Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien" gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten" umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union".

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

Vorstand des Vereinsjahres 2011:

M. Drmota (TU Wien): Vorsitzender
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck): Stellvertretender Vorsitzender
J. Wallner (TU Graz): Herausgeber der IMN
B. Lamel (Univ. Wien): Schriftführer
A. Ostermann (Univ. Unnsbruck): Stellvertretender Schriftführer
G. Larcher (Univ Linz): Kassier
P. Kirschenhofer (MU Leoben): Stellvertretender Kassier
G. Schranz-Kirlinger (TU Wien): Beauftragte für Frauenförderung
G. Teschl (Univ. Wien): Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
U. Dieter (TU Graz)
H. Engl (Univ. Wien)
P. M. Gruber (TU Wien)
G. Helmberg (Univ. Innsbruck)
H. Heugl (Wien)
W. Imrich (MU Leoben)
M. Koth (Univ. Wien)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Kuich (TU Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
W. G. Nowak (Univ. Bodenkult. Wien)
L. Reich (Univ. Graz)
N. Rozsenich (Wien)
W. Schachermayer (Univ Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
H. Sorger (Wien)
H. Strasser (WU Wien)
R. Tichy (TU Graz)
W. Wurm (Wien)

Vorstand, Sektions- und Kommissionsvorsitzende gehören statutengemäß dem Beirat an.

Vorsitzende der Sektionen und Kommissionen:

W. Woess (Graz)
G. Kirchner (Innsbruck)
C. Nowak (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
P. Hellekalek (Salzburg)
C. Krattenthaler (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 221 (66. Jahrgang) **Dezember 2012**

Inhalt

Die Titelseite illustriert eine diskrete Variante der flächentreuen und ergodischen „Katzenabbildung“ $(x,y) \mapsto (2x+y, x+y)$ modulo 1 am Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, die von V. I. Arnold anhand des Bildes einer Katze illustriert wurde. Die diskrete Abbildung lautet $(i,j) \mapsto (2i+j, i+j)$ modulo N, auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2/(N\mathbb{Z})^2$. Für den abgebildeten Fall $N = 150$ hat sie eine Periode von 300 Iterationen. *Illustration:* Claudio Rocchini (ISTI, Pisa), abgelegt in *Wikimedia Commons*.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 221 (2012), 1–19

The 2012 Abel laureate Endre Szemerédi and his celebrated work

Mihyun Kang
Technische Universität Graz

1 Introduction

The Hungarian-American mathematician Endre Szemerédi received the 2012 Abel Prize from His Majesty King Harald at the award ceremony in Oslo on 22 May 2012, "for his fundamental contributions to discrete mathematics and theoretical computer science, and in recognition of the profound and lasting impact of these contributions on additive number theory and ergodic theory" (a citation by the Abel Committee [1]).

On this occasion, Johannes Wallner, the editor of the International Mathematical News (*Internationale Mathematische Nachrichten*), asked me to write an article on Endre Szemerédi and his work. While I was preparing this article, I met Endre Szemerédi at a conference, during which Michael Drmota, the president of the Austrian Mathematical Society (Österreichische Mathematische Gesellschaft), suggested to me to interview Endre Szemerédi. As a result, this article contains an interview with Endre Szemerédi (Section 2) and a brief overview of his celebrated work (Section 3).

2 Interview with Endre Szemerédi

On behalf of the Austrian Mathematical Society, I interviewed the 2012 Abel laureate Endre Szemerédi. The interview took place on the 26th of June 2012

ISSN 0020-7926

during the Conference on “Perspectives in Discrete Mathematics” in Bellaterra near Barcelona, Spain.

Kang: Professor Szemerédi, I would like to congratulate you on winning the Abel Prize. When and where did you receive the message that you won the Abel Prize?

Szemerédi: That I know exactly. I was at home in Budapest. It was on the 21st of March 2012. One of my friends, Imre Bárány, was there too. It was a kind of a plot. It turned out later that the Norwegian ambassador in Hungary contacted Imre, asking him to make sure I would be at home that day at 10 o’clock in the morning. On Saturday, the 17th of March, Imre called me and said that he wanted to work with me on Wednesday, the 21st of March, on some mathematical problem and that the problem was hard, therefore it would be better to meet early. He insisted on 10 o’clock, even though this time is very early for me. Nevertheless he showed up and because I was not completely awaken yet he was chatting with my wife, Anna. Usually, I do not pick up the phone. Once, for example, when one of my granddaughters took the phone, she told the caller ‘My grandpa says that he is not at home’. At this time, Anna picked up the phone when the phone rang and tried to give it to me. As usual, I told her to say that I was not at home. But she told me that this time I could not play the game, as the call was from Oslo.

Kang: When you heard that the call was from Oslo, did you realize what was going on? Could you describe how you felt at that moment?

Szemerédi: Mathematicians know the day of the Abel Prize announcement. Also they know that the announcement is made in Oslo. I was almost certain that the call was about the Abel Prize.

When I heard the congratulation, first, I could not quite believe it. But I was very happy. Also I was slightly ashamed because I was not sure whether I deserved it while hundreds of others did not get the prize. It was a mixed feeling.

Kang: Among many beautiful theorems that you proved, there are ‘Szemerédi’s theorem’ and the ‘Szemerédi Regularity Lemma’. Let me first ask questions about Szemerédi’s theorem. Could you explain what Szemerédi’s theorem says?

Szemerédi: It says that if you have a positive proportion of the integers from 1 up to N it contains a long arithmetic progression.

Kang: Could you tell us a short mathematical history of Szemerédi’s theorem?

Szemerédi: The history is that van der Waerden proved his famous theorem, stating that if you divide the integers into finitely many classes, then one class contains arbitrarily long arithmetic progressions. Then Erdős-Turán conjectured in 1936 that the important thing is that the set is dense enough: if you have a positive proportion of the integers, then you have already long arithmetic progressions. More precisely speaking, for every positive integer $k \geq 3$ and every $\delta > 0$ there exists a number $S(k,\delta)$ such that for any $N \geq S(k,\delta)$, every subset of the integers $\{1,\ldots,N\}$ of cardinality at least δN contains an arithmetic progression of length k. In 1953 Roth provided a beautiful proof, using harmonic analytic methods, that the conjecture is true for $k = 3$. He proved that among at least $N/\log\log N$ integers there was always an arithmetic progression of length 3. Actually, one of my favourite mathematicians is Roth. When I first went abroad in 1967, he was the mathematician whom I met. I read his proof. But that's not the reason why I started to work on this problem.

Kang: How did you start working on the problem?

Szemerédi: It is a slightly embarrassing story. What happened is that I tried to prove that given a long arithmetic progression it cannot be that a positive percentage of the elements of the arithmetic progression is squares. In order to prove it, I took it for granted that if you have a positive percentage of the integers, then it contains an arithmetic progression of length 4. I proved that if you have an arithmetic progression of length 4, then it cannot be that all of them are squares. If you put these together, you prove what you wanted. I was very proud of 'my result'. I showed the proof to Paul Erdős. Then he told me that there are slight problems with the whole thing. The first one was that I assumed something, which had not been proved yet at that time, namely that any set of a positive percentage of the integers contains an arithmetic progression of length 4. But this was still okay. The second one was really shameful. Erdős told me that the other thing, stating that there are no four squares that form an arithmetic progression, was proved by Euler already 250 years ago. I felt that I must correct this mistake, because Erdős was the God.

Kang: So, Erdős was your God, your supervisor, your mentor, etc.?

Szemerédi: Yes, he was everything, although, without Paul Turán, I would have never been a mathematician. Because, when I went to university, the course was for teachers of mathematics and physics for the first two years. After that, you could continue to study mathematics and physics for three more years and get a diploma to teach in a high school or you could apply to be among the 20 out of 250 who would be chosen to continue as mathematicians. Turán, in the second year, gave a beautiful lecture on number theory for two semesters. He covered a lot of things. I liked it very much and decided then to become a mathematician. I tried to be among these 20.

Kang: Let us return to the story of Szemerédi's theorem. You said that after Erdős pointing out your mistakes, you were embarrassed. So, you tried to prove your master that you can do something correctly. Was this the proof of the Erdős-Turán conjecture for the case $k = 4$?

Szemerédi: Yes, I wanted to show him that I could prove it correctly and to see whether he can find an error. First I gave an elementary proof for the case $k = 3$. It was a very simple high-school proof. Then I proved it for $k = 4$. In 1967 Paul Erdős arranged for me an invitation to the university of Nottingham. There I was supposed to give a lecture about my proof. My English was practically non-existing. So I just drew some pictures, and Peter Elliot and Edward Wirsing, both number theorists, based on these pictures and my very bad English, wrote down the proof. I am very grateful for their great help. Similarly, when I proved in 1973 the conjecture for the general k, a good friend of mine, András Hajnal, helped me to write up the paper. It would be better to say that he listened to my explanations and then wrote it up. I am very grateful to him, too.

Kang: There are several other proofs of Szemerédi's theorem, for example by Furstenberg, Gowers and Tao amongst others. Could you explain what they proved, with what methods, and how their results are related to your theorem?

Szemerédi: Hillel Furstenberg is a great mathematician and works mainly on ergodic theory. His famous correspondence principle transfers the dense set into a measure space. Then he could use his multiple recurrence theorem. His method is much deeper and much more powerful than my elementary method, and could be generalised into a multi-dimensional setting. He and Yitzhak Katznelson could prove in 1978 a multi-dimensional analogue, and they could finally prove in 1991 the density version of the Hales-Jewett theorem. Their ergodic method is much more complex and powerful.

Timothy Gowers gave a much much better bound than what I had. Even more importantly, he invented many fundamental methods which completely changed the landscape. We cannot overestimate the influence of his paper. Gowers used a higher-order Fourier analysis and introduced his famous Gowers norm which controls the randomness of the set in question. Terence Tao mixes everything. He takes things from Furstenberg and Gowers. These mathematicians are those who really move this field. Without them, my theorem would be just a theorem, nothing more. They strengthened it, invented many directions, found connections between these things and much more. They do simply unbelievable things. Also, for me, the most striking result was the theorem of Ben Green and Terence Tao which states that among the primes there are arbitrarily long arithmetic progressions.

Kang: In literature, one can often read 'An important application of Szemerédi's theorem is the Green-Tao theorem on arithmetic progressions of primes'. Exactly how is your theorem used in the proof of the Green-Tao theorem?

Szemerédi: It would be hard to tell exactly.

Kang: Many influential mathematicians have their own lemma named after them. You also have one, the Szemerédi regularity lemma, which is unarguably the most powerful and commonly used tool in modern extremal graph theory. Could you explain what the Szemerédi regularity lemma says?

Szemerédi: If you don't want to have all these parameters, then it says that the vertex set of a dense graph can be partitioned into relatively small number of disjoint vertex sets, so that if you form bipartite graphs among these vertex sets, then almost every bipartite graph behaves like a random bipartite graph.

Kang: What does a typical extremal graph problem look like?

Szemerédi: That I really don't know. Just to tell you the truth, my mathematical interest has switched into number theory.

Kang: Is it a return to the origin, to Turán's lecture?

Szemerédi: Exactly, that's the idea.

Kang: One of the most important unresolved problems in mathematics, in particular in number theory, is the Riemann conjecture. Are you attacking it?

Szemerédi: No, I am trying some other problems in number theory, which I cannot say.

Kang: What is your favourite result or theorem of your own? Is it Szemerédi's theorem or the Szemerédi regularity lemma?

Szemerédi: My favourite work is the creation of the pseudo-random method together with Miklós Ajtai and János Komlós (it may be that the pseudo-random method existed in some other areas of mathematics). We used this method, when we tried to give a better estimate on the density of an infinite Sidon sequence. Using this method, we also disproved Heilbronn conjecture, which was at that time already 40 years old.

Kang: I would like to learn mathematical wisdom, from the one who has done excellent mathematics during the last at least fifty years. How do you recognise good mathematical problems? What defines a good problem?

Szemerédi: I am afraid I cannot give a really good answer to it. But, in my opinion, a good problem is one that is interesting, is difficult; you have to study a bit to solve the problem. And for the solution we need to invent a method which will be applied to many other problems and areas.

Kang: Like the Szemerédi regularity lemma!

Szemerédi: Actually we have a program to demolish it. Gyárfás, Sárközy, Rödl, Ruciński and myself have already written five papers without the Szemerédi regularity lemma. The Szemerédi regularity lemma is just a philosophy.

Kang: How do you develop a good taste for mathematics?

Szemerédi: It's hard. I am sure everybody has a different taste. You need experience, experiment and also luck.

Kang: Once you have selected a problem to solve, how do you start, proceed and finish the proof?

Szemerédi: Well, first you try to find connections, try to apply different methods, and then try to invent slightly different methods. Most of the time I am not successful. My ratio is very bad. I worked on a lot of problems, but I could not solve many of them. This is not so bad. It comes with the territory. There are mathematicians who have by far better ratio, but I do not mind. The only problem is that if I work on a problem, then I have a hard time to give it up, even when I am having a feeling that I cannot prove it, I do not have new ideas.

Kang: Could you give me a hint what your ratio would be?

Szemerédi: The ratio? It is about 1 to 10.

Kang: It is a good message to young mathematicians: we should try a lot!

Szemerédi: Yes, we should try a lot.

Kang: How or why did you discover or invent the Szemerédi regularity lemma? As far as I know, you have developed a weaker version of the Szemerédi regularity lemma, while proving Szemerédi's theorem.

Szemerédi: Yes, you are right. The paper about arithmetic progressions contains a weaker version of the regularity lemma.

The regularity lemma was needed for a graph-theoretical problem. I listened to a lecture by Béla Bollobás, which was 1974 in Calgary. He talked about the Erdős-Stone theorem. Bollobás and Erdős wanted to determine the right magnitude and they had a very good bound, the order was $\log n$ and only the constant was missing a little bit. And I decided to work on it, as I liked the problem and Béla presents things very nicely and extremely cleverly. Then I realised that maybe a lemma like the regularity lemma would help considerably. Actually, that was the real reason why the regularity lemma was invented. At least, this is my recollection. I would like to thank Vašek Chvátal for helping me to write up the regularity lemma. Later we together found the exact constant for the Erdős-Stone theorem.

Kang: The title of your talk at the Abel lecture was 'In every chaos there is an order'. Was it your way of thinking when you developed the regularity lemma, or did you hear about this principle from someone else?

Szemerédi: This has already been used by many mathematicians, like in Ramsey theory. If you take a graph and colour the edges, then there is a monochromatic copy of some fixed graph. A graph is chaotic, and if you break it into pieces, then the pieces will have some nice properties. That's just a nice way of saying something. But 'In every chaos there is an order' is not my invention. That's ancient.

Kang: When do 'good' mathematical ideas come to you? While walking in woods, relaxing on a sofa or in bed, working at your office desk, or while discussing with colleagues?

Szemerédi: Working at a desk is out of question, because I never do this. I usually lie down on bed. But when I really concentrate on something, then I walk. It almost always happens that I work on a problem while walking, leave the problem, and next day I go for a walk and continue thinking and so on.

Kang: As both of us are participating in the conference on 'Perspectives in Discrete Mathematics', I would like to ask you what you think about future directions of mathematics, in particular of Discrete Mathematics?

Szemerédi: Well, as others have already explained, there is no such a thing as predicting the future. But during the last 20 years, Discrete Mathematics has developed enormously, because of computers and the interaction between computer scientists and Discrete Mathematicians. Discrete Mathematics is nowadays recognised as a part of mathematics. It was not the case, when I started. Discrete Mathematics was something like just doing it for playing around. But, not any more.

Kang: There are also parts of Discrete Mathematics, where one needs some methods from continuous mathematics.

Szemerédi: That's true. There is an interplay between continuous and discrete mathematics. Well, mathematicians who worked on continuous mathematics believed that this was a one way street and did not care about discrete mathematics. But when you really examine the proof of some of their results, then there are a lot of techniques and theory, which are very hard to understand, but there are some crucial arguments, which they claim to be the bottleneck and the punch line of the proof. Sometimes these crucial arguments are classical combinatorial arguments.

Kang: What kind of a change are you experiencing as a mathematician after having received the Abel Prize?

Szemerédi: That's easy. If it wasn't for the Abel Prize, I would not sit here for the interview.

Kang: Let me ask you one last question. What are you going to do with your prize money, 6,000,000 NOK, around 800,000 EUR?

Szemerédi: I don't know. We have many children and we are also waiting for the tax people to determine how much tax we are supposed to pay.

Kang: I would like to thank you for a pleasant conversation.

3 Szemerédi's Work

Endre Szemerédi has made immense contributions to discrete mathematics, theoretical computer science, ergodic theory, additive and combinatorial number theory and discrete geometry, through the understanding of deep connections between seemingly unrelated fields of mathematics.

Without a doubt, the most celebrated work by Szemerédi is his proof of the Erdős-Turán conjecture (1936), now known as Szemerédi's theorem (1975), which states that every set of integers of positive upper density contains arbitrarily long arithmetic progressions. In order to prove his theorem, Szemerédi introduced the Szemerédi regularity lemma (indeed a weaker version of it), which roughly says that every large dense graph can be partitioned into a bounded number of roughly equally-sized parts so that the graph is random-like between pairs of parts.

Szemerédi's theorem, Szemerédi regularity lemma and subsequent studies related to them have led to much progress in various areas of mathematics, including extremal graph theory, ergodic theory, harmonic analysis, additive number theory, discrete geometry and theoretical computer science.

An important application of Szemerédi's theorem is the Green-Tao theorem, stating that there are arbitrarily long arithmetic progressions of primes [20]. There are several other proofs of Szemerédi's theorem including an ergodic theoretic proof by Furstenberg [11] in 1977, a Fourier analytic proof by Gowers [16] in 2001, and proofs based on hypergraph removal lemma independently by Gowers [17], Tao [32, 34], and Nagle, Rödl, Schacht and Skokan [26, 27]. Some of these results will be discussed in Sections 3.1 and 3.2.

3.1 Szemerédi's Theorem

Szemerédi's Theorem goes back to the following famous theorem in Ramsey theory.

Theorem 1 (van der Waerden's Theorem)**.** *For every positive integers k and r, there exists an integer $W(k,r)$ such that for any integer $N \geq W(k,r)$, if the positive integers $\{1,2,\ldots,N\}$ are partitioned into r classes, then at least one of the classes contains at least one arithmetic progression $a, a+n, a+2n, \ldots, a+(k-1)n$ of length k, where a,n are positive integers.*

In other words, van der Waerden's Theorem says that for any integer $N \geq W(k,r)$, if we colour the positive integers $\{1,2,\ldots,N\}$ with r colours, then we can find a sequence of k numbers $a, a+n, a+2n, \ldots, a+(k-1)n$, all of which are coloured with a single colour.

Erdős and Turán conjectured in 1936 that the existence of an arithmetic progression would still be guaranteed in a set of integers if the set were dense. Szemerédi gave an affirmative answer to the conjecture by showing that any positive fraction of the positive integers must contain arbitrarily long arithmetic progressions.

Theorem 2 (Szemerédi's Theorem – 'Finite' Version)**.** *For every positive integer k and real number $0 < \delta \leq 1$, there exists an integer $S(k,\delta)$ such that for any integer $N \geq S(k,\delta)$, any subset $A \subset \{1,2,\ldots,N\}$ of cardinality at least δN contains at least one arithmetic progression $a, a+n, a+2n, \ldots, a+(k-1)n$ of length k, where a,n are positive integers.*

Szemerédi's Theorem is usually stated using the concept of the positive upper density as follows.

Theorem 3 (Szemerédi's Theorem)**.** *Let $A \subset \mathbb{N}$ be a subset of the positive integers with positive upper density, i.e.*

$$\bar{\delta}(A) := \limsup_{N\to\infty} \frac{\#\{A \cap [1,N]\}}{N} > 0.$$

Then for any positive integer k, there exist positive integers a,n *such that* $\{a,a+n,a+2n,\ldots,a+(k-1)n\} \subset A$.

