickelt worden; man denke an das berühmte Problem von Pierre de Fermat, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine nichttrivialen Lösungen in ganzen Zahlen x, y, z für $n \geq 3$ besitzt. In moderner Zeit kommen vor allem Methoden aus der arithmetischen Geometrie zum Einsatz – man nennt diesen neuen Zweig daher Diophantische Geometrie. Ein zentrales Ergebnis ist zum Beispiel der Satz von Siegel über die ganzen Punkte auf Kurven mit positivem Geschlecht und der Satz von Faltings zur Lösung der Mordellschen Vermutung.

In diesem Forschungszweig stehen explizite Diophantische Probleme sowie deren Anwendungen in den theoretischen Computerwissenschaften im Zentrum des Interesses. Das mathematische Studium von Diophantischen Problemen spielt beispielsweise bei der Datensicherheit eine essentielle Rolle, hauptsächlich handelt es sich aber um ein Gebiet aus der mathematischen Grundlagenforschung.

Die Forschungsarbeiten in diesem Schwerpunkt werden zurzeit durch ein FWF-Projekt (P24574) gefördert; Details zum Projekt und den beteiligten Personen findet man unter *http://fuchsc.sbg.ac.at/research.html*. Clemens Fuchs ist außerdem in eine Reihe von weiteren Projekten involviert, es gibt insbesondere eine enge Vernetzung mit den Kollegen an der TU Graz, der Montanuniversität Leoben sowie mit einzelnen Kollegen in Wien, Linz und Klagenfurt. Im Ausland sind seine Hauptkooperationspartner an der ETH Zürich, der Univ. Zagreb, der Univ. Debrecen und der Scuola Normale Superiore di Pisa, um einige Standorte aus dem näheren (europäischen) Umfeld zu nennen.

• *Metrische Zahlentheorie und Anwendungen* (P. Hellekalek). Der klassische Zugang zur Theorie der Gleichverteilung von Folgen modulo 1 verwendet zur Formulierung von Kriterien (Stichwort: Weylsches Kriterium) und in Beweismethoden (Stichwort: Ungleichung von Erdős-Turán-Koksma) das trigonometrische Funktionensystem, also klassische Exponentialsummen. Angeregt durch Bezüge zur Ergodentheorie, werden Techniken aus dem Gebiet der b-adischen Zahlen sowie aus der Theorie der Walshreihen verwendet, um neue Analysemethoden, Gleichverteilungskriterien und Gleichverteilungsmaße zu entwickeln. In kürzlich veröffentlichten Untersuchungen werden Resultate zu hybriden Folgen vorgestellt. Die Anwendungsaspekte betreffen vor allem Zufallszahlen. Diese sind ein zentrales Werkzeug in der stochastischen Simulation und in der Kryptographie.

Resultate zur theoretischen und statistischen Analyse von Zufallszahlen wurden in mehreren FWF-Projekten bearbeitet und bildeten die Grundlage für mehrere Dissertationen und zwei Habilitationen. Eine Übersicht über diese Forschungsarbeit findet sich auf dem Server *http://random.mat.sbg.ac.at*. Nationale Kooperationen bestehen mit RICAM (Linz) und mit Kollegen an der Universität Linz sowie an der TU Graz und der TU Wien. Ein entsprechender Sonderforschungsbereich ist derzeit beim FWF in Begutachtung. Die internationale Vernetzung betrifft neben Einzelkontakten das weltweite Netzwerk *Uniform Distribution Theory*.

• *Monte Carlo- und Quasi-Monte Carlo-Methoden* (W. Schmid). Es werden Forschungen zur Gleichverteilung durchgeführt, insbesondere über niedrig-diskrepante Punktmengen wie Halton-Folgen und Hammersley-Punktmengen. Mit besonderem Schwerpunkt werden (t,m,s)-Netze und (t,s)-Folgen studiert. Querverbindungen daraus ergeben sich zur Algebra/(lineare) Codes oder Kombinatorik/orthogonale Arrays. Wichtigstes „Beiprodukt" dabei ist die Erstellung einer umfangreichen Online-Datenbank mit Ergebnissen, Schranken und Informationen zu Netzen, (verallgemeinerten) orthogonalen Arrays und linearen Codes – siehe *http://mint.sbg.ac.at*. Eine enge Zusammenarbeit besteht mit der Universität Linz.

• *Elliptische Kurven* (P. Tadić). Elliptische Kurven sind zu einem zentralen Forschungsthema in der Zahlentheorie geworden. Sie haben nicht nur beim Beweis der Fermatschen Vermutung (siehe Forschungszweig über Diophantische Gleichungen und Diophantische Geometrie) eine wesentliche Rolle gespielt, sondern finden auch bei modernen Kryptosystemen Verwendung. Petra Tadić arbeitet im FWF-Projekt von C. Fuchs. Ihre Forschungsinteressen liegen vor allem in der Untersuchung des (Mordell-Weil-)Rangs von elliptischen Kurven. In ihrer Doktorarbeit unter der Anleitung von A. Dujella an der Univ. Zagreb hat sie Familien von elliptischen Kurven untersucht, welche Beispiele für konkrete Kurven mit hohem Rang liefern. In letzter Zeit hat P. Tadić die Injektivität des Spezialisierungshomomorphismus von gefaserten elliptischen Flächen studiert. Unter anderem ist sie auch an arithmetischen Progressionen auf Pellschen Gleichungen interessiert.

Geometrie. *C. Buchta (Stochastische Geometrie) · F. Kinzl (CAD-Systeme) · M. Ober (Konvexgeometrie) · B. Sereinig (Stochastische Geometrie) · J. Stemeseder (Stochastische Geometrie) · R. Wolf (Abstandsgeometrie)*

Die Geometrie hat als Forschungsgebiet in Salzburg eine starke, von August Florian begründete und von Johann Linhart weitergeführte Tradition. Derzeit liegen die Forschungsschwerpunkte in Stochastischer Geometrie, Konvexgeometrie und Abstandsgeometrie. Als angewandt ausgerichteter Forschungszweig werden mathematische Grundlagen für CAD-Systeme entwickelt.

• *Stochastische Geometrie* (C. Buchta, B. Sereinig, J. Stemeseder). Diese Arbeitsgruppe beschäftigt sich mit der Untersuchung zufällig erzeugter mehrdimensionaler Objekte. Eine typische Fragestellung ist folgende: Auf der Sphäre (beliebiger

Dimension) werden n Punkte unabhängig voneinander nach der Gleichverteilung gewählt. Ihre konvexe Hülle ist ein Polytop mit n Ecken. Was ist der Erwartungswert der Zahl der Kanten, der zweidimensionalen Seitenflächen, etc.? Diese Frage wird in der Dissertation von Johannes Stemeseder behandelt, welche durch Forschungsaufenthalte bei M. Reitzner (Osnabrück) wesentlich gefördert wurde.

Vom Standpunkt der Stochastik sind nicht nur Erwartungswerte, sondern auch Varianzen, höhere Momente und Verteilungen interessant. Diesem Aspekt widmen sich Christian Buchta und Bettina Sereinig. In jüngster Zeit konnten Fortschritte vor allem dadurch erzielt werden, dass es gelang, bei der Untersuchung mehrdimensionaler stochastischer Prozesse etablierte Hilfsmittel aus der Stochastik (z.B. Approximationen durch Poisson-Prozesse), die technisch schwer handhabbar sind und kaum noch bewältigbaren Rechenaufwand auslösen, durch geometrische Hilfsmittel zu ersetzen, die leichter zu beherrschen sind und die Verbesserung bekannter Resultate ermöglichen. Christian Buchta ist Mitglied des großen französischen Forschungsnetzwerks *Géométrie stochastique*.

Von der Arbeitsgruppe wird zurzeit der Schwerpunkt *Discrete, Integral, Stochastic, and Convex Geometry* zum Lehrangebot im Masterstudium Mathematik beigetragen. In dessen Rahmen ist für das Sommersemester 2013 eine Vorlesung über Stochastische Geometrie von Wolfgang Weil vorgesehen.

• *CAD-Systeme* (F. Kinzl). In der vor 30 Jahren durch Hans Stegbuchner etablierten Arbeitsgruppe, die sich mit der Entwicklung einer 3D-Version des CAD-Paketes „Memoplot“ beschäftigte, hat Franz Kinzl von 1992 an die mathematischen Grundlagen für zentrale 3D-Bereiche entwickelt (Berechnung und Programmierung von Schnitt und Berührung von Freiformflächen und analytischen Flächen, desgleichen für Kurven, speziell für Klothoiden, Erstellung von Offset-Flächen und deren Interaktionen, Schnitt und Berührung von Kurven und Flächen, Konturlinien, Schnitt und Berührung von drei Flächen, usw.). Die schon früher erstellte 2D-Version wurde von der Firma Siemens (München) und von der Dortmunder Firma ISD – Ingenieurgesellschaft für Statik und Dynamik (später umbenannt in ISD – Software und Systeme) übernommen. Die von ISD vertriebenen CAD-Systeme laufen unter der Bezeichnung „HICAD“ und es werden verschiedenste Spezialanwendungen (Architektur, Werkzeug- und Maschinenbau, Werbegraphik, Schiffbau, Blechverarbeitung, z.B. für die Autoindustrie, Elektrotechnik, usw.) angeboten. Die dabei grundlegenden mathematischen Berechnungen wurden fast zur Gänze am Fachbereich Mathematik entwickelt.

• *Konvexgeometrie* (M. Ober). Im Zentrum des Interesses steht die konvexgeometrische Analysis, eine Verknüpfung von Konvexgeometrie und Analysis bzw. Funktionalanalysis. Beispiele für konkrete Fragestellungen sind etwa die Zusammenhänge zwischen geometrischen und analytischen Ungleichungen oder die Charakterisierung von Bewertungen auf Funktionenräumen. Enge Forschungskontakte bestehen zur Arbeitsgruppe um Monika Ludwig an der TU Wien.

• *Abstandsgeometrie* (R. Wolf). Primäres Forschungsgebiet von Reinhard Wolf ist die sogenannte Abstandsgeometrie (Distance Geometry). Insbesondere interessieren Eigenschaften von metrischen Räumen, welche von p-negativem Typ sind. Ein metrischer Raum ist von p-negativem Typ, falls folgende Ungleichungen gelten: Für alle natürlichen Zahlen n, für alle Punkte $x_1, \dots, x_n$ des Raums und für alle reellen Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ ist die Summe der n^2 Summanden $\alpha_i \alpha_j d(x_i, x_j)^p$ stets kleiner oder gleich Null (d bezeichnet die vorgegebene Metrik). Weitere Interessensgebiete sind die Funktionalanalysis, insbesondere die Geometrie endlichdimensionaler normierter Räume, sowie Fragen der Diskreten Mathematik. Enge wissenschaftliche Kontakte bestehen zu Kollegen an der University of Wollongong (Australien) und an der Universität Jena (Deutschland).

Stochastik/Statistik. *A. Bathke (Nichtparametrische Statistik) · M. Thaler (Ergodentheorie)*

Die Forschungstätigkeit dieser Säule verteilt sich schwerpunktmäßig auf die Zweige Statistik und Ergodentheorie. Der Forschungszweig Statistik zielt über die Entwicklung von Theorie und Methodik hinaus stark auf Anwendungen ab, etwa in den Bereichen Biologie, Bioinformatik, Medizin, Psychologie sowie Sozial- und Bildungswissenschaften, der Forschungszweig Ergodentheorie ist auf Grundlagenfragen zur Stochastik dynamischer Systeme fokussiert.

• *Nichtparametrische Statistik* (A. Bathke). Der Begriff „nichtparametrische Statistik" umfasst eine Vielzahl von Ansätzen und Verfahren der Datenanalyse und der schließenden Statistik. Die wesentliche Gemeinsamkeit dieser Verfahren ist, möglichst wenige Annahmen an die Verteilungen und statistischen Modelle zu postulieren. Damit sind diese Verfahren generell flexibler und weiter anwendbar als viele parametrische Prozeduren.

Ein Schwerpunkt der Forschung am Fachbereich ist die Entwicklung nichtparametrischer Verfahren für multivariate und longitudinale Daten aus faktoriellen Versuchsanlagen sowie die Umsetzung dieser Verfahren in statistischer Software (*SAS* und *R*). Eine interessante Herausforderung ist dabei die Konstruktion von Methoden, die auch für hochdimensionale Situationen validiert werden können.

Als parameterfreie Alternative zu Maximum Likelihood zählt auch die Empirical Likelihood-Methodik zu den nichtparametrischen Ansätzen. Am Fachbereich wird dieser Ansatz insbesondere im Hinblick auf Ereigniszeitanalyse verfolgt. Enge wissenschaftliche Kontakte bestehen mit Forschern an den Universitäten Göttingen, Hannover und Düsseldorf sowie der Univ. of Kentucky, Univ. of Montana und Univ. of Ohio. Darüber hinaus bestehen akademische Beziehungen zu zahlreichen weiteren Kollegen in den USA, Kanada, Kolumbien, Deutschland, Österreich, Südafrika, Äthiopien und China.

Die Professur für Statistik am Fachbereich Mathematik ist erst kürzlich besetzt worden. Damit befindet sich die Arbeitsgruppe Stochastik/Statistik derzeit in einer spannenden Phase des Ausbaus und der Erweiterung von Forschungsinteressen und Lehrangebot sowie einer Intensivierung der Vernetzung mit anderen quantitativ ausgerichteten Forschergruppen an der Universität Salzburg.

• *Ergodentheorie* (M. Thaler). Die Ergodentheorie gehört seit der Berufung von Fritz Schweiger in den Gründerjahren des seinerzeitigen Instituts für Mathematik zum festen Bestand der mathematischen Forschungsgebiete in Salzburg. Schwerpunkte bilden einerseits der Nachweis von ergodischen Grundeigenschaften bestimmter Klassen von Abbildungen, etwa solcher aus der metrischen Zahlentheorie, und andererseits die Erforschung der stochastischen Gesetzmäßigkeiten von dynamischen Systemen mit unendlichen mittleren Rückkehrzeiten. Ein zentrales Thema hierbei sind Grenzverteilungssätze für Besuchshäufigkeiten und andere erneuerungstheoretische Größen. Die engsten wissenschaftlichen Kontakte innerhalb Österreichs bestehen zur Forschungsgruppe Ergodentheorie und dynamische Systeme der Universität Wien.

