Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien" gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten" umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union".

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 20,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 216 (65. Jahrgang) **April 2011**

Inhalt

Klaus Schmidt: Ergodic Theory and Number Theory – the work of Elon Lindenstrauss 1

Werner Peschek: Zentralmatura Mathematik: Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen für alle 15

A. Arnold, M. Drmota, U. Schmock, R. Viertl (Hrsg.): Mathematik in Wien: Technische Universität Wien 31

Buchbesprechungen 53

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 62

Neue Mitglieder 68

Die Figur auf der Titelseite illustriert eine der berühmtesten Entdeckungen des heurigen Abelpreisträgers John Milnor. Ein S^3-Bündel über S^4 entstehe durch Verkleben von zwei Exemplaren des trivialen S^3-Bündels $\mathbb{R}^4 \times S^3$ mittels

$$(a,b) \in (\mathbb{R}^4 \setminus 0) \times S^3 \mapsto \left(\frac{a}{|a|^2}, \frac{a^2ba^{-1}}{|a|} \right) \in (\mathbb{R}^4 \setminus 0) \times S^3,$$

wobei a, b als Quaternionen betrachtet werden. Das Resultat ist eine *exotische Sphäre* homöomorph zu S^7, welche jedoch nicht diffeomorph zur Einheitskugel des $\mathbb{R}^8$ ist.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 216 (2011), 1–13

Ergodic Theory and Number Theory – the work of Elon Lindenstrauss

Klaus Schmidt
Univ. Wien

Elon Lindenstrauss was awarded the 2010 Fields Medal for his results on measure rigidity in ergodic theory, and their applications to number theory.

The web page of the ICM 2010[1] contains the following brief description of Elon Lindenstrauss' achievements: *Lindenstrauss has made far-reaching advances in ergodic theory, the study of measure preserving transformations. His work on a conjecture of Furstenberg and Margulis concerning the measure rigidity of higher rank diagonal actions in homogeneous spaces has led to striking applications. Specifically, jointly with Einsiedler and Katok, he established the conjecture under a further hypothesis of positive entropy. It has impressive applications to the classical Littlewood Conjecture in the theory of diophantine approximation. Developing these as well as other powerful ergodic theoretic and arithmetical ideas, Lindenstrauss resolved the arithmetic quantum unique ergodicity conjecture of Rudnick and Sarnak in the theory of modular forms. He and his collaborators have found many other unexpected applications of these ergodic theoretic techniques in problems in classical number theory. His work is exceptionally deep and its impact goes far beyond ergodic theory.*

In this note I will concentrate on the work by Lindenstrauss and his collaborators on measure rigidity and the partial settlement of Littlewood's conjecture. Although the method of Lindenstrauss proof of arithmetic quantum unique ergodicity also uses ideas from measure rigidity, the concepts involved in explaining the latter problem and its solution would seriously overburden this exposition. I refer the interested reader to the original paper [19] for details. The paper [11] by Einsiedler and Lindenstrauss gives an excellent overview of the range of ideas

[1] *http://www.icm2010.org.in/prize-winners-2010/fields-medal-elon-lindenstrauss*

ISSN 0020-7926

spanning measure rigidity and quantum unique ergodicity.[2] A reasonably elementary proof of the arithmetical quantum unique ergodicity theorem for $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ can be found in [12].

The connection between ergodic theory and number theory alluded to in the above desription of Lindenstrauss' achievements has a long history, with early landmarks like Hermann Weyl's work on uniform distribution [34] or Khinchine's study of continued fractions [18]. In recent decades the interplay between dynamics and arithmetical problems has stimulated a very interesting development in ergodic theory: the study of multiparametric (or *higher rank*) actions, i.e., of actions of $\mathbb{Z}^d$ or $\mathbb{R}^d$ with $d > 1$. Let me illustrate this transition from classical to multiparameter dynamics with a simple example, that of normal numbers.

Normal numbers. If $p > 1$ is a rational integer, then a real number $x \in I = [0,1)$ is *normal in base p* (or *p-normal*) if every possible block $b_1 \cdots b_L$ of digits $b_i \in \{0,\dots,p-1\}$ occurs with frequency p^{-L} in the expansion of x in base p. An elementary argument shows that x is p-normal if and only if the sequence $\big(p^n x \pmod 1\big)_{n\geq 1}$ is uniformly distributed in the unit interval $I = [0,1)$.[3]

We identify the interval I with $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ and write T_m for multiplication by an integer m on $\mathbb{T}$, corresponding to the map $x \mapsto mx \pmod 1$ on I. As remarked above, an element $x \in \mathbb{T}$ is p-normal if and only if $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(T_p^k x) = \int f\,d\lambda$ for every continuous function $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, where λ is the Lebesgue measure on $\mathbb{T}$. The individual ergodic theorem implies that λ-*a.e.* $x \in \mathbb{T}$ is p-normal, and by varying p we see that λ-*a.e.* $x \in \mathbb{T}$ is p-normal for every integer $p > 1$.[4]

Cassels and Wolfgang Schmidt asked whether one can find numbers $x \in \mathbb{T}$ which behave differently in different bases (cf. [5] and [31]).

Theorem 1 ([31, Theorem 1])**.** *Let $p,q > 1$ be integers.*

(1) If p,q are multiplicatively dependent (i.e., if there exist integers a,b, not both equal to zero, such that $p^a = q^b$), then every p-normal number $x \in \mathbb{T}$ is also q-normal.