Szemerédi's theorem for the cases $k=1,2$ is trivial. Roth [28] proved the theorem for the case $k=3$ in 1953, using Fourier analysis. Szemerédi proved the theorem first for the case $k=4$ in 1969 [30], and established the theorem in full generality in 1975 [31], using combinatorial arguments, in particular a weaker version of the Szemerédi regularity lemma.

There are several extensions of Szemerédi's theorem, such as the following strengthened 'infinite' version:

Theorem 4 (Szemerédi's Theorem – 'Infinite' Version)**.** *Let* $A \subset \mathbb{N}$ *be a subset of the positive integers with positive upper density, i.e.* $\bar{\delta}(A) > 0$. *Then for any positive integer k, there exist a positive integer n and infinitely many positive integers a such that* $\{a,a+n,a+2n,\ldots,a+(k-1)n\} \subset A$.

Furstenberg [11] provided in 1977 the ergodic theoretic proof of Szemerédi's theorem by showing that Szemerédi's theorem is equivalent to the following.

Theorem 5 (Furstenberg Recurrence Theorem)**.** *Let* $(X,\mathcal{B},\mu)$ *be a probability space and let* $T : X \to X$ *be a measure-preserving bijection on X, i.e.* $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ *is a measure-preserving system. Then for any* $E \in \mathcal{B}$ *with positive measure and any positive integer k there exists a positive integer n such that* $\mu(E \cap T^nE \cap \ldots \cap T^{(k-1)n}E) > 0$.

This is equivalent to a stronger theorem, saying that for any set $E \in \mathcal{B}$ with $\mu(E) > 0$ and every positive integer k there exist *infinitely* many positive integers n for which $\mu(E \cap T^nE \cap \ldots \cap T^{(k-1)n}E) > 0$. It corresponds to the 'infinite' version of Szemerédi's theorem. Indeed, even a stronger statement is true:

for any $E \in \mathcal{B}$ with $\mu(E) > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(E \cap T^nE \cap \ldots \cap T^{(k-1)n}E) > 0.$$

The case $k=1$ is trivial, and the case $k=2$ is the classical Poincaré recurrence theorem.

The ergodic theoretic approach by Furstenberg led to various generalisations of Szemerédi's theorem, including the multidimensional generalisation by Furstenberg and Katznelson [12] and the polynomial generalisation by Bergelson and Leibman [7].

The multidimensional Szemerédi's theorem by Furstenberg and Katznelson was established in 1978 [12], as a consequence of the following extension of the Furstenberg recurrence theorem:

Theorem 6 (Furstenberg-Katznelson Recurrence Theorem)**.** *Let* $(X,\mathcal{B},\mu)$ *be a probability space and let* $T_1,T_2,\dots,T_k : X \to X$ *be commuting measure-preserving bijections on* X*. For any* $E \in \mathcal{B}$ *with* $\mu(E) > 0$*,*

$$\liminf_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(T_1^n E \cap T_2^n E \ldots \cap T_k^n E) > 0.$$

Theorem 7 (Multidimensional Szemerédi's Theorem)**.** *Let* $d \geq 1$ *and* $A \subset \mathbb{Z}^d$ *with positive upper Banach density, i.e.*

$$\delta^*(A) := \limsup_{N\to\infty} \frac{\#\{A \cap [-N,N]^d\}}{(2N+1)^d} > 0.$$

Then for any $b_1,b_2,\dots,b_k \in \mathbb{Z}^d$*, there exist a positive integer* n *and infinitely many* $a \in \mathbb{Z}^d$ *such that* $\{a+nb_1, a+nb_2,\dots,a+nb_k\} \subset A$*.*

In 1996, Bergelson and Leibman [7] generalised the multidimensional Szemerédi's theorem to polynomials.

Theorem 8 (Polynomial Multidimensional Szemerédi Theorem)**.** *Let* $d \geq 1$ *and* $A \subset \mathbb{Z}^d$ *with positive upper Banach density, i.e.* $\delta^*(A) > 0$*. Then for any polynomials* $P_1,P_2,\dots,P_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^d$ *with* $P_1(0) = P_2(0) = \ldots = P_k(0) = 0$*, there exist a positive integer* n *and infinitely many* $a \in \mathbb{Z}^d$ *such that* $\{a+P_1(n), a+P_2(n),\dots,a+P_k(n)\} \subset A$*.*

Szemerédi's Theorem is one of the fundamental results in Ramsey theory, and is the density version of van der Waerden's theorem. Another fundamental result in Ramsey theory is the Hales-Jewett theorem, which is a generalisation of van der Waerden's theorem. In order to state the Hales-Jewett theorem, we need a notion of combinatorial lines, instead of arithmetic progressions. Let W_n be the set of all words of length n over the alphabet $\{1,\dots,k\}$. Given a word $w(x) \in W_n$ where x occurs at least once. The set $L = \{w(1),\dots,w(k)\}$, in which $w(i)$ is obtained from $w(x)$ by substituting each x with i, is called a *combinatorial line*.

Theorem 9 (Hales-Jewett Theorem)**.** *For every positive integers* k,r*, there exists a positive number* $H(k,r)$ *such that for any integer* $n \geq H(k,r)$*, every* r*-colouring of* W_n *contains a monochromatic combinatorial line.*

In 1991, Furstenberg and Katznelson [13] proved the density version of the Hales-Jewett theorem, using ergodic theoretic techniques:

Theorem 10 (Density Hales-Jewett Theorem)**.** *For every positive integer* k *and real number* $0 < \delta \leq 1$*, there exists a positive number* $D(k,\delta)$ *such that for any integer* $n \geq D(k,r)$*, every subset* $A \subset W_n$ *of cardinality at least* δk^n *contains a combinatorial line.*

Another approach to proving Szemerédi's theorem is based on hypergraph removal lemmas, for which corresponding hypergraph regularity lemmas have been developed. These will be discussed in the next section.

One of the most important applications of Szemerédi's theorem is:

Theorem 11 (Green-Tao Theorem)**.** *For every integer $k \geq 2$ there exist infinitely many arithmetic progressions of primes of length k.*

We shall conclude this section with what Terence Tao wrote in an article titled "The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes" [35]:

> "A famous theorem of Szemerédi asserts that all subsets of the integers with positive upper density will contain arbitrarily long arithmetic progressions. There are many different proofs of this deep theorem, but they are all based on a fundamental dichotomy between structure and randomness, which in turn leads (roughly speaking) to a decomposition of any object into a structured (low-complexity) component and a random (discorrelated) component. Important examples of these types of decompositions include the Furstenberg structure theorem and the Szemerédi regularity lemma. One recent application of this dichotomy is the result of Green and Tao establishing that the prime numbers contain arbitrarily long arithmetic progressions (despite having density zero in the integers). The power of this dichotomy is evidenced by the fact that the Green-Tao theorem requires surprisingly little technology from analytic number theory, relying instead almost exclusively on manifestations of this dichotomy such as Szemerédi's theorem. In this paper we survey various manifestations of this dichotomy in combinatorics, harmonic analysis, ergodic theory, and number theory. As we hope to emphasise here, the underlying themes in these arguments are remarkably similar even though the contexts are radically different."

3.2 Szemerédi Regularity Lemma

The Szemerédi regularity lemma and its variants belong to the essential tools of extremal graph theory, additive number theory, discrete geometry and theoretical computer science. More remarkably, it was the main tool for proving Szemerédi's theorem.

The Szemerédi regularity lemma roughly says that the vertex set of any large dense graph can be partitioned into a constant number of classes such that almost all of the induced bipartite graphs are “pseudorandom” in the sense that they mimic the behaviour of random bipartite graphs of the same density.

The pseudorandomness plays a fundamental role in structural and algorithmic aspects of many problems. It provides a way to use ‘probabilistic intuition’ for solving deterministic problems or to extract ‘predictable’ average structure from a ‘mysterious’ huge structure. Avi Wigderson said [36]:

> “Pseudorandomness is the study, by mathematicians and computer scientists, of deterministic structures which share some properties of random ones.”

In order to state more precisely the Szemerédi regularity lemma we need some definitions. Let $G = (V,E)$ be a graph with vertex set V and edge set $E \subset \binom{V}{2}$, i.e. each edge $e \in E$ is a 2-element subset of V. Given real $\varepsilon > 0$ and disjoint subsets $A, B \subset V$, the pair (A,B) is called ε-*regular* if for all $A' \subset A$ and $B' \subset B$ with $|A'| \geq \varepsilon|A|$ and $|B'| \geq \varepsilon|B|$,

$$\Big| d(A,B) - d(A',B') \Big| \leq \varepsilon,$$

where $d(A,B) := \frac{E \cap (A \times B)}{|A||B|}$ is the density of edges between A and B.

Theorem 12 (Szemerédi Regularity Lemma)**.** *For every positive real ε and every positive integer t_0, there exist positive integers $T(\varepsilon, t_0)$ and $N(\varepsilon, t_0)$ such that for every graph $G = (V,E)$ on $|V| \geq N(\varepsilon, t_0)$ vertices there exists a partition $P = \{V_1, V_2, \ldots, V_t\}$ of V with $t_0 \leq t \leq T(\varepsilon, t_0)$ satisfying the following properties:*

- $|V_1| \leq |V_2| \leq \ldots \leq |V_t| \leq |V_1| + 1$
- *all but at most εt^2 pairs (V_i, V_j) with $1 \leq i < j \leq t$ are ε-regular.*

Applying the Szemerédi regularity lemma, Ruzsa and Szemerédi [29] established in 1976 the triangle removal lemma, which roughly says that every graph which does not contain many triangles can be made triangle-free by removing few edges.

Theorem 13 (Triangle Removal Lemma)**.** *For every $\delta > 0$ there exist a positive real γ and a positive integer N such that every graph G on $n \geq N$ vertices containing at most γn^3 triangles can be made triangle-free by removing at most $\delta \binom{n}{2}$ edges.*

Using this lemma, Ruzsa and Szemerédi [29] gave a short alternative proof of Roth’s theorem (i.e. Szemerédi’s theorem for $k = 3$). Frankl and Rödl [14] showed that Szemerédi’s theorem for $k+1$ follows from a removal lemma for k-uniform hypergraphs (where a k-uniform hypergraph $H = (V,E)$ is a pair of vertex set V

and edge set $E \subset \binom{V}{k}$, i.e. each edge $e \in E$ is a k-element subset of V). Recently various generalisations of the regularity lemma and the removal lemma for hypergraphs were obtained independently by Gowers [17], Tao [32], Nagle, Rödl, Schacht and Skokan [26, 27]. The main applications of these generalisations include alternative combinatorial proofs of Szemerédi's Theorem.

Theorem 14 (Hypergraph Removal Lemma)**.** *Let F be a fixed k-uniform hypergraph on f vertices and let $\delta > 0$ be given. Then there exist a positive real γ and a positive integer N such that every k-uniform hypergraph on $n \geq N$ vertices containing at most γn^f copies of F can be made F-free by removing at most $\delta \binom{n}{k}$ edges.*

The Szemerédi regularity lemma works very well for *dense* graphs, where the number of edges is quadratic in the number of vertices, since the error term in the lemma is quadratic in the number of vertices with an arbitrary small multiplicative constant. In order to deal with sparse cases, some variants of the regularity lemmas are developed independently by Kohayakawa [23] and Rödl (unpublished) for sparse graphs and by Alon, Coja-Oghlan, Hàn, Kang, Rödl and Schacht [3] for sparse graphs with general degree distribution. Another variant of Szemerédi regularity lemma and removal lemma has been obtained by Green [19] for abelian groups.

As discussed in the previous section, Szemerédi's theorem has enjoyed its strong connections to ergodic theory. Likewise, the Szemerédi regularity lemma has strong links to probability theory and analysis. For example, Tao [33] gave a probabilistic and information theoretic version of the regularity lemma. Lovász and Szegedy [24] obtained 'analytic versions' of the regularity lemma and showed that some versions of the regularity lemma can be interpreted as approximation of elements in Hilbert spaces or as the compactness of an important metric space of two-variable functions.

In order to state an analytic version of the regularity lemma by Lovász and Szegedy [24], we need some notation. Let $\mathcal{F}$ denote the set of all bounded symmetric measurable functions $F : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ and let $\mathcal{F}_0$ denote the set of all symmetric measurable functions $F : [0,1]^2 \to [0,1]^2$. Given $F \in \mathcal{F}$ and a partition $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$ of $[0,1]$, let $F_{\mathcal{P}} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ denote the step-function obtained from F by substituting its value at $(x,y) \in P_i \times P_j$ by $\int_{P_i \times P_j} F(x,y)\,dxdy$.

Theorem 15 (Strong Analytic Regularity Lemma)**.** *For every positive real ε, there exists a positive integer $T(\varepsilon)$ such that for every function $F \in \mathcal{F}_0$, there is a partition $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$ of $[0,1]$ into $t \leq T(\varepsilon)$ sets of equal measures so that for every set $S \subset [0,1]^2$ which is the union of at most t^2 rectangles,*

$$\left| \int_S (F - F_{\mathcal{P}})\,dxdy \right| \leq \varepsilon.$$

Lovász and Szegedy [24] extended the regularity lemma to a general setting of Hilbert spaces.

Theorem 16 (Regularity Lemma in Hilbert Space)**.** *Let $S_1, S_2, \ldots$ be arbitrary subsets of a Hilbert space $\mathcal{H}$. Then for every positive real ε and $f \in \mathcal{H}$, there exist a positive integer $t \le 1/\varepsilon^2$, $f_i \in S_i$ for $1 \le i \le t$ and $a_1, a_2, \ldots, a_t \in \mathbb{R}$ such that for every $g \in S_{t+1}$,*

$$\Big|\ \langle g, f - (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_t f_t) \rangle\ \Big| \ \le\ \varepsilon ||g|| \cdot ||f||.$$

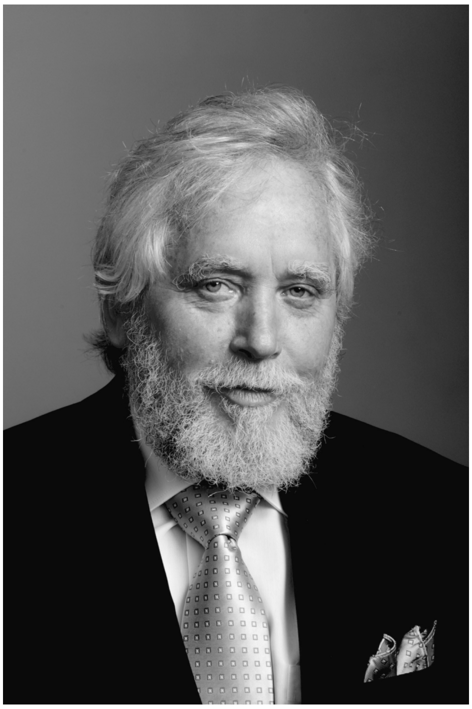
This work is along the lines of the study of connections between the regularity lemma and graph limits by Lovász and Szegedy [25], by Borgs, Chayes, Lovász, Sós, Szegedy and Vesztergombi [9], and by Bollobás, Janson and Riordan [8].

Last but not least, we shall discuss important applications of the Szemerédi regularity lemma in computer science. The regularity lemma guarantees the *existence* of a regular partition that approximates a graph by a constant number of pseudorandom graphs. The question of whether we can *compute in polynomial time* such a regular partition is algorithmically very important, from the viewpoint of theoretical computer science. A number of NP-hard problems can be solved in polynomial time on graphs that admit regular partitions in polynomial time. Algorithmic regularity lemmas that compute a regular partition in polynomial time were obtained by Alon, Duke, Lefmann, Rödl, and Yuster [4] and by Frieze and Kannan [10] for dense graphs, by Alon, Coja-Oghlan, Hàn, Kang, Rödl and Schacht [3] for sparse graphs, and by Haxell, Nagle and Rödl [21] for hypergraphs. An important application of algorithmic regularity lemmas on graphs is a polynomial time approximation scheme for the MAX-CUT problem.

Another very important application of the regularity lemma in computer science is the property testing [2, 5, 15]. Alon and Shapira [6] showed that every monotone property is testable. Roughly speaking, a property is said to be *testable* if there exists a randomised algorithm with constant running time which distinguishes between instances with the property and those which are far from it. To be more precise, let us call a graph property *monotone* if it is closed under removal of edges and vertices. Given a positive integer n and real ε, a graph G on n vertices is said to be ε-*far* from satisfying a graph property P if at least εn^2 edges should be added or deleted from G in order to make the resulting graph satisfy P. A *tester* for P is a randomised algorithm that distinguishes with high probability (e.g. 2/3) between the case of G satisfying P and the case of G being ε-far from satisfying P. A tester is said to have *one-sided error* if whenever G satisfies P, the algorithm declares that this is the case with probability one.

Theorem 17 (Testability of Monotone Properties)**.** *For every monotone graph property P there is a tester with one-sided error.*

4 An Irregular Mind



"Szemerédi has *an irregular mind*, his brain is wired differently than most mathematicians. Many of us admire his unique way of thinking, his extraordinary vision." [22]

Endre Szemerédi was born in 1940 in Budapest, Hungary. He studied at Eötvös Loránd University and received his Ph.D. from Moscow State University. He is Research Fellow at the Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences and Professor of Computer Science at Rutgers University.

Endre Szemerédi has received many awards and honours for his essential contributions to mathematics and computer science including the Abel Prize (2012), the Leroy P. Steele Prize (2008), the Rolf Schock Prize (2008), the Prize of the Hungarian Academy of Sciences (1979), the Pólya Prize (1975), the Rényi Prize (1973), the Grünwald Prize (1968, 1967).

Endre Szemerédi and his work are best described by Timothy Gowers [18]:

> "Some mathematicians are famous for one or two major theorems. Others are famous for a huge and important body of high-class results. Very occasionally, there is a mathematician who is famous for both. No account of Szemerédi's work would be complete without a discussion of Szemerédi's theorem and Szemerédi's regularity lemma. However, there is much more to Szemerédi than just these two the-

orems. He has published over 200 papers, as I mentioned at the beginning, and at the age of 71 he shows no signs of slowing down. It is extremely fitting that he should receive an award of the magnitude of the Abel Prize. I hope that the small sample of his work that I have described gives at least some idea of why, even if I have barely scratched the surface of what he has done."

References

[1] The Abel Prize Laureate 2012, *http://www.abelprize.no/c54147/seksjon/vis.html?tid=54148*

[2] N. Alon, Testing subgraphs in large graphs, *Random Structures and Algorithms* **21** (2002), 359-370.

[3] N. Alon, A. Coja-Oghlan, H. Hàn, M. Kang, V. Rödl and M. Schacht, Quasi-randomness and algorithmic regularity for graphs with general degree distributions, *SIAM J. Comput.* **39** (2010), 2336-2362.

[4] N. Alon, R.A. Duke, H. Lefmann, V. Rödl, and R. Yuster, The algorithmic aspects of the regularity lemma, *J. of Algorithms* **16** (1994), 80-109.

[5] N. Alon, E. Fischer, M. Krivelevich and M. Szegedy, Efficient testing of large graphs, *Combinatorica* **20** (2000), 451-476.

[6] N. Alon and A. Shapira, Every monotone graph property is testable, in: *Proceedings of the 37th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 128–137, ACM Press (2005).

[7] V. Bergelson and A. Leibman, Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemerédi's theorems, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 725-753.

[8] B. Bollobás, S. Janson and O. Riordan, Monotone graph limits and quasimonotone graphs, *Internet Mathematics* **8** (2012), 187-231.

[9] C. Borgs, J. Chayes, L. Lovász, V. Sós, B. Szegedy and K. Vesztergombi, Convergent sequences of dense graphs I: Subgraph frequencies, metric properties and testing, *Advances in Math.* **219** (2008), 1801–1851.

[10] A. Frieze and R. Kannan, Quick approximation to matrices and applications, *Combinatorica* **19** (1999), 175-200.

[11] H. Furstenberg, Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions, *J. Analyse Math.* **31** (1977), 204-256.

[12] H. Furstenberg and Y. Katznelson, An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations, *J. Analyse Math.* **34** (1978), 275-291.

[13] H. Furstenberg and Y. Katznelson, A density version of the Hales-Jewett theorem, *J. Analyse Math.* **57** (1991), 64-119.