3 Lehrangebot

Die Lehre hat ihr gegenwärtiges Profil im Jahr 1999 für das Lehramtsstudium Mathematik und in den Jahren 2000/01 für das Bachelor- und Masterstudium Mathematik erhalten. Die Universität Salzburg war damit der erste Mathematikstandort in Österreich, an dem der Umstieg auf das zweistufige Abschlusssytem des Bolognaprozesses erfolgt ist. Wesentliche Triebfeder für die Erstellung dieser Studienpläne war unser inzwischen in den Ruhestand getretene Kollege Ferdinand Österreicher, der zu dieser Zeit die Funktion des Vorsitzenden der Studienkommission Mathematik innehatte. Ihm ist insbesondere zu verdanken, dass bereits damals im Lehramtsstudium neben einer soliden Mathematikausbildung verstärkt Wert darauf gelegt wurde, den fachwissenschaftlichen Teil der Ausbildung an den beruflichen Erfordernissen der zukünftigen Lehrerinnen und Lehrer zu orientieren. Dieses Thema ist nun, fast eineinhalb Jahrzehnte später, wieder im Mittelpunkt der Diskussion.

Es liegt die folgende Leitidee zugrunde, die das Mathematikstudium in Salzburg seit Mitte der 1980er-Jahre prägt: Trotz der bescheidenen personellen Resourcen ein Mathematik-Grundstudium zu gewährleisten, das die nach internationalen Standards wesentlichen Bestandteile vorsieht, und daran anschließend Spezialisierungsmöglichkeiten anzubieten, deren Qualität ein vorrangiges Anliegen ist. In den Studienplänen 2000/01 wurde diese Leitidee durch ein für alle einheitliches Bakkalaureatsstudium umgesetzt, auf das alternativ das Magisterstudium Mathematik oder das Magisterstudium Angewandte Mathematik folgte. (Das Magisterstudium Mathematik zusammen mit dem vorangehenden Bakkalaureatsstudium entspricht einem mathematischen Diplomstudium im traditionellen Sinn.) Vertiefungsmöglichkeiten wurden bereits damals entsprechend den Forschungsinteressen der Fachbereichsmitglieder vorgesehen. Im Magisterstudium Angewandte Mathematik wurden die Schwerpunkte „Dynamische Systeme“, „Finanz- und

Versicherungsmathematik“ und „Statistik“ eingerichtet. Dieses Studium ersetzte den von 1985 bis 2000 erfolgreich betriebenen Studienschwerpunkt Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie. Der Stochastikbezug aller drei Schwerpunkte ermöglichte einheitliche Grundlehrveranstaltungen.

Im Jahr 2008 erfolgte eine wesentliche organisatorische Veränderung: Die beiden Magisterstudien wurden aufgrund von Personalengpässen zum Masterstudium Mathematik zusammengefasst. Innerhalb dieses Studiums gibt es seitdem die Möglichkeit, spezielle Schwerpunkte zu bilden. Explizit erwähnt wird im Studienplan von 2008 der Schwerpunkt „Finanz- und Versicherungsmathematik“. Die jeweilige Anpassung der Mathematikstudien hatte zur Folge, dass auch im Lehramtsstudium entsprechende Änderungen durchgeführt werden mussten. Die Einführung der Studieneingangs- und Orientierungsphase wurde 2011 in einer weiteren Studienplanänderung des Bachelorstudiums Mathematik implementiert.

Zurzeit wird sowohl an einem komplett neuen Lehramtsstudienplan (federführend durch die 2012 an der Univ. Salzburg eingerichtete *School of Education*, welche sich insbesondere der Aus- und Weiterbildung der Lehrerinnen und Lehrer widmet) wie auch an neuen Bachelor- und Masterstudienplänen gearbeitet. Das neue Grundkonzept berücksichtigt nun wieder verstärkt die aktuelle Ausrichtung des Fachbereichs in der Forschung. Demgemäß soll sowohl im neuen Lehramtsstudienplan wie auch im Masterstudienplan das Vier Säulen-Modell, basierend auf den im Abschnitt 2 beschriebenen Säulen Analysis, Diskrete Mathematik, Geometrie und Stochastik/Statistik, klar erkennbar sein. Die Curricularkommission Mathematik hat bereits einen entsprechenden Beschluss gefasst und arbeitet zielstrebig an dessen Umsetzung. Damit soll auch die Aufnahme eines Doktoratsstudiums verstärkt gefördert werden.

In der Lehramtsausbildung arbeitet der Fachbereich sehr eng mit der Fachdidaktik Mathematik zusammen, derzeit vertreten durch Karl Josef Fuchs und Martina Weiß. Zahlreiche Fachlehrveranstaltungen des Lehramts werden seit vielen Jahren mit großem Erfolg von erfahrenen Lehrern abgehalten, namentlich von Günter Maresch und Wilfried Rohm. Wesentliche Stützen sowohl in der Lehramtsausbildung als auch in der allgemeinen Mathematikausbildung sind die pensionierten Kollegen Walter Bauer, Hans Czermak, Helmut Efinger, Ferdinand Österreicher und Fritz Schweiger.

• *Salzburg Institute of Actuarial Studies*. Das SIAS ist eine von der Versicherungswirtschaft sowie von der Universität Salzburg getragene GmbH, welche sehr erfolgreich einen Kanon von 16 Vorlesungen anbietet, die im Lauf von drei Jahren periodisch durchlaufen werden und exakt den Anforderungen der Aktuarvereinigung Österreichs für die Verleihung der Berufsberechtigung als Aktuar/in entsprechen (siehe *http://www.sias.at*). Die geblockten Veranstaltungen werden von einem Honorarprofessor (Ulrich Orbanz, ehemaliger Vorsitzender der Deutschen Aktuarvereinigung) und 18 Gastprofessoren gehalten, von denen sechs in der Versicherungsindustrie tätig sind, sechs an anderen Universitäten (M. Hudec, M.

Schauer, T. Tomandl – Univ. Wien, U. Schmock – TU Wien, K.D. Schmidt – TU Dresden, H. Schradin – Univ. Köln), drei bei staatlichen Behörden (Finanzmarktaufsicht, Sozialministerium) und drei in internationalen Beratungsunternehmen.

Die Vorlesungen finden (soweit sie nicht österreichspezifisch sind) englischsprachig statt und wurden bisher von Teilnehmerinnen und Teilnehmern aus 32 Staaten besucht. Im Rahmen des derzeitigen Schwerpunkts „Finanz- und Versicherungsmathematik“ im Masterstudium Mathematik können diese Veranstaltungen belegt werden und zählen als Wahlfächer für den Abschluss dieses Studiums.

• *Salzburg Mathematics Colloquium*. In diesem erst kürzlich eingerichteten mathematischen Kolloquium werden wissenschaftliche Vorträge aus den unterschiedlichen Bereichen der Mathematik angeboten. Die Vortragenden kommen einerseits aus dem Kreis der am Fachbereich tätigen Personen und andererseits von anderen österreichischen und ausländischen Universitäten. Das Besondere an diesem Kolloquium ist, dass die Vorträge so konzipiert sind, dass sie auch von unseren Studierenden im Masterstudium Mathematik mit Gewinn besucht werden können. Sie erhalten hier einen Einblick in aktuelle Forschungsrichtungen, welche auch die Schönheit und Vielfalt der unterschiedlichen mathematischen Säulen zum Ausdruck bringen; dies aber auf einem Erklärungsniveau, das auf ihre Bedürfnisse Rücksicht nimmt. Informationen und das aktuelle Programm findet man unter *http://fuchsc.sbg.ac.at/smc.html*.

• *Hans-Stegbuchner-Preis*. Die Entwicklung des CAD-Programmpakets „Memoplot“ unter der Projektleitung von Hans Stegbuchner (1947–1998) hat in einem bedeutenden Ausmaß die Forschungs- und Lehrtätigkeit am Fachbereich Mathematik beeinflusst. Insbesondere beschleunigte dies die Verwendung von Computern in Lehre und Forschung am Fachbereich wesentlich. Bereits sehr früh wurden Lehrveranstaltungen in Computergeometrie gehalten. Hans Stegbuchner hat den Reingewinn der Memoplot-Schulungen für Anerkennungspreise für Studierende mit hervorragenden Abschlussarbeiten gestiftet. Dieser Preis wurde nach dem frühen Tod unseres Kollegen in „Hans-Stegbuchner-Preis“ umbenannt und wird jährlich vergeben.

4 Administration

Die vielfältigen und umfangreichen Verwaltungstätigkeiten sowie die administrative Unterstützung von Forschung, Lehre und Dienstleistung werden in sehr kompetenter Weise von den Sekretärinnen Andrea Baumgartner, Beatrice Haring und Sarah Lederer wahrgenommen. Den Vorsitz der Curricularkommission Mathematik hat Clemens Fuchs inne. Die Leitung des Fachbereichs liegt in den Händen von Maximilian Thaler und seinem Stellvertreter Michael Revers.

Adresse der Autoren: Fachbereich Mathematik, Universität Salzburg, Hellbrunner Straße 34, 5020 Salzburg. http://www.uni-salzburg.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 222 (2013), 43–54

Mathematik in Klagenfurt

Clemens Heuberger, Barbara Kaltenbacher, Gert Kadunz, Winfried Müller, Christine Nowak, Werner Peschek, Jürgen Pilz, Christian Pötzsche, Franz Rendl

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Nach der mit drei Neuberufungen in den Jahren 2011 und 2012 nunmehr abgeschlossenenen Umstrukturierung des Mathematik-Instituts an der Universität Klagenfurt soll dieser Artikel die Mathematik in Klagenfurt, vertreten durch das Institut für Mathematik, das Institut für Statistik und das Institut für Didaktik der Mathematik, vorstellen. Einen Schwerpunkt dieses Berichts bildet die Beschreibung der aktuellen Forschungsgebiete nach der Neustrukturierung des Instituts in den Jahren 2011/12, eingeleitet durch einen kurzen Abriss der Entwicklung der Mathematik in Klagenfurt.

Entwicklung der Mathematik in Klagenfurt

Das Institut für Mathematik an der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt (AAU) wurde 1974 mit den Arbeitsschwerpunkten „Mathematik“ und „Fachdidaktik der Mathematik“ errichtet, beides vertreten durch Willibald Dörfler und Roland Fischer, als Professoren für „Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der Didaktik“. Hermann Kautschitsch, der dem Institut später lange Jahre als außerordentlicher Professor angehörte, war damals Assistent bei Dörfler. Ab 1976 gab es eine dritte Lehrkanzel, geleitet durch Haro Stettner, in diesem Jahr kam auch – damals als Assistentin – Christine Nowak ans Institut. Innerhalb der Algebra entwickelte sich die Kryptographie, vertreten vor allem durch den seit 1975 dem Institut angehörenden Winfried Müller als weiterer Schwerpunkt in Forschung und Lehre. Weitere Personen, die schon in diesen frühen Jahren an das damalige Institut für Mathematik kamen und seither an unserer Universität tätig waren, sind Werner Peschek (ab 1976), Manfred Borovcnik (ab 1979), Konrad Krainer (ab 1983), Gert Kadunz (ab 1991) und Günther Ossimitz (ab 1983), von dem wir uns im Jänner dieses Jahres nach einer langen schweren Erkrankung leider viel zu früh verabschieden mussten. Fast von Anfang an, nämlich seit 1977, ist Frau

ISSN 0020-7926 — Österr. Math. Gesellschaft

Christa Mitterfellner Sekretärin am Institut für Mathematik.

Mit den Berufungen von Jürgen Pilz im Jahr 1994 und jener von Franz Rendl im Jahr 1998 kamen die Bereiche „Angewandte Statistik“ und „Operations Research“ hinzu. Die Abteilung „Didaktik der Mathematik“ wurde 2004 als selbstständige Abteilung und seit 2007 als eigenes Institut in die Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung übergeführt. Die Arbeitsgruppe „Angewandte Statistik“ ging mit Gründung der Fakultät für Technische Wissenschaften am 1.1.2007 in ein eigenes Institut für Statistik über.

Die Veranstaltung von internationalen Fachtagungen zur Didaktik der Mathematik, zur Visualisierung in der Mathematik und zur Allgemeinen Algebra sowie die Organisation mehrerer ÖMG-Tagungen haben wesentlich zur Bekanntheit und zum Ansehen des Instituts beigetragen. Seit über 30 Jahren werden von Mitgliedern des Instituts Buchreihen herausgegeben, die ebenfalls internationale Anerkennung fanden. Dazu zählt die *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik*. Hier finden sich neben Monografien auch eine Reihe von Tagungsbänden zu den international beachteten Kärntner Symposien zur Mathematikdidaktik – die von Willi Dörfler und Roland Fischer initiiert wurden – sowie zahlreiche Bände zu Fragen der Visualisierung, für die Hermann Kautschitsch verantwortlich zeichnete. Eine weitere Reihe stellen die *Contributions to General Algebra* dar. Sie repräsentieren neben anderen die algebraischen Leistungen des Instituts.

Unter den vielfältigen Ämtern, die von Institutsmitgliedern innerhalb unserer Universität ausgeübt worden sind, sind die Rektorate von Willibald Dörfler (1993–1999) und Winfried Müller (1999–2003) hervorzuheben.

Nachdem infolge einer Reihe von Pensionierungen und Emeritierungen in den Jahren 2010–2012 ein Generationswechsel abzusehen war, arbeitete das Institut für Mathematik einen umfassenden Plan zur Neuorientierung aus, mit der Grundidee einer noch stärkeren Fokussierung in Richtung Angewandte Mathematik. Dieser Plan wurde vom Rektorat im Wesentlichen übernommen und führte zur erfolgreichen Neustrukturierung des Instituts mit den zwei Forschungsschwerpunkten *Angewandte Analysis* und *Diskrete Mathematik*, deren personelle Ausstattung mit jeweils zwei Professoren- und vier Assistentenstellen vorgesehen wurde. Dem entsprachen die Neuberufungen in den Jahren 2011 und 2012 von Barbara Kaltenbacher und Christian Pötzsche im Bereich der Angewandten Analysis sowie von Clemens Heuberger im Bereich der Diskreten Mathematik und die Einstellung einer Reihe von Wissenschaftlichen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern (siehe Foto auf Seite 45).

Mathematikstudium an der AAU Klagenfurt

Zu den von den Instituten für Mathematik, Statistik und Didaktik der Mathematik in erfolgreicher Zusammenarbeit angebotenen Studien zählen das Bachelorstudium „Technische Mathematik“ (bis 2011/12 „Technische Mathematik und Daten-

Abbildung 1: Die alten und neuen Mitglieder des Instituts für Mathematik nach dem erfolgreichen Generationswechsel (aufgenommen im Jänner 2013).

analyse“), das Masterstudium „Technische Mathematik“, das Lehramtsstudium „Unterrichtsfach Mathematik“ sowie das technische und das naturwissenschaftliche Doktoratsstudium mit den Dissertationsgebieten „Technische Mathematik“ und „Didaktik der Mathematik“.