(2) If p,q are multiplicatively independent, then there are uncountably many $x \in \mathbb{T}$ which are p-normal, but not q-normal.

In order to discuss this result further we have to go a little deeper into ergodic theory. Recall that a set $B \subset \mathbb{T}$ is *T_p-invariant* if $B \subset T_p^{-1}B$. A probability measure μ on $\mathbb{T}$ is *T_p-invariant* if $\mu(T_p^{-1}B) = \mu(B)$ for every Borel set $B \subset \mathbb{T}$. A T_p-invariant

[2] See also *http://www.ma.huji.ac.il/∼elon/Publications/TopErgThySp07.pdf*

[3] The notion of normality was introduced in 1909 by É. Borel [3] and studied further by Sierpiński [32] and many others.

[4] The explicit construction of such an $x \in \mathbb{T}$ is nontrivial – cf., e.g., [32], [7].

probability measure μ on $\mathbb{T}$ is *ergodic* if $\mu(B) \in \{0,1\}$ for every T_p-invariant Borel set $B \subset \mathbb{T}$.

Clearly, T_p is not invertible on $\mathbb{T}$. However, if μ is a T_p-invariant probability measure on $\mathbb{T}$, it may happen that there exists a Borel set $A \subset \mathbb{T}$ with $\mu(A) = 1$ such that A contains, for every $x \in A$, a *unique* element y with $T_p y = x$. If this is the case, we say that μ has *zero entropy*. In other words, μ has zero entropy, if T_p is invertible when restricted to a suitable Borel set $A \subset \mathbb{T}$ of full μ-measure. If μ does not have zero entropy, we say that it has *positive entropy* under T_p, denoted by $h_\mu(T_p) > 0$.[5]

It is not difficult to show that there exist T_p-invariant and ergodic probability measures $\mu \neq \lambda$ on $\mathbb{T}$ with positive entropy.[6]

Theorem 2 ([14, Théorème 1])**.** *Let $p,q > 1$ be two relatively prime integers, and let $\mu \neq \lambda$ be a nonatomic probability measure on $\mathbb{T}$ which is invariant and ergodic under T_p. If $h_\mu(T_p) > 0$, then μ-a.e. $x \in \mathbb{T}$ is q-normal, but not p-normal.*

Theorem 2 is closely related to (and, in fact, implies) a celebrated result by Rudolph about probability measures μ on $\mathbb{T}$ which are invariant and ergodic under the joint action of T_p and T_q with $(p,q) = 1$.[7]

Theorem 3 ([29, Theorem 4.9])**.** *Let $p,q > 1$ be two relatively prime integers, and let μ be a nonatomic probability measure on $\mathbb{T}$ which is invariant and ergodic under the joint action of T_p and T_q. If $h_\mu(T_p) > 0$, then $\mu = \lambda$.*

Leaving subtleties aside concerning the difference between the ergodicity assumptions in the Theorems 2 and 3 (which can be dealt with by using appropriate ergodic decompositions), Theorem 2 implies that $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mu \circ T_q^{-k} = \lambda$. If $\mu \neq \lambda$, then μ cannot be T_q-invariant.

What about T_p-invariant and ergodic probability measures with zero entropy in Theorem 2, or about zero entropy (T_p, T_q)-invariant measures in Theorem 3? This problem originates from a paper by Furstenberg [13] in which he proves that every

[5]For much of this note it will not be necessary to know the precise meaning of the number $h_\mu(T_p)$. Readers interested in the actual definition of measure-theoretic (or, as it is often called, *metric*) entropy of a finite measure preserving transformation T should consult one of the standard text books on ergodic theory, such as [26] or [33]. The notion of entropy for finite measure preserving actions of more general groups is explained in [24] or [25], for example.

[6]Consider the one-sided shift space $\Sigma_p^+ = \{0,\dots,p-1\}^{\mathbb{N}}$ with the shift σ given by $(\sigma x)_n = x_{n+1}$, $x = (x_n) \in \Sigma_p^+$. The map $\phi\colon \Sigma_p^+ \longrightarrow \mathbb{T}$ defined by $\phi(x) = \sum_{n\geq 1} x_n p^{-n} \pmod 1$ is almost one-to-one and sends any shift-invariant probability measure μ on Σ_p^+ to a T_p-invariant probability measure $\phi_*\mu$ on $\mathbb{T}$ such that $h_\mu(\sigma) = h_{\phi_*\mu}(T_p)$. By letting μ vary over the set of Markov measures on Σ_p^+, for example, one obtains uncountably many different ergodic T_p-invariant probability measures on $\mathbb{T}$ of any entropy between 0 and $\log p$.

[7]'Joint' ergodicity of μ means that $\mu(B) \in \{0,1\}$ for every Borel set B which is invariant under both T_p and T_q.

infinite closed subset $C \subset \mathbb{T}$ which is invariant under both T_p and T_q must coincide with $\mathbb{T}$. An equivalent formulation is that the orbit $\{T_p^k T_q^l x : k, l \geq 0\}$ of every irrational $x \in \mathbb{T}$ is dense in $\mathbb{T}$ (if x is rational, this orbit is obviously finite).[8] If closed jointly invariant subsets of $\mathbb{T}$ are scarce, what can one say about jointly invariant probability measures on $\mathbb{T}$? Is λ the only nonatomic measure of this kind? This question, often referred to as *Furstenberg's* $\times 2, \times 3$ *conjecture*, has been open since 1967, and has been seminal for the development of 'algebraic' multiparameter ergodic theory for the past decades.