[14] P. Frankl and V. Rödl, Extremal problems on set systems, *Random Structures Algorithms* **20** (2002), 131-164.

[15] O. Goldreich, S. Goldwasser and D. Ron, Property testing and its connection to learning and approximation, *Journal of the ACM* **45** (1998), 653-750.

[16] T. Gowers, A new proof of Szemerédi's theorem, *Geom. Func. Anal.* **11** (2001), 465-588.

[17] T. Gowers, Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem, *Annals of Mathematics* **166** (2007),897-946.

[18] T. Gowers, The work of Endre Szemerédi, *http://gowers.files.wordpress.com/2012/03/talktalk2.pdf*

[19] B. Green, A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups, *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), 340-376.

[20] B. Green and T. Tao, The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, *Annals of Mathematics* **167** (2008), 481-547.

[21] P. Haxell, B. Nagle, and V. Rödl, An algorithmic version of the hypergraph regularity method, in: *Proceedings of the fourty-sixth annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 439-448, IEEE Computer Society, 2005.

[22] *An irregular mind*, Szemerédi is 70. Edited by Imre Bŕány and József Solymosi. Bolyai Society Mathematical Studies, 21. János Bolyai Mathematical Society, Budapest; Springer, Berlin, 2010, 758 pp.

[23] Y. Kohayakawa, Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs, *Foundations of computational mathematics* (1997), 216-230.

[24] L. Lovász, B. Szegedy, Szemerédi's regularity lemma for the analyst, *Geom. Funct. Anal.* **17** (2007), 252-270.

[25] L. Lovász, B. Szegedy, Limits of dense graph sequences, *J. Combin. Theory Ser. B* **96** (2006), 933-957.

[26] B. Nagle, V. Rödl, and M. Schacht, The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs, *Random Structures & Algorithms* **28** (2006), no. 2, 113-179.

[27] V. Rödl and J. Skokan, Regularity lemma for k-uniform hypergraphs, *Random Structures & Algorithms* **25** (2004), no. 1, 1-42.

[28] K. Roth, On certain sets of integers, *J. London Math. Soc.* **28** (1953), 245-252.

[29] I. Z. Ruzsa and E. Szemerédi, Triple systems with no six points carrying three triangles, in Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **18**, Vol. II, pp. 939-945,

[30] E. Szemerédi, On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969), 89-104.

[31] E. Szemerédi, On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arith.* **27** (1975), 199-245.

[32] T. Tao, A variant of the hypergraph removal lemma, *J. Combin. Theory Ser. A* **113** (2006), 1257-1280.

[33] T. Tao, Szemerédi's regularity lemma revisited, *Contrib. Discrete Math.* **1** (2006), 8-28.

[34] T. Tao, A correspondence principle between (hyper)graph theory and probability theory, and the (hyper)graph removal lemma, *J. Anal. Math.* **103** (2007), 1-45.

[35] T. Tao, The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes, *http://arxiv.org/abs/math/0512114v2*

[36] A. Wigderson, Randomness and pseudorandomness, Abstract of the Abel Lecture 2012, *http://www.abelprize.no/nyheter/vis.html?tid=54530*

The photo of Endre Szemerédi was taken by Knut Falch, and is from the photo archives of the Norwegian Academy of Science and Letters. It is used here with kind permission. Many thanks to Anne-Marie Astad.

Author's address:

Mihyun Kang
Technische Universität Graz
Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik
Steyrergasse 30, 8010 Graz, Austria
email kang@math.tugraz.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 221 (2012), 21–38

Endre Szemerédi: Ein mathematisches Universum in kombinatorischem Gewande

Mathias Beiglböck und Reinhard Winkler
Universität Wien — TU Wien

1 Einleitung

In der Begründung der Verleihung des diesjährigen Abelpreises an den ungarischen Mathematiker Endre Szemerédi durch die Norwegische Akademie der Wissenschaften heißt es an zentraler Stelle, der Preis werde

> *for his fundamental contributions to discrete mathematics and theoretical computer science, and in recognition of the profound and lasting impact of these contributions on additive number theory and ergodic theory*

verliehen. Entsprechend der Bedeutung des Abelpreises wie auch der durch ihn ausgezeichneten Leistungen Szemerédis sind die Würdigungen zahlreich (eine jüngst erschienene ist etwa [RS12], siehe aber auch [Gow12]). Trotz der Reichhaltigkeit von Szemerédis Lebenswerk – der erste Teil des obigen Zitats der Norwegischen Akademie deutet die Schwerpunkte seiner Arbeit an – ist es doch der nach ihm benannte *Satz von Szemerédi* aus dem Jahr 1975 [Sze75], der die meiste Aufmerksamkeit hervorruft. Der Grund dafür lässt sich aus dem zweiten Teil des Zitats erschließen.

Denn nur wenige mathematische Einzelleistungen sind in vergleichbarem Ausmaß Angelpunkt explosionsartiger Entwicklungen in der Wissenschaft, wie sich dies von Szemerédis berühmtestem Resultat behaupten lässt. Entsprechend liegen auch die Schwerpunkte des Artikels von Mihyun Kang im vorliegenden Heft der *IMN* [Kan12] auf den facettenreichen Entwicklungen der Mathematik, die vom Satz von Szemerédi ausgingen. Das gilt sowohl für das einleitende Interview der

ISSN 0020-7926

Autorin mit Szemerédi, als auch für den zweiten Teil, in dem sie besonders auf das sogenannte Regularitätslemma eingeht. Dieses tauchte in einer speziellen Version erstmals im Originalbeweis des Satzes von Szemerédi in [Sze75] auf und erhielt später in [Sze78] seine bleibende Gestalt.

Auch im vorliegenden Aufsatz streben wir keine repräsentative Darstellung von Szemerédis Lebenswerk an. Stattdessen wollen wir gewisse Aspekte näher ins Auge fassen, die uns im Zusammenhang mit der in [Kan12] dargestellten Entwicklung des Satzes von Szemerédi besonders faszinieren.

Unser Programm hat folgende Gestalt. Im Kapitel 2 geht es zunächst um die Aussage des Satzes von Szemerédi. Dabei interessieren wir uns für Aspekte, die unter anderem im Kontext von Ramsey-Theorie und Satz von van der Waerden sichtbar werden. Kapitel 3 setzt sich mit der außergewöhnlichen Schwierigkeit auseinander, einen kurzen und trotzdem angemessenen Überblick auch nur über die wichtigsten Ideen im kombinatorisch extrem komplizierten Originalbeweis von Szemerédi zu geben. Anstatt diese Schwierigkeit in Angriff zu nehmen, bevorzugen wir hier einen anderen, leichteren Weg. Und zwar versuchen wir, einen Einblick in den Zugang von Furstenberg[1] zu geben, der kurz nach Szemerédis Durchbruch in [Sze75] eine neuartige Sichtweise erschloss (siehe [Fur77, Fur81]). Besonders wichtig sind bei Furstenberg topologische Strukturen, Rekurrenzfragen dynamischer Systeme und die sich daraus ergebenden ergodentheoretischen Sichtweisen. Entsprechend versuchen wir in Kapitel 4 plausibel zu machen, wie Topologie in der Kombinatorik nützlich werden kann. Kapitel 5 mit Furstenbergs Korrespondenzprinzip und seinem multiplen Rekurrenzsatz zeigt, wie sich die Situation im Satz von Szemerédi in die Sprache der Dynamik übersetzen lässt. Das umfangreiche Kapitel 6 zielt auf einen Struktursatz von Furstenberg ab. Dieser zeigt, dass sich maßerhaltende Systeme aus solchen aufbauen lassen, die man gut unter Kontrolle hat. Und zwar treten als Bausteine nur zwei Typen auf: sogenannte kompakte Systeme einerseits und schwach mischende Systeme andererseits. Für beide lassen sich die für den Satz von Szemerédi erforderlichen Eigenschaften relativ leicht nachweisen, wenn auch aus ganz unterschiedlichen, geradezu diametral entgegengesetzten Gründen: Bei kompakten Systemen nutzt man aus, dass sie sehr starr sind und gewissermaßen hochstrukturiert sind; schwach mischende Systeme hingegen verhalten sich fast wie unabhängige Zufallsfolgen und ermöglichen deshalb den Einsatz stochastischer Sichtweisen. Wir versuchen eine Idee zu geben, wie Furstenberg all dies zu einem Beweis des Satzes von Szemerédi zusammensetzte. Im abschließenden Kapitel 7 gehen wir noch auf neuere Entwicklungen ein, die teilweise auf Szemerédi und Furstenberg aufbauen, und teilweise neue Wege beschreiten.

[1] In diesem Artikel, der die Verleihung des Abel-Preises an Szemerédi zum Anlass hat, sei auch erwähnt, dass Furstenberg im Jahr 2007 mit dem vergleichbar prominenten Wolf-Preis für Mathematik ausgezeichnet wurde.

2 Die schillernde Aussage des Satzes von Szemerédi

Der Satz von Szemerédi gehört zu den bedeutendsten Resultaten der Kombinatorik, bzw. etwas enger gefasst, der Ramseytheorie. Ein Motiv, das sich durch die Ramseytheorie zieht, besteht im Phänomen, dass, grob gesagt, gut organisierte Strukturen sich (so wie der Besen in Goethes „Zauberlehrling“) nicht ohne weiteres zerschlagen lassen. Wir wollen dieses Phänomen hier das *Ramseyprinzip* nennen. Eine triviale Erscheinungsform des Ramseyprinzips: Zerteilt man eine unendliche Menge in zwei Teile, so ist nach dem Schubfachprinzip mindestens einer davon wieder unendlich (tatsächlich sogar gleich groß) wie die ursprüngliche Menge. Ihren Namen bezieht die Ramseytheorie aus folgendem klassischen Resultat.

Satz 1 (Satz von Ramsey, 1930)**.** *Färbt man alle zweielementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit zwei (oder auch r) Farben, so gibt es ein unendliches $T \subseteq \mathbb{N}$ derart, dass alle zweielementigen $\{t_1, t_2\} \subseteq T$ gleiche Farbe haben.*

Die Interpretation dieses Satzes im Sinne des Ramseyprinzips geht vom vollständigen Graphen mit der abzählbar unendlichen Knotenmenge $\mathbb{N}$ aus. Durch die Färbung wird die Menge der Kanten in zwei Teile zerlegt. Der Satz von Ramsey besagt, dass dennoch wenigstens einer der Teile die ursprüngliche Struktur (nämlich den vollständigen Graphen auf der wieder abzählbar unendlichen Menge T) enthält. Elementare Beweise des Satzes von Ramsey machen wieder ganz entscheidend vom Schubfachprinzip Gebrauch.

Im Gegensatz zur graphentheoretischen Struktur im Satz von Ramsey geht es bei Szemerédi vor allem um die additive Struktur der natürlichen Zahlen. Auf diesem Felde ist der wichtigste Vorläufer des Satzes von Szemerédi jener von van der Waerden.

Satz 2 (Satz von van der Waerden, vgl. [vdW27])**.** *Sei $A_1, \ldots, A_r$ eine Partition der natürlichen Zahlen. Dann enthält wenigstens eines der A_i arithmetische Folgen beliebiger (endlicher) Länge.*

Dieser Satz ist nach dem Geschmack der meisten Mathematiker: Eine einfache Aussage, die zu beweisen sich aber als überraschend schwierig erweist. Der Beweis von van der Waerden ist nur wenige Seiten lang, enthält aber eine sehr gewitzte Induktion. Das reizt natürlich dazu, die Möglichkeiten der Methode nach allen Richtungen bis an die Grenzen auszuloten und zu versuchen, damit noch schwierigere Probleme zu lösen.

Doch hält die Mathematik nicht nur diesen geradezu sportlich anmutenden Aspekt bereit. Es lohnt innezuhalten, und sich die Aussage des Satzes noch besser klar zu machen. Denn auch wenn man den Beweis Schritt für Schritt verstanden hat, gibt es vielleicht noch mehr am Satz zu verstehen. Wie gar nicht so selten in der

Mathematik ist es besonders beim Satz von van der Waerden keineswegs dasselbe, einerseits einen Beweis des Sachverhalts zu kennen oder andererseits ihn auch in seiner weitreichenden Bedeutung zu verstehen.

Um konkreter zu werden: Im Fall des Satzes von van der Waerden ist es dem Verständnis zuträglich, zu begreifen, welches „besondere Merkmal" der Zelle A_i dafür verantwortlich ist, dass sie beliebig lange arithmetische Folgen enthält. Hier bieten sich unterschiedliche Vermutungen an. Dass selbst Mathematiker vom Kaliber eines Pál Erdős und Pál Turán manch falsche äußerten, zeigt, dass die Situation weit weniger kanonisch ist, als es im Nachhinein den Anschein haben mag.[2] Als zutreffend erwies sich aber jene Vermutung der beiden aus 1936, wonach die besondere Eigenschaft der Menge A_i darin besteht, dass sie einen „positiven Anteil" aller natürlichen Zahlen enthält.

Für eine präzise Formulierung definieren wir die *obere Dichte* einer Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ durch

$$\bar{d}(A) := \limsup_{N\to\infty} \frac{\#(A \cap \{1,\ldots,N\})}{N}.$$

Die Frage von Erdős und Turán ist nun: Gegeben $k \in \mathbb{N}$, enthält jede Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $\bar{d}(A) > 0$ eine arithmetische Folge der Länge k? Eine positive Antwort würde den Satz von van der Waerden als offensichtliches Korollar enthalten. Der erste Schritt in diese Richtung war Roths Beweis für $k = 3$ [Rot53]. Die Verbesserung auf $k = 4$ ließ immerhin einige Jahre auf sich warten. Der junge Mathematiker, dem sie gelang: Endre Szemerédi [Sze69]. Sein berühmter Satz einige Jahre später schließlich bestätigt die Vermutung von Erdős und Turán in voller Allgemeinheit:

Satz 3 (Szemerédi [Sze75])**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge mit $\bar{d}(A) > 0$. Dann enthält A beliebig lange arithmetische Folgen (endlicher Länge).*

Der Beweis gestaltet sich überaus kompliziert. Tatsächlich kennt man mittlerweile eine Reihe unterschiedlicher Beweise, die sich in der Wahl der verwendeten Methoden deutlich unterscheiden. Eine hervorstechende Gemeinsamkeit ist, dass sie alle höchst komplex sind, tiefe Einsichten in verschiedene Gebiete liefern bzw. voraussetzen und sich entsprechend erst nach intensivem Studium erschließen.

Bevor wir dieses Thema vertiefen, vergleichen wir mit dem Satz von van der Waerden. Vermutet wurde er zunächst von Baudet und schon kurz darauf von van der Waerden [vdW27] bewiesen. Der ursprüngliche Beweis benötigt nur wenige Seiten, und seitdem wurden weitere kurze Beweise entdeckt – gegen Ende von Kapitel 6 kommen wir nochmals kurz darauf zurück. Im Gegensatz dazu war die Vermutung von Erdős und Turán nahezu 40 Jahre offen.

[2] Eine besonders ambitionierte Vermutung aus [ET36] wird durch ein Gegenbeispiel von Behrend [Beh46] widerlegt: Für festes $\varepsilon > 0$ und hinreichend großes N existiert eine Menge $A \subseteq \{1,\ldots,N\}$ mit $\#A \geq N^{1-\varepsilon}$ ohne arithmetische Folge der Länge drei.

Eine natürliche Frage an dieser Stelle ist daher: Inwiefern war die Sichtweise von Erdős und Turán gerechtfertigt, inwiefern liefert der Satz von Szemerédi den Schlüssel zum Verständnis des Satzes von van der Waerden?

Natürlich sprengt man mit solchen Fragen den Bereich objektiver Gültigkeit, wie sie mathematische Theoreme besitzen. Doch gerade angesichts widersprüchlicher Einschätzungen aufgrund unterschiedlicher Sichtweisen, wie sie von Experten je nach mathematischer Prägung vertreten werden, lernt man Interessantes. Es zeigt sich nämlich die Buntheit, zu der Mathematik im Bewusstsein derer, die sie betreiben, fähig ist.

Beim Satz von van der Waerden zeichnen sich wenigstens zwei Sichtweisen ab, für die jeweils gute Argumente vorliegen. Die Kürze der Beweise des ursprünglichen Satzes legt nahe, dass damit die richtige Sichtweise zur Geltung kommt. Hier soll aber auch zugunsten der konträren Ansicht argumentiert werden, dass nämlich die Beweise des stärkeren Satzes von Szemerédi trotz ihrer viel höheren Komplexität die zugrundeliegende Intuition klarer zum Ausdruck bringen. Für diese Sichtweise kann man auch ins Treffen führen, dass die beste qualitative Fassung des Satzes von van der Waerden eine solche ist, die aus einem Beweis des Satzes von Szemerédi folgt, welchen Gowers in [Gow01] gegeben hat. Weiters lassen sich mächtige Verallgemeinerungen des Satzes von van der Waerden nur gewinnen, wenn man den Satz von Szemerédi mitbeweist, indem man den Umweg über Mengen mit positiver Dichte geht (Bergelson, Leibman, Lesigne [BLL08]). Szemerédis Satz ist ein wesentlicher Schritt zum Beweis des Satzes von Green und Tao [GT08]: Es gibt beliebig lange arithmetische Folgen von Primzahlen. Schließlich kann man die Schönheit des Satzes in der inhärenten stochastischen Komponente sehen. Es stellt sich nämlich heraus, dass der Satz von Szemerédi in unglaublicher Weise starke deterministische Struktur mit Phänomenen vereint, die bei stochastischer Unabhängigkeit (also gewissermaßen bei *Zufall*) typisch sind.

Über die im Fall der verschiedenen Zugänge zu den Sätzen von van der Waerden und Szemerédi beobachtete Polarität zweier Sichtweisen lässt sich durchaus auch in sehr allgemeinem mathematischen Kontext nachdenken. Gewissermaßen verkörpern sich darin zwei verschiedene ästhetische Prinzipien, die zweifellos beide ihre Berechtigung haben. Auf der einen Seite empfinden wir elementare Beweise oft gerade deshalb als elegant, weil sie, quasi frei von Ballast, besonders schlank auf uns zukommen und ein oder mehrere Argumente ohne Beiwerk vor Augen treten lassen. Kombinatorische Schlussweisen sind tendenziell von dieser Art. Auf der anderen Seite – hier ist die epische Breite von Bourbaki das geradezu archetypische Beispiel – können wir an einer begrifflich reich ausdifferenzierten, abstrakten Darstellung von Mathematik einen weit bis zum Horizont reichenden Ausblick genießen, der uns die Tragweite und Wirkungsmacht mathematischer Konzepte zu fassen hilft.

3 Ausnahme-Kombinatorik

An den Würdigungen von Szemerédis Lebenswerk fällt fast durchwegs Folgendes auf: Der Satz 3 wird ins Zentrum gerückt, oft noch die entscheidende Rolle des Regularitätslemmas hervorgehoben; aber fast nichts wird über Szemerédis Originalbeweis verraten. Auch in unserem Text halten wir es nicht anders. Die Gründe werden deutlich, wenn man sich einige Zeilen vergegenwärtigt, die sich in einem der wenigen Texte finden, die sich doch der schwierigen Aufgabe stellen, auf wenigen Seiten etwas Greifbares über Szemerédis Methode zu sagen. Und zwar ist es kein Geringerer als Terence Tao, der u.a. Folgendes schreibt (siehe [Tao12]):

> Szemerédi's original proof of this theorem is a remarkably intricate piece of combinatorial reasoning. Most proofs of theorems in mathematics – even long and difficult ones – generally come with a reasonably compact 'high-level' overview, in which the proof is (conceptually, at least) broken down into simpler pieces. There may well be technical difficulties in formulating and then proving each of the component pieces, and then in fitting the pieces together, but usually the 'big picture' is reasonably clear. To give just one example, the overall strategy of Perelman's proof of the Poincaré conjecture can be briefly summarised as follows: to show that a simply connected three-dimensional manifold is homeomorphic to a sphere, place a Riemannian metric on it and perform Ricci flow, excising any singularities that arise by surgery, until the entire manifold becomes extinct. By reversing the flow and analysing the surgeries performed, obtain enough control on the topology of the original manifold to establish that it is a topological sphere.
>
> In contrast, the pieces of Szemerédi's proof are highly interlocking, particularly with regard to all the epsilon-type parameters involved; it takes quite a bit of notational setup and foundational lemmas before the key steps of the proof can even be stated, let alone proved. Szemerédi's original paper contains a logical diagram of the proof (reproduced in Gowers' recent talk) which already gives a fair indication of this interlocking structure. (Many years ago I tried to present the proof, but I was unable to find much of a simplification, and my exposition is probably not that much clearer than the original text.)