Den Neubesetzungen am Institut und der damit verbundenen fachlichen und personellen Verstärkung bzw. Neuorientierung wurde mit der Ausarbeitung von neuen Studienplänen für das Bachelor- und Masterstudium „Technische Mathematik“ Rechnung getragen (Inkrafttreten Bachelor 2012/13, Inkrafttreten Master voraussichtlich 2013/14). Diese bieten jeweils nach einer fundierten, breiten mathematischen Pflichtausbildung Vertiefungsmöglichkeiten in den Schwerpunkten Angewandte Analysis, Angewandte Statistik und Diskrete Mathematik. Wesentliche Elemente der Anwendungsorientierung sind die in einem Betrieb oder bei einer außeruniversitären Forschungseinrichtung zu absolvierende mehrwöchige Praxis sowie das Praktikum, in dem die Studierenden konkrete Problemstellungen einer mit mathematischen Methoden zu erarbeitenden Lösung zuführen. Erweiterungsfächer aus Informationstechnik und Informatik ermöglichen den Einstieg in einschlägiges interdisziplinäres Arbeiten im Bereich der an der AAU angebotenen technischen Fächer.

Das Lehramtsstudium Mathematik ist an der AAU mit den Unterrichtsfächern Deutsch, Englisch, Französisch, Italienisch, Slowenisch, Geographie und Wirtschaftskunde, Geschichte, Sozialkunde und politische Bildung, Informatik und Informatikmanagement kombinierbar. Darüber hinaus spielt das Institut für Didaktik der Mathematik mit den Universitätslehrgängen „Pädagogik und Fachdidaktik für Lehrer/innen – Mathematik" und „Fachbezogenes Bildungsmanagement" sowie dem „Doktorand/inn/enkolleg Didaktik der Mathematik" eine wichtige Rolle in der Lehrerfortbildung.

Weiters bieten die genannten drei Institute als Serviceleistung Lehrveranstaltungen in den Bereichen Informatik, Informationstechnik und Betriebswirtschaftslehre an.

Forschung an der AAU Klagenfurt

Wesentliche Aspekte der mathematischen Forschung an der AAU sind zum einen schon seit Anbeginn die besondere Berücksichtigung der Didaktik, zum anderen die durch die Einrichtung neuer technischer Institute und Studienrichtungen an der AAU ab 2007 sowie die oben erwähnte Neuorientierung verstärkte Angewandte Mathematik. Letzterer wurde kürzlich durch die Etablierung eines interdisziplinären Forschungsschwerpunkts *Modellierung, Simulation und Optimierung* unter anderem auch im Entwicklungsplan der Universität für 2013–2015 Rechnung getragen. Der Didaktikbereich zählt schon seit vielen Jahren zu den wichtigsten Zentren der Mathematikdidaktik innerhalb des deutschen Sprachraums und ist auch darüber hinaus international äußerst anerkannt.

Institut für Mathematik – Forschungsschwerpunkt Angewandte Analysis

Dynamische Systeme. Dynamische Systeme sind abstrakte mathematische Modelle für reale Vorgänge, die sich zeitlich ändern. Folglich reicht ihr breites Anwendungsspektrum traditionell von der Physik über die Biologie bis zu den Sozial-, Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften. Üblicherweise werden dynamische Systeme durch (evolutionäre) Differential- und Differenzengleichungen erzeugt. Insbesondere für Modelle aus den Anwendungen sind Letztere hierbei so kompliziert, dass sie sich einer expliziten Lösung entziehen. Aus diesem Grund ist es essentiell, sog. *geometrisch-qualitative Methoden* einzusetzen, welche Aussagen über das Langzeit-Verhalten von Lösungen erlauben, ohne diese explizit zu kennen. Dies geschieht z.B. dadurch, die geometrische Feinstruktur des Raums aller möglichen Zustände eines Systems möglichst detailliert zu beschreiben. Daraus ergeben sich Informationen über die zeitliche Evolution eines Problems in

Abhängigkeiten von etwa den Anfangsdaten oder externen Parametern.

Der Schwerpunkt unseres Arbeitsfelds liegt im Bereich dynamischer Systeme unter zeitlich-variablen äußeren Einflüssen – man spricht von *nichtautonomen Systemen*. Bevor hierbei konkrete Anwendungsbeispiele angegangen werden können, gilt es zunächst, die erforderlichen theoretischen Grundlagen bereitzustellen. Dies erfordert eine Erweiterung der klassischen Theorie in verschiedener Hinsicht:

— Dynamisch-relevante Objekte (Grenzmengen, Attraktoren oder invariante Mannigfaltigkeiten) sind Teilmengen des erweiterten Zustandsraums, der neben dem Ort auch die Zeit widerspiegelt. Sinnvoll erklärte Grenzmengen und Attraktoren benötigen ferner ein adäquates Konvergenz-Konzept um deren Invarianz zu garantieren – man spricht von Pullback-Konvergenz.

— Da Eigenwerte bei zeitabhängigen Situationen keine Stabilitätsinformation liefern, sind verschiedene alternative Spektralkonzepte zu untersuchen, wie das Lyapunov- und das Sacker-Sell-Spektrum. Insbesondere bei Letzterem hat sich eine Brücke zur Operatortheorie als tragfähig erwiesen, welche dynamische Eigenschaften mit den Spektrum von Shift-Operatoren auf geeigneten Folgenräumen verbindet.

— Es kann nicht erwartet werden, dass nichtautonome Gleichungen konstante oder periodische Lösungen besitzen. Im Hinblick auf lokale und globale Dynamik stellt sich folglich die Frage nach alternativen Referenzlösungen.

Das Ziel dieser Überlegungen soll eine anwendbare Verzweigungstheorie sein, die das asymptotische Verhalten nichtautonomer dynamischer Systeme mittels verifizierbarer Kriterien beschreibt. Die dazu erforderlichen Methoden sind analytischer, wie auch numerischer Natur. Die Arbeitsgruppe besteht gegenwärtig aus einem Professor (Christian Pötzsche) und einer Universitätsassistentin (Evamaria Russ).

Qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen und Anwendungen. Die Schwerpunkte der Tätigkeit von Christine Nowak am Institut sind Forschungsbeiträge zur qualitativen Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, insbesondere Existenz-, Eindeutigkeits- und Stabilitätsanalysen, sowie Anwendungen mathematischer Methoden in Industrie- und Wirtschaftsbereichen.

Obwohl es eine überaus große Anzahl an Publikationen zur Fundamentaltheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen gibt, sind die in der Literatur bekannten Kriterien vielfach nur von theoretischem Interesse und bereits bei einfachsten konkreten Problemen nicht anwendbar. Gemeinsam mit Haro Stettner hat Christine Nowak für den skalaren Fall eine verallgemeinerte Lipschitzbedingung entwickelt, die eine Abschätzung des Richtungsfelds in einer „beliebigen“ Richtung erlaubt und in vielen Fällen anwendbar ist, in denen die klassische Bedingung versagt. Eine Übertragung für höhere Dimensionen ist noch ausständig. Die Frage, unter welchen Annahmen die Umkehrung von Eindeutigkeitskriterien Nichteindeutigkeitsaussagen liefert, führt zu interessanten Resultaten. In technischen Bereichen können Eindeutigkeitskriterien mit Lyapunov-Funktionen, die im Zusammenhang mit Stabilitätsanalysen oft vorliegen, nützlich sein. Gemeinsam mit Josef Diblik (TU Brno) arbeitet Christine Nowak an der Herleitung von Kriterien mit der topologischen Methode von Wazewski.

Ihre Mitarbeit in bzw. Leitung von Industrieprojekten (u.a. österreichische Draukraftwerke, BBU-Chemie GmbH, Philips Haushaltgerätewerk Klagenfurt, Joh. Offner Holzindustrie GmbH [FFG-Projekte]) beinhaltete Entwicklung und Implementierung numerischer Verfahren sowie von Verfahren der diskreten Optimierung.

Inverse Probleme. Das Forschungsgebiet der Inversen Probleme beschäftigt sich mit dem Deduzieren solcher Größen, die direkten Messungen nicht zugänglich sind, aus indirekten Beobachtungen. Derartige Problemstellungen spielen in einer Vielzahl von Anwendungen in Technik, Naturwissenschaften, Medizin bis hin zu den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften eine Rolle. Die in unserer Arbeitsgruppe bearbeiteten Anwendungen liegen in Bereichen wie Materialcharakterisierung und -modellierung, zerstörungsfreie Werkstoffprüfung und Bildverarbeitung. Die meisten dieser hochkomplexen Systeme und Prozesse werden durch gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen beschrieben. Dementsprechend sind auch mathematische Modellbildung sowie Analysis und Numerik partieller Differentialgleichungen wesentlicher Bestandteil unserer Arbeit. Insbesondere beschäftigen wir uns mit hysteresebehafteten Vorgängen bei sogenannten intelligenten Materialien und mit Modellen der nichtlinearen Akustik (FWF-Projekt *Mathematics of Nonlinear Acoustics*, Leiterin Barbara Kaltenbacher) und unsere Beiträge reichen von der qualitativen Analyse über numerische Lösungsverfahren (nichtreflektierende Randbedingungen, Mehrfeldprobleme, Zeitintegration) bis hin zur Optimierung und zum eigentlichen Kerngebiet unserer Expertise, der Identifikation.

Die spezielle Herausforderung in der numerischen Lösung inverser Probleme liegt in deren inhärenter Instabilität in dem Sinn, dass kleine Störungen in den gemessenen Daten zu großen Abweichungen in der Lösung führen können. Daher müssen sogenannte Regularisierungsverfahren entwickelt und angewendet werden, um die Lösung des inversen Problems entlang eines stabilen Pfads zu approximieren. Da es sich in den genannten Anwendungen um hochdimensionale Problemstellungen handelt, spielt hier auch Effizienz eine wesentliche Rolle. Zu diesem Zweck verfolgen wir methodisch multilevel-Mehrgitter und adaptive Diskretisierungsstrategien. Eine weitere wesentliche Fragestellung ist die Identifizierbarkeit, das heißt, ob die Information aus den indirekten Beobachtungen ausreicht, um die gesuchten Größen eindeutig festzulegen. Die Wahl der Regularisierungterme beeinflusst entscheidend das Ergebnis der Regularisierung; deshalb ist ein wichtiges, uns beschäftigendes Forschungsthema die Regularisierung in allgemeinen und insbesondere auch in nichtreflexiven Banachräumen, welche beispielsweise in der Bildverarbeitung eine wichtige Rolle spielen und große mathematische Herausforderungen bei der Enwicklung und Analyse von Regularisierungsmethoden stellen (Elise Richter-Projekt *Regularisierungsmethoden in Banachräumen*, Leiterin Elena Resmerita).

Die Arbeitsgruppe besteht zurzeit aus Barbara Kaltenbacher, Elena Resmerita und Romana Boiger, sowie – aus Drittmitteln finanziert – Rainer Brunnhuber, Vanja Nikolić und Christiane Pöschl.

Institut für Mathematik – Forschungsschwerpunkt Diskrete Mathematik

Diskrete Mathematik. Die Interessen der Arbeitsgruppe Diskrete Mathematik umfassen Kombinatorik, Zahlentheorie, Mathematische Analyse von Algorithmen, Angewandte Algebra, Kryptographie und Graphentheorie.

Die Mathematische Analyse von Algorithmen wurde durch Donald Knuth als Gebiet umrissen. Ziel ist es, Parameter von diskreten Algorithmen, wie die Laufzeit, einer präzisen probabilistischen und asymptotischen Analyse zuzuführen. Als Hilfsmittel werden häufig Methoden der Kombinatorik, theoretischen Informatik, Wahrscheinlichkeitstheorie und der komplexen Analysis herangezogen. Einen Schwerpunkt in diesem Bereich am Institut bilden die effiziente Implementation und die Analyse von arithmetischer Operationen in abelschen Gruppen wie z.B. in der Punktgruppe elliptischer Kurven. Dies findet Anwendungen in der asymmetrischen Kryptographie.

Die Kryptographie bildet wie eingangs erwähnt seit vielen Jahren einen Forschungsschwerpunkt des Instituts. Derzeit wird etwa in einem von der FFG geförderten Forschungsprojekt mit der Villacher Firma *Technikon* und der FH Hagenberg an der Entwicklung und Adaptierung von Verfahren der Kryptographie und der Codierungstheorie für den Einsatz im Zusammenhang mit *Physically unclonable functions* gearbeitet. Dabei werden Unterschiede, die sich im Fertigungsprozess von Chips natürlich ergeben, verwendet, um diese eindeutig identifizierbar zu machen und um kryptographische Schlüssel daraus zu generieren.

Neben den Anwendungen der Algebra und Zahlentheorie in der Kryptographie werden Rekursionsfolgen, Polynome, Polynomfunktionen und rationale Funktionen auf kommutativen Ringen, insbesondere Restklassenringen und endlichen Körpern, theoretisch untersucht. Die Entwicklung und Analyse effizienter Algorithmen etwa zum Auswerten von Polynomfunktionen oder Primzahltests spielen dabei eine wesentliche Rolle.

Im Bereich der Graphentheorie werden extremale Graphen bzgl. verschiedener topologischer Indizes charakterisiert und asymptotisch analysiert. Als Indizes werden beispielsweise der Wiener-Index (Summe der paarweisen Distanzen der Knoten), Merrifield-Simmons-Index (Anzahl der unabhängigen Knotenmengen) und der Hosoya-Index (Anzahl der Matchings) untersucht. Solche Indizes sind auch in der theoretischen Chemie von Interesse, wo versucht wird, physiko-chemische Eigenschaften von Molekülen durch Indizes der zugehörigen Graphen zu verstehen.

Die Arbeitsgruppe besteht zurzeit aus einem Professor (Clemens Heuberger), weiters aus Willibald More, Nina Haug (derzeit karenziert), Sara Kropf als Vertretung sowie einem aus Drittmitteln finanzierten wissenschaftlichen Mitarbeiter (Benjamin Hackl). Weiters wird sie durch em.Prof. Winfried Müller in Forschung und Lehre unterstützt.

Optimierung. Die Forschungsinteressen der Arbeitsgruppe Optimierung liegen in der algorithmischen Behandlung von NP-schweren kombinatorischen Optimierungsaufgaben. Da für derartige Probleme keine effizienten Algorithmen bekannt sind und möglicherweise gar nicht existieren, stellt sich aus praktischer Sicht die Frage nach effizienten Näherungsmethoden.

Der jetzt schon „klassische“ Zugang mittels polyedrischer Kombinatorik hat sich für eine Vielzahl von Problemklassen als sehr zufriedenstellend herausgestellt, Stichwort „Rundreiseproblem“. Dieser Zugang basiert auf linearen Relaxierungen und verwendet als algorithmisches Zugpferd die Simplexmethode mit ihren reichhaltigen Reoptimierungsmöglichkeiten, die eine iterative Verfeinerung der Approximation erheblich erleichtern.

Bei einer Reihe von Graphenproblemen hat sich allerdings gezeigt, dass man mit rein linearen Ansätzen die Menge der zulässigen Punkte des Problems nur sehr ungenau beschreiben kann. Beispielhaft seien hier das Problem der Bestimmung der chromatischen Zahl eines Graphen und das Maximalschnittproblem genannt. Diesen Problemen ist gemeinsam, dass sie auf natürliche Weise als Optimierungsaufgabe mit quadratischer Zielfunktion auf einer relativ einfachen kombinatorischen Struktur darstellbar sind.