Results like Furstenberg's theorem in [13] or Rudolph's Theorem 3 above are referred to as *rigidity theorems*. Speaking loosely, 'rigidity' is the appearance of an algebraic structure *where one does not expect it*. Consider our present setting: T_p and T_q each have a wide variety of infinite closed invariant sets and nonatomic invariant probability measures. However, if we ask for *simultaneous* invariance of these objects under T_p and T_q, they have to be (or are at least conjectured to be) invariant under translation by *every* element of $\mathbb{T}$, an a priori totally unexpected algebraic invariance property.

Although the theorems by Furstenberg and Rudolph are similar in spirit, their classical proofs have nothing in common. In the recent paper [4], Bourgain, Lindenstrauss, Michel and Venkatesh correct this situation by giving an 'effective' proof of Rudolph's theorem (or, more precisely, of a generalization of Rudolph's theorem due to Aimee Johnson in [15] in which p and q are not required to be relatively prime, but only multiplicatively independent), which they then use to prove an effective version of Furstenberg's result.

The various proofs of Rudolph's theorem and its generalizations all depend crucially – but sometimes subtly – on the hypothesis of positive entropy under at least one (and hence both) of the maps T_p or T_q. In the absence of positive entropy the rigidity problem for nonatomic (T_p, T_q)-invariant probability measures on $\mathbb{T}$ remains as mysterious as ever.

Commuting automorphisms of tori and solenoids. For $p, q \geq 2$, the maps T_p, T_q on $\mathbb{T}$ generate an abelian semigroup of surjective homomorphisms of $\mathbb{T}$. By using a standard construction one can find a compact abelian group X and a continuous surjective homomorphism $\phi\colon X \longrightarrow \mathbb{T}$ such that $\phi \circ \bar{T}_p = T_p \circ \phi$ and $\bar{T}_q \circ \phi = \phi \circ T_q$, where $\bar{T}_p$ and $\bar{T}_q$ denote multiplication by p and q on X (the group X is, in fact, a pq-adic solenoid). Questions about invariant sets and measures of T_p, T_q and of $\bar{T}_p, \bar{T}_q$ are essentially equivalent. This suggests a broader setting for the problems discussed so far: if X is a compact abelian group and $\alpha\colon \mathbf{n} \mapsto \alpha^{\mathbf{n}}$ and action of $\mathbb{Z}^d$, $d > 1$, by continuous automorphisms of X, what are the dynam-

[8] In contrast, there are many nontrivial infinite closed subsets $C \subset \mathbb{T}$ which are invariant under *one* of the maps T_p, T_q, and there are uncountably many irrationals whose orbits under one of these maps are not dense.

ical properties of α, and what, if any, rigidity properties may one expect such an action to have? This is the general setting developed and studied in the monograph [30]. It turns out that such *algebraic* $\mathbb{Z}^d$*-actions* exhibit a wide range of dynamical properties which can be studied quite effectively by combining tools from commutative algebra, arithmetic and dynamics. The connections between dynamics, arithmetical problems and rigidity phenomena central to Elon Lindenstrauss' work manifest themselves most clearly in the special case where X is a finite-dimensional torus or solenoid, and where the action α is not *virtually cyclic* (which means that $\{\alpha^{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d\}$ is not contained in the set of powers of a *single* automorphism β of X).

The study of measure rigidity of higher rank algebraic $\mathbb{Z}^d$-actions by commuting toral automorphisms was initiated by Anatole Katok and Ralph Spatzier in [17] and brought into a definitive form by Manfred Einsiedler and Elon Lindenstrauss in the research announcement [10]. In order to keep statements simple I'll restrict myself to the totally irreducible case,[9] where the result is completely analogous to Theorem 3.

Theorem 4 ([10, Theorem 1.1])**.** *Let α be a totally irreducible, not virtually cyclic action of $\mathbb{Z}^d$ by automorphisms of a (finite dimensional) solenoid X. Then every α-invariant probability measure μ on X is either equal to the normalized Haar measure λ_X of X, or it has zero entropy under $\alpha^{\mathbf{n}}$ for every $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$.*

As was pointed out in [16, Theorem 5.2], the measure rigidity exhibited in Theorem 4 implies another remarkable rigidity property: the rigidity of isomorphisms and factor maps. I restrict myself to a particularly simple, but still instructive, special case of [10, Theorem 1.4] (cf. also [16, Theorem 5.2]).