Diesen aussagekräftigen Bemerkungen von Tao wollen wir hier nicht viel hinzufügen. Auf einem viel bescheideneren Niveau erhellend könnte aber der Hinweis auf Kapitel 4 und auf den in Abschnitt 6.4 angedeuteten Beweis des Satzes von van der Waerden mithilfe der Stone-Čech-Kompaktifizierung sein.

Dort werden topologische Argumente bemüht, um kombinatorische oder zahlentheoretische Sachverhalte zu beweisen. In gewisser Weise lässt sich die umfangreiche Geschichte, die auf Szemerédis Durchbruch 1975 folgte und von der wir hier einige wenige Episoden zu beleuchten versuchen, in diesem Zusammenhang sehen: Durch Entfaltung eines eindrucksvollen konzeptuellen Apparats vor allem durch Furstenberg, aber auch durch seine Nachfolger, werden Szemerédis Ideen, deren kombinatorische Komplexität das Fassungsvermögen der meisten MathematikerInnen übersteigt, in intuitiv begreifbare Teile zerlegt, die dann – wenn auch erst nach eingehendem Studium und in vielen Etappen – einer viel breiteren mathematischen Gemeinschaft zugänglich gemacht werden können.

Es zeigt sich hier ein Potential abstrakter mathematischer Konzepte, das vielfach unterschätzt wird, weil gerade Abstraktion oft als etwas angesehen wird, das nur eingeweihten Spezialisten vorbehalten ist. Wir glauben aber, dass Abstraktion viel mit mathematischem Erkenntnisfortschritt auch auf breiter Front zu tun hat und insofern als ein Element der Popularisierung und sogar der Aufklärung wirken kann.[3]

4 Kombinatorik versus Topologie

Die Formulierung des Satzes von Szemerédi, die wir in Satz 3 gegeben haben, ist knapp und prägnant, allerdings mitunter insofern etwas irreführend, als sie verschleiert, dass der Satz auch eine finitäre Fassung besitzt:

Satz 4 (Satz von Szemerédi, finitäre Version)**.** *Seien eine natürliche Zahl k und eine reelle Zahl $\delta > 0$ gegeben. Dann existiert eine natürliche Zahl $S(k,\delta)$, sodass für jede natürliche Zahl $N > S(k,\delta)$ und jede Teilmenge A von $\{1,\dots,N\}$, die mindestens δN Elemente enthält, eine arithmetische Folge $a, a+n, \dots, a+(k-1)n$ der Länge k in A liegt.*

Obwohl die Äquivalenz der Formulierungen in Satz 3 und Satz 4 nicht sehr tief liegt, wollen wir sie kurz erläutern. Das nämlich gibt uns Gelegenheit, anhand einer der beiden Implikationen zu illustrieren, wie der Begriff der Kompaktheit auch in der Kombinatorik zwischen finitärer und unendlicher Mathematik vermittelt. Tatsächlich ist das Wechselspiel dieser beiden Pole ein ganz entscheidendes Charakteristikum der Mathematik rund um Szemerédis Theorem.

Beweis. Satz 4 $\Longrightarrow$ Satz 3: Diese Implikation erweist sich als trivial, sobald man beide Formulierungen des Satzes verdaut hat.

Satz 3 $\Longrightarrow$ Satz 4 (Diese Richtung ist interessanter zu beweisen): Angenommen, die Implikation wäre falsch. Dann gibt es Zahlen $k \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$, sodass die Aussage von Satz 4 für jedes S falsch ist. Somit gibt es eine Folge natürlicher Zahlen $N_1 < N_2 < \dots$ und Mengen $A_m \subseteq \{1,\dots,N_m\}$ mit $\#A_m \geq \delta N_m$, die alle keine arithmetische Folge der Länge k enthalten.

[3] Auch wenn es im hier vorliegenden Fall wohl nur um Popularisierung innerhalb der wissenschaftlichen Gemeinschaft geht, so gibt es gute Argumente (die hier allerdings zu weit führen würden), das universell zu sehen.

Wir betrachten für jede Menge A_m die Indikatorfunktion

$$f_m := \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{N} \setminus A_m \\ 1 & n \in A_m \end{cases}$$

und interpretieren sie als *Punkt* des Raumes $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist X *kompakt* (Satz von Tychonoff). Daher hat die Folge (f_m) einen Häufungspunkt f, welcher der Teilmenge $A = \{n : f(n) = 1\}$ der natürlichen Zahlen entspricht. Es lässt sich dann unschwer nachvollziehen, dass einerseits $\bar{d}(A) \geq \delta$ und andererseits A keine arithmetische Folge der Länge k enthält. Das heißt, wir haben den gesuchten Widerspruch zu Satz 3 gefunden. □

Bei diesem Argument wird Kompaktheit auf eine sehr einfache Weise eingesetzt, die sich natürlich sehr leicht zu einem Beweis umschreiben ließe, der auf keine Topologie Bezug nimmt. Insbesondere ist die hier verwendete Version des Satzes von Tychonoff eine harmlose, die mit einer sehr schwachen Version des Auswahlaxioms auskommt (wie sie etwa schon für den Satz von Bolzano-Weierstraß in klassischen Formulierungen der elementaren reellen Analysis gebraucht wird). Trotzdem zeigt schon das hier verwendete Kompaktheitsargument sehr typisch den Nutzen für unseren Themenkreis. Methodisch gehen mögliche Anwendungen allerdings weit über den elementaren Rahmen hinaus, auch wenn sie sich auf relativ elementare Probleme beziehen.

Es mag auf den ersten Blick überraschen, dass für den Satz von van der Waerden, bei dem es ja um das anscheinend (oder nur scheinbar?) sehr elementare Objekt $\mathbb{N}$ geht, sich eine unerhoffte Welt erschließt, wenn man in der Welt der Kompaktifizierungen viel weiter ausholt als im obigen Beweis. Und zwar kann man sehr erfolgreich die maximale Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$ ins Spiel bringen, nämlich die Stone-Čech-Kompaktifizierung. Wir werden darauf noch zurückkommen. Späteres vorwegnehmend, kann aber schon hier angedeutet werden, dass im Falle des Satzes von Szemerédi Kompaktheit nur die Hälfte der *analytischen* Seite der Medaille ist. Die andere Hälfte, die gewissermaßen auch den Rahmen für den Satz von van der Waerden sprengt, ist stochastische Unabhängigkeit.

5 Kombinatorik versus Rekurrenz dynamischer Systeme

Furstenbergs epochale Einsicht bestand darin, die Aussage des Satzes von Szemerédi als Phänomen über die *Rekurrenz* dynamischer Systeme, genauer *maßerhaltender Systeme*, zu begreifen.

Unter einem maßerhaltenden System (X, μ, T) verstehen wir einen polnischen Wahrscheinlichkeitsraum (X, μ), auf dem die (messbare) Bijektion $T : X \to X$ so agiert, dass das Maß durch T erhalten wird, d.h. $\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ für jede messbare Teilmenge B von X gilt. Unter Rekurrenz versteht man die Eigenschaft von Teilmengen von X, unter iterierter Anwengung der Abbildung T immer wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurückzukehren. Beispielsweise gibt es für jede Menge B mit $\mu(B) > 0$ eine natürliche Zahl n mit

$$\mu(B \cap T^{-n}(B)) > 0.$$

Dies folgt leicht aus der Annahme, dass der gesamte Raum X endliches Maß hat – eine simple, nichtsdestotrotz wichtige Eigenschaft, die als Poincaré-Rekurrenz bekannt ist.

Furstenberg [Fur77, Fur81] folgend, lässt sich der Zusammenhang zwischen oberer Dichte, maßerhaltenden Systemen und Rekurrenz in folgendes Prinzip kleiden.

Satz 5 (Korrespondenzprinzip). *Zu jeder Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ gibt es ein maßerhaltendes System (X, μ, T) und eine Menge $B \subseteq X$ mit $\mu(B) = \bar{d}(A)$ und*

$$\bar{d}((A - m_1) \cap \ldots \cap (A - m_k)) \geq \mu(T^{-m_1}(B) \cap \ldots \cap T^{-m_k}(B)),$$

für alle $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$.

Der Beweis ist nicht schwer und wenig überraschend für jene, die Erfahrung mit der Konstruktion von Maßen haben.[4]

Intuitiv gesprochen, erhalten wir zu $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge B in einem maßerhaltenden System, die A gewissermaßen repräsentiert, d.h. uns erlaubt, Aussagen über die „Rekurrenz" der Menge A aus Aussagen über die Rekurrenz von B bezüglich T herzuleiten.

Wir fixieren nun $k \in \mathbb{N}$ und halten fest, dass Satz 3 folgt, wenn es uns gelingt, zu zeigen, dass für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\bar{d}\big(A \cap (A - n) \cap \ldots \cap (A - (k-1)n)\big) > 0. \tag{1}$$

Offenbar besagt (1) nämlich sogar, dass es nicht nur ein $a \in A$ gibt, bei dem eine arithmetische Folge beginnen kann. Vielmehr bilden solche a's eine Menge positiver oberer Dichte.

[4] Beispielsweise lässt sich ein Shift-Raum $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $T((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$, $B := \{(x_n)_n : x_0 = 1\}$ mit geeignetem, der Menge A angepasstem Maß wählen. Um dieses zu konstruieren, betrachtet man zunächst die (abzählbare!) Algebra, die von den Translaten $\mathcal{A} = \{A - n : n \in \mathbb{Z}\}$ innerhalb der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ erzeugt wird. Durch Ausdünnen und Diagonalisieren findet man eine Folge $(k_n)_n$, sodass $m(C) := \lim_n \#(C \cap \{1, \ldots, k_n\})/k_n$ existiert, wann immer $C \in \mathcal{A}$ und überdies $m(A) = \bar{d}(A)$ gilt. Dieses (endlich additive) Maß induziert nun in natürlicher Weise einen Inhalt auf der Algebra der Teilmengen von X, die nur von endlich vielen Koordinaten abhängen: Man setzt $\mu(B) := m(A)$, $\mu(T^{-n_1}B \cap T^{-n_2}(B^c)) = m((A - n_1) \cap (A^c - n_2))$, etc. Die Additivität von m überträgt sich dann auf die μ und nach dem Kolmogorovschen Fortsetzungssatz induziert μ ein Maß auf den Borelmengen von X. Es ist nun nicht schwer, zu überprüfen, dass das so konstruierte maßerhaltende System die in Satz 5 geforderten Eigenschaften hat.

Gewissermaßen stellt die Beziehung (1) eine „Rekurrenz-Formulierung“ des Satzes von Szemerédi dar. Das Korrespondenzprinzip besagt nun gerade, dass diese Rekurrenz in (1) in rigoroser Beziehung zur Rekurrenz in maßerhaltenden Systemen steht. Insbesondere sind (1) und mithin auch der Satz von Szemerédi unmittelbare Folgerungen aus dem Korrespondenzprinzip zusammen mit der folgenden mächtigen Verallgemeinerung des Poincaréschen Rekurrenzsatzes:

Satz 6 (Furstenbergs multipler Rekurrenzsatz [Fur77]). *Sei (X,μ,T) ein maßerhaltendes System und $B \subseteq X$ messbar mit $\mu(B) > 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$\mu(B \cap T^{-n}B \cap \ldots \cap T^{-n(k-1)}B) > 0. \tag{2}$$

Das relativ einfach zu beweisende Korrespondenzprinzip in Satz 5 formalisiert die in ihren Konsequenzen kaum zu überschätzende Einsicht, dass sich additive Kombinatorik und Ergodentheorie verbinden lassen, und hat zahllose Anwendungen.

Im Gegensatz dazu ist Furstenbergs multipler Rekurrenzsatz (6) ein sehr tief liegendes Resultat. Trotzdem erscheint es möglich, Furstenbergs Beweis in groben Zügen darzustellen.

6 Ergodentheoretische Erklärungen zum Satz von Szemerédi

Wie angekündigt, wollen wir uns auf Furstenbergs Beweis des Satzes von Szemerédi konzentrieren. In ihm tritt die Dichotomie zwischen Struktur und Zufall besonders deutlich zutage. Das liegt unter anderem daran, dass man für maßerhaltende Systeme (X,μ,T) besonders klar festmachen kann, inwiefern sie „strukturierten“ oder eben „zufälligen“ Charakter an den Tag legen.

6.1 Rekurrenz durch Struktur

Betrachen wir zunächst maßerhaltende Systeme mit besonders regulärem Verhalten. Sei etwa T periodisch, d.h. $T^n = \mathrm{Id}$ für ein $n > 0$. In diesem Fall ist Satz 3 trivial, da $\mu(B \cap T^{-n}B \cap \cdots \cap T^{-n(k-1)}B) = \mu(B) > 0$. Offenbar entspricht dieser Fall dem einer periodischen Menge A.

Etwas interessanter ist es, den Fall eines *fast periodischen* Systems zu betrachten. Sei etwa X der eindimensionale Torus (= Kreislinie = $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$), d.h. das Einheitsintervall, versehen mit der Addition modulo 1, $\mu = \lambda$ das Lebesguemaß, und bedeute T die Addition einer irrationalen Zahl α, d.h. $T(x) = x + \alpha$ (Torusrotation).

Bekanntlich kommen geeignete Vielfache $n\alpha$ beliebig nahe an ganze Zahlen heran (Dirichletscher Approximationssatz, der einfache Beweis verwendet das Schubfachprinzip). Für so ein n ist T^n fast die Identität, also hat T „fast" die Periode n.

Um Furstenbergs Rekurrenzsatz in diesem Fall zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass für jede messbare Menge $B \subseteq X$ die Abbildung

$$[0,1) \to \mathbb{R}, \quad \beta \mapsto \mu(B \cap B - \beta)$$

stetig ist. Dies folgt leicht aus der Regularität des Maßes. Insbesondere folgt

$$\mu(B \cap (B - \beta)) \approx \mu(B)$$

für alle hinreichend kleinen β.

Wählen wir nun mithilfe des Dirichletschen Approximationssatzes eine Zahl n, sodass die Zahlen $n\alpha, \ldots, n(k-1)\alpha$ klein (d.h. nahe einer ganzen Zahl) sind, so liegt

$$\mu\big(B \cap T^{-n}B \cap \ldots \cap T^{-n(k-1)}B\big)$$

beliebig nahe an $\mu(B)$. Insbesondere gilt die Aussage von Satz 6 in dem speziellen, hier betrachteten Fall.

Tatsächlich funktioniert das soeben präsentierte Argument in *kompakten* maßerhaltenden Systemen. Um diese zu definieren, bemerken wir, dass für eine Funktion $f \in L^2(X)$ auch die Funktion $f \circ T^n$ nicht nur in $L^2(X)$ liegt, sondern sogar dieselbe L^2-Norm hat.

Eine Funktion $f \in L^2(\mu)$ heißt *kompakt*, falls die Menge

$$\overline{\{f \circ T^n : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq L^2 \tag{3}$$

kompakt ist. Das System (X, T, μ) heißt nun kompakt, wenn $L^2(X)$ ausschließlich aus kompakten Elementen besteht.

Nach dem Satz von Halmos und von Neumann [HvN42] lässt sich jedes kompakte System (X, T, μ) als *Gruppenrotation* darstellen. Das heißt, modulo eines Isomorphismus dürfen wir annehmen, dass X eine kompakte Gruppe ist, μ das entsprechende Haarmaß und $T(x) = x + \alpha$ für ein $\alpha \in X$. Die Situation unterscheidet sich für unsere Belange daher nicht wesentlich von der gerade präsentierten Torusrotation. Es ist eine lehrreiche Übung, die multiple Rekurrenzaussage dennoch direkt aus (3) abzuleiten, weil die Situation in (3) einem wesentlichen Schritt im Beweis des allgemeinen Satzes 6 ähnelt.

6.2 Rekurrenz durch Zufall

Diesmal betrachten wir dynamische Systeme mit ausgeprägt probabilistischem Verhalten: Sei (Y, ν) ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X, μ) das unendliche Produkt

$$\Pi_{\mathbb{Z}} Y, \quad \mu = \otimes_{\mathbb{Z}} \nu.$$

Die Elemente von X sind also Folgen $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ mit Gliedern $y_m \in Y$. Wie man leicht einsieht, erhält die *shift-Abbildung*

$$T : (y_m)_{m\in\mathbb{Z}} \mapsto (y_{m+1})_{m\in\mathbb{Z}}$$

das Maß ν.[5]

Sei B eine messbare Teilmenge von X, die zunächst nur von endlich vielen Koordinaten abhänge. Nach Definition des Produktmaßes gilt dann

$$\mu(B \cap T^{-n}B \cap \ldots \cap T^{-n(k-1)}B) = \mu(B)^k \tag{4}$$

für alle hinreichend großen n. Durch solche B lassen sich aber beliebige messbare Mengen approximieren. Deshalb gilt auch im allgemeinen Fall wenigstens die asymptotische Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B \cap T^{-n}B \cap \ldots \cap T^{-n(k-1)}B) = \mu(B)^k. \tag{5}$$

Ein ähnliches Verhalten zeigt sich etwas allgemeiner in sogenannten *schwach mischenden* maßerhaltenden Systemen. Dynamische Systeme dieses Typs bilden eine sehr wichtige Klasse und lassen sich durch eine ganze Reihe äquivalenter Bedingungen charakterisieren. Eine davon lautet:

Für alle messbaren Mengen A, B gibt es eine Ausnahmemenge N mit $N \subseteq \mathbb{Z}$, $\bar{d}(N) = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty,\ n\notin N} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B). \tag{6}$$

In der Tat lässt sich ohne allzu großen Aufwand zeigen, dass (5) in allen schwach mischenden Systemen gültig ist, sofern man – wie in (6) – bereit ist, eine Ausnahmemenge mit Dichte Null zuzulassen. Insbesondere gilt damit also der Furstenbergsche Rekurrenzsatz für alle schwach mischenden Systeme.

Eine andere Charakterisierung von „schwach mischend“ lautet: Der Operator

$$U : L^2(\mu) \to L^2(\mu), \quad f \mapsto f \circ T$$

besitzt nur triviale Eigenfunktionen, d.h.:

$$f = c\,Uf, \text{ mit } c \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad f \equiv \text{const}, \tag{7}$$

(wobei in maßerhaltenden Systemen nur Eigenwerte c mit $|c| = 1$ auftreten). Diese zweite Charakterisierung erlaubt, eine Beziehung mit kompakten Systemen herzustellen. Während der Operator U im schwach mischenden Fall nur triviale Eigenfunktionen hat, werden kompakte Systeme dadurch charakterisiert, dass die Eigenfunktionen einen dichten Unterraum von $L^2(X)$ erzeugen.

[5] Aus dem Blickwinkel der Wahrscheinlichkeitstheorie betrachten wir also ein System unabhängiger Zufallsgrößen mit Verteilung ν.

6.3 Zusammenspiel von Struktur und Zufall

In den letzten beiden Abschnitten haben wir zwei Klassen von maßerhaltenden Systemen behandelt, die einerseits eine sehr „periodische“ und andererseits eine sehr „zufällige“ Natur aufweisen, und zwischen den beiden Situationen eine gewisse Polarität festgestellt.

Wie zu erwarten, ist ein generisches maßerhaltendes System im Allgemeinen aber weder kompakt noch schwach mischend. Wie der später noch etwas näher zu erläuternde Struktursatz von Furstenberg zeigt, setzen sich aber sehr allgemeine maßerhaltende Systeme in einer Weise aus den beiden extremen Typen zusammen, die sich für einen Beweis seines multiplen Rekurrenzsatzes 6 eignet. Furstenberg folgend, wollen wir deshalb versuchen, ein allgemeines System auf geeignete Art zu analysieren und möglichst in ein kompaktes und ein schwach mischendes zu zerlegen.