Der polyedrische Zugang erfordert entweder eine stückweise lineare Approximation oder eine höherdimensionale Einbettung des Problems. Im Gegensatz dazu bieten „Matrixrelaxierungen“ die Möglichkeit, quadratische Terme direkt zu behandeln. Dabei wird die zulässige Menge, bestehend aus semidefiniten Matrizen mit Rang 1, eingebettet in den Kegel der semidefiniten Matrizen.

Die Arbeitsgruppe untersucht solche Matrixrelaxierungen in Verbindung mit konvexer Analysis. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf linearen Optimierungsaufgaben über dem Kegel der positiv semidefiniten Matrizen, die Nichtlinearität liegt somit nur im Kegel. Die Variablen bei derartigen Problemen sind semidefinite symmetrische Matrizen, deren Elemente noch zusätzliche lineare Bedingungen erfüllen. Eine Reihe von Graphenzerlegungsproblemen führt auf derartige Matrixrelaxierungen. Die algorithmische Herausforderung liegt in der Behandlung großer Instanzen, etwa mit Matrizen der Ordnung 1.000 und einer Vielzahl an kombinatorischen Nebenbedingungen. Dazu werden neben Standardmethoden der nichtlinearen Optimierung auch Subgradientenmethoden und Projektionstechniken verwendet. Die von der Arbeitsgruppe betreute Internetseite BiqMac (*http://biqmac.uni-klu.ac.at*) bietet die Möglichkeit, quadratische Probleme mit 0-1-Variablen exakt zu lösen.

Die Arbeitsgruppe hat in den letzten Jahren an mehreren EU-Projekten teilgenommen und besteht aus einem Professor (Franz Rendl), einer Dozentin (Angelika Wiegele) und einem Universitätsassistenten (Philipp Hungerländer).

Institut für Mathematik – Didaktik und Philosophie der Mathematik

Neben den genannten Fachgebieten der Mathematik werden am Institut auch Fragen des Lehrens und Lernens von Mathematik von Willi Dörfler und Gert Kadunz untersucht. In den letzten Jahren konzentrierten sich die entsprechenden Arbeiten auf Fragen des Verhältnisses von Semiotik und Mathematikdidaktik, auf Fragen der Visualisierung, auf das Lernen von Geometrie und auf den Einsatz des Computers im Unterricht. In Ergänzung zu diesen Fragestellungen werden auch Grundlagenfragen der Mathematikdidaktik aus epistemologischer und ontologischer Sicht behandelt. Als Beispiele seien die Verwendung der Semiotik des Charles S.Peirce sowie der Philosophie der Mathematik des Ludwig Wittgenstein genannt. Resultate dieser Arbeiten finden sich in jüngst publizierten Bänden.

Administrativ und technisch unterstützt wird das Institut für Mathematik derzeit durch Christa Mitterfellner, Anita Wachter, Claudia Waldemeier und Andreas Starchel.

Institut für Statistik

Mit der Gründung der Fakultät für Technische Wissenschaften entstand im Jahr 2007 aus der früheren Abteilung für Angewandte Statistik (1994–2006 am Institut für Mathematik beheimatet) das Institut für Statistik, dem sich der damalige Inhaber des Lehrstuhls für „Analysis unter besonderer Berücksichtigung der Didaktik der Analysis", Haro Stettner, anschloss.

Das Institut für Statistik wird seit seiner Gründung von Jürgen Pilz geleitet, hat zwei weitere assoziierte Professoren (Manfred Borovcnik und Gunter Spöck), einen Universitätsassistenten (Albrecht Gebhardt) und wird in Forschung und Lehre von Em.Prof. H. Stettner, vom über ein EU-Projekt angestellten Projektassistenten Daniel Kurz und von mehreren ehemaligen Doktoranden und Absolventen unterstützt (H. Kazianka, ÖNB; H. Lewitschnig, Infineon; G. Buchacher, Hypo Alpe-Adria-Bank). Hinzu kommen in regelmäßiger Folge pakistanische Doktoranden, die über ein Stipendium (Higher Education Commission of Pakistan) am Institut forschen und promovieren; im Februar 2013 hat M. Mohsin sein Doktoratsstudium erfolgreich abgeschlossen, F. Khan beginnt im März 2013 mit dem PhD-Studium. Im aktuellen Entwicklungsplan der Univ. Klagenfurt ist ab Herbst 2014 die Einrichtung einer weiteren Professur „Stochastische Prozesse“ geplant. In der Forschung wird am Institut für Statistik in folgenden Themenbereichen gearbeitet:

— Statistische Bildung (Educational Statistics, M. Borovcnik)
— Biometrie und medizinische Statistik (M. Borovcnik und H. Stettner), einschließlich medizinisch-statistischer Bildverarbeitung (J. Pilz und G. Spöck)
— Räumliche Datenanalyse (Spatial Statistics) sowie statistische Versuchsplanung und deren Anwendungen in den Ingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften (J. Pilz, G. Spöck, A. Gebhardt und H. Kazianka)
— Computational Statistics inkl. Entwicklung von statistischer Software (G. Spöck, A. Gebhardt, H. Kazianka).

In der räumlichen Statistik, die von Anfang an einen Schwerpunkt der Forschung am Institut bildet, beschäftigen wir uns mit der Modellierung und Analyse von mehrdimensionalen Daten, die raum-zeitlichen Prozessabläufen unterliegen. Im Mittelpunkt stehen dabei Bayessche Methoden, die neben aktuellen Daten auch subjektive Daten (z.B. Expertenwissen) in die statistischen Analysen einbeziehen, und Copula-basierte Methoden, mit denen es möglich ist, mehrdimensionale Verteilungen zu untersuchen, bei denen die einzelnen Komponenten nicht stochastisch unabhängig voneinander sein müssen und jeweils verschiedenen Verteilungsgesetzen genügen können. In jüngster Zeit ist dabei die Analyse und Entwicklung sogenannter *objective priors* in den Fokus gerückt; dies sind (verallgemeinerte) a priori-Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die invariant gegenüber Parametertransformationen sind und keine unerwünschten zusätzlichen Informationen in die Randverteilung der Daten einbringen, andererseits aber zu normierten a posteriori-Verteilungen führen. Das breite Anwendungsspektrum dieser Forschungsergebnisse hat in der Vergangenheit zu mehreren EU-Projekten geführt, u.a. im Bereich des europaweiten statistischen Umweltmonitoring (*Center for information and valorisation of European radioactive contaminated territories* und *Interoperability and Automatic Mapping of Environmental Variables*) sowie der Sicherheit der Kommunikation in quantenkryptographischen Computer-Netzwerken (*Secure Communication in Quantum Cryptographic Networks*). Auf dem Gebiet der Bayesschen räumlichen Statistik wurden Forschungsergebnisse mit hoher internationaler Sichtbarkeit erzielt, die sich u.a. in Publikationen in internationalen Top-Journalen, in der Mitwirkung in Editorial Boards renommierter Statistik-Zeitschriften und der Einladung zur maßgeblichen Mitwirkung an der 2011 im Springer-Verlag erschienenen *International Encyclopedia of Statistical Science* widerspiegeln.

Die Forschungen zur (medizinisch-)statistischen Bildverarbeitung werden seit Jahren in Kooperation mit dem größten außeruniversitären Forschungszentrum

Kärntens, der Carinthian Tech Research (CTR) AG in Villach, durchgeführt. Diese Kooperation hat zu mehereren FFG-Projekten (inkl. eines BRIDGE-Projekts) geführt; das Institut für Statistik ist ein gefragter Partner im Rahmen des von der CTR AG geführten COMET-K1-Zentrums. Daneben hat sich in der Forschung ein weiterer Schwerpunkt, „Statistische Methoden der Zuverlässigkeits- und Risikoanalyse in der Halbleiterindustrie“, herausgebildet, der insbesondere durch die enge Kooperation des Instituts mit der Siemens Infineon AG und dem Kompetenzzentrum für Automobil- und Industrieelektronik (KAI), beide in Villach beheimatet, forciert wurde. Diese Kooperation hat zu einer ganzen Reihe von Diplomarbeiten und Dissertationsprojekten geführt, in denen u.a. folgende Themen behandelt wurden:

— Statistische Methoden für Run-to-Run Control in der Halbleiterlithographie
— Advanced Process Control (APC) auf der Basis von multivariaten Kontrollkarten und Bayesschen Dynamischen Modellen
— Statistische Methoden der Drifterkennung bei elektrischen Testparametern und der Bewertung von Burn-in-Strategien zur Erkennung von Frühausfällen
— Statistische Versuchsplanung im Hinblick auf beschleunigte Lebensdauertests und Zuverlässigkeitsanalysen.

Gegenwärtig sind Mitarbeiter des Instituts für Statistik im ENIAC-EU-Projekt „EPT300“ unter Koordination der Infineon AG mit der Modellierung von Frühausfällen von Chips für die neue 300 mm-Wafer-Technologie befasst.

Einen Schwerpunkt in der forschungsgeleiteten Lehre bilden Bayessche statistische Methoden und deren Anwendungen. Im Rahmen des Masterstudiums „Technische Mathematik“ können sich Studenten in der „Angewandten Statistik“ vertiefen und insbesondere die Anwendung von Bayesschen Methoden in der statistischen Qualitätskontrolle, der Zeitreihenanalyse, der statistischen Versuchsplanung, der räumlichen Datenanalyse und der statistischen Analyse und Klassifikation hyperspektraler Daten kennenlernen.

Institut für Didaktik der Mathematik

Im Jahr 2007 entstand aus der Abteilung für Didaktik der Mathematik (zunächst am Institut für Mathematik, später an der Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung) das Institut für Didaktik der Mathematik. Dem ging ein vom damaligen Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur im Jahr 2005 initiierter und erstfinanzierter Ausbau der Abteilung zu einem „Österreichischen Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik“ voraus. Seit 2012 ist das Institut dem Universitätszentrum *School of Education* zugeordnet. Dem Institut für Didaktik der Mathematik sind zugeordnet bzw. teilzugeordnet die Professoren und Professorinnen Werner Peschek (als Leiter), Roland Fischer und Edith Schneider, ein Emeritus (Willibald Dörfler), weiters zwei Assistenzprofessoren

(Franz Picher, Andreas Vohns), je eine Assistentin mit und ohne Doktorat (Annika Wille, Theresa Krassnigg) sowie ein mitverwendeter Gymnasiallehrer (Bernhard Kröpfl). Administrativ wird das Institut von zwei Sekretärinnen (Margit Pirker-Zedlacher und Susanne Rauchenwald) unterstützt. Eine neu eingerichtete Professur für Didaktik der Mathematik in der Grundschule (die erste derartige Professur in Österreich) soll – mit entsprechender Ausstattung – bis zum Sommer 2013 besetzt werden (Berufungsverfahren läuft).

Im Bereich *Forschung und Entwicklung* wird am Institut insbesondere in folgenden Themengebieten gearbeitet und publiziert:

— Bildungstheoretische Aspekte des Mathematikunterrichts
— Stoffdidaktische, sachanalytische und curriculare Fragen des Mathematikunterrichts
— Mathematische Lernprozesse, kognitive Begriffsentwicklung
— Assessment: PISA, Standards Mathematik für die 8. Schulstufe, Zentralmatura
— Philosophie der Mathematik
— Akzeptanz und Wirksamkeit von Lehrer(innen)bildung (im Aufbau)

Im Bereich der *Lehre* ist das Institut für die fachdidaktische und schulmathematische Ausbildung der Studierenden im Unterrichtsfach Mathematik zuständig. Seit vielen Jahren ist die *Lehrerfort- und Weiterbildung* ein wesentliches Aufgabengebiet des Instituts. Neben zahlreichen Einzelveranstaltungen sind hier insbesondere die seit vielen Jahren von Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Instituts durchgeführten, viersemestrigen Universitätslehrgänge „Pädagogik und Fachdidaktik für Lehrer(innen) – Mathematik“ zu nennen.

Nicht unerwähnt soll schließlich auch das seit 2003 angebotene „Doktorand(inn)enkolleg Didaktik der Mathematik“ bleiben, das auf die *Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses* im Bereich Mathematikdidaktik abzielt, zugleich aber auch ein Angebot für Lehrerinnen und Lehrer darstellt, durch wissenschaftliche (Weiter-)Qualifizierung ihre Professionalität weiterzuentwickeln.

Das Institut ist in der nationalen und internationalen mathematikdidaktischen Community gut verankert und positioniert, seine Mitglieder nehmen innerhalb der wissenschaftlichen Community zahlreiche Funktionen wahr und sind häufig als Gutachterinnen und Gutachter sowie in Beratungsfunktionen tätig.

Institut für Mathematik: Universitätsstraße 65–67, 9020 Klagenfurt
http://www.uni-klu.ac.at/tewi/tema/math

Institut für Statistik: Universitätsstraße 65–67, 9020 Klagenfurt
http://www.stat.aau.at

Institut für Didaktik der Mathematik: Sterneckstraße 15, 9010 Klagenfurt
http://www.uni-klu.ac.at/idm

Buchbesprechungen

F. Bornemann: Konkrete Analysis. Für Studierende der Informatik. Mit CD-ROM. (eXamen.press.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, ix+206 S. ISBN 978-3-540-70845-2 P/b € 24,95.

Auch wenn es von Studierenden gelegentlich anders empfunden wird, ist eine grundlegende Analysis-Ausbildung ein wichtiger Bestandteil eines Studiums der Informatik. So nennt der Autor des vorliegenden Buchs in einem einleitenden Abschnitt „Warum Analysis für Informatiker?" Bildverarbeitung und asymptotische Laufzeitanalysen als „Rechtfertigung" für die Analysis-Ausbildung in diesem Studium. Klarerweise muss sich allerdings die Gestaltung einer solchen Vorlesung nach den Bedürfnissen der „Abnehmer" richten, und diese sind für Studierende der Informatik eben anders als für solche der Physik oder des Maschinenbaus. Wohl auch in Anspielung auf den bekannten Begriff "Concrete Mathematics", der als Akronym aus *con*tinuous und dis*crete* entstanden ist, verwendet der Autor den Begriff „konkret" zur Umschreibung des passenden Zugangs zur Analysis für ein Informatik-Studium. Bei der Auswahl der Beispiele, bei der gelegentlichen Beschreibung von Sachverhalten durch einfache Programmtexte sowie bei der Auswahl des Stoffs wird auf das Zielpublikum Rücksicht genommen. Das Buch kann als Begleitbuch für eine Analysis-Vorlesung für ein Studium der Informatik für Studierende sowie auch als Textbuch für Dozenten empfohlen werden.

P. Grabner (Graz)

B. Conrad, O. Gabber, G. Prasad: Pseudo-reductive Groups. (New Mathematical Monographs 17.) Cambridge University Press, 2010, xx+533 S. ISBN 978-0-521-19560-7 H/b £ 65,–.