Theorem 5. *Let $d \geq 2$, and let α and β be irreducible and mixing actions of $\mathbb{Z}^d$ by automorphisms of solenoids X and Y, respectively. We write λ_X and λ_Y for the normalized Haar measures on these groups. If $\phi \colon X \longrightarrow Y$ is a measurable map satisfying $\lambda_X \phi^{-1} = \lambda_Y$ and $\beta^{\mathbf{n}} \circ \phi = \phi \circ \alpha^{\mathbf{n}}$ λ_X-a.e., for every $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, then ϕ coincides λ_X-a.e. with an affine map $A \colon X \longrightarrow Y$.*

One should compare Theorem 5 with the case of a single hyperbolic automorphism $A \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$ of $\mathbb{T}^3$ with eigenvalues $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, say. Since A preserves the Lebesgue measure (i.e., volume) $\lambda_{\mathbb{T}^3}$ on $\mathbb{T}^3$, $\det(A) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \pm 1$, but $|\gamma_i| \neq 1$ for $i = 1,2,3$, by hyperbolicity. Hence either one or two of the eigenvalues of A will have absolute value > 1, which is easily seen to imply that A and A^{-1} cannot be conjugate in $\mathrm{GL}(3,\mathbb{Q})$. General results about ergodic toral automorphisms imply, however, that A and A^{-1} are *measurably conjugate*, i.e., that there exists a measurable bijection $\phi \colon \mathbb{T}^3 \longrightarrow \mathbb{T}^3$ which preserves $\lambda_{\mathbb{T}^3}$ and satisfies that $A^{-1} \circ \phi = \phi \circ A$ $\lambda_{\mathbb{T}^3}$*-a.e.* The following example exhibits a subtle consequence of Theorem 5.

[9] The $\mathbb{Z}^d$-action α is *totally irreducible* if there exists no finite index subgroup $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ and no infinite closed subgroup $Y \subset X$ which is invariant under the automorphisms $\alpha^{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \Lambda$.

Example 6 ([16, Example 2a])**.** Consider the commuting matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$. The $\mathbb{Z}^2$-action $\alpha\colon \mathbf{n} = (n_1,n_2) \mapsto \alpha^{\mathbf{n}} = A^{n_1}B^{n_2}, \mathbf{n} = (n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2$ on $\mathbb{T}^3$ preserves Lebesgue measure and is ergodic.

If $V = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, then the matrices

$$A' = VAV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B' = VBV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

generate a $\mathbb{Z}^2$-action $\beta\colon \mathbf{n} = (n_1,n_2) \mapsto \beta^{\mathbf{n}} = A'^{n_1}B'^{n_2}$ on $\mathbb{T}^3$. This action has the property that $\beta^{\mathbf{n}}$ is measurably conjugate to $\alpha^{\mathbf{n}}$ for every $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$, but the action α and β are not measurably conjugate, since they are not algebraically conjugate in the sense of Theorem 5 (α and β are obviously conjuagte in $\mathrm{GL}(3,\mathbb{Q})$, but not in $\mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$).

Results about isomorphism rigidity of $\mathbb{Z}^d$-actions by automorphisms of more general compact abelian groups can be found in [1] and [2].

Homogeneous dynamics. Apart from commuting group automorphisms, there is a second source of examples of 'algebraic' multiparametric actions with a rich theory and deep arithmetical connections: actions of higher rank diagonalizable subgroups of semisimple Lie groups on homogeneous spaces. More specifically, let G be a linear algebraic group over the field $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, and let $\Gamma \subset G$ be a lattice, i.e., a discrete subgroup with finite covolume (such as $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$). Every subgroup $H \subset G$ acts by right multiplication on the homogeneous space $X = \Gamma\backslash G$, and one can attempt to classify the H-invariant probability measures on X. Our assumptions on Γ guarantee that there exists a (unique) G-invariant probability measure λ_X on X.

A celebrated result by Marina Ratner [27] describes the probability measures which are invariant under unipotent subgroups of G.

Theorem 7. *Let $\Gamma \subset G$ be as above, and let $H \subset G$ be a unipotent subgroup. Then every H-invariant and ergodic probability measure on $X = \Gamma\backslash G$ is homogeneous in the sense that there exists a closed subgroup $L \subset G$ containing H such that μ is the L-invariant probability measure supported on a single orbit of L.*

If the group H is generated by (partially) hyperbolic elements, the problem of classifying the H-invariant probability measures is open, even under much stronger hypotheses. The following conjecture is attributed to Furstenberg, Katok-Spatzier and Margulis.

Conjecture 8 ([23]). *Let A be the group of diagonal matrices in* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$*, $n \geq 3$. Then every A-invariant and ergodic probability measure on $X_n = \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})\backslash \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ is homogeneous in the sense of Theorem 7.*

The following remarkable analogue of Rudolph's thoerem by Manfred Einsiedler, Anatole Katok and Elon Lindenstrauss represents at least partial progress towards this conjecture.

Theorem 9 ([9, Theorem 1.3]). *Let A be the group of diagonal matrices in $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $n \geq 3$. Every A-invariant and ergodic probability measure μ on $X_n = \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ satisfies one of the following conditions:*

(1) The measure μ is a homogeneous and not supported on a compact A-orbit;

(2) For every one-parameter subgroup $(a_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset A$, $h_\mu(a_t) = 0$ for every $t \in \mathbb{R}$.

One can classify the potential homogeneous measures arising in Conjecture 8 (cf. [21]). For example, if n is prime, then any A-invariant homogeneous probability measure on X_n is either the obvious invariant measure on a compact A-orbit, or equal to the G-invariant probability measure λ_{X_n} on X_n.

In general, [21, Theorem 1.3] guarantees that no μ satisfying Condition (1) in Theorem 9 can be compactly supported.