Ein sehr natürlicher Ansatz besteht darin, den Hilbertraum $L^2(\mu)$ in zwei Komponenten zu zerlegen in den Unterraum H_c aller kompakten Funktionen und dessen orthogonales Komplement $H_m := H_c^{\perp}$. Auf diesen beiden Komponenten können die Argumente der vorangegangenen Abschnitte sinnvoll angewandt werden. Es ist dann möglich, einen kurzen und übersichtlichen Beweis der Sätze von Furstenberg beziehungsweise Szemerédi zu geben, allerdings nur im Fall $k = 3$ (siehe beispielsweise [Ber06, Section 4.2.3]). Leider reicht die beschriebene Zerlegung des Hilbertraums nicht aus, um den Rekurrenzsatz in der notwendigen Allgemeinheit zu beweisen. Die noch nötige Verfeinerung leistet der bereits erwähnte *Struktursatz* von Furstenberg. In unserem Rahmen müssen wir uns allerdings mit einer oberflächlichen Beschreibung begnügen.

Dem algebraischen Begriff des homomorphen Bilds entspricht in der Theorie dynamischer Systeme jener des Faktors: Sind die Systeme $X = (X, \mu, T)$ und $X' = (X', \mu', T')$ durch eine surjektive und struktur-, hier maßerhaltende surjektive Abbildung $\phi : X \to X'$ mit $\phi \circ T = T' \circ \phi$ verbunden, so heißt X' ein *Faktor* von X beziehungsweise umgekehrt X eine *Erweiterung* von X'.

Furstenberg definiert nun, wann eine Erweiterung X von X' *schwach mischend* beziehungsweise *kompakt* ist. Eine präzise Definition würde hier zu weit führen. Wir merken nur an, dass sie im Falle eines trivialen, einpunktigen Systems X' gerade bedeutet, dass das System X schwach mischend beziehungsweise kompakt ist.

Der entscheidende Schritt ist dann, dass jedes System als projektiver Limes einer transfiniten Folge von Erweiterungen dargestellt werden kann, wobei jede einzelne dieser Erweiterungen entweder kompakt oder schwach mischend ist. Genauer: Für jedes System $X = (X, \mu, T)$ gibt es eine abzählbare, potentiell transfinite Kette[6]

[6] Genauer gesagt, eine Kette von abzählbarem Wohlordnungstyp.

$$X = X_{\sigma+n} \to \ldots \to X_\sigma \to \ldots \to X_{\omega+1} \to X_\omega \to \ldots \to X_1 \to X_0$$

aus kompakten beziehungsweise schwach mischenden Erweiterungen $X_{\alpha+1} \to X_\alpha$, sodass X_0 ein triviales (einpunktiges) System ist. Es ist dann möglich, die gesuchte Rekurrenzeigenschaft mittels transfiniter Induktion zu beweisen; in jedem Schritt kommen Argumente zum Tragen, die jenen ähneln, wie sie zuvor beschrieben wurden.

Es ist an dieser Stelle interessant, noch auf die Natur der Induktionshypothese hinzuweisen. Eine Schwierigkeit besteht nämlich darin, dass sich die Rekurrenz in den beiden Grundtypen von Systemen in sehr unterschiedlicher Weise manifestiert. Im kompakten Fall existieren natürliche Zahlen n, für die der uns interessierende Durchschnitt annähernd Maß $\mu(B)$ hat. (Tatsächlich ist das sogar für „viele“ natürliche Zahlen der Fall.) Im mischenden Fall hingegen hat für (die meisten) hinreichend großen n der Durchschnitt annähernd das i.A. viel kleinere Maß $\mu(B)^k$. Um die Furstenbergsche Induktion durchzuführen, benötigt man aber ein Konzept, das diesen beiden unterschiedlichen Formen von Rekurrenz simultan Rechnung trägt. So eines findet Furstenberg, indem er die Bedingung

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(B \cap T^{-n}B \cap \ldots \cap T^{-n(k-1)}B) > 0 \tag{8}$$

verwendet.

6.4 Zur Rolle des Satzes von van der Waerden

In der Retrospektive lässt sich der Satz von van der Waerden etwa der Strukturhälfte (vgl. Abschnitt 6.1 über kompakte Systeme) des Satzes von Szemerédi zuordnen. (Es ist bemerkenswert, dass der Satz von van der Waerden in Szemerédis Beweis einfließt.[7])

Abschnitt 6.1 deutet darauf hin, dass Rekurrenz in kompakten Systemen mit der Theorie der kompakten Gruppen verbunden ist. In gewissem Sinn tritt Rekurrenz deswegen auf, weil die identische Abbildung $\alpha \mapsto \alpha + 0$ auf einer kompakten Gruppe durch Iterationen der Abbildung T approximiert werden konnte. Es liegt nahe zu fragen, ob auch der Satz von van der Waerden auf dieses Argument zurückgeführt werden kann. Mit gewissen Abstrichen ist diese Sichtweise

[7] Darüber hinaus findet der Satz von van der Waerden auch Verwendung in Furstenbergs ursprünglichem Argument dafür, dass die multiple Rekurrenz der Form (8) im Induktionsschritt unter kompakten Erweiterungen erhalten beibt. Allerdings ist diese Abhängigkeit vom Satz von van der Waerden nur eine scheinbare. Das zeigt eine Variante des Furstenbergschen Arguments in [FKO82], die ohne den Satz von van der Waerden auskommt.

zulässig. Man muss allerdings einen Schritt über kompakte Gruppen hinaus machen und sogar kompakte (links-topologische) Halbgruppen betrachten. Im Wesentlichen lässt sich der Satz von van der Waerden aus Rekurrenzphänomenen in der Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ableiten. Im Fall der kompakten Halbgruppe $\beta\mathbb{N}$ existiert dann zwar kein neutrales Element. Aus der allgemeinen Strukturtheorie kompakter Halbgruppen weiß man jedoch, dass es „idempotente“ Elemente (d.h. $e \in \beta\mathbb{N}$ mit $e + e = e$) gibt, und diese garantieren hinreichend viel Rekurrenz, um den Satz von van der Waerden zu implizieren.

Schließlich erwähnen wir noch, dass $\beta\mathbb{N}$ als Menge aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ aufgefasst werden kann. Das ist technisch oft praktisch, um $\beta\mathbb{N}$ mit der Ramseytheorie zu verquicken. Wir verdeutlichen dies am Beispiel des Satzes von van der Waerden. Wir bezeichnen $e \in \beta\mathbb{N}$ als AF-Ultrafilter, wenn jede Menge $A \in e$ beliebig lange arithmetische Folgen enthält. Wieder hilft die Theorie kompakter Halbgruppen weiter. Sie liefert Elemente e mit Eigenschaften, welche die AF-Ultrafiltereigenschaft garantieren. Und da von den Mengen $A_1, \ldots, A_r$ einer Partition von $\mathbb{N}$ genau ein A_i in einem gegebenen Ultrafilter e liegen muss, ist damit der Satz von van der Waerden bewiesen.

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung lässt auch den folgenden Vergleich der Sätze von van der Waerden und Szemerédi zu: Der Satz von van der Waerden bedeutet, dass es ein Element $e \in \beta\mathbb{N}$ gibt, das geeignet ist, arithmetische Folgen dingfest zu machen. Der Satz von Szemerédi hingegen drückt – wie Zirnstein in [Zir12] bemerkte – aus, dass sogar *fast alle*[8] Elemente von $\beta\mathbb{N}$ AF-Ultrafilter sind.

7 Schluss

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gibt es mittlerweile eine Reihe von verschiedenen Zugängen zum Satz von Szemerédi. Insbesondere gelang es Timothy Gowers in [Gow98], das Fourier-analytische Argument von Roth zunächst auf den Fall $k = 4$ und schließlich auf arithmetische Folgen beliebiger Länge zu erweitern, siehe [Gow01].[9] Bis heute liefert der Beweis von Gowers die stärkste quantitative

[8]Die Notation *fast alle* bezieht sich hier auf „Haarsche“ Maße auf $\beta\mathbb{N}$, d.h. auf Wahrscheinlichkeitsmaße, die invariant unter Translationen der Halbgruppe $\beta\mathbb{N}$ sind.

[9]Ein weiterer, wesentlich verschiedener, Ansatz geht zurück auf Rusza und Szemerédi [RS78], die einen graphentheoretischen Beweis des Satzes im Fall $k = 3$ geben. Um auch den allgemeinen Fall zu behandeln, ist es notwendig, das Argument auf Hypergraphen zu verallgemeinern. Dies gelang Gowers [Gow06, Gow07] beziehungsweise Nagle, Rödl, Schacht und Skokan [NRS06, RS06, RS07b, RS07a].

Ein wichtiges Anliegen der aktuelle Forschung besteht darin, die tiefliegenden Zusammenhänge dieser verschiedenen Zugänge zu Szemerédis Satz zu verstehen. Im Zuge dessen wurden weitere Beweise und interessante Varianten bekannter Argumente entdeckt; erwähnenswert sind u.a. Arbeiten von Austin [Aus10], Bergelson-Leibman-Lesigne [BLL08], Green und Tao [GT10] und das erste Polymath-Projekt [Pol12].

Fassung der finitären Version des Satzes von Szemerédi (Satz 4).

Weiters erfuhr der Satz von Szemerédi eine Reihe von Verschärfungen und Erweiterungen. Furstenberg und Katznelson [FK78] gelang es, den multiplen Rekurrenzsatz wesentlich zu verallgemeinern; sie zeigten, dass er auch für $k > 1$ verschiedene maßerhaltende Transformationen gilt, sofern diese kommutieren, d.h. $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$ erfüllen. Als kombinatorische Folgerung erhält man eine multidimensionale Version des Satzes von Szemerédi.[10]

In eine etwas andere Richtung wurde Szemerédis Satz von Bergelson und Leibmann verschärft. Sie zeigen (unter anderem), dass Rekurrenz auch entlang von Polynomen stattfindet. Insbesondere gibt es für Polynome $p_1, \ldots, p_k$ mit ganzzahligen Koeffizienten und $p_i(0) = 0$ und eine Menge A mit $\bar{d}(A) > 0$ stets Zahlen $a, d \in \mathbb{N}$, sodass

$$a, a + p_1(d), \ldots, a + p_k(d) \in A.$$

Der Satz von Szemerédi entspricht dann dem „linearen" Spezialfall $p_i(n) = in$.

Berühmt ist der schon eingangs erwähnte Satz von Green und Tao [GT08]. Er besagt, dass es beliebig lange arithmetische Folgen von Primzahlen gibt. Da die Primzahlen Dichte 0 haben, kann man das natürlich nicht einfach aus dem Satz von Szemerédi folgern. Sehr oberflächlich beschrieben, besteht die Strategie des Beweises darin, die Primzahlen als Teilmenge einer etwas größeren, besser fassbaren Menge (genauer: Funktion) zu betrachten, in der sie positive Dichte haben. Der Satz folgt dann im Wesentlichen aus einer „relativen" Variante des Satzes von Szemerédi.

Von den vielen offenen Fragen des Gebiets erwähnen wir zum Abschluss eine, die mit dem Satz von Green und Tao in Verbindung steht und auf die Erdős 3000 Dollar ausgesetzt hatte.

Frage 1. *Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge mit $\sum_{k \in A} 1/k = \infty$. Enthält A dann beliebig lange arithmetische Folgen?*

Literatur

[Aus10] T. Austin. Deducing the multidimensional Szemerédi theorem from an infinitary removal lemma. *J. Anal. Math.*, 111:131–150, 2010.

[Beh46] F. A. Behrend. On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 32:331–332, 1946.

[Ber06] V. Bergelson. Combinatorial and Diophantine applications of ergodic theory. In *Handbook of dynamical systems. Vol. 1B*, pages 745–869. Elsevier, Ams-

[10] Darüber hinaus konnten Furstenberg und Katznelson in [FK91] eine Dichte-Version des Satzes von Hales-Jewett beweisen. Bei diesem handelt es sich um eine mächtige kombinatorische Verallgemeinerung des Satzes von Szemerédi.

terdam, 2006. Appendix A by A. Leibman and Appendix B by Anthony Quas and Máté Wierdl.

[BLL08] V. Bergelson, A. Leibman, and E. Lesigne. Intersective polynomials and the polynomial Szemerédi theorem. *Adv. Math.*, 219(1):369–388, 2008.

[ET36] P. Erdős and P. Turán. On some sequences of integers. *J. London Math. Soc.*, 11:261–264, 1936.

[FK78] H. Furstenberg and Y. Katznelson. An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations. *J. Analyse Math.*, 34:275–291 (1979), 1978.

[FK91] H. Furstenberg and Y. Katznelson. A density version of the Hales-Jewett theorem. *J. Anal. Math.*, 57:64–119, 1991.

[FKO82] H. Furstenberg, Y. Katznelson, and D. Ornstein. The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(3):527–552, 1982.

[Fur77] H. Furstenberg. Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. *J. Analyse Math.*, 31:204–256, 1977.

[Fur81] H. Furstenberg. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981. M. B. Porter Lectures.

[Gow98] W. T. Gowers. A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four. *Geom. Funct. Anal.*, 8(3):529–551, 1998.

[Gow01] W. T. Gowers. A new proof of Szemerédi's theorem. *Geom. Funct. Anal.*, 11(3):465–588, 2001.

[Gow06] W. T. Gowers. Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs. *Combin. Probab. Comput.*, 15(1-2):143–184, 2006.

[Gow07] W. T. Gowers. Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem. *Ann. of Math. (2)*, 166(3):897–946, 2007.

[Gow12] W. T. Gowers. The work of Endre Szemerédi. *http://gowers.files.wordpress.com/2012/03*, 2012.

[GT08] B. Green and T. Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Ann. of Math. (2)*, 167(2):481–547, 2008.

[GT10] B. Green and T. Tao. Yet another proof of Szemerédi's theorem. In *An irregular mind*, volume 21 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 335–342. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2010.

[HvN42] P. R. Halmos and J. von Neumann. Operator methods in classical mechanics. II. *Ann. of Math. (2)*, 43:332–350, 1942.

[Kan12] M. Kang. The 2012 Abel laureate Endre Szemerédi and his celebrated work. *Internationale Mathematische Nachrichten*, 221:1–19, 2012.

[NRS06] B. Nagle, V. Rödl, and M. Schacht. The counting lemma for regular *k*-uniform hypergraphs. *Random Structures Algorithms*, 28(2):113–179, 2006.

[Pol12] D. H. J. Polymath. A new proof of the density Hales-Jewett theorem. *Ann. of Math. (2)*, 175(3):1283–1327, 2012.

[Rot53] K. F. Roth. On certain sets of integers. *J. London Math. Soc.*, 28:104–109, 1953.

[RS78] I. Z. Ruzsa and E. Szemerédi. Triple systems with no six points carrying three triangles. In *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. II*, volume 18 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 939–945. North-Holland, Amsterdam, 1978.

[RS06] V. Rödl and J. Skokan. Applications of the regularity lemma for uniform hypergraphs. *Random Structures Algorithms*, 28(2):180–194, 2006.

[RS07a] V. Rödl and M. Schacht. Regular partitions of hypergraphs: counting lemmas. *Combin. Probab. Comput.*, 16(6):887–901, 2007.

[RS07b] V. Rödl and M. Schacht. Regular partitions of hypergraphs: regularity lemmas. *Combin. Probab. Comput.*, 16(6):833–885, 2007.

[RS12] M. Raussen and C. Skau. Interview with Abel Laureate Endre Szemerédi. *Eur. Math. Soc. Newsl.*, (85):39–48, 2012.

[Sze69] E. Szemerédi. On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 20:89–104, 1969.

[Sze75] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arith.*, 27:199–245, 1975. Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik.

[Sze78] E. Szemerédi. Regular partitions of graphs. In *Problèmes combinatoires et théorie des graphes : Orsay, 9–13 Juillet 1976* (Colloq. Internat. CNRS, vol. 260) Éditions du CNRS, Paris, 1978, pp. 339–401.

[Tao12] T. Tao. Some ingredients in Szemerédi's proof of Szemerédi's theorem. *http://terrytao.wordpress.com/2012/03/23/*, 2012.

[vdW27] B. van der Waerden. Beweis einer Baudetschen Vermutung. *Nieuw Arch. Wiskunde*, 15:212–216, 1927.

[Zir12] H.-G. Zirnstein. Formulating Szemerédi's Theorem in Terms of Ultrafilters. *ArXiv* preprint 1206.0967, June 2012.

Adresse der Autoren:

Mathias Beiglböck, Fakultät für Mathematik der Universität Wien, Nordbergstraße 15, A-1090 Wien. email mathias.beiglboeck@univie.ac.at

Reinhard Winkler, Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email reinhard.winkler@tuwien.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 221 (2012), 39–41

Friedrich Hirzebruch
17. Oktober 1927 – 27. Mai 2012

Joachim Schwermer
Univ. Wien

Friedrich Hirzebruch verstarb am 27. Mai 2012 in Bonn im Alter von 84 Jahren. Sein Tod bewegt uns; ein Mann großer Vitalität und Schaffenskraft hat uns verlassen. Bis in die letzten Tage seines Lebens hat er noch an seinem Schreibtisch im Max-Planck-Institut für Mathematik gearbeitet, wie stets mit Interesse sich mit jungen Wissenschaftlern, mit seinen Kollegen und Freunden ausgetauscht und mathematische Diskussionen bestritten. Friedrich Hirzebruch fehlt nicht nur seiner Frau und seinen drei Kindern, er fehlt uns allen in seiner wissenschaftlichen Größe, als Forscher wie als Lehrer, in seiner Zuneigung den Einzelnen gegenüber und in seiner menschlichen Wärme.

Friedrich Hirzebruch wurde am 17. Oktober 1927 in Hamm/Westfalen geboren, studierte Mathematik, Physik und Mathematische Logik an der Universität Münster (1945–1950) und an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich (1949–1950). Er wurde im Jahr 1950 zum Dr. rer. nat. an der Universität Münster promoviert. Nach einer zweijährigen Zeit als Assistent an der Universität Erlangen war er Mitglied des Institute for Advanced Study in Princeton, habilitierte sich in Münster im Jahr 1955 und kehrte als „Assistant Professor“ an der Universität nach Princeton zurück. Hirzebruch wurde 1956 auf einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Bonn berufen, den er bis zu seiner Emeritierung am 28. Februar 1993 innehatte.

Hirzebruchs Erfahrungen in Princeton halfen ihm wesentlich, die mathematische Gemeinschaft in Deutschland, noch geprägt von den Folgen der Nazi-Herrschaft und des Zweiten Weltkriegs, zurück zu internationalen Kontakten und neuer Bedeutung zu führen. Im Jahr 1957 begann Hirzebruch die Reihe der „Mathematischen Arbeitstagungen“ in Bonn, ein jährlich stattfindendes, informelles Arbeitstreffen ohne vorab festgelegtes Vortragsprogramm. Diese Tagung zog die internationale Elite der Reinen Mathematik nach Bonn, bereit zum wissenschaftlichen Gespräch, durch seine Offenheit von großem Gewinn für Kollegen und studenti-

ISSN 0020-7926

schen Nachwuchs. Hirzebruchs persönliche Integrität und seine Vision einer mathematischen Gemeinschaft machten eine Atmosphäre möglich, die befreiend und belebend war. In diesen Jahren begann auch der Ausbau der Mathematik in Bonn zu einem international geachteten Zentrum. Mehrere Generationen von Studenten schätzten die Klarheit seiner Vorlesungen; er unterrichtete auch regelmässig in den Anfangssemestern. Zahlreiche Rufe an andere Universitäten lehnte Hirzebruch ab.

In den Jahren 1969–1985 war er Sprecher des von ihm mitinitiierten Sonderforschungsbereichs „Theoretische Mathematik“ an der Universität Bonn. Am 1. Oktober 1980 wurde Friedrich Hirzebruch zum Wissenschaftlichen Mitglied und Direktor des neu gegründeten Max-Planck-Instituts für Mathematik berufen. Er nahm die damit verbundenen Aufgaben neben seinem Amt als Ordinarius an der Universität Bonn wahr. Auch über seinen Eintritt in den Ruhestand als Direktor des Max-Planck-Instituts für Mathematik im Oktober 1995 hinaus blieb Hirzebruch dem Institut als Gelehrter mit unverminderter Schaffenskraft und Ratgeber sehr eng bis zu seinem Tode verbunden.