Die Theorie zusammenhängender reduktiver algebraischer Gruppen über einem beliebigen Körper ist ein grundlegender Baustein im Gebäude der Reinen Mathematik und hat in der algebraischen Geometrie und der Arithmetik zu tiefen Resultaten beigetragen. Hier sei nur an die weitreichenden Ergebnisse von Borel, Serre, Mostow und Tamagawa zu algebraischen Gruppen über Zahlkörpern erinnert: Endlichkeitssätze und Kompaktheitskriterien. Über Körpern der Charakteristik 0 oder allgemeiner, perfekten Körpern (wie z.B. endlichen Körpern) ist es relativ elementar, Fragen zu linearen algebraischen auf den Fall der zusammenhängenden reduktiven Gruppen zu reduzieren. Im Falle eines nicht-perfekten Grundkörpers k, notwendigerweise von Primzahlcharakteristik p (d.h. die Abbildung $x \mapsto x^p$ ist kein Automorphismus von k), also etwa im Falle von Funktionenkörpern, ist dies nicht möglich. Dies macht eine Erweiterung der Theorie algebraischer Gruppen notwendig, auch angesichts der in Aussicht stehenden Anwendungen in der Arithmetik. J. Tits hat in Kursen am Collège de France in den Jahren 1991–93 begonnen, eine Theorie pseudo-reduktiver Gruppen zu entwickeln. Da die Eigenschaft der Pseudo-Reduktivität nicht geometrischer Natur ist, sie insbesondere i.a. nicht vererbbar ist beim Übergang von einem nicht-perfekten Körper zum algebraischen Abschluss, muss die Strukturtheorie pseudo-reduktiver Gruppen neu entwickelt werden. Das vorliegende Buch ist das Ergebnis umfangreicher Vorarbeiten und muss als das grundlegende Referenzwerk zu einer Theorie pseudo-reduktiver algebraischer Gruppen angesehen werden. Das Interesse an einer solchen Theorie ist vorwiegend theoretischer Natur, weil es die offenen Strukturfragen zu Gruppen über nicht-perfekten Körpern beantwortet. Anwendungen wie die von B. Conrad, in denen er die erwähnten Endlichkeitssätze zu solchen für Gruppen über globalen Körpern positivere Charakteristik mittels der neuen Theorie verallgemeinert, rechtfertigen zudem die gemachte Arbeit. Es ist ein umfassendes Werk entstanden, das die Strukturtheorie und die Klassifikation pseudo-reduktiver Gruppen nebst vielen Anwendungen in sehr lesbarer Form enthält.

J. Schwermer (Wien)

A. Deutsch et al. (eds.): Mathematical Modeling of Biological Systems. Vol. I: Cellular Biophysics, Regulatory Networks, Development, Biomedicine, and Data Analysis. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2007, xviii+379 S. ISBN 978-0-8176-4557-1 H/b € 96,19. Vol. II: Epidemiology, Evolution and Ecology, Immunology, Neural Systems and the Brain, and Innovative Mathematical Methods. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2008, xviii+386 S. ISBN 978-0-8176-4555-7 H/b € 89,90.

These two volumes contain the proceedings of selected contributions presented on the European Conference on Mathematical and Theoretical Biology (ECMTB05) in Dresden, Germany, in the year 2005. The work covers a lot of topics in the field of mathematical modeling in the life sciences, ranging from the organizational principles of individual cells to the dynamics of large populations. The entire material, all peer-reviewed contributions, is organized in 10 parts, 5 parts per volume. The parts in volume I deal with cellular biophysics, regulatory networks, developmental biology, biomedical applications, and data analysis and model validation. The parts contained in volume II focuses on the areas of epidemiology, evolution and ecology, immunology, neural systems and the brain, and, finally, innovative mathematical methods and education. Both volumes represent numerous reference texts for reaserchers at the intersection of applied mathematics, experimental biology and medicine, biochemistry, and computer science.

G. Karigl (Wien)

E. Faou: Geometric Numerical Integration and Schrödinger Equations. (Zurich Lectures in Advanced Mathematics.) EMS, Zürich, 2012, viii+138 S. ISBN 978-3-03719-100-2 P/b € 32,–.

Geometric numerical integration is concerned with the question of whether numerical methods are able to correctly reproduce qualitative properties of differential equations over long times. Over the past 20 years, this has been a very active topic of research in numerical analysis. The present book is centered around the question to what extend we can reliably simulate the long time behavior of Hamiltonian partial differential equations with numerical methods. For the sake of a simple presentation, it focuses on the linear and certain nonlinear Schrödinger equations, subject to periodic boundary conditions. References to more general situations, however, are given. The book starts from some enlightening examples which display possible instability phenomena, mainly due to resonances. The remaining chapters then serve to rigorously explain these numerical observations with the help of a sound mathematical theory. In particular, mutual energy exchanges are studied that take place between the modes in cubic nonlinear Schrödinger equations.

This book by Faou is an elaboration of a graduate course held at ETH Zürich in spring 2010. It addresses graduate students and researchers that are looking for a concise introduction into the topic. It is also highly recommended for people working in the field of evolution equations, and it should not be missing from any serious mathematical library.

A. Ostermann (Innsbruck)

T. G. Faticoni: Modules over Endomorphism Rings. (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 130.) Cambridge University Press, 2010, xx+372 S. ISBN 978-0-521-19960-5 H/b £ 70,–.

This encyclopedia contains a collection of results in the study of endomorphism rings and their modules. The author has published these over a number of years. This book presents them in a compact form, with a motivating introduction and a comprehensive bibliography. As explained on the cover, the main idea behind the book is to study modules over a ring via their endomorphism ring. The book addresses graduate students and experts; it presents a thorough introduction to the field and contains results not easily available. The book starts with a preface containing a detailed outline of its contents as well as motivating examples. A preliminary chapter then gives results needed later.

The author has organized the main body of book in three parts: The study of a number-theoretic connection between a reduced torsion-free finite-rank (abbreviated as *rtffr*) group G and the quotient $E(G)$ of $\mathrm{End}(G)$ by $\mathcal{N}(\mathrm{End}(G))$; the study of the module and ideal theoretic connections between G and End(G); the study of the categorical connection between G, $\mathrm{End}(G)$ and certain point set topological spaces. The book contains 18 chapters, all with numerous examples and exercises to illustrate the material as well as a number of open problems for future research. It is very well written and accessible.

K. Baur (Graz)

M. Jarden: Algebraic Patching. (Springer Monographs in Mathematics.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, xxiii+290 S. ISBN 978-3-642-15127-9 H/b € 79,95.

The central problem of Galois theory (for a given field K) is to describe the absolute Galois group $\mathrm{Gal}(K)$ of K; a "less ambitious" version of this is the so-called *inverse Galois problem* which asks whether a given finite group G occurs as a Galois group over K, that is, as a finite quotient of $\mathrm{Gal}(K)$. It is a pleasant undergraduate exercise to show that $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_p)$ is the free procyclic group. Classical (and deeper) results (by Hilbert and Shafarevich and others) say, for example, that each symmetric group S_n, each alternating group A_n and each finite solvable group can be realized as a Galois group over $\mathbb{Q}$. Nevertheless, a complete solution to the inverse Galois problem for $\mathbb{Q}$ – let alone a full description of the absolute Galois group $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q})$ – seems to be out of reach at the present state. Over the years, interest in Galois theory has been extended to other base fields, in particular to function fields. *Algebraic patching* is a technique (going back to Haran and Völklein) which, roughly speaking, constructs (under appropriate circumstances) for a given field E and a given finite group G a Galois extension F of E with Galois group G. The presentation of this technique together with the most important of its applications is the objective of the book under review. Among the applications the following constitute a sample: (i) if C is an algebraically closed field then $\mathrm{Gal}\big(C(X)\big)$ is a free profinite group of rank $|C|$; (ii) for every field K and $n \geq 2$, the absolute Galois group $\mathrm{Gal}\big(K((X_1,\ldots,X_n))\big)$ is semifree.

K. Auinger (Wien)

N. Herrmann: The Beauty of Everyday Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012, xiii+138 S. ISBN 978-3-642-22103-3 P/b € 19,95.

Das vorliegende Buch wendet sich nach Angaben des Autors an Lehrerinnen und Lehrer, Studierende der Mathematik sowie an alle, die an ausgefallenen, unterhaltsamen Problemstellungen Gefallen finden. Gewinnen möchte er die Leserinnen und Leser durch eine umfangreiche Sammlung von Problemen. Das Buch verdient vor allem aus methodischer Sicht Aufmerksamkeit. Allem voran sind die in einfacher Sprache gehaltenen Problemanalysen, vor den Mathematisierungen der Modelle und den ausgeführten Lösungsschritten, zu nennen. Bemerkenswert ist auch der ständige Wechsel in den Darstellungsformen. Grafische Lösungen wechseln einander mit analytischen Lösungen ab. Interpretationen, Zusammenfassungen bzw. exemplarische Diskussionen schließen die Darstellungen der einzelnen Probleme ab. Zusätzlich werden Lösungen für bekannte Probleme modifiziert und mitunter begründeter Kritik unterzogen. Die einzelnen Aufstellungen lassen sich nach mitunter notwendigen kleineren Änderungen im Regelunterricht an einer Allgemeinbildenden und Berufsbildenden Höheren Schule behandeln. Das vorliegende Werk ist eine Fundgrube für einen modernen kompetenzorientierten Mathematikunterricht.

K. J. Fuchs (Salzburg)

K. Lux, H. Pahlings: Representations of Groups. A Computational Approach. (Cambridge studies in advanced mathematics 124.) Cambridge University Press, 2010, x+460 S. ISBN 978-0-521-76807-8 H/b £ 40,–.

This is a well written book guiding the reader to topics of research level in representation theory of finite groups. Besides classical topics including characters and the interplay between the representations of a group and its subgroups, approximately one third of the text is devoted to modular representation theory (including the discussion of several prominent conjectures in the area). From the very beginning and throughout the entire text, computational aspects are emphasized: a lot of concrete examples are explicitly computed (for example the character table of the Mathieu group M_{11} is calculated), and it is shown how the computer algebra system GAP can be employed to serve this purpose.

K. Auinger (Wien)

K. Nakanishi, W. Schlag: Invariant Manifolds and Dispersive Hamiltonian Evolution Equations. (Zurich Lectures in Advances Mathematics.) EMS, Zürich, 2011, 253 S. ISBN 978-3-03719-095-1 P/b € 38,–.

In the theory of ordinary differential equation the existence of center-stable manifolds is well-understood. In the theory of partial differential equations this topic is relatively new. Recently the authors (partly in cooperation with others) have shown that for certain energy subcritical equations the center-stable manifold associated with the ground state appears as a hypersurface which separates a region of finite-time blowup from one which exhibits global solutions which scatter to zero. The book gives a complete, self-contained proof of this novel result for radial solutions of the cubic, focusing, Klein-Gordon equation in three spatial dimensions. Some extensions to nonradial solutions and other equations are sketched in the final chapter.

The book grew out of lectures by the authors and in particular a *Nachdiplomvorlesung* held in 2010 at the ETH by the last author. It is intended for graduate students but requires a solid background in partial differential equations. It is well written and an ideal introduction to this fascinating new subject by two of the leading experts.

G. Teschl (Wien)

M. S. Petkovic: Famous Puzzles of Great Mathematicians. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, xviii+325 S. ISBN 978-0-8218-4814-2 P/b $ 36,–.

Das vorliegende Buch gibt eine Sammlung von 180 mathematischen Rätseln aus mehr als 2.000 Jahren. Die Rätsel werden jeweils einem berühmten Mathematiker zugeordnet, dessen Biographie kurz präsentiert wird, außerdem wird zumindest eine Lösung angegeben. Das Niveau der gestellten Aufgaben reicht von einfachen Rätseln, wie sie etwa in Zeitungen gestellt werden können, bis hin zu Problemen, die ohne mathematische Vorbildung kaum zu behandeln sind. Das Buch ist nach Themengebieten gegliedert:

Unterhaltungsmathematik (Einleitung) / *Arithmetik* / *Zahlentheorie* / *Geometrie* / *Kachelungen und Packungen* / *Physik* / *Kombinatorik* / *Wahrscheinlichkeit* / *Graphen* / *Verschiedenes*.

Insgesamt kann diess Buch als Quelle mathematischer Unterhaltung wertvolle Dienste leisten.

P. Grabner (Graz)

C. Popescu, K. Rubin, A. Silverberg (eds.): Arithmetic of *L*-functions. (IAS/Park City Mathematics Series, Vol. 18.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011, xiv+499 S. ISBN 978-0-8218-5320-7 H/b $ 84,–.

Der vorliegende Band entstand aus einer im Jahr 2009 abgehaltenen dreiwöchigen Sommerschule und enthält die gedruckte Version der Vorlesungen. Die Vorlesungen sind drei Themenbereichen zugeordnet:

1. Die Stark-Vermutung, mit Beiträgen von John Tate, Harold Stark, Cristian D. Popescu, Manfred Kolster, David Burns
2. Die Birch und Swinnerton-Dyer-(BSD-)Vermutung, mit Beiträgen von Alice Silverberg, Benedict H. Gross, Douglas Ulmer, Bryan Birch, Vinayak Vatsal, Guido Kings
3. Analytische und kohomologische Methoden, mit Beiträgen von David E. Rohrlich und Karl Rubin.

Den Herausgebern ist es auf diese Weise gelungen, in diesem Werk von gut 500 Seiten einen breiten Überblick zu geben und verschiedene Blickwinkel einzunehmen. Beispielsweise gibt der Artikel von Silverberg eine Einführung in die elliptschen Kurven, und der von Vatsal eine Einführung in die Theore der komplexen Multiplikation. Gross erläutert die BSD-Vermutung über globalen Körpern und Ulmer über Funktionenkörpern. Birch berichtet über Heegners Ansatz zum Klassenzahl-Problem, und Kings über den Zusammenhang der BSD-Vermutung mit der äquivarianten Tamagawazahl-Vermutung.

Als Autoren konnten bekannte Experten gewonnen werden, die die Entwicklung des Themas entscheidend mitgeprägt haben. Das vorliegende Buch sollte insbesondere für Doktoranden von Nutzen sein, und in Bibliotheken als Referenz zur Verfügung stehen.

C. Elsholtz (Graz)

W. Rautenberg: Messen und Zählen. Eine einfache Konstruktion der reellen Zahlen. (Berliner Studienreihe zur Mathematik, Band 18.) Heldermann Verlag, Lemgo, 2007, xii+188 S. ISBN 978-3-88538-118-1 P/b € 22,–.

Dieses Buch kann als Nachfolgewerk der „Elementaren Grundlagen der Analysis" (BI-Wissenschaftsverlag, 1993) des im Jahr 2011 verstorbenen Autors angesehen werden. Es handelt sich um eine etwas eigenwillige, von der üblichen Darstellung abweichende Einführung in den Aufbau unseres Zahlensystems, insbesondere der reellen Zahlen.