The proof of Theorem 9 is a *tour de force*, based on a detailed analysis of the conditional measures induced by μ on the leaves of certain A-invariant foliations of X_n. The definition of these 'leaf measures' is in itself a little subtle, since the leaves of these foliations are typically noncompact and dense in X_n.[10]

The details of the proof of Theorem 9 fall under the definition of a *P2C2E* in the terminology of [28]: a process too complicated to explain here. The proof is based on a combination of two methods, referred to as the *high* and *low entropy* methods, respectively. I will try to give a very superficial impression of these two methods.

The high entropy method. In [8], M. Einsiedler and A. Katok prove that – under appropriate hypotheses – any A-invariant probability measure of sufficiently high entropy under some element of the A-action must be equal to λ_{X_n}.

[10] In order to appreciate this difficulty the reader might consider the foliation of the space $X = \mathbb{T}^2$ given by the cosets of a noncompact dense subgroup $Y \cong \mathbb{R}$ of X (e.g., $Y = \{(s, \sqrt{2}s) \pmod 1 : s \in \mathbb{R}\}$). Any probability measure μ on X can be decomposed into Borel measures $\{\nu_x, x \in X\}$, such that ν_x is concentrated on the coset $Y + x$ for μ-*a.e.* $x \in X$. However, these measures ν_x are typically not finite, and they are determined only up to scalar multiples. In general, they will not satisfy the condition that ν_x is equal to (or even equivalent to) ν_y if x and y lie on the same leaf of the foliation: in this case, ν_x can only be expected to be a multiple of ν_y, translated by $x - y$.

In the case where $\mu = \lambda_{\mathbb{T}^2}$ these leaf measures are multiples of one-dimensional Lebesgue measures located on the 'lines' $Y + x$. Conversely, if μ is a probability measure whose leaf measures are *a.e.* multiples of Lebesgue measure, then $\mu = \lambda_{\mathbb{T}^2}$.

Theorem 10 ([8, Theorem 4.1], [11, Theorem 9.20])**.** *Let $n \geq 3$, $\Gamma \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ a lattice, $X = \Gamma\backslash G$, $A \subset G$ the diagonal subgroup and μ an A-invariant and ergodic probability measure on X. Then there exists, for every $a \in A$, an $h_0 < h_\lambda(a)$ such that $h_\mu(a) > h_0$ implies that $\mu = \lambda$. Furthermore, if $h_\mu(a) > 0$ for every $a \in A$, $a \neq 1_G$, then $\mu = \lambda$.*
For $n = 3$ the existence of an $a \in A$ with $h_\mu(a) > \frac{1}{2}h_\lambda(a)$ implies that $\mu = \lambda_X$.

For the proof of Theorem 10 I will follow the exposition in [11] and consider the eigenvalues (or *weights*) of the adjoint action A on the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G: each of these eigenvalues is a homomorphism $\eta\colon A$ to $\mathbb{R}^\times$ for which there exists an $x \in \mathfrak{g}$ with $\mathrm{Ad}_a(x) = \eta(a)x$ for every $a \in A$. For a given weight η, the corresponding *eigenspace* consisting of all such $x \in \mathfrak{g}$ is denoted by $\mathfrak{g}^\eta$. If Φ is the set of these weights, then $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\eta\in\Phi}\mathfrak{g}^\eta$. Note that $[\mathfrak{g}^\eta, \mathfrak{g}^{\eta'}] \subset \mathfrak{g}^{\eta\eta'}$ for $\eta, \eta' \in \Phi$.
For each $a \in A$, the *stable subspace* $\mathfrak{g}_a^- = \bigoplus_{\{\eta\in\Phi:|\eta(a)|<1\}}\mathfrak{g}^\eta$ of a is a nilpotent subalgebra which the exponential map sends bijectively to the *stable horospherical subgroup* $G_a^- \subset G$ of a.
Two weights $\eta, \eta' \in \Phi$ are *equivalent* ($\eta \sim \eta'$) if $\eta^m = \eta'^n$ for some positive integers m, n. For every $\eta \in \Phi$ the equivalence class $[\eta]$ of η is called a *coarse Lyapunov weight*, and $\mathfrak{g}^{[\eta]} = \bigoplus_{\eta'\sim\eta}\mathfrak{g}^{\eta'}$ is a Lie subalgebra of $\mathfrak{g}$, called the *coarse Lyapunov subalgebra* of η. The exponential map defines a homeomorphism between $\mathfrak{g}^{[\eta]}$ and a unipotent subgroup $G^{[\eta]}$ of G, called the *coarse unipotent subgroup* corresponding to η.
One chooses an order $[\eta_1] < \cdots < [\eta_l]$ of these coarse Lyapunov weights in such a way that there exists, for every $i = 1,\ldots,l$, a $b \in A$ with $\eta_i(b) = 1$ and $|\eta_j(b)| < 1$ for $i < j \leq l$ (such an order is called *allowed*). Then the following is true.