Friedrich Hirzebruchs wissenschaftliche Leistungen, sein Wirken als Initiator und Organisator der Wissenschaften sind durch zahlreiche Auszeichnungen und Ehrungen international anerkannt worden. Er wurde zum Mitglied einer Vielzahl wissenschaftlicher Akademien ernannt, er wurde im Jahr 1991 in den Orden Pour le Mérite für Wissenschaften und Künste gewählt und erhielt zahlreiche Ehrendoktorwürden und wissenschaftliche Preise, darunter den Wolf-Preis in Mathematik (1988), den Seki-Preis der Japanischen Mathematischen Gesellschaft (1996), die Lomonosov-Goldmedaille der Russischen Akademie der Wissenschaften (1997) und die Georg Cantor-Medaille der Deutschen Mathematikervereinigung (2004).

Im Zentrum des mathematischen Werks von Friedrich Hirzebruch standen Fragen der Algebraischen Geometrie, der Topologie und der Zahlentheorie nebst ihren vielfältigen Querverbindungen untereinander. Beginnend mit seiner grundlegenden Abhandlung, der Habilitationsschrift „*Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*“, 1956 als Buch erschienen, deren Hauptergebnis in der Arbeit “Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch for algebraic varieties” (Proc. Natl. Academy of Sciences, 1954) angekündigt wurde, bis hin zu dem Vortrag “The shape of planar algebraic curves defined over the reals”, gehalten am 23. April 2012, entfaltete sich eine Lebensleistung, die ganze mathematische Gebiete wesentlich mitgeformt hat. Sie umfasst u.a. den Satz von Riemann-Roch für algebraische Mannigfaltigkeiten, Indexsätze, die Theorie charakteristischer Klassen, die Ausformung der K-Theorie, das Hirzebruchsche Proportionalitätsprinzip als auch Beiträge zu Beziehungen zwischen Arithmetik und Differentialtopologie und umfassende Untersuchungen zu Hilbertschen Modulflächen und der zugehörigen Theorie der Modulformen.

Friedrich Hirzebruch war ein Wissenschaftler internationaler Reputation, der wegweisende Entwicklungen angestoßen hat; er war ein begnadeter akademischer Lehrer. Durch organisatorisches Geschick und tatkräftiges Wirken mit viel Sinn für das Machbare hat er das Gebäude der Mathematik in Deutschland mitgebaut. Eine besondere Rolle spielte er auch gerade nach der Wiedervereinigung der beiden Teile Deutschlands im Jahr 1989; seine Stimme wurde im Neuaufbau der akademischen Strukturen gehört.

Mit Respekt trat Friedrich Hirzebruch den Menschen gegenüber, warmherzig, ein offener Partner in Gesprächen, auch das Persönliche nicht verkennend. Er nahm die menschliche Seite unserer Profession, in Lehre und Forschung, sehr ernst. Sich hineinzudenken in sein Gegenüber, auch in schwierigen Situationen, diese Fähigkeit zeichnete Friedrich Hirzebruch aus.

Joachim Schwermer, email joachim.schwermer@univie.ac.at

Faculty of Mathematics — University of Vienna
Nordbergstraße 15, A-1090 Wien

Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics
Boltzmanngasse 9, A-1090 Wien

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 221 (2012), 43–46

Mathematics Competitions and a Career in Mathematics – some anecdotes from Austria

Robert Geretschläger
BRG Keplerstraße, Graz

Austria has been holding preparatory courses for its national Mathematical Olympiad since 1969 and participating in the International Mathematical Olympiad since 1970. While this may not be as long as some other countries, over 40 years have passed since those early days, and the first participants are now nearing retirement age. It therefore seems like a reasonable time to take a look at the mathematical careers of a few of the more prominent among them, and perhaps ask whether they feel that participation in the Olympiad had any lasting influence on them.

As stated in the title, there has been no attempt made here at any kind of comprehensive statistical research of possible correlations between Olympiad participation and a future life in mathematics, although such an analysis would certainly yield some interesting results. (Much of interest can be found in [1].) The common thread of the mathematicians mentioned here is simply successful participation in the Austrian Mathematical Olympiad (ÖMO) in their early days. It is interesting to note that many of these have kept in touch with the competitions scene, and are active in some capacity, such as in the roles of problem developers or trainers. I have sent a preliminary version of this note to the people mentioned here, and the comments I received can be found at the end.

Since the early days of the Austrian Olympiad, several other mathematical competitions have been introduced in Austria. Some, like the *International Tournament of the Towns* or the *Mediterranean Mathematics Competition*, are supplementary to the goals of the Olympiad. Others, like the *Mathematical Kangaroo*, have a

---

This article first appeared in the online newsletter of the International Group for Mathematical Creativity and Giftedness (*http://www.igmcg.org*), an Affiliated Study Group of ICMI (the International Commission on Mathematical Instruction). It is reprinted here with kind permission.

ISSN 0020-7926

different intent, not so much geared to fostering specific mathematical talent, but rather to popularising the subject in the general school context. Such competitions do, however, make it possible to recognise some students with a specific mathematical talent or interest, who can then be invited to take part in special courses, ultimately leading to individual research work in mathematics for some participants. Speaking as someone who has been involved in all of these competitions for years, it is at least noteworthy to point out that the percentage of Olympiad participants that go on to formally study mathematics or a related area actually seems to be quite large. Moreover, the number of former participants now in prominent academic positions also seems, at least superficially, to be something less than accidental.

Perhaps the most prominent position a professional mathematician can hold is as president of the national mathematical society. The last three presidents of the Austrian Mathematical Society have Olympiad backgrounds. The current president, Michael Drmota, is the head of the Institute of Discrete Mathematics and Geometry at the Vienna University of Technology. As a high school student, he was a medal winner at the final round of the Austrian Olympiad in 1982 and a participant at the Austrian-Polish Mathematics Competition, and thus a member of one of the national teams. His predecessor as president of the Austrian Mathematical Society, Robert Tichy, works at TU Graz. Among other things, he has been Dean of the Faculty of Mathematical and Physical Sciences there. As a high school student, he was a medal winner at the final round of the Austrian Olympiad in 1975 and a participant at the international competition. Finally, his predecessor at the helm of the Austrian Mathematical Society, Heinz W. Engl, has held many prominent positions in research mathematics. Among other things, he is the founding director of the Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics and Rector of the University of Vienna. As a high school student, he was a medal winner at both the Austrian and the International Olympiads in 1971.

Among these, specifically Robert Tichy has been very active in supporting the Mathematical Olympiad by organising and occasionally lecturing at mathematical training sessions for students of all levels as well as teachers.

Another prominent Austrian mathematician worth mentioning in this context is Christian Krattenthaler. A full professor and vice-dean of the Faculty of Mathematics at the University of Vienna, he is also a recipient of the prestigious Wittgenstein prize. In high school, he was a prize winner at the Austrian Olympiad in 1977 and a participant at the International Olympiad.

From 1993, some areas of Austria (Graz in particular) have taken part in the International Tournament of the Towns. As a supplement to the Olympiad, this competition has helped to give many students additional competition experience, but also a wealth of mathematical material to think about and advance their knowledge. One of the most successful participants was Clemens Heuberger. Now a full professor of discrete mathematics at the University of Klagenfurt, he was the first Austrian to be invited as a participant of the summer seminar of the Tournament of the Towns, but also a medal winner at both the Austrian and International Olympiads in 1991, 1992 and 1993. Beside his work in research and teaching, he is also very active in the Austrian Olympiad as a trainer on the national level and as coordinator of the problem group for the so-called "beginners" competition. While still in Graz, together with Tichy he was responsible for attracting many of his students, who were former Olympiad participants themselves, to work in student training at all levels.

Quite interesting is also the trajectory of the mathematical careers of some former Olympiad participants that have led to prominent posts at universities in other countries, where they in some way continue their support of the national Olympiads in their new homes as well as Austria

Theresia Eisenkölbl is a mathematician at the Institute Camille Jordan of the Université Claude Bernard in Lyon. As a high school student, she won gold medals at the Austrian Olympiad in 1992, 1993 and 1994. At the International Olympiad, she won medals in all three of these years, capping her achievements there with a perfect score in 1994. She is currently active in problem setting for the Austrian Olympiad, and is also associated with the French Olympiad.

Gerhard Wöginger is a professor at the Department of Mathematics and Computer Science of Eindhoven University of Technology. He was a medal winner at the Austrian Olympiad in 1981 and 1982 and an international participant, and is still very active as a problem setter for many competitions. Several of his problems have made their way onto the papers of the Mediterranean Mathematics Competition in recent years, and he has had problems on the short list of the International Olympiad in each of the last 5 years.

Stephan Wagner is an associate professor at Stellenbosch University in South Africa. He was a four-time medal winner at the Austrian Olympiad (from 1997 to 2000) and a three-time medal winner at the International Olympiad (from 1998 to 2000). He is also still involved in the organisation of and preparation of students for Mathematical Olympiads both in Austria and South Africa, and was leader of the South African international team in 2011. He is also preparing to play an important role at the International Olympiad to be held in South Africa in 2014.

The mathematicians mentioned in the note were asked the question "Do you feel that your participation and success at the Austrian Olympiad had any influence on your future career?" The following answers were received (in alphabetical order):

Michael Drmota: "Actually the experience of participating in the Mathematical Olympiad was quite influential for me. It was definitely the basis for the decision to study mathematics and the practice of solving mathematical problems (and also the knowledge of formal concepts) was very helpful during my studies. When it goes to mathematical research one needs definitely more than that, nevertheless the 'technical skills' from the Olympiad form a solid basis."

Heinz Engl: "The extra courses we had for preparation for the Olympiad completely changed my view about mathematics I had from the ordinary high school curriculum. Without these courses and the successful participation in the International Olympiad, I might not have studied mathematics at all."

Clemens Heuberger: "Taking part in the Olympiads made it clear to me that I really should study mathematics. It also gave an advantage at the start of my studies because formal mathematical reasoning as well as some endurance were skills which I had already acquired during Olympiad training."

Christian Krattenthaler: "I do not think that my ‚success' at the Austrian mathematical Olympiad had any influence on my future career. But it was the participation in the Olympiad, and here particularly the preparation courses at my school and in Raach [i.e., the two and a half week seminar leading up to the final round], which stimulated my 'appetite' for mathematics, and thus it has a lot to do with my future career as 'enseignant-chercheur' (as the French say) in mathematics. The problem-solving character of the Olympiad may not be appropriate for everybody with a mathematical interest; for me it was exactly the right thing to enter and delve into the beauties of mathematics."

Robert Tichy: "The Mathematical Olympiad was certainly a significant reason for me to choose mathematics over physics as an academic field of study."

Stephan Wagner: "The Olympiad certainly had (and continues to have) a major influence on my life. It was the participation in those competitions that made me realise that mathematics is the right career choice for me – without them, I might have studied physics or engineering (or even something completely different) instead. This is why I like to stay involved in Olympiad training – it gives me the opportunity to attract talented young people and show them how rich and beautiful our subject is."

Gerhard Wöginger: "This had strong impact on my future career: it triggered my interest in mathematics, and the knowledge that I had built up for these high school competitions made my first year at university fairly easy. By the way, my co-authors Yossi Azar (Tel Aviv) and Jiří Sgall (Prague) both attended the International Olympiad in 1981 in Washington together with me; perhaps we met there for the first time, but we do not remember talking to each other."

Reference

[1] Friedrich Oswald, Günter Hanisch, Gerhard Hager, Wettbewerbe und „Olympiaden": Impulse zur (Selbst)-Identifikation von Begabungen, LIT Verlag, Berlin et al. 2005.

Author's address: Robert Geretschläger. Bundesrealgymnasium 8020 Graz, Keplerstraße 1. email robert.geretschlaeger@brgkepler.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 221 (2012), 47–52

10 Jahre Haus der Mathematik

Gerhard Lindbichler

„Nicht vom Brote allein, es lebt vom Traume der Mensch, ist Traum das Unsere und stärker als die Tat, die ihm willig nachfolgt!“

Die Geschichte

Die Gründung des Hauses der Mathematik kann nicht treffender beschrieben werden, als mit den obigen Worten des Dichters Josef Weinheber (1892–1945). Bereits im vorigen Jahrhundert, exakt 1998, einige Jahre vor meiner Pensionierung als Fachmathematiker der damaligen Pädagogischen Akademie Wien, träumte ich von der Umsetzung der Idee von einem Haus der Mathematik. Manfred Kronfellner, der damals als Lehrender für Lineare Algebra bei der Fachausbildung zukünftiger Hauptschullehrer tätig war, unterstützte mein Vorhaben und sprach mir Mut für das Gelingen zu. Natürlich gab es auch jede Menge Zweifler in meinem beruflichen und privaten Umfeld, die ein Zustandekommen für ausgeschlossen hielten. Aber ich ließ mich in keiner Sekunde entmutigen und tatsächlich eröffneten einige ehrenamtliche Mitarbeiter und ich bereits am 28. Februar 2003 in den Räumlichkeiten einer Schule in Wieden (4. Wiener Gemeindebezirk) das *Haus der Mathematik*. Bei der Eröffnung waren u.a. anwesend Stadtschulratspräsidentin Susanne Brandsteidl, Landesschulinspektor Wolfgang Wurm, Bezirksschulinspektor Norbert Zirbs, Manfred Kronfellner, Stefan Götz, Bezirksvorsteherin Susanne Reichard und viele interessierte Fachkollegen.

Vorerst als Alleinunterhalter und ohne finanzielle Unterstützung bot ich Schulklassen und Privatpersonen dreimal in der Woche ein 2-stündiges Programm an: Aufwärmtraining, Besuch der Erlebniswelt mit ca. 40 mathematischen Spielen auf speziellen Pappkartontischen sowie ein Museum. Aber aus einer angedachten linearen Pensionsbeschäftigung erfolgte ein exponentieller Aufschwung. Bereits im Oktober eines Schuljahres waren alle möglichen Besuchstermine bis Schulschluss vergeben. Für den unerwarteten, aber erhofften Erfolg waren mehrere Faktoren ausschlaggebend: der Zustrom von Mitgliedern im Verein, viele Arbeitsstunden von freiwilligen Mitarbeitern, eine einmalige Förderung durch das „Zentrum für

ISSN 0020-7926

Abbildung 1: Gymnasium Verden (Niedersachsen). Foto: Verden.

Abbildung 2: Erfinden einer Binäruhr. Foto: Christina Steffan

Innovative Technologie“ der Stadt Wien und vor allem eine mehrjährige Förderung durch das Bundesministerium für Wissenschaft und Forschung. Besonders durch die nach 6 Jahren erfolgte Eingliederung in das „Naturwissenschaftliche Zentrum“ mit Mathematik der Pädagogischen Hochschule Wien wurde ein idealer, würdiger, national und international viel gelobter Standort gefunden. Auch das große mediale Interesse (64 Presse-, 6 Fernsehberichte, 5 Radiosendungen) war für die weitere Entwicklung sehr hilfreich. Neben dem nationalen freuten wir uns aber besonders über das internationale Interesse (Besuch von 16 Abiturklassen aus Deutschland und eine aus der Schweiz), ausgelöst durch unsere Homepage *http://www.hausdermathematik.at*. Es gehört auch bereits zur Tradition, dass jährlich Erasmusstudenten aus ganz Europa die Aktivitäten im Haus der Mathematik miterleben wollen.

Das Angebot

Für alle täglichen aktuellen Aktivitäten beim Besuch von Schulklassen, aber auch Privatpersonen im Haus der Mathematik hat sich das Konzept *feel* (forschen, entdecken, erkennen, lernen) besonders bewährt. Umgesetzt wird dieses durch eine *hands-on-* und *minds-on-*Didaktik anhand vieler selbsterklärender Spiele mit mathematischem Hintergrund.

Ein Besuchstag beginnt mit einem Aufwärmtraining am Marktplatz des Hauses der Mathematik mit Inhalten aus der Geometrie (angedachte Vervielfachung von quadratischen Bodenfliesen des Marktplatzes: 2-, 5,- 13-fach mit der Erkenntnis: $p > 2, p \equiv 1 \pmod 4 \implies p = a^2 + b^2$) und Zahlenlehre (Zaubertrick mit Dualzahlen und der Erfindung einer Binäruhr).

Anschließend besuchen unsere Gäste die Erlebniswelt. Hier erwarten die Besucher mathematische Holzspieltische der besonderen Art mit über 60 Spielen. Besonderer Wert wurde, neben bekannten Problemstellungen, auf das Kreieren neuer Spiele (meist Visualisierung von mathematischen Formeln und Problemen) gelegt.

Abbildung 3: Spieltisch „Fibonacci-folge“. Foto: Gerhard Lindbichler.

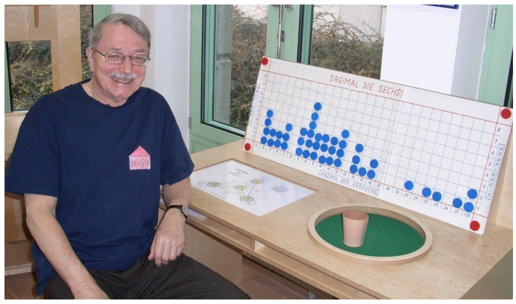


Abbildung 4: Spieltisch „Markow-Ketten“. Foto: Gerhard Lindbichler.

Mitarbeiter des Hauses der Mathematik haben sich dabei bemüht eine gefällige Gestaltung der Spieltische zu erreichen wie z.B.: Vierfarbensatz, Markow-Ketten, Fibonacci-Folge, Goldener Schnitt, Matrizen, Quadratur regelmäßiger Vielecke, Hex- und Nim-Spiel, Pythagoräischer Lehrsatz, Konvergenz der geometrischen Reihe, Möbiusband, Kleinsche Flasche, Primzahl-Zwillinge und -Drillinge, Würfelspiele, Turm von Hanoi, Wabenpuzzle, Koordinatenspiel, Magisches Quadrat, Visualisierung der Formel $1^2 + 2^2 \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, u.Ä.

Auch eine *hands-on-minds-on*-Didaktik wenden wir in der Geschichte der Mathematik (Museum) an. In einer Zeitreise, die bei den Ägyptern beginnt (Seilspanner und Bauweise der Pyramiden von Gizeh) wandern die Besucher zu Exponaten der griechischen Mathematik (Becher des Pythagoras, Platonische Körper, Sieb des Eratosthenes, Elemente des Euklid u.Ä.) weiter zu verschiedenen Abaki (deutsch, russisch, chinesisch und japanisch) und zu historischen Rechenschiebern. Große Beachtung findet auch stets ein Nachbau einer Multiplikationsmaschine mit Napier-Stäben. Bei jüngeren Rechenmaschinen angekommen, werden besonders hervorgehoben Addiatoren, ein Rechenaffe und der berühmte erste Taschenrechner des Österreichers Curt Herzstark, die „CURTA“: Der Unterschied zwischen Sprossenrad- und Staffelwalzenmaschinen wird anhand von Arbeitsskizzen von G. W. Leibniz erklärt. Die Führung findet in der Inbetriebnahme einer *Bunzel-Delton* von 1908 ihren Höhepunkt. Auch eine Rechenanlage von 1978 (Kienzle) mit den großen Plattenstapeln ruft großes Staunen hervor. Für besonders mathematisch interessierte Besucher erfolgt noch eine Führung zu Originalexponaten der Österreichischen Weltmathematik (Edmund Hlawka, Leopold Schmetterer und sehr ausführlich Leopold Vietoris).

Ein besonderes Ereignis für unsere Tagesbesucher findet bei der abschließenden Präsentation von *Weltbevölkerung-live* statt. Das zugehörige Programm wurde von Franz Vrabec (Studienpreisträger der ÖMG für das Jahr 1997 und Spieltischplaner für die Erlebniswelt) geschrieben und beschreibt 3 spannende Abschnitte: *Wachstum der Weltbevölkerung – live*, *Wachstum der Europabevölkerung – live*, und *Wachstum der Weltbevölkerung – historisch*.