Darin werden die reellen Zahlen – ausgehend von einem naiven Verständnis der natürlichen Zahlen und ihrer arithmetischen Eigenschaften – zunächst als endliche oder nicht abbrechende Dezimalfolgen eingeführt (wobei Dezimalzahlen mit „Neunerperiode" vorerst ausgeschlossen sind). Mithilfe der Anordnung und des Satzes von der oberen Grenze wird dann die Verbindung mit den Dedekindschen Schnitten hergestellt, die reelle Arithmetik (zunächst für endliche Dezimalzahlen mittles Kommaverschiebung, dann für beliebige nicht negative Dezimalzahlen mittels des Grenzwerts monotoner beschränkter Folgen) aufgebaut und das Fundament für die reelle Analysis (Zwischenwertsatz, Potenzen, Exponentialfunktion und Logarithmus, usw.) gelegt. Schließlich kommen noch die negativen und die komplexen Zahlen dazu. Ein weiterer Abschnitt ist den reellen Zahlen als Maßzahlen und einer Theorie des Messens gewidmet.

Im letzten Teil des Buchs wird schließlich der Aufbau des Systems der natürlichen Zahlen thematisiert. In den ersten Abschnitten werden immer wieder Prinzipien wie z.B. vollständige Induktion oder der Dedekindsche Rekursionssatz latent verwendet – ein Vorgehen, das dann im letzten Abschnitt dem Leser bewusst gemacht wird und seine Rechtfertigung erfährt. Ausgehend von den Peano-Axiomen, werden Konstruktion, Existenz und Eindeutigkeit, Anordnung und Arithmetik der natürlichen Zahlen eingehend behandelt.

Alles in allem handelt es sich bei diesem Buch um eine ungewöhnliche, aber gelungene Darstellung, welche didaktisch gut aufgebaut, mit Übungsaufgaben und vollständigen Lösungen versehen, als Grundlage einer Spezialvorlesung oder eines Seminars für Studierende der Fächer Mathematik oder Informatik, insbesondere aber auch für Lehramtskandidaten, gut geeignet ist.

G. Karigl (Wien)

F. Shahidi: Eisenstein Series and Automorphic *L*-Functions. (AMS Colloquium Publications, Vol. 58.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010, vi+210 S. ISBN 978-0-8218-4989-7 H/b $ 44,–.

Dieses Buch behandelt eines der tiefgründigsten Kapitel der Mathematik: die Theorie der Eisensteinreihen und L-Funktionen, die einen essentiellen Bestandteil des berühmten Langlands-Programms darstellen.

Für Mathematiker, die auf diesem Gebiet arbeiten, stellt das Buch mit Sicherheit eine immens wertvolle Quelle dar. Der Autor ist ein ausgewiesener Kenner der Materie, die Langlands-Shahidi-Methode ist ja sogar nach ihm benannt. Obwohl das Buch aus einer Vorlesung hervorgegangen ist, ist es für den Einsteiger jedoch nur bedingt und mit gründlichem Vorstudium zu empfehlen – es wird dem Leser einiges an Vorkenntnissen abverlangt.

Shahidi bietet eine umfangreiche wie auch detaillierte Darstellung der Materie, ergänzt durch ein ausführliches Literaturverzeichnis. Er weist allerdings auch selbst darauf hin, dass vollständige Beweise aller Resultate den Rahmen des Buchs bei Weitem sprengen würden. Zunächst werden reduktive Gruppen, deren L-Gruppen und L-Funktionen eingeführt und erläutert. Die eigentliche Langlands-Shahidi-Methode bildet den Hauptteil des Buchs. Am Ende werden verschiedene Anwendungen der Methode, wie etwa die Ramanujan-Vermutung und die Selberg-Vermutung, besprochen.

S. Wagner (Stellenbosch)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Reziprozitätsabkommen mit der Schweizerischen Math. Gesellschaft

ÖMG and SMG conclude the following reciprocity agreement, which takes effect on January 1, 2013: An individual who is a member of ÖMG and who is not normally resident in Switzerland is eligible for reciprocal membership of SMG. The annual fee for reciprocal Members of the SMG is 50% of the rate for ordinary members of SMG. Reciprocal members are entitled to the same membership benefits as ordinary members, including access to publications at the same rate as ordinary members, and are eligible for all the privileges of ordinary members.

(Michael Drmota)

Reziprozitätsabkommen mit der Slowenischen Math. Gesellschaft

ÖMG and DMFAS (Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije) signed a reciprocity agreement, which took effect on December 14, 2012. Any individual ÖMG member is eligible for reciprocal membership of DMFAS. The annual fee for reciprocal Members of the DMFAS is 50% of the rate for ordinary members of DMFAS. Reciprocal members are entitled to the same membership benefits as ordinary members, including access to publications at the same rate as ordinary members, and are eligible for all the privileges of ordinary members.

(Michael Drmota)

Logo der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Die ÖMG hat ein neues Logo, welches auf der Webseite der ÖMG verfügbar ist (*http://www.oemg.ac.at/oemg.gif*).

(Michael Drmota)

Protokoll der Generalversammlung der ÖMG

am Freitag, den 23. November 2012, 16:30 Uhr, an der Universität Wien, UZA II, HS 3, Nordbergstr. 15, 1090 Wien

Anwesend (a) aus dem erweiterten Vorstand: Drmota, Hellekalek, Humenberger, Kirschenhofer, Lamel, Larcher, Oberguggenberger, Ostermann, Pillichshammer, Schranz-Kirlinger, und (b) sowie weitere 22 Mitglieder der ÖMG.

TOP 1: Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit. Die Beschlussfähigkeit ist gegeben. Der Vorsitzende stellt den Antrag, die Tagesordnung durch einen weiteren Tagesordnungspunkt (3a) zu ergänzen, um die anstehende Frage einer eventuellen Erhöhung des Mitgliedsbeitrags zu besprechen. Dieser Antrag wird einstimmig angenommen.

TOP 2: Berichte des Vorsitzenden und weiterer Vorstandsmitglieder, insbesondere des Kassiers. Berichte des Vorsitzenden:

(a) Die ÖMG verwendet seit Kurzem ein neues Logo. Es wurde von einem Graphiker erstellt und bereits bei der Einladung zur diesjährigen Generalversammlung verwendet.

(b) Der Sekretär der ÖMG, Dozent F. Urbanek, ist in Pension gegangen. Frau B. Dolezal-Rainer hat diese Agenden übernommen.

(c) Kollege R. Mlitz hat sein Tätigkeit als Koordinator der Buchbesprechungen für die *IMN* und als Ansprechperson für Zeitschriftenverkäufe zurückgelegt. Der Vorsitzende dankt im Namen des Vorstands und aller Mitglieder Herrn Mlitz für seine langjährige Mitarbeit. In Zukunft wird B. Gittenberger die Buchbesprechungen der *IMN* betreuen.
Die TU Wien hat den Vertrag über Zeitschriftenankäufe von der ÖMG storniert. Es wird nun versucht, die durch Austausch-Abonnements eingehenden Zeitschriften an andere Bibliotheken zu verkaufen.

(d) Die „Interviews mit Mathematikern" (derzeit: Gruber, Hlawka, Niederreiter, Schmetterer, Schmidt, Vietoris) sind nun gesammelt auf der Homepage der ÖMG zu finden, siehe *http://www.oemg.ac.at/Gespraeche*.

(e) Die ÖMG-DMV-Tagung 2013 in Innsbruck ist im Internet bereits mit einer Homepage präsent, siehe *http://math-oemg-dmv-2013.uibk.ac.at/*. Es konnten attraktive Hauptvortragende gewonnen werden, der öffentliche Vortrag wird von K. Sigmund gehalten werden. Die Anmeldung ist bereits offen.

(f) Die CSASC 2013, die gemeinsame Konferenz der Katalanischen, Slowenischen, Österreichischen, Slowakischen und Tschechischen Mathematischen Gesellschaft findet Anfang Juni in Koper (Slowenien) statt.

(g) Mit der Slowenischen Mathematischen Gesellschaft wurde kürzlich ein Reziprozitätsabkommen abgeschlossen; ein weiteres mit der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft ist in Vorbereitung[1].

[1] und mittlerweile auch abgeschlossen

(h) Der derzeitige Mitgliedsstand der Gesellschaft beträgt 524 Mitglieder im Inland und 112 im Ausland. Der Zuwachs in den letzten drei Jahren beträgt damit etwa 70 Personen.

(i) Die Gesellschaft hatte im letzten Jahr zwei Todesfälle zu beklagen. Die anwesenden Mitglieder erheben sich zu einer Trauerminute.

Bericht des Kassiers: G. Larcher berichtet über die Vermögenslage der Gesellschaft. Mit Stand Ende 2011 betrug das Vermögen ca. € 170.000,–. Das ist zwar ein leichter Rückgang gegenüber dem Vorjahr aber dennoch der zweithöchste, je erreichte Stand. Die Ausgaben 2011 betrugen € 28.025,–, die Einnahmen € 23.013,–. Die Einnahmen waren 2011 etwas unterdurchschnittlich, unter anderem weil in diesem Jahr keine Tagungseinnahmen anfielen. Man einigt sich in der Versammlung, Erinnerungen an säumige Mitglieder zu verschicken, ausstehende Beiträge einzuzahlen.

TOP 3: Berichte aus den Landessektionen. Die Vorsitzenden der Landessektionen berichten über erfolgte Emeritierungen sowie von verschiedenen Berufungsverfahren, die im letzten Jahr abgeschlossen wurden. Weiters erwähnt Pillichshammer, dass die Sektion Linz eine Projektwoche für Schülerinnen und Schüler gefördert hat.

TOP 3a: Mitgliedsbeitrag. Der Mitgliedsbeitrag der ÖMG wurde seit etwa 10 Jahren nicht mehr verändert und sollte der allgemeinen Teuerung angepasst werden. Der Vorsitzende berichtet, dass in der Vorstandssitzung diese Frage ausführlich erörtert wurde und der Vorschlag kam, den Beitrag mit Wirksamkeit vom 1. Jänner 2013 von € 20 auf € 25 pro Jahr anzuheben. Er stellt daraufhin einen entsprechenden Antrag um Erhöhung um € 5. Die Generalversammlung stimmt diesem Antrag per acclamationem zu.

TOP 4: Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands. H.G. Feichtinger erklärt, auch im Namen des zweiten Rechnungsprüfers P. Szmolyan, dass alle Unterlagen geprüft und keine Unstimmigkeiten gefunden wurden. Er schlägt daher eine Entlastung des Vorstands vor. Diese Entlastung wird von der Generalversammlung per acclamationem angenommen.

TOP 5: Neuwahl der Landesvorsitzenden. Gespräche im Vorfeld haben gezeigt, dass alle Vorsitzenden der Landessektionen bereit wären, ihr Amt eine weitere Periode auszuüben. Der Vorsitzende stellt daraufhin den Antrag, die derzeitigen Vorsitzenden wieder zu bestellen; das sind: Woess (Graz), Kirchner (Innsbruck), Nowak (Klagenfurt), Pillichshammer (Linz), Hellekalek (Salzburg) und Krattenthaler (Wien). Dieser Antrag wird einstimmig angenommen.

TOP 6: Verleihung einer Ehrenmitgliedschaft. Der Vorsitzende informiert die Generalversammlung, dass nach ausführlicher Beratung im Vorstand beschlossen wurde, Herrn Harald Niederreiter die Ehrenmitgliedschaft der ÖMG zu verleihen. Der Beirat wurde statutengemäß informiert. Leider kann Herr Niederreiter bei der heutigen Sitzung nicht anwesend sein. Die Verleihung wird deshalb zu einem späteren Zeitpunkt nachgeholt werden.

TOP 7: Verleihung des Förderungspreises und der Studienpreise. Den diesjährigen Förderpreis der ÖMG erhält Mathias Beiglböck. Die Laudatio wird gemeinsam von R. Winkler und W. Schachermayer gehalten. Anschließend erfolgt die Überreichung des Preises durch M. Drmota. Für die Studienpreise wurden dieses Jahr zwei Diplomarbeiten und neun Dissertationen eingereicht. Die Kommission hat zwei Dissertationen für die Studienpreise ausgewählt, die Preisträger sind Christopher Frei (Graz) und Philipp Hungerländer (Klagenfurt). Beide haben sub auspiciis praesidentis rei publicae promoviert.

TOP 8: Allfälliges. Ein Mitglied stellte die Anfrage, ob man den Verein nicht besser in OMG umbenennen sollte, um den Umlaut im Namen zu vermeiden. Nach kurzer Diskussion wird dieser Vorschlag von der überwiegenden Mehrheit verworfen.

Die Sitzung endet um 17:50 Uhr. Der Vorsitzende bedankt sich bei den Anwesenden für ihr Kommen.

(Alexander Ostermann, Stv. Schriftührer der ÖMG)

Laudatio für Harald Niederreiter aus Anlass der Verleihung der Ehrenmitgliedschaft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Laut Satzungen der ÖMG sind die Vorausetzungen für ein Ehrenmitglied der ÖMG hervorragende Verdienste um die mathematische Wissenschaft und die besondere Förderung der Mathematik in Österreich. Diese sind für Prof. Harald Niederreiter in einem hohen Ausmaß erfüllt und es freut mich, Ihnen mitteilen zu dürfen, dass der Vorstand nach Absprache mit dem Beirat der ÖMG einstimmig beschlossen hat, Prof. Harald Niederreiter die höchste Auszeichnung, die die ÖMG zu vergeben hat, die Ehrenmitgliedschaft, zu verleihen.

Harald Niederreiter wurde 1944 in Wien geboren, studierte auch in Wien und promovierte 1969 bei Edmund Hlawka an der Universität Wien sub auspiciis praesidentis rei publicae mit einem Thema aus der Gleichverteilung (Diskrepanz in kompakten abelschen Gruppen). Anschließend verbrachte Harald Niederreiter einige Jahre in den USA, in Urbana-Champaign, am IAS in Princeton und an der University of California in Los Angeles. Von 1978 bis 1981 war er Professor für Reine Mathematik in Kingston (Jamaika) und kehrte darauf nach Wien and die Österreichischen Akademie der Wissenschaften zurück, wo er Direktor des Instituts für Informationsverarbeitung und als Direktor des Instituts für Diskrete Mathematik tätig war. Von 2001 bis 2009 war er Professor für Mathematik und Informatik an der National University of Singapore und seit 2009 ist er wieder (mit einer kurzen Unterbrechung an der King Fahd University in Dhahran, Saudi Arabien) in Österreich am Johann Radon Institut (RICAM) in Linz tätig.