Theorem 11 ([11, Theorem 9.8], [8])**.** *Let $n \geq 3$, $\Gamma \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ a lattice, $X = \Gamma\backslash G$, $A \subset G$ the diagonal subgroup, and μ an A-invariant and ergodic probability measure on X. Fix some $a \in A$ and choose an allowed order $[\eta'_1] < \cdots < [\eta'_s]$ of the coarse Lyapunov algebras contained in $\mathfrak{g}_a^-$ as described above. Then the leaf measures*[11] *$\mu_x^{G_a^-}$ and $\mu_x^{G^{[\eta'_i]}}$, $i = 1,\ldots,s$, satisfy that $\mu_x^{G_a^-}$ is proportional to the image of the product measure $\prod_{i=1}^s \mu_x^{G^{[\eta'_i]}}$ for μ-a.e. $x \in X$ under the product map $(g_1,\ldots,g_s) \mapsto g_1\cdots g_s$ from $\prod_{i=1}^s G^{[\eta'_i]}$ to G_a^-.*

By varying the allowed order of the coarse Lyapunov weights and exploring the commutators of the leaves corresponding to orbits of $G^{[\eta'_i]}$ and $G^{[\eta'_j]}$ one obtains the following result from this product structure of $\mu_x^{G_a^-}$.

Theorem 12 (High entropy theorem – cf. [11, Theorem 9.14], [8])**.** *Let μ an A-invariant and ergodic probability measure on X. Let $[\eta]$ and $[\eta']$ be coarse*

[11] The leaves in question are the orbits of the respective groups G_a^- and $G^{[\eta'_i]}$ in X.

Lyapunov weights such that $[\eta] \neq [\eta']$ *and* $[\eta^{-1}] \neq [\eta']$. *Then for* μ*-a.e.* $x \in X$, μ *is invariant under the group generated by the commutator* $[\mathrm{supp}(\mu_x^{G^{[\eta']}}), \mathrm{supp}(\mu_x^{G^{[\eta']}})]$ *of the supports of* $\mu_x^{G^{[\eta]}}$ *and* $\mu_x^{G^{[\eta']}}$.

We return to the proof of Theorem 10: the product formula in Theorem 11 shows that the conditional entropy of a with respect to the foliation by G_a^--orbits (whose integral is equal to $h_\mu(a)$) is the sum of the integrals of the conditional entropies of a with respect to the foliations by $G^{[\eta_i']}$-orbits. If one of the measures $\mu_x^{G^{[\eta_i']}}$ is trivial, then its contribution to the entropy $h_{\mu_x^{G_a^-}}(a)$ is zero, which makes $h_\mu(a)$ smaller than $h_\lambda(a)$ by a specified amount. Hence, if $h_\mu(a)$ is sufficiently close to $h_\lambda(a)$, then $\mu_x^{G^{[\eta_i']}}$ is nontrivial for every $i = 1, \ldots, s$ and μ-*a.e.* $x \in X$. By playing around with commutators one obtains from Theorem 12 the invariance of μ under the various coarse unipotent subgroups $G^{[\eta]} \subset G_a^-$, which is enough to prove that $\mu = \lambda$.

The low entropy method was first introduced by Lindenstrauss in [19]. It studies the behaviour of the measure μ under the unipotent subgroups of G normalized by A, even though these subgroups do not necessarily preserve the measure. Instead of *invariance*, this approach is based on *recurrence properties* of the measure μ under these subgroups.[12]

The following result is a special case of [19, Theorem 1.1] and gives a flavour of this approach.

Theorem 13 ([19, Theorem 1.6])**.** *Let* $X = \Gamma\backslash G$, *where* Γ *is an irreducible lattice in* $G = G_1 \times G_2$ *with* $G_i = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *for* $i = 1,2$. *Let* $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \times 1_{G_2} \right\}$ *be the embedding of the* (*one-parameter*) *diagonal subgroup of* G_1 *in* G. *Suppose that* μ *is an* A*-invariant probability measure on* X *which is recurrent under* $1_{G_1} \times G_2$, *and such that a.e. ergodic component of* μ (*under* A) *has positive entropy. Then* $\mu = \lambda_X$.

The basic philosophy for concluding invariance from recurrence is the following: let G and H be locally compact groups acting on a space X, and let μ be a G-invariant and ergodic probability measure on X. Suppose that $\mathcal{F}$ is a foliation of X which is preserved by G, and that each leaf of $\mathcal{F}$ is fixed by H. If μ is recurrent under H, then μ should be H-invariant – given appropriate conditions concerning the 'normalization' of the H-action by the action of G.

This approach appears to go back to [14], where Host used it for an alternative proof of Rudolph's Theorem 3. Another application can be found in [20], where

[12] If $T : g \mapsto T_g$ is an action of a locally compact group G on a standard Borel space $(X, \mathcal{S})$, then a probability measure ν on X is *recurrent* under G if there exist, for every compact set $K \subset G$ and every Borel set $B \subset X$ with $\mu(B) > 0$, a $g \in G \smallsetminus K$ and an $x \in B$ with $T_g x \in B$.

it is used to show that any probability measure μ on $\mathbb{T}^n$ which is invariant under an irreducible ergodic nonhyperbolic toral automorphism A and recurrent under the central foliation of that automorphism (i.e., under translation by the dense subgroup of $\mathbb{T}^n$ on which A acts isometrically), is equal to Lebesgue measure.

I regret that the geometric considerations necessary even in the special case of Theorem 13 would overburden this brief account. The reader is referred to [11, §10] and, of course, to [9] for details.