Abbildung 5: *Links:* Bunzel-Delton. *Rechts:* Knotenlehre nach Leopold Vietoris. (Fotos: Daniele Lindbichler)

Franz Vrabec macht es möglich, dass der Betrachter das Wachstum der Weltbevölkerung unmittelbar in Echtzeit miterleben kann. Auf einer großen Projektionsfläche zeigt ein mit *matlab* erstelltes Simulationsprogramm in Form einer Treppenfunktion (Aufwärtssprung: Geburtsfall; Abwärtssprung: Todesfall) den aktuellen Stand der Weltbevölkerung. Der Simulation liegen ein Geburtenprozess und ein davon unabhängiger Todesprozess mit exponentialverteilten Wartezeiten zugrunde, deren Parameter aus den von der UNO veröffentlichten globalen Geburts- und Sterbeangaben abgeleitet wurden.

Sonderangebot

Da alle möglichen Termine bereits Ende Oktober für das ganze Schuljahr vergeben sind, wurde 2012 ein neues Produkt *HdMa-On-Tour* von Gordan Varelija und Petra Ilias, langjährigen Mitarbeitern im Haus der Mathematik, kreiert. 30 Stationen des Hauses der Mathematik, in kleinerer Ausführung, können von Schulklassen kostenlos ausgeborgt werden. Der Zustrom an Anmeldungen war bereits nach einigen Wochen sehr groß.

Erfreulich ist auch die Tatsache, dass der von der ÖMG geförderte Film aus der Reihe *Gespräche mit Mathematikern* mit Monika Ludwig und Peter M. Gruber in den neuen Räumlichkeiten des Hauses der Mathematik 2012 abgedreht werden konnte.

Bemerkenswert ist auch die gute Zusammenarbeit zwischen dem „Science Center Netzwerk“ (Margit Fischer) und dem Haus der Mathematik. In allen seinen Ausstellungen waren wir mit Exponaten vertreten.

Viel Lob erhalten wir auch über die Ausstellung „Mathematik und Frauen“, wobei

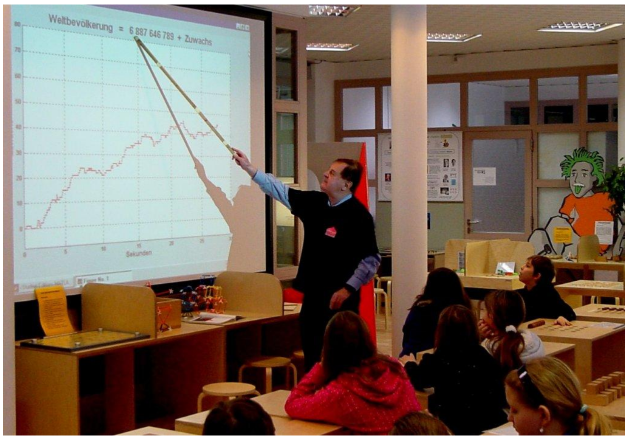


Abbildung 6: Weltbevölkerung-live nach Franz Vrabec. (Foto: Franz Vrabec)

besonders hervorgehoben werden u.a.: Ingrid Daubechies, Emmy Noether und Olga Taussky-Todd.

Zitate aus dem Gästebuch

Margit Fischer (Ehefrau des österreichischen Bundespräsidenten): „Hätte ich so Mathematik lernen dürfen! So entsteht für das Lernen Faszination! Alles Gute!"

Gerhart Bruckmann (em.o.Prof., ORF-Wahl-Hochrechner): „Eine bemerkenswerte Leistung – ein faszinierender Besuch!"

Erwin Niederwieser (Abgeordneter zum Nationalrat, ehem. Bildungssprecher seiner Partei): „Dieser überaus sinnvollen Einrichtung wünsche ich eine gute Zukunft im Interesse des Bildungslandes Österreich und der Bildungsstadt Wien!"

Johannes Hahn (ehem. Wissenschaftsminister; EU-Kommissar): „Schade, dass uns erst 30 Jahre später, aber nicht zu spät, Mathematik so nahe gebracht wurde!"

Dieter Brosz (Abgeordneter zum Nationalrat, ehem. Bildungssprecher seiner Partei): „Herzlichen Dank für diese spannenden Einblicke in die Mathematik – ich wollte, ich hätte sie vor 20 Jahren schon bekommen, dann wäre womöglich die Matura leichter gewesen. Ich wünsche dem Haus der Mathematik alles Gute!"

Gertrude Aubauer (*Kronen Zeitung*, ORF, Abgeordnete zum Nationalrat): „Sehr beeindruckend! Herzlichen Glückwunsch!"

Wolfgang Henn (Univ. Dortmund, Initiator des „Mathe-Koffers"): „Ein herrlicher Spaziergang durch die wunderbare Welt der Mathematik. Ein bemerkenswertes Meisterstück, eine wahre Heimat für die Mathematik!"

Daniel Weselka (Ministerialrat in Bundesministerium für Wissenschaft und Forschung; Abteilungsleiter Wissenschaft): „Ein beeindruckender Besuch mit Führung – ich komme sicher wieder."

Hans Hartweger (Direktor des Wirtschafts- und Gesellschaftsmuseums Wien): „Vielen Dank für die interessante Führung und herzlichen Glückwunsch für die informative Einrichtung im Dienste unserer Wirtschaft!“

Literatur

[1] G. Lindbichler: Haus der Mathematik. *Int. Math. Nachr.* 192 (2004), 15–21.

[2] G. Lindbichler: Ein Erlebnisvormittag für Schulklassen im Haus der Mathematik; *Erziehung & Unterricht* 154 (2004), 340-358.

[3] G. Lindbichler: Haus der Mathematik – 5. Geburtstag. *Int. Math. Nachr.* 207 (2008), 45–48.

[4] T. Egerer: Vom Angreifen zum Begreifen ist es nur ein kleiner Schritt. *http://forschen-entdecken.at/uploads/archiv/ForschenEntdecken_3_2011.pdf*

Adresse des Autors:

G. Lindbichler, Haus der Mathematik, Waltergasse 16, A-1040 Wien.

Buchbesprechungen

D. M. Carpenter, S. N. Mishra (eds.): SCMA, Vol. I. Confluence of the Mathematical Sciences (Statistics, Combinatorics, Mathematics, and Applications). Proceedings of the International Conference on Statistics, Combinatorics, Mathemathics, and Applications (SMCA). (American Series in Mathematical and Management Sciences, Vol. 59.)[1] American Sciences Press, Columbus, 2008, 280 S. ISBN 0-935950-63-X P/b $ 235,–.

Der vorliegende Band enthält 14 Beiträge zu den im Titel angegebenen Bereichen. Diese gliedern sich in Grundlagenarbeiten, methodische Untersuchungen mit Simulationsstudien und praktische Anwendungen.

X. Wang analysiert Bilddaten, die aus wiederholten Messungen entstehen, durch semiparametrische gemischte Regressionsmodelle und wendet seine Methodik auf Daten einer klinischen Studie an, welche die Effekte einer neuromuskulären elektrischen Stimulation bei Patienten mit Rückenmarksverletzung wiedergeben. Der Beitrag von *G.M. Davis* und *K.B. Ensor* diskutiert die Risikobewertung von Aktienportfolios, wobei die dynamische Kovarianzstruktur der Renditen durch ein MGARCH-Zeitreihenmodell dargestellt wird. *F. Tasdan* stellt eine robuste Prozedur für die Schätzung des Shift-Parameters im Zweistichproben-Lokationsproblem vor und zeigt die Konkurrenzfähigkeit seiner Methode mithilfe einer Simulationsstudie. *N.K. Nerchal, H. Lakayo* und *B.D. Nussbaum* gehen der Frage nach, welche Stichprobengröße für ein Konfidenzintervall des Anteils einer binären Population mit vorgegebener Präzision optimal ist. Dabei wird aufgezeigt, dass sich die Länge des Konfidenzintervalls nicht monoton in Abhängigkeit von der Stichprobengröße verbessert.

Eine nichtparametrische Version des Bartlett-Nanda-Pillai-Tests mit asymptotischen Resultaten, Approximationen und Anwendungen aus der Medizin wird von *S.W. Harrar* und *A.C. Bathke* vorgestellt. Umfragedaten enthalten oft viele fehlende Werte (großer Anteil an Personen gibt keine Rückmeldung) und liefern dadurch systematisch verzerrte Schätzungen. *B. Wang* und *J. Sun* schlagen eine semi-parametrische Methode für die Korrektur der Verzerrung vor und illustrieren deren Effizienz im Vergleich mit anderen Methoden. Durch die Konstruktion eines minimalen D-optimalen Designs kann die Anzahl von Experimenten mit vielen mehrstufigen kategorischen Faktoren stark reduziert werden. *D.S. Hoskins, Ch.J. Colbourn* und *M. Kulahci* entwickeln eine Methode, wo prozessbezogenes Know-how in das Design des Experiments einfließt. *T. Park* gibt eine Modifikation der Hauptkomponentenanalyse an, die eine Interpretation der Komponenten zulässt. Dabei werden Kriterien für die Rotation der Faktoren als Straffunkionen in den Maximum Likelihood-Ansatz eingebaut. Unabhängige Komponentenanalyse ist eine statistische Technik, wo komplexe multivariate Daten in unabhängige Komponenten zerlegt werden. *S. Pandey, N. Billor* und *A. Turkmen* schlagen einen

[1] Dieses Werk ist gleichzeitig erschienen als: American Journal of Mathematical and Management Sciences, Volume 28 (2008), issue 3 and 4.

Algorithmus vor, der die Effizienz bei Vorliegen von Ausreißern erhöht. *M. Kumar, N. Mishra* und *R. Gupta* studieren in einer Grundlagenarbeit das Problem der simultanen Schätzung der Zielgröße und des Durchschnittswerts der Studienvariable in einem linearen Regressionsmodell, wenn exakte Restriktionen bzgl. der Regressionskoeffizienten gegeben sind. Ein nichtlineares Zeitreihenmodell (komplexwertige Regression mit zufälligen Koeffizienten) für die Schätzung von Richtung und Geschwindigkeit bei Transport von Feinstaub $PM_{2.5}$ in einer gegebenen Zeitperiode wird von *S.E. Kim* entwickelt und auf stündlich erfasste Daten aus drei Beobachtungsstationen angewandt.

Im Beitrag von *K. Devarajan* und *N. Ebrahimi* wird eine Methode für das Auffinden von Objektklassen und die Dimensionsreduktion beschrieben, die auf einer Faktorisierung nichtnegativer Matrizen basiert. Die Anwendbarkeit wird anhand von Mikromatrixdaten aus einer Leukämiestudie und mittels Simulation demonstriert. *M.Z. Anis* schlägt drei einfache Schätzungen für den Mittelwert der Normalverteilung unter bekanntem Variationskoeffizienten vor und vergleicht seine Vorschläge mit alternativen Methoden. In der theoretischen Arbeit von *Y. Shikama* und *K. Shimizu* werden Varianzformeln für die Überkreuzung von Ein- und Zweischritt-Niveaus in streng stationären elliptischen Prozessen, die aus Skalenmischungen von Normalverteilungen bestehen, hergeleitet.

Die Beiträge liefern einen Einblick in Arbeiten, die sich mit Themen an der Schnittstelle zwischen der Mathematik, Statistik und den angewandten Wissenschaften beschäftigen und zeigen, mit welchem Spektrum von Methoden konkrete Probleme gelöst werden können.

E. Stadlober (Graz)

T. Crespo, Z. Hajto: Algebraic Groups and Differential Galois Theory. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 122.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011, xiv+225 S. ISBN 978-0-8218-5318-4 H/b \$ 53,–.

The aim of the book under review is to introduce differential Galois Theory. In order to keep the book as self-contained as possible, algebraic geometry and algebraic groups are treated in the first two parts (chapter 1–4) of the book. The third part of the book is devoted to the main topic of the book: differential Galois theory. In particular, chapter 5 deals with differential rings and fields and also with Picard-Vessiot extensions. In chapter 6, the heart of the book, differential Galois theory is established. In this chapter the authors prove the fundamental theorem of differential Galois theory (an analog of the fundamental theorem of classical Galois theory) and discuss the connection of the solvability of differential equations by quadratures and group theoretic properties of the corresponding Galois group. In chapter 7 the differential Galois theory is used to study differential equations over $\mathbb{C}(z)$. In particular, Fuchsian differential equations and the relation between Galois group and monodromy group are investigated. Moreover, the authors also describe Kovacic's algorithm to solve second order differential equations. I also want to emphasize the chapter “Suggestions for further reading”, in which the authors give a detailed description of related literature which present active research topics.

In conclusion the book is written carefully, the proofs are all represented in a clear style and at the end of each chapter exercises supplement the book. To present differential Galois theory in a little more than 200 pages with providing the needed background knowledge on algebraic geometry and algebraic groups is not an easy task. But to my opinion the authors managed it in a brilliant way.

V. Ziegler (Graz)

P. Etingof, O. Golberg, S. Hensel, T. Liu, A. Schwendner, D. Vaintrob, E. Yudovina: Introduction to Representation Theory. With historical interludes by S. Gerovitch. (Student Mathematical Library, Vol. 59.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011, vii+228 S. ISBN 978-0-8218-5351-1 P/b \$ 42,–.

This is a truly excellent book on representation theory. Since more then 100 years, this theory has found incredibly many applications and has become a rich and highly sophisticated theory. This book is intended for higher undergraduate or (better) for graduate students and starts with a review of the algebraic tools needed later on: algebraic structures, group rings, tensor products, symmetric and exterior powers, and the like, as well as the bacis definitions of representations. Then the general theory of the structure of associative algebras and rings (density, Krull-Schmidt, Maschke, . . .) is developed and the basic theory of characters is presented. Then more advanced topics follow, like characters of induced representations, representations of the symmetric and linear groups. Then the representations of quivers (directed graphs) are studied, culminating in the surprising theorem of Gabriel which says that there are only very few types of quivers of finite type (i.e., with only finitely many indecomposable representations). Finally, the theory of representations of finite dimensional algebras is presented. An unusual feature of this book is the interplay with historical surveys in many places; these surveys add a lot to the understanding of the material. Skillfully chosen exercises (the difficult ones with hints) will also add to the understanding of this remarkable material.

G. Pilz (Linz)

J. Garibaldi, A. Iosevich, S. Senger: The Erdös Distance Problem. (Student Mathematical Library, Vol. 56.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011, xii+150 S. ISBN 978-0-8218-5281-1 P/b \$ 29,–.

Dieses Buch ist aus einem Sommer-Kurs entstanden und richtet sich an ein breites Spektrum an Lesern: von motivierten Schülern der oberen Klassen bis hin zu Studierenden in höheren Semestern.

Thematisch behandelt das Buch primär Zugänge zu der auf Erdős (1946) zurückgehenden Frage, wieviele verschiedene Abstände zwischen n verschiedenen Punkten in der euklidischen Ebene mindestens existieren müssen. Die extremale Konfiguration sollte durch Punkte, die ungefähr ein Gitter definieren, gegeben sein. Eine Reihe Autoren (Moser, Beck, Chung, Solymosi, Tóth, Székely, Tardos, Katz) hat an dem Problem gearbeitet und die Ergebnisse von $n^{1/2}$ (Erdős) über $n^{2/3}, n^{4/5}, n^{6/7}$ bis schließlich zu $n^{0.8641}$ (2004) verbessert.

Die Autoren zeichnen diesen Weg im Detail nach und stellen die benötigten Hilfsmittel zur Verfügung (z.B. Cauchy-Schwarz, Graphentheorie). Ebenso wird die bekannte Szemerédi-Trotter-Abschätzung der Kreuzungszahl nach Székely behandelt. Andere Themen in späteren Kapiteln sind mehrdimensionale Gitterpunktprobleme über endlichen Körpern.

Dieses Buch zeigt, wie Lehre und Forschungsinteressen gut miteinander verbunden werden können. Es ist den Autoren hervorragend gelungen, die Ideen eines aktuellen Themas verständlich darzustellen, sodass dieses Buch sich auch für ein Seminar, kleine Vorlesungen oder das Eigenstudium eignet.

Nach Fertigstellung des Buchs erzielten Guth und Katz einen Durchbruch, indem sie die untere Schranke zu $cn/\log n$ verbesserten ($c > 0$, vgl. *http://arxiv.org/abs/1011.4105*). Dieses Ergebnis erschien im November 2010, und es ist natürlich sehr bedauerlich, dass diese Arbeit nicht mehr in das Buch integriert werden konnte.

Zusammenfassend: Ein sehr schön geschriebenes Buch, bei dem bei einer Neuauflage hoffentlich in geeigneter Weise auf die genannte neuere Entwicklung eingegangen werden kann.

C. Elsholtz (Graz)

D. Fuchs, S. Tabachnikov: Ein Schaubild der Mathematik. 30 Vorlesungen über klassische Mathematik. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, xiii+541 S. ISBN 978-3-642-12959-9 H/b € 34,95.

Die englische Version hat den Titel *Mathematical omnibus. Thirty lectures on classic mathematics* (American Mathematical Society, Providence, 2007).

Es gibt Bücher, die bekannte elementare Mathematik immer wieder neu erläutern. In diesem Buch hingegen finden sich zahlreiche originell aufgearbeitete Beiträge, hauptsächlich im Bereich der (elementaren) Geometrie und Topologie, aber auch einige zu Zahlentheorie und Algebra. Dies Buch ist daher eine sehr schöne Bereicherung des Buchmarkts.

In den Kapiteln über Geometrie lernt man, dass jedes Oval mindestens vier Scheitel hat. Es wird auch z.B. Hilberts drittes und viertes Problem diskutiert. Kapitel über Algebra enthalten u.a. die bekannte Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit der Gleichungen vom Grad 2 bis 5.

Die Autoren selber entstammen der russischen Schule und haben jahrzehntelang Kapitel dieser Art in der russischen Zeitschrift *Kvant* veröffentlicht.

Die Kapitel dieses Buchs können weitgehend unabhängig gelesen werden. Dieses Buch kann sowohl für eine Vorlesung zu weiterführenden (aber noch elementaren) Themen, als auch für Seminare und selbstständige Lektüre an Universitäten empfohlen werden. Auch Physiker werden viele der behandelten Themen interessant finden. Es gibt historische Hinweise (mit zahlreichen Fotos), Übungsaufgaben (teilweise mit Lösungen) und Hinweise zu weiterführender Literatur.

C. Elsholtz (Graz)

R. A. Hearn, E. D. Demaine: Games, Puzzles, and Computation. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2009, ix+237 S. ISBN 978-1-56881-322-6 H/b $ 45,–.

Das vorliegende Buch basiert auf einer überarbeiteten und erweiterten Version der Doktorarbeit von Robert Hearn aus dem Jahr 2006. Der zweite Autor, Erik Demaine, war Initiator und Betreuer dieser Doktorarbeit. Er wurde bereits im Alter von 27 Jahren Full-Professor für Informatik am MIT, und wer ihn kennt, der weiß, dass Erik Spiele und Puzzles liebt. Er ist unter anderem Herausgeber mehrerer Bücher zu Ehren Martin Gardners zum Thema ‚Spiele und Puzzles'. Wer wäre also wohl besser dazu geeignet, eine Doktorarbeit in diesem Gebiet zu betreuen bzw. ein Buch über "Games, Puzzles, & Computation" zu verfassen?