Prof. Harald Niederreiter wurde bereits vielfach ausgezeichnet, wie z.B. mit dem Kardinal-Innitzer-Würdigungspreis 1998 oder dem National Science Award in Singapur 2003. Im Jahr 1998 war er Invited Speaker auf dem Internationalen Kongress (ICM) in Berlin und 2003 Plenary Speaker am ICIAM-Kongress in Sydney. Er ist wirkliches Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Mitglied der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina und der New York Academy of Sciences und auch Honorarprofessor an der Universität Wien. Weiters ist er Herausgeber zahlreicher hochrangiger mathematischer Zeitschriften.

Wissenschaftlich befasst sich Harald Niederreiter vor allem mit endlichen Körpern und deren Anwendungen, mit Kryptographie, mit der Theorie und der Erzeugung von Pseudozufallszahlen und der Zahlentheorie, wobei vielfältige Methoden, die sich von der diskreten Mathematik bis zur algebraischer Geometrie spannen, eingesetzt werden. Sein Werk ist von mehreren Gesichtspunkten aus herausragend und bestechend, zunächst in seiner mathematischen Tiefe und Breite, das Theorie und Anwendungen in eindrucksvoller Weise verbindet, in seinem Umfang (mehrere Hundert Artikel und sechs Monographien) und letzlich in seinem nachhaltigem Einfluss auf die mathematische Forschungslandschaft (auch wenn man *metrischen Publikationsdaten* wie Zitationszahlen skeptisch gegenüberstehen mag, sind mehrere Tausend Zitate, die in *MathSciNet* gelistet werden, mehr als außergewöhnlich). Es ist daher nicht überraschend, dass einige wichtige mathematische Methoden, die er entwickelt hat, auch nach ihm benannt wurden, wie etwa das *Niederreiter-Chiffriersystem*, der *Niederreiter-Algorithmus* zur Faktorisierung von Polynomen über endlichen Körpern oder die *Niederreiter-* und *Niederreiter-Xing-Folgen* mit kleiner Diskrepanz. Besonders erwähnen möchte ich seine insgesamt sechs Bücher, die alle mit hoher Präzision, mit durchdachter Systematik und glänzender Aufarbeitung der Literatur wirklich zu Standardwerken der Mathematik geworden sind.

Ich kenne Harald Niederreiter schon etwa 25 Jahre, bereits für meine Dissertation (unter der Anleitung von Robert Tichy) habe ich sein Buch mit Kuipers *Uniform Distribution of Sequences* als wesentliche Grundlage benützt. Ich habe sehr aus den Gesprächen mit ihm profitiert und möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich für seine Unterstützung bedanken, die ich – wie viele andere Mathematikerinnen und Mathematiker – immer wieder in vielfältiger Hinsicht bekommen habe.

Es ist mir daher – auch aus diesem Grund – wirklich eine große Freude, die Verleihung der Ehrenmitgliedschaft an Prof. Harald Niederreiter bekannt geben zu dürfen.[*] Herzliche Gratulation!

(Michael Drmota)

[*]Wegen eines Auslandsaufenthalts konnte Prof. Harald Niederreiter nicht an der Generalversammlung der ÖMG teilnehmen. Die Urkunde der Ehrenmitgliedschaft und die ÖMG-Medaille in Gold wurden ihm im Rahmen eines Mittagessens im Jänner in Wien im Kreis von Vertretern der ÖMG übergeben.

Laudatio für Mathias Beiglböck aus Anlass der Verleihung des Förderungspreises 2012 der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Reinhard Winkler: Ich lernte Mathias Beiglböck im März des Jahres 2000 kennen, als er sich im vierten Semester seines Mathematikstudiums an der TU Wien befand und in jener Übungsgruppe zur Funktionalanalysis saß, die ich leitete. Er fiel mir bald auf, weil er und sein Jahrgangskollege Gabriel Maresch auch jene recht zahlreichen und nur an Freiwillige adressierten Aufgaben, die ich als *Zusatzbeispiele* bezeichnete, fast im Alleingang bewältigten. Bei diesen Zusatzbeispielen handelte es sich selten um knifflige Einzelprobleme, sondern vorwiegend um recht weit ausholende Überlegungen, die ich nur durch minimale Hinweise andeutete. Ich versuchte damit, interessierten Studentinnen und Studenten auf organische Weise einen Zugang zu einem weiteren mathematischen Horizont zu erleichtern. Anders erscheint mir das im Rahmen von Pflichtübungen schwer zu vermitteln. In den folgenden Semestern war Mathias treuer Teilnehmer meiner Spezialllehrveranstaltungen. Meist gab es begleitende Übungen, sodass sich mein erster Eindruck von ihm als einem der begabtesten Studenten, die ich je unterrichten durfte, verfestigte.

Eine für mich besonders glückliche Fügung wollte es, dass ich im Jahr 2001 von Gerhard Larcher und Robert Tichy, den Sprechern eines zahlentheoretischen FWF-Forschungsschwerpunkts, eingeladen wurde, bei ihnen mit einem eigenen Projekt (als thematischen Fokus wählte ich topologische Methoden) mitzumachen. Der Antrag beim FWF war erfolgreich, und so kam ich in die angenehme Situation, junge Mathematiker für die Forschung engagieren zu dürfen. Natürlich wollte ich Mathias für das Projekt gewinnen. Zwar war er erst im vierten Jahr seines Studiums, doch war es nicht sehr schwierig, ihn für projektrelevante Forschungsthemen zu interessieren.

Schon lange hatte mich die Möglichkeit fasziniert, diskrete Strukturen in einen topologischen und maßtheoretischen Kontext einzubetten, um so gewisse Zusammenhänge klarer zu sehen. Mithilfe von Intuitionen, die der kontinuierlichen Mathematik entstammen, eröffnet sich dadurch oft ein besseres Verständnis diskreter Strukturen. Besonders beeindruckt war ich von den Vorträgen von Vitaly Bergelson, einem führenden Vertreter der sogenannten ergodischen Ramsey-Theorie. Auf mehreren zahlentheoretischen Tagungen erhielt ich durch ihn eine Vorstellung von den großartigen Errungenschaften aus der Schule seines berühmten Lehrers Hillel Furstenberg. Furstenberg hatte ein nach ihm benanntes Korrespondenzprinzip gefunden, wonach sich Fragen der additiven Zahlentheorie in die Sprache dynamischer Systeme und ihrer Rekurrenzeigenschaften übersetzen lassen. Außerdem war es ihm gelungen, beispielsweise die als Raum der Ultrafilter aufgefasste Stone-Čech-Kompaktifizierung, also ein äußerst schwer greifbares, abstraktes Objekt, für höchst konkrete Fragen zu nutzen. Unter anderem mit diesen Mitteln hatte er einen völlig neuartigen, auf dynamischen Systemen fußenden Zugang zum berühmten Satz von Szemerédi gefunden, der sich auf denkbar elementare Objekte bezieht. Und zwar lautet er: Jede Teilmenge der natürlichen Zahlen mit positiver Dichte besitzt beliebig lange arithmetische Folgen.[1]

Wer mehr über diese Zusammenhänge erfahren will, stößt unweigerlich auch auf die Monographie *Algebra in the Stone-Čech Compactification* von Neil Hindman und Dona Strauss, wo die Theorie der Ultrafilter und topologische Algebra eine fruchtbare Synthese feiern. Auch mir fiel dieses Buch in die Hände, doch gab ich es bald an Mathias weiter, in der Hoffnung, ihm möge ein Diplomarbeitsthema aus diesem Bereich zusagen. Seine Diplomarbeit mit dem Titel *The Stone-Čech Compactification in Number Theory and Combinatorics* war nicht nur in kürzester Zeit fertig. Sie enthielt auch neue Resultate, die ihm erste Publikationen einbrachten, außerdem den Preis der ÖMG für die beste Diplomarbeit des Jahres 2003 sowie eine mit einem Reisestipendium verbundene Auszeichnung durch die TU Wien. Das ermöglichte ihm einen Forschungsaufenthalt bei Bergelson in Columbus/Ohio, wodurch er auch Neil Hindman, Dona Strauss, Imre Leader und andere internationale Größen kennenlernte. Sofort wurde er von ihnen als vielversprechender junger Vertreter ihres Fachgebiets anerkannt und als Koautor gemeinsamer Arbeiten geschätzt.

So verwundert es nicht, dass auch seine Dissertation (Titel: *Filters in Number Theory and Combinatorics*) in beeindruckend kurzer Zeit fertig wurde, nämlich schon im Herbst 2004. Die darin enthaltenen Forschungsergebnisse lassen sich sehen: Eine neue, besonders kurze und durchsichtige Beweisvariante des klassischen Satzes von van der Waerden (wonach in jeder endlichen Partition der natürlichen Zahlen wenigstens eine der Klassen beliebig lange arithmetische Folgen enthält); ein allgemeiner Satz, der sowohl den Satz von van der Waerden als auch die ebenfalls klassischen Sätze von Ramsey und Hindman[2] als Spezialfälle enthält;[3] neuartige Verbindungen von additiver und multiplikativer Struktur der natürlichen Zahlen im Geiste der Ramseytheorie[4] und eine Anwendung topologischer Methoden auf eine Frage im Grenzgebiet zwischen Zahlentheorie und topologischen Gruppen. Auf das letztgenannte Resultat will ich im Folgenden kurz näher eingehen.

---

[1] Ich darf zu diesem Thema auf den gemeinsamen Artikel mit Mathias in Heft Nr. 221 (Dezember 2012) der *IMN*, Seiten 21–38, verweisen.

[2] *Satz von Ramsey*: Färbt man die Kanten des vollständigen Graphen mit abzählbar unendlicher Knotenmenge mit endlich vielen Farben, so gibt es eine unendliche Menge von Knoten, zwischen denen alle Kanten dieselbe Farbe haben. *Satz von Hindman*: In jeder endlichen Partition von $\mathbb{N}$ enthält wenigstens eine Klasse eine unendliche Menge, die abgeschlossen ist bezüglich endlicher Summen, gebildet aus paarweise verschiedenen Summanden.

[3] Furstenberg hatte bereits vorher eine Synthese der Sätze von van der Waerden und Hindman erzielt.

[4] Dabei handelt es sich um eine Verschärfung des Satzes von van der Waerden von beliebig langen arithmetischen Folgen $(a+im)_{0\leq i\leq n}$ zu beliebig langen arithmetisch-geometrischen Doppelfolgen $b(a+im)^{j}_{0\leq i,j\leq n}$.

Sei $k = (k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ganzer Zahlen, so bilden all jene $\alpha \in \mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (eindimensionaler Torus), für die $k_n\alpha$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, eine Untergruppe, die mit $G(k)$ bezeichnet sei. Es stellt sich umgekehrt die Frage, welche Untergruppen G von $\mathbb{T}$ als $G(k)$ für geeignete k auftreten. (Schon allein aus Kardinalitätsgründen können es nicht alle sein.) Nach Vorgängerarbeiten z.B. von Gerhard Larcher hatten Andras Birò, Jean-Marc Deshouillers und Vera Sòs mit feinsinnigen kombinatorisch-zahlentheoretischen Überlegungen zeigen können, dass dies für zyklische und sogar endlich erzeugte G der Fall ist. Im August 2003, unmittelbar bevor Mathias mit Anfang September die Dissertantenstelle im FWF-Projekt antrat, äußerte ich ihm gegenüber mein Anliegen, dieser Frage mithilfe topologischer Methoden (Filtern) neue Einsichten abzugewinnen. Bereits Mitte September war seine erste Arbeit fertig, in der er das perfekt ausgeführt hatte, was mir nur sehr vage vorgeschwebt war, und noch mehr. Er zeigte, dass es sogar zu jeder beliebigen abzählbaren Untergruppe G von $\mathbb{T}$ eine Folge k mit $G = G(k)$ gibt, für die er überdies noch etwas stärkere Eigenschaften beweisen konnte.

Auch nach Abschluss der Dissertation ließ Mathias' mathematische Kreativität nicht nach, ganz im Gegenteil. Er dehnte seinen mathematischen Aktionsradius weiter beträchtlich aus, indem er vor allem beim Einsatz maßtheoretischer Methoden noch viel tiefer drang. Beispielsweise konnte er, ganz im Geiste des weiter oben erwähnten Korrespondenzprinzips von Furstenberg, an einen berühmten Satz von Hugo Steinhaus anschließen, wonach für jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit positivem Lebesguemaß die Menge aller Differenzen $a-b$ mit $a,b \in A$ ein offenes Intervall enthält. Nach einem Resultat von Renling Jin hat der Satz von Steinhaus auch eine Entsprechung in $\mathbb{Z}$ (statt $\mathbb{R}$). Mathias konnte dieses Resultat in einer Arbeit mit Bergelson und Alexander Fish auf mittelbare Gruppen ausdehnen und, in einer (für ihn typischen), extrem konzisen Soloarbeit, vermittels Maßen auf der Stone-Čech-Kompaktifizierung eine Verbindung zu seiner aus Diplomarbeit und Dissertation angestammten Welt der Ultrafilter herstellen.

Fragt man mich, welche Qualitäten generell für das mathematische Werk von Mathias typisch sind, fallen mir vor allem ein: Zunächst eine in dieser ausgeprägten Form äußerst seltene Originalität in der Kombination mathematischer Ideen (alter wie neuer, oft eigener); daraus resultierend zahlreiche neue und verblüffende Ergebnisse, aber auch immer wieder unverhofft kurze und elegante Zugänge zu klassischen Sätzen; unabhängig davon ein weiter Blick, der über die Beherrschung unterschiedlicher mathematischer Methoden und Denkweisen hinaus zwischen diesen immer wieder neue fruchtbare Verbindungen entdeckt; und schließlich ein feiner mathematischer Geschmack, der Mathias davor bewahrt, sich in unzähligen Einzelergebnissen zu verlieren (die für ihn leicht erreichbar wären), und ihm dabei hilft, seine mathematische Schaffenskraft auf Aufgaben zu konzentrieren, die tieferes Nachdenken wirklich lohnen. Was mehr kann man sich von einem mathematischen Forscher erhoffen?

Nicht ausgeblendet sei, dass selbst die größten Begabungen für ihre Entfaltung zunächst einmal ein günstiges geistiges wie auch persönliches Umfeld brauchen. In diesem Zusammenhang möchte ich ein paar Kollegen erwähnen, die in Mathias' Entwicklung eine wichtige Rolle spielten: Ein sehr wichtiger Lehrer für Mathias war Martin Goldstern, Leiter jener Forschungsgruppe an der TU Wien, an der das erwähnte FWF-Projekt wie auch Nachfolgeprojekte (im Rahmen von Großprojekten unter der Leitung von Michael Drmota und Peter Grabner) beheimatet waren. Im Projekt selbst tätig waren außerdem Gerhard Dorfer in mitverantwortlicher Rolle sowie Gabriel Maresch und Christian Steineder, die zur gleichen Zeit wie Mathias und in enger Freundschaft mit ihm an Diplomarbeit und Dissertation arbeiteten. Ebenfalls in diesem Zusammenhang zu nennen ist Franz Schuster, Schüler von Monika Ludwig, der damals in unmittelbarer räumlicher Nähe seine äußerst erfolgreiche mathematische Laufbahn begann und durch regen wechselseitigen fachlichen wie auch persönlich-freundschaftlichen Austausch Wertvolles zum gedeihlichen Klima dieser Jahre beitrug.