Finally we come to the problem of *combining the high and low entropy methods* for a proof of Theorem 9. The assumption of positive entropy of μ under some appropriately chosen $a \in A$ in the statement of Theorem 9 implies that the measures induced by μ on the contracting leaves of a (i.e., on the orbits of G_a^-) are nontrivial for *a.e.* orbit of G_a^-. By using a product structure result in [8] and a geometrical argument one obtains a unipotent subgroup U of G_a^- such that the leaf measure induced by μ on *a.e.* U-orbit is nontrivial (which implies recurrence of μ under U). Leaving further subtleties aside one then deduces that μ is either U-invariant (in which case one can apply Ratner's classification theorem for invariant measures of unipotent groups), or one obtains a second unipotent subgroup V of A such that *a.e.* leaf measure induced by μ on the V-orbits is nontrivial. The latter condition leads to invariance under the commutator $[U,V]$ of U and V. An argument similar to that used in the proof of Theorem 10 finally shows that $\mu = \lambda$.

Towards Littlewood's Conjecture. Around 1930, Littlewood conjectured the following diophantine result.

Conjecture 14 (Littlewood)**.** *For every $u, v \in \mathbb{R}$,*

$$\liminf_{n\to\infty} n\|nu\|\|nv\| = 0, \tag{1}$$

where $\|w\| = \min_{n\in\mathbb{Z}} |w-n|$ is the distance of $w \in \mathbb{R}$ to the nearest integer.

We set $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$, $\Gamma = \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$, $X = \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ and write A for the group of diagonal matrices in G. As usual, the G-invariant probability measure on X will be denoted by λ.

Proposition 15 ([9, Proposition 11.1], [11, Proposition 12.5])**.** *For every $s,t \in \mathbb{R}$ we set*

$$a(s,t) = \begin{pmatrix} e^{s+t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \in A.$$

A point $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ satisfies (1) *if and only if the closure of the orbit xA^+ of the point*

$$x_{u,v} = \Gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in X$$

under the semigroup $A^+ = \{a(s,t) : s,t \geq 0\}$ is noncompact.

Furthermore, if $\delta > 0$*, then there exists a compact set* $C_\delta \subset X$ *which contains every* $x_{u,v}$ *with* $\liminf_{n\to\infty} n\|nu\|\|nv\| \geq \delta$*.*

The proof of Proposition 15 uses *Mahler's compactness criterion*: a set $E \subset X_n = \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ is bounded if and only if there is an $\varepsilon > 0$ such that E contains no lattices Γg with $\min\{\|\mathbf{w}\| : \mathbf{w} \in (\mathbb{Z}^d \smallsetminus \mathbf{0})\cdot g\} < \varepsilon$ (where $\mathbf{v}\cdot g \in \mathbb{R}^n$ is the product of a row vector $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$ with the matrix $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$).

The next step in deriving a partial solution of Littlewood's conjecture depends crucially on Theorem 9, combined with the variational principle[13] and semicontinuity properties of measure-theoretic entropy on X_n. We set $a_{\sigma,\tau}(t) = a(\sigma t, \tau t)$ with $a(s,t)$ as in Proposition 15.

Proposition 16 ([11, Proposition 12.12])**.** *Suppose that* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ *does not satisfy* (1). *Then for any* $\sigma,\tau \geq 0$*, the topological entropy of* $a_{\sigma,\tau}$ *on the compact set* $\overline{\{x_{u,v}a_{\sigma,\tau}(t) : t \geq 0\}} \subset X$ *vanishes.*

With very little further work one arrives at the remarkable partial solution of Littlewood's conjecture by Einsiedler, Katok and Lindenstrauss.

Theorem 17 ([9, Theorem 1.5], [11, Theorem 12.10])**.** *For any* $\delta > 0$*, the set* $\Xi_\delta = \{(u,v) \in [0,1)^2 : \liminf_{n\to\infty} n\|nu\|\|nv\| \geq \delta\}$ *has zero upper box dimension.*[14]

It is worth noting that Littlewood's conjecture would follow from Conjecture 8. For a discussion of this connection, which goes back in essence to Cassels and Swinnerton-Dyer, see [6], [22] and [23].

References

[1] S. Bhattacharya, *Isomorphism rigidity of commuting automorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 6319–6329.

[2] S. Bhattacharya and K. Schmidt, *Homoclinic points and isomorphism rigidity of algebraic* $\mathbf{Z}^d$*-actions on zero-dimensional compact abelian groups*, Israel J. Math. **137** (2003), 189–209.

[3] É. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Mat. Palermo **27** (1909), 247–271.

[4] J. Bourgain, E. Lindenstrauss, P. Michel and A. Venkatesh, *Some effective results for* $\times a \times b$, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **29** (2009), 1705–1722.

[13] The version of the variational principle relevant here is that the topological entropy of a continuous flow on a compact metric space is bounded by the measure-theoretic entropies of its invariant probability measures.

[14] This means that, for every $\varepsilon > 0$ and $0 < r < 1$, one can cover Ξ_δ by $O_{\delta,\varepsilon}(r^{-\varepsilon})$ boxes of size $r \times r$. Note that zero upper box dimension for every Ξ_δ, $\delta > 0$, trivially implies zero Lebesgue measure for the set of exceptions to Littlewood's conjecture.