Das Buch befasst sich mit Spielen sowohl mathematischer Natur (z.B. Spiele auf Graphen) als auch im „alltäglichen" Sinn von Brettspielen (wie z.B. Dame), sowie Puzzles (Ein-Personen-Spiele wie z.B. Sudoku). Eine starke Motivation zur Beschäftigung mit der Thematik ist der Spaß am „Spiel mit Mathematik", und dies ist dem Buch auch durchgehend anzumerken, was das Lesen sehr angenehm macht. Zudem stellen die Spiele auch eine äußerst gut geeignete Plattform zur Einführung einer vereinheitlichten Methode zur Komplexitätsbestimmung mittels *constraint logic* dar. Diese Methode wird sehr anschaulich (im wahrsten Sinne, mit vielen farbigen Bildern) erklärt und dann verwendet, um zahlreiche Spiele als „schwer" zu klassifizieren. Dabei ist es ein zentraler Aspekt des Buchs hier nicht nur mathematisch orientierte Spiele zu betrachten, sondern auch Spiele, die durchaus von Nicht-Mathematikern einfach zum Zeitvertreib gespielt werden können. So wird z.B. das auch bei uns erhältliche und bekannte Kinderspiel *Rush Hour*, das zur Klasse der Block-Schiebe-Spiele gehört, untersucht und als PSPACE-vollständig klassifiziert.

Das Buch enthält auch einen umfangreichen Überblick über bekannte Resultate zur Komplexität von Spielen und ist daher mit seinen 177 Referenzen auch hervorragend als Nachschlagewerk zum Thema ‚Spiele und Komplexität' geeignet. Wer immer schon wissen wollte, was über die mathematische Komplexität von Schach bekannt ist und ob Sudoku oder Mastermind NP-vollständig sind, wird besonders mit diesem Teil des Buchs sicher Freude haben.

Das Buch kann daher jedem, der Spiele mag und mehr über ihre (mathematische) Komplexität wissen möchte, wärmstens empfohlen werden.

O. Aichholzer (Graz)

G. Kemper: A Course in Commutative Algebra. With 14 Illustrations. (Graduate Texts in Mathematics 256.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, xi+246 S. ISBN 978-3-642-03544-9 H/b € 49,95.

Dieses Lehrbuch entwickelte sich aus Vorlesungen des Autors in Heidelberg und München. Es bietet eine kompakte Einführung in die Kommutative Algebra, deren Bedeutung für die algebraische Geometrie und in algorithmische Aspekte der Theorie. Das Buch ist sowohl als Grundlage für eine entsprechende Vorlesung für höhersemestrige Studierende als auch zum Selbststudium sehr gut geeignet. Als Vorkenntnisse werden solide, aber nicht zu spezielle Kenntnisse der Algebra vorausgesetzt.

Inhaltlich ist das Buch in 4 Abschnitte unterteilt. Im ersten ("The Algebra-Geometry Lexicon") werden Hilberts *Nullstellensatz*, Noethersche und Artinsche Moduln und Ringe, die Zariski-Topologie sowie die Übersetzung zwischen geometrischen und algebraischen Begriffen gebracht. Ungewöhnlich erscheint dem Rezensenten, dass für beliebige Grundkörper K eine Varietät nur aus den K-wertigen Punkten besteht (und nicht aus allen über dem algebraischen Abschluss von K definierten, also den „geometrischen", Punkten), wodurch z.B. über endlichen Grundkörpern nur 0-dimensionale Varietäten existieren und bei Erweiterung des Grundkörpers eine Varietät keine zusätzlichen Punkte erhalten kann.

Der zweite Abschnitt ("Dimension") behandelt Krull Dimension, Lokalisierungen, das Lemma von Nakayama und den Hauptidealsatz, ganze Ringerweiterungen und den Noetherschen Normalisierungssatz.

Im Abschnitt "Computational Methods" wird Buchbergers Algorithmus zur Bestimmung von Gröbnerbasen vorgestellt sowie dessen Verwendung in Eliminationstheorie, Invariantentheorie und zur Berechnung der Hilbertreihe eines Ideals im Polynomring.

Der letzte Abschnitt ("Local Rings") untersucht Noethersche lokale Ringe und deren assoziierte graduierte Algebra, reguläre lokale Ringe und das Jacobi-Kriterium sowie eindimensionale Ringe und insbesondere Dedekindringe.

Jedes der insgesamt 14 Kapitel schließt mit mehreren, großteils interessanten Übungsbeispielen, von denen einige am Ende des Buchs auch gelöst werden.

Günter Lettl (Graz)

A. N. Kochubei: Analysis in Positive Characteristic. (Cambridge Tracts in Mathematics 178.) Cambridge University Press, 2009, ix+210 S. ISBN 978-0-521-50977-0 H/b £ 40,–.

Die Analogie zwischen dem klassischen Aufbau des Zahlsystems aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ und den entsprechenden Objekten in positiver Charakteristik $\mathbb{F}_q[x]$, $\mathbb{F}_q(x)$, $\mathbb{F}_q((x))$ und $\mathbb{C}_p$ (die Vervollständigung des algebraischen Abschlusses von $\mathbb{F}_q((x))$, $q = p^n$) ist wohlbekannt. Leonard Carlitz hat versucht, möglichst viele klassische Funktionen in positiver Charakteristik zu definieren: Exponentialfunktion, Logarithmus, Gamma-Funktion, Bessel-Funktionen, etc. Carlitz entdeckte auch mit dem Carlitz-Modul das erste Beispiel eine Drinfeld-Moduls.

Aufbauend auf diesen schon klassischen Objekten der Analysis in positiver Charakteristik, entwickelt das vorliegende Buch eine Differential- und Integralrechnung. Studiert werden dann Differentialgleichungen, Existenz und Eindeutigkeit ihrer Lösungen. Dies dient als Basis zur Einführung diverser Analoga von klassischen speziellen Funktionen. Die Theorie wird bis hin zu regulären singulären Punkten und holonomen Funktionen entwickelt. Darüber hinaus werden Rotas umbraler Kalkül und die zugehörigen Ringe von Differentialoperatoren auf die Situation in positiver Charakteristik verallgemeinert.

P. Grabner (Graz)

J. Krieger, W. Schlag: Concentration Compactness for Critical Wave Maps. (EMS Monographs in Mathematics.) EMS, Zürich, 2012, vi+484 S. ISBN 978-3-03719-106-4 H/b € 88,–.

Wave maps describe the free motion of an n-dimensional surface in a non-Euclidean space and hence constitute a generalization of the usual wave equation. Of particular interest is the case of two dimensions where the wave maps are energy critical in the sense that the equation scales just like the energy. In this case it is known that smooth initial data with small energy lead to global smooth solutions, whereas for large data there are examples which lead to singularities in finite time. Nevertheless, there are still major gaps in the understanding of when singularities form.

The present monograph helps filling these gaps by proving that for wave maps with values in the hyperbolic plane the wave map evolution has smooth global solutions for arbitrary smooth initial data. The proof is rather technical and based on the modified Bahouri-Gérard method as well as the Kenig-Merle method. It is well written and intended for researchers in this area.

G. Teschl (Wien)

P. D. Lax, L. Zalcman: Complex Proofs of Real Theorems. (University Lecture Series, Vol. 58.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012, xi+90 S. ISBN 978-0-8218-7559-9 P/b \$ 29,–.

The book illustrates in a fascinating way how complex variables can be used to provide elegant and efficient proofs of important results in number theory, algebra, approximation theory, operator theory, harmonic analysis, Banach algebras, fluid dynamics, and statistical mechanics. It can be seen as an extended meditation on Hadamard's dictum "The shortest and best way between two truths of the real domain often passes through the imaginary one." Highlights are the shortest proof of the fundamental theorem of algebra and Newman's proof of the prime number theorem.

The central method stems from Cauchy's Integral Theorem and the Residue Theorem. A brief appendix provides all necessary background in complex analysis beyond the standard first year graduate course.

F. Haslinger (Wien)

S. Linton, N. Ruškuc, V. Vatter (eds.): Permutation Patterns. St. Andrews 2007. (London Mathematical Society Lecture Note Series 376.) Cambridge University Press, 2010, 345 S. ISBN 978-0-521-72834-8 P/b £ 45,–.

This volume contains a collection of articles presented at the fifth Permutation Patterns Conference, held at the University St. Andrews in June 2007. It contains two survey papers, namely "Some general results in combinatorial enumeration" by Martin Klazar, and "A survey of simple permutations" by Robert Brignall, and the following further articles: M. D. Atkinson, "Permuting machines and permutation patterns"; Miklós Bóna, "On three different notions of monotone subsequences"; Sergey Kitaev, "A survey on partially ordered patterns"; Einar Steingrímsson, "Generalized permutation patterns – a short survey"; Michael Albert, "An introduction to structural methods in permutation patterns"; Alexander Burstein and Niklas Eriksen, "Combinatorial properties of permutation tableaux"; Lara Pudwell, "Enumeration schemes for words avoiding permutations"; Torey Burton, Anant P. Godbole and Brett M. Kindle, "The lexicographic first occurrence of a I-II-III-pattern"; Toufik Mansour and Augustine O. Munagi, "Enumeration of partitions by rises, levels, and descents"; Alexander Burstein and Isaiah Lankham, "Restricted patience sorting and barred pattern avoidance"; Anthony Mendes, Jeffrey B. Remmel and Amanda Riehl, "Permutations with k-regular descent patterns"; Cathleen Battiste Presutti and Walter Stromquist, "Packing rates of measures and a conjecture for the packing density of 2413"; Michael Albert, Steve Linton and Nik Ruškuc, "On the permutational power of token passing networks"; Vincent Vatter, "Problems and conjectures presented at the problem session".

C. Krattenthaler (Wien)

P. M. Neumann: The mathematical writings of É. Galois. (Heritage of European Mathematics.) EMS, Zürich, 2011, xi+410 S. ISBN 978-3-03719-104-0 H/b € 78,–.

Diese wissenschaftliche Edition von Galois' mathematischen Schriften erschien zu dessen 200. Geburtstag. Einerseits handelt es sich um die erste vollständige Übersetzung ins Englische. Andererseits liegt der Wert dieses Buchs aber auch darin, dass eine neue französische Transkribierung der Originalhandschriften parallel zur englischen Übersetzung gestellt wird und diese Transkribierung auch

Ergänzungen oder Streichungen kenntlich macht. Zudem werden einige inhaltliche Ungenauigkeiten kommentiert bzw. korrigiert und einige wichtige Fachbegriffe in ihrem historischen Zusammenhang erläutert. Peter Neumann ist seit Jahrzehnten als fachkundiger Kenner der Materie bekannt und ich möchte ihm für diese akribische Leistung danken, die Mathematikern und Historikern das Original sehr viel zugänglicher macht.

In einem Epilog korrigiert er auch einige Mythen: So sei es ein verbreiteter Mythos (aber kein Faktum), dass Galois die Einfachheit der alternierenden Gruppen A_n, $n \geq 5$, bewies. Sein Zugang zu der Auflösbarkeit der Gleichungen war eben nicht exakt derjenige, den man heute vielfach lehrt.

C. Elsholtz (Graz)

J. Rauch: Hyperbolic Partial Differential Equations and Geometric Optics. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 133.) American Math. Society, Providence, Rhode Island, 2012, xix+363 S. ISBN 978-0-8218-7291-8 H/b $ 64,–.

This book is aimed at graduate students and young researchers and introduces the mathematical theory of geometric optics for linear and nonlinear (systems of) hyperbolic partial differential equations.The book fills a gap in the current literature since geometric optics is usually not treated (or only briefly mentioned) in most textbooks on partial differential equations.The author himself is a well known expert in this field and the present book has grown out of several graduate courses he has taught on this topic. The main physical motivation is the question of how one can deduce the classical theory of ray propagation from an underlying field theory based on hyperbolic differential equations, the main example being light rays, of course. Similar questions arise in fluid dynamics and also in quantum mechanics, where one aims to understand the emergence of classical particle dynamics within the solution of Schrödinger's equation.

The focus of the book is on symmetric hyperbolic systems, since their mathematical properties are very well understood and since many physically important examples can be written in this form. There are, however, several sections in which the author bridges over to elliptic problems and to more general dispersive equations. The theory of geometric optics can also be seen as the birthplace of microlocal analysis and Fourier integral operators. The current book does not include any of the heavy machinery developed in these fields, but rather follows a more hands-on approach, originating from classical WKB expansions and leading all the way to the seminal works of Lax and Hrmander on the construction of parametrices and the propagation of singularities. In addition to these (and other) topics arising in linear wave propagation, the book also studies the problem of nonlinear geometric optics, including the possibility of resonant wave interactions. Stability results for the approximation by one-phase and multi-phase geometric optic solutions are derived, using classical energy estimates. A mathematical highlight is the exposition on the possibility of dense oscillations within the compressible Euler system of fluid dynamics.

Overall, this is a solid book which gives a concise overview of the theory of geometric optics and its applications. Readers of the book should be in a good position to readily start doing research in this field. A small downside of the book is the fact that there are quite a few typos (also in formulas), which sometimes make it difficult to follow the arguments. In addition, it would have been beneficial, especially for graduate students, to give solutions to the various exercises posed in the text.

C. Sparber (Chicago)

E. T. Sawyer: Function Theory: Interpolation and Corona Problems. (Fields Institute Monographs 25.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, ix+203 S. ISBN 978-0-8218-4734-3 H/b $ 65,–.

Das ursprüngliche Corona-Problem wurde 1941 von Kakutani gestellt und betraf die Frage, ob der Raum der maximalen Ideale von $H^\infty(\mathbb{D})$ außer den Punkten von $\overline{\mathbb{D}}$ noch weitere Punkte habe (die „Corona“). Diese Frage wurde 1962 von Lennart Carleson durch die Lösung eines Interpolationsproblems beantwortet: es gibt keine Corona.

Die vorliegende Monographie beschäftigt sich mit diversen Verallgemeinerungen dieses klassischen Satzes auf kommutative Banach-Algebren holomorpher Funktionen. Darüber hinaus werden Nevanlinna-Picksche Interpolationsprobleme in diesem allgemeineren Kontext studiert. Besonderes Augenmerk wird auch auf die Untersuchung der Carleson-Maße für gewisse Besov-Sobolev-Räume gelegt.

Mehrere Anhänge stellen die nötigen Kenntnisse aus der klassischen Funktionentheorie auf der Kreisscheibe, der Funktionalanalysis und der Theorie der Sobolev-Räume zur Verfügung.

P. Grabner (Graz)

A. Skowroński, K. Yamagata (eds.): Representations of Algebras and Related Topics. (EMS Series of Congress Reports.) EMS, Zürich, 2011, xii+728 S. ISBN 978-3-03719-101-9 H/b € 98,–.

This is the Proceedings Report on a conference on representations of algebras in Tokyo (ICRA 2012). It contains 11 expository survey articles and 2 articles on recent developments. The topics are cluster categories of finite dimensional hereditary algebras (by C. Amiot, who had received the ICRA 2010 award and Nakanishi), the classification of (co)localizing subcategories of triangulated categories (Benson-Iyengar-Krause), quantum dilogarithm identities (Keller), quasntum loop algebras (Leclerc), coherent sheaves over weighted projective lines (Lenzing), indecomposable direct factors of group algebras (Linckelmann), homological properties of Artin algebras (Malicki-Skowronski), classifications of homologically nice algebras (Mori), Tits quadratic forms of tame finite dimensional algebras (Pena-Skowronski), special biserial algebras (Ringel), representations of coalgebras (Simson), and singularities of Zariski closures of orbits in module varieties (Zwara).

G. Pilz (Linz)

Neue Mitglieder

Karin Baur, Prof. Dr. – Institut f. Mathematik und wissenschaftliches Rechnen, Heinrichstr. 36, 8010 Graz. geb. 1970. 2002 Doktorat in Mathematik an der Univ. Basel, anschließend tätig an ETH Zürich (2002–2003), Univ. California in San Diego (2003–2005), Univ. Leicester (2005–2007), als SNF-Förderprofessorin an der ETH Zürich (2007–2011), und ab 2011 als Univ.-Professorin an der KFU Graz. email *baurk@uni-graz.at*.

Eleonore Faber, Dipl.-Ing. Dr. – Sieglangerufer 143, 6020 Innsbruck. geb. 1984. 2007 Abschluss der technischen Mathematik an der Univ. Innsbruck, 2011 Doktorat an der Univ. Wien, 2012–2015 Postdoc an der Univ. Toronto. email *eleonore.faber@univie.ac.at*.

Christoph Kügele, Ing. – Schwarzer Weg 6, 9400 Wolfsberg. geb. 1983. email *ckuegele@gmx.net*.

Lisa Stadlmüller, Dipl.-Ing. – Institut für Medizinische Informatik, Statistik und Dokumentation, Auenbruggerplatz 2/9/V, 8036 Graz. geb. 1986. 2004–2012 Studium der Technischen Mathematik an der TU Graz, seit Jänner 2012 Universitätsassistentin an der Medizinischen Universität Graz. email *lisa.stadlmueller@gmail.com*.

Jörg Tomaschek, Mag. Dr. – Max-Mell-Allee 4/15, 8010 Graz. geb. 1982. Diplom- und Doktoratsstudium an der Karl Franzens-Universität Graz, seit 2009 Lektor an der KFU Graz, im WS 2011/12 Lektor an der Univ. Innsbruck. Ab 2012 Univ. Luxembourg. email *joerg.tomaschek@alumni.uni-graz.at*.

Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2013

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2013 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematiker oder Mathematikerinnen, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind und welche einen wesentlichen Teil ihrer Arbeiten in Österreich erbracht haben. Dabei soll die Promotion mindestens zwei bis maximal zehn Jahre zurückliegen (Überschreitungen sind möglich bei Kindererziehungszeiten und bei nachweislichen Präsenz- oder Zivildienstzeiten).

Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten habilitierten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2013 beim Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten:

1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung;
2. Publikationsliste;
3. wissenschaftlicher Lebenslauf.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine Begutachtungskommission den Preisträger oder die Preisträgerin aus. Der Preis ist mit 1.000 € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird der Preisträger oder die Preisträgerin eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten.

Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er oder sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

(Michael Drmota, Vorsitzender der ÖMG)

Adresse für Einsendungen:
Univ.Prof. Dr. Michael Drmota
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8–10/104
1040 Wien

Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2013

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2013 wieder zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2011 oder 2012 eine Diplom- oder Master-arbeit bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Diplomarbeiten ist ein Abschluss eines Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Doktoratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlossenen Magister- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigten Mathematiker bzw. eine Mathematikerin erfolgen.

Der Vorschlag muss bis spätestens 15. März 2013 beim Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten:

1. Ein Exemplar der als besonders hoch qualifiziert bewerteten mathematischen Diplomarbeit bzw. Dissertation;
2. zwei begründete Bewertungen dieser Diplomarbeit bzw. Dissertation;
3. einen Lebenslauf des Kandidaten bzw. der Kandidatin einschließlich kurzer Beschreibung des Studienablaufs.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachtungskommission die Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500 € dotiert. Jeder Preisträger erhält eine Urkunde.

Sollte der Preisträger oder die Preisträgerin noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird er bzw. sie auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

(Michael Drmota, Vorsitzender der ÖMG)

Adresse für Einsendungen:
Univ.Prof. Dr. Michael Drmota
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8–10/104
1040 Wien

Ausschreibung der Schülerinnen- und Schülerpreise der ÖMG

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft zeichnet herausragende Fachbereichsarbeiten in Mathematik oder Darstellender Geometrie an österreichischen Schulen mit Preisen aus.

Diese Arbeiten müssen bis 15. März 2013 in der ÖMG (Univ. Prof. Dr. Michael Drmota, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, 1040 Wien) einlangen und werden von einer Jury begutachtet.

Die Verfasserinnen und Verfasser jener Arbeiten, die im Zuge dieser Begutachtung in die engere Wahl kommen, werden zu einem Kurzvortrag eingeladen, in dem sie ihre Arbeit präsentieren. Anschließend erfolgt im Rahmen einer Feier die Preisverleihung. Diese Veranstaltung, zu der auch die betreuenden Lehrerinnen und Lehrer eingeladen sind, findet im Rahmen des Lehrer- und Lehrerinnentages beim Kongress der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft und der Deutschen Mathematikervereinigung an der Universität Innsbruck statt (voraussichtlich am 27. September 2013 um 14 Uhr, Innrain 52).

Die ÖMG bittet alle ihre Mitglieder und die Leserinnen und Leser der *IMN*, potentielle Interessenten von dieser Einladung zu informieren und Schulen zur Teilnahme zu ermuntern.

(Michael Drmota, Vorsitzender der ÖMG)

Adresse für Einsendungen:
Univ.Prof. Dr. Michael Drmota
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8–10/104
1040 Wien