Ich betone diese persönlichen Aspekte deshalb, weil sich meine Freude an Mathias' Entwicklung nicht nur auf seinen Erfolg als Wissenschaftler bezieht, sondern auch auf allgemein menschliche Tugenden, die keineswegs selbstverständlich sind und an denen meines Erachtens auch die erwähnten Personen (wie sicher auch zahlreiche hier nicht erwähnte) einen wichtigen Anteil haben. Auch außerhalb der Mathematik schätze ich an Mathias Beiglböck besonders seine Konsequenz im Denken, die vor keinen Tabus Halt macht, sich aber immer an einem hohen philanthropischen Ethos orientiert. Beides zeigt sich in seiner Zivilcourage, die ihm die Kraft gibt, nie feig wegzuschauen, sondern dort aktiv Partei zu ergreifen, wo Menschlichkeit es verlangt. Das kann durchaus so weit gehen, dass er bei rassistischen Übergriffen im öffentlichen Bereich nicht tatenlos zusieht, sondern dem Opfer zu Hilfe kommt und damit nicht nur körperliche Verletzungen, sondern sogar Verleumdungen durch die Täter mit aufreibendem rechtlichen Nachspiel in Kauf nimmt.

All dies im Auge, wird man meine Freude darüber gut nachvollziehen können, dass Mathias in wichtigen Belangen hin und wieder auch das Glück des Tüchtigen hatte. Denn Glück war zweifellos beteiligt, als gerade zum richtigen Zeitpunkt jemand vom Kaliber eines Walter Schachermayer Mathias' mathematische Wege kreuzte, ihn als jungen Koautor an sich zog und mit neuen wissenschaftlichen Impulsen versorgte. So brach Mathias vor ein paar Jahren zu neuen mathematischen Ufern auf. Ich wünsche ihm dort viel Erfolg (noch über den gegenwärtigen hinaus!) und hoffe, dass er trotzdem immer gern an seine Anfangszeit, über die ich hier berichten durfte, zurückdenken möge.

Walter Schachermayer: Wie schon bei Josef Teichmann im Jahr 2005 darf ich den zweiten Teil der Laudatio für Mathias Beiglböck übernehmen und über die Jahre berichten, die er in der Forschungsgruppe für Finanzmathematik verbracht hat.

Ich möchte die Arbeitsweise von Mathias anhand eines Beispiels aus seiner aktuellen Forschungstätigkeit beschreiben. Es stammt aus einer Gemeinschaftsarbeit,[5] aber ich darf im Namen der Koautoren sagen, dass Mathias hier ein zentraler Part bei der Entwicklung der konzeptiven Ideen zukommt.

Ich glaube, dass ich mit einem konkreten mathematischen Beispiel am besten illustrieren kann, wie die verschiedenen Gebiete zusammenhängen, und wie meisterhaft Mathias es versteht, nicht nur ein weites Feld zu überblicken, sondern auch Querverbindungen zwischen scheinbar entfernten Teilen der Mathematik herzustellen und dadurch überraschende Erkenntnisse zu gewinnen.

Die Doobsche Ungleichung ist seit über 60 Jahren bekannt und eine tragende Säule der stochastischen Analysis. Ich formuliere sie für den einfachsten Fall. Sei $(M_n)_{n=0}^N$ ein $\mathbb{R}_+$-wertiges Martingal und sei

$$\overline{M}_n = \max_{0 \le i \le n} M_i \qquad\qquad n = 0, \ldots, N,$$

der Prozess der “running maxima”. Dann gilt

$$\mathbb{E}[\overline{M}_N^2] \le 4\mathbb{E}[M_N^2]. \tag{1}$$

Diese Ungleichung erlaubt es, das pfadweise Verhalten eines Martingals M, das durch die Maximal-Funktion $\overline{M}_N$ kontrolliert werden kann, durch ihre Werte M_N am Ende des Zeit-Intervalls abzuschätzen. Die Abschätzung bezieht sich auf die L^2-Norm der Funktionen M_N und $\overline{M}_N$. Es ist wohlbekannt, dass die Konstante 4 scharf, die Ungleichung aber immer strikt ist (außer im trivialen Fall $M \equiv 0$).

Machen wir jetzt folgendes Gedankenexperiment. Wir interpretieren $(M_n)_{n=0}^N$ als einen stochastischen Prozess, der den Preis einer Aktie an $N+1$ konsekutiven Tagen modelliert. Der heutige Wert M_0 ist bekannt, aber die zukünftige Preisentwicklung $(M_n)_{n=1}^N$ wird erst an den entsprechenden Tagen bekannt werden. Zu dieser Aktie sollen folgende zwei „Optionen“ existieren: Die erste, M_N^2, zahlt zum Zeitpunkt N das Quadrat des Preises der Aktie zum Zeitpunkt N. Die zweite, $\overline{M}_N^2$, zahlt zu diesem Zeitpunkt das Quadrat des Maximums des Aktienpreises über den gesamten Zeitraum $\{1, \ldots, N\}$ aus. In unserem Gedankenexperiment stellen wir uns weiters eine Person vor, nennen wir sie Mathias, die vier Optionen vom Typ M_N^2 besitzt (wofür sie zum Zeitpunkt N eine Zahlung erhält) und eine Option vom Typ $\overline{M}_N^2$ verkauft hat (wofür sie zum Zeitpunkt N eine Zahlung leisten muss). Aufgrund der Ungleichung (1) wissen wir, dass der Erwartungswert der Summen dieser beiden Zahlungen strikt positiv ist (außer im trivial Fall $M \equiv 0$). Wenn Mathias also „oft“ eine solche Kombination von Optionen hält, wissen wir aufgrund

[5] B. Acciaio, M. Beiglböck, F. Penkner, W. Schachermayer, J. Temme: *A Trajectorial Interpretation of Doob's Martingale Inequalities*. To appear in Ann. Appl. Prob.

des Gesetzes der großen Zahlen, dass er auf die Dauer positiv abschneiden wird. Aber bei einmaligem Halten des „Portfolios“

$$4M_N^2 - \overline{M}_N^2$$

kann es durchaus der Fall sein, dass er einen empfindlichen Verlust erleidet: Es kann selbstverständlich passieren, dass für gewisse Zufallselemente $\omega \in \Omega$ die Maximalfunktion $\overline{M}_N(\omega)$ sehr groß ist, während der Endwert $M_N(\omega)$ des Martingals sehr klein ist.

Hier kommt die entscheidende Idee aus der Finanzmathematik: Angenommen es gibt für $n = 0, \ldots, N-1$ deterministische Funktionen $\Delta_n(m_1, \ldots, m_n)$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ so, dass

$$\overline{M}_N^2 \leq 4M_N^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_n(M_1, \ldots, M_n)(M_{n+1} - M_n) \tag{2}$$

in einem *punktweisen Sinn* gilt, also für $\mathbb{P}$-*fast alle* Zufallselemente ω des zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathbb{P})$.

Dann folgt aus (2) sofort die Ungleichung (1) durch das Bilden des Erwartungswerts. Denn für jedes n gilt

$$\mathbb{E}[\Delta_n(M_1, \ldots, M_n)(M_{n+1} - M_n)] = 0. \tag{3}$$

Die Gültigkeit der Gleichung (3) für alle deterministischen Funktionen Δ_n ist im Wesentlichen die Definition der Martingal-Eigenschaft des Prozesses $(M_n)_{n=0}^N$ (sofern der Erwartungswert existiert, was wir natürlich annehmen). Die Ungleichung (2) ist also stärker als die Ungleichung (1).

Die Funktionen $\Delta_n(\cdot)$ können finanzmathematisch als Absicherungsstrategie interpretiert werden: Zum Zeitpunkt n, wenn die Aktienpreise $M_1, \ldots, M_n$ bekannt sind, kauft Mathias $\Delta_n(M_1, \ldots, M_n)$ viele Aktien und hält sie während des Zeit-Intervalls $[n, n+1]$. Er verkauft sie dann wieder zum Zeitpunkt $n+1$. Der Gewinn oder Verlust, den er damit macht, ist gegeben durch die Zufallsvariable

$$\Delta_n(M_1, \ldots, M_n)(M_{n+1} - M_n).$$

Wenn er diese Strategie für jedes $n = 0, \ldots, N-1$ durchführt, so besagt die Ungleichung (2), dass der Gewinn/Verlust aus dieser Strategie plus die Zahlung von $4M_N^2$ ausreichen, um die Zahlung von $\overline{M}_N^2$ zu finanzieren – nun aber in einem *punktweisen Sinn*, das heißt unabhängig davon, welche Kapriolen der konkrete Pfad $(M_n(\omega))_{n=0}^N$ schlägt.

Wir haben bis jetzt noch nicht gezeigt, dass wir tatsächlich Funktionen $\Delta_n(\cdot)$ finden können, sodass (2) gilt. Dies folgt aus dem folgenden elementaren Lemma, das man als Olympiade-Aufgabe stellen könnte.

Lemma. *Für alle* $(m_n)_{n=0}^N$ *aus* $\mathbb{R}_+^{N+1}$ *gilt*

$$\overline{m}_N^2 \leq 4m_N^2 + \sum_{n=0}^{N-1} (-4\overline{m}_n)(m_{n+1} - m_n) - 2m_0. \tag{4}$$

Der Beweis benötigt nur ein geschicktes Ordnen der Terme und die Abschätzung $(2m_N - \overline{m}_N)^2 \geq 0$.

Die Strategie $\Delta_n(M_1, \dots, M_n) = -4\max(M_1, \dots, M_n)$ erfüllt also (2) für *alle* (nicht nur für $\mathbb{P}$-fast alle!) Trajektorien $(M_n(\omega))_{n=0}^N$. Der Term $-2m_0$ in (4) insinuiert auch, dass die Ungleichung (2) noch ein bisschen verschärft werden kann. Dies ist tatsächlich der Fall und führt zu folgender – bisher unbekannten – Verbesserung der Doobschen Ungleichung

$$\|\overline{M}_N\|_2 \leq \|M_N\|_2 + \|M_N - M_0\|_2. \tag{5}$$

Diese Ungleichung (5) wird, im Gegensatz zu (1), tatsächlich angenommen, und zwar durch bestimmte „Azéma-Yor-Martingale“, wie man relativ leicht aus dem Lemma ableiten kann. Diese Verschärfung der klassischen Doobschen Ungleichung ist hübsch. Aber wesentlich wichtiger ist die grundlegende Methode des Zusammenspiels von Ungleichungen im Erwartungswert und pfadweisen Ungleichungen, die neue Perspektiven eröffnet.

Selbstverständlich ist dieser bemerkenswert simple Zugang zu Martingal-Ungleichungen kein Zufall. Dahinter steckt eine raffinierte Kombination der Theorie des optimalen Transports (in jüngster Zeit durch den Fields-Medaillisten Cédric Villani stark propagiert) und der Martingal-Theorie. Aus den daraus resultierenden Dualitäts-Sätzen folgt, dass – unter geeigneten Regularitätsbedingungen – zu jeder Martingal-Ungleichung, die Erwartungswerte abschätzt, auch eine entsprechende pfadweise Ungleichung existieren *muss*. Mit anderen Worten: Zu jeder Martingal-Ungleichung von der Bauart (1) muss es eine pfadweise Ungleichung von der Bauart (2) geben. Die Doobsche Ungleichung ist das Flaggschiff dieser Familie von Martingal-Ungleichungen; aber es gibt noch sehr viele andere, und es gibt ganze Bücher über Martingal-Ungleichungen. Hier tut sich ein weites Land auf.

Mit diesem informellen mathematischen Exkurs hoffe ich skizziert zu haben, wie Mathias Beiglböck es schafft, verschiedene Gebiete und Zugänge der Mathematik zu kombinieren, um verblüffende neue Einsichten zu erhalten. Ich habe ein Beispiel gewählt, wo die finanzmathematische Intuition hilft, neue Einblicke im Bereich der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie zu bekommen. Mathias Beiglböck versteht es aber auch umgekehrt, seine „rein mathematische“ Intuition für handfeste Anwendungen in der Finanzmathematik einzusetzen. So hat er zum Beispiel eine lange Zeit offene Vermutung von Jim Gatheral und Bruno Dupire über eine Extremal-Eigenschaft von “local volatility”-Modellen durch ein genial einfaches Gegenbeispiel widerlegt. Dieses Beispiel hat den Blickwinkel in diesem Bereich der Finanzmathematik wesentlich verändert.

Ebenso wie Reinhard Winkler kann ich bestätigen, dass es große Freude und Spaß macht, mit Mathias zusammenzuarbeiten. Ich hoffe, dass ich noch viele Jahre Gelegenheit dazu haben werde und schließe mit meiner herzlichen Gratulation zur wohlverdienten Verleihung des Förderungspreises 2012.

(R. Winkler und W. Schachermayer)

Neue Mitglieder

Rainer Brunnhuber, Mag. – Inst. f. Mathematik, Univ. Klagenfurt, Universitätsstraße 65–67, 9010 Klagenfurt. geb. 1986. 2006–2012 Studium der Mathematik an der Univ. Wien, anschließend Doktoratsstudium an der Univ. Klagenfurt. rainer.brunnhuber@aau.at.

Mihyun Kang, Univ.-Prof. Dr. – TU Graz, Steyrergasse 30, 8010 Graz. geb. 1973 (Südkorea). Seit 2012 Professorin für Diskrete Mathematik und Optimierung an der TU Graz. email *kang@math.tugraz.at*, *http://www.math.tugraz.at*.

Andreas Körner, Dipl.-Ing – TU Wien, Wiedner Hauptstr. 8–10/101, 1040 Wien. Geb. 1982. Studienabsschluss in Elektrotechnik 2009 und in technischer Mathematik 2010, seit 2009 Projektassistent am Institut f. Analysis und Scientific Computing. email *andreas.koerner@tuwien.ac.at*.

Andreas Schröder, Univ.-Prof. Dr. – Univ. Salzburg, Hellbrunner Str. 34, 5020 Salzburg. geb. 1973. 2005 Promotion an der Univ. Dortmund, 2007–2012 Juniorprofessor f. Computational Mathematics an der HU Berlin, seit 2012 Universitätsprofessor f. „Technische Mathematik“ an der Univ. Salzburg. email *andreas.schroeder@sbg.ac.at*.

Stephan Wötzer – Josef Schraffl-Str. 23, 6020 Innsbruck. geb. 1981. Derzeit neben Berufstätigkeit Studium der Technischen Mathematik an der Univ. Innsbruck. email *stephan.woetzer@student.uibk.ac.at*.