[5] J.W.S. Cassels, *On a problem of Steinhaus about normal numbers*, Colloq. Math. **7** (1959), 95–101.
[6] J.W.S. Cassels and H.P.F. Swinnerton-Dyer, *On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **248** (1955), 73–96.
[7] D.G. Champernowne, *The construction of decimals normal in the scale of ten*, J. London Math. Soc. **8** (1933), 254–260.
[8] M. Einsiedler and A. Katok, *Invariant measures on G/Γ for split simple Lie groups G*, Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), 1184–1221.
[9] M. Einsiedler, A. Katok and E. Lindenstrauss, *Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture*, Ann. of Math. **164** (2006), 513–560.
[10] M. Einsiedler and E. Lindenstrauss, *Rigidity properties of $\mathbf{Z}^d$-actions on tori and solenoids*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **9** (2003), 99–110.
[11] M. Einsiedler and E. Lindenstrauss, *Diagonalizable flows on locally homogeneous spaces*, in: Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic, Clay Math. Proc., vol. 10, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010, 155–241.
[12] M. Einsiedler and T. Ward, *Arithmetic quantum unique ergodicity for* $\Gamma\backslash\mathbb{H}$. *http://swc.math.arizona.edu/aws/10/2010EinsiedlerNotes.pdf*
[13] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation*, Math. Systems Theory **1** (1967), 1–49.
[14] B. Host, *Nombres normaux, entropie, translations*, Israel J. Math. **91** (1995), 419–428.
[15] A.S.A. Johnson, *Measures on the circle invariant under multiplication by a nonlacunary subsemigroup of the integers*, Israel J. Math. **77** (1992), 211–240.
[16] A. Katok, S. Katok and K. Schmidt, *Rigidity of measurable structure for algebraic actions of higher-rank abelian groups*, Comment. Math. Helv. **77** (2002), 718–745.
[17] A. Katok and R.J. Spatzier, *Invariant measures for higher-rank hyperbolic abelian actions*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **16** (1996), 751–778; *Corrections*, **18** (1998), 507–507.
[18] A. Khinchine, *Metrische Kettenbruchprobleme*, Compositio Math. **1** (1935), 361–382.
[19] E. Lindenstrauss, *Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity*, Ann. of Math. **163** (2006), 165–219.
[20] E. Lindenstrauss and K. Schmidt, *Invariant measures of nonexpansive group automorphisms*, Israel J. Math. **144** (2004), 29–60.
[21] E. Lindenstrauss and B. Weiss, *On sets invariant under the action of the diagonal group*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **21** (2001), 1481–1500.
[22] G.A. Margulis, *Oppenheim conjecture*, in: Fields Medallists' Lectures, World Sci. Ser. 20th Century Math., vol. 5, World Scientific Publishers, River Edge, New Jersey, 1997, 272–327.
[23] G. Margulis, *Problems and conjectures in rigidity theory*, in: Mathematics: Frontiers and Perspectives, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2000, 161–174.
[24] J. Moulin-Ollagnier, *Ergodic theory and statistical mechanics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1115, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.

[25] D.S. Ornstein and B. Weiss, *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups*, J. Analyse Math. **48** (1987), 1–141.

[26] K. Petersen, *Ergodic theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[27] M. Ratner, *On Raghunathan's measure conjecture*, Ann. of Math. **134** (1991), 545–607.

[28] S. Rushdie, *Haroun and the Sea of Stories*, Puffin Books, Penguin Books Ltd., London, 1993.

[29] D.J. Rudolph, $\times 2$ *and* $\times 3$ *invariant measures and entropy*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **10** (1990), 395–406.

[30] K. Schmidt, *Dynamical systems of algebraic origin*, Birkhäuser Verlag, Basel-Berlin-Boston, 1995.

[31] W.M. Schmidt, *On normal numbers*, Pacific J. Math. **10** (1960), 661–672.

[32] W. Sierpiński, *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre*, Bull. Soc. Math. France **45** (1917), 127–132.

[33] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 79, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

[34] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann. **77** (1916), 313–352.

Author's address:
Klaus Schmidt
University of Vienna, Faculty of Mathematics
Nordbergstraße 15, 1090 Wien

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 216 (2011), 15–30

Zentralmatura Mathematik: Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen für alle

Werner Peschek
Univ. Klagenfurt

In vielen (europäischen) Ländern ist die Zentralmatura längst Normalität, in Österreich ist sie ab dem Schuljahr 2013/14 vorgesehen. Kernstück der bisherigen Überlegungen zur Gestaltung einer zentralen schriftlichen Reifeprüfung aus Mathematik an dem Allgemeinbildenden Höheren Schulen Österreichs sind bildungstheoretisch begründete, grundlegende mathematische Kompetenzen („Grundkompetenzen"), die von allen österreichischen Maturant(inn)en in gleicher Weise, in hohem Maße und nicht durch andere Leistungen kompensierbar verlangt werden sollen. Konstitutiv ist weiters auch die Einsicht, dass damit nur ein kleiner (wenn auch unverzichtbarer) Teil jener mathematischen Kompetenzen erfasst wird, die in einem guten Mathematikunterricht entwickelt werden (können). Für den anderen Teil sind Freiräume erforderlich, die durch die Verbindlichkeiten der Zentralmatura nicht eingeschränkt, sondern eher deutlicher und bewusster gemacht werden sollen.

Beim vorliegenden Beitrag handelt es sich um eine überarbeitete und erweiterte Fassung von [5], die wesentlichen Überlegungen wurden im Rahmen des in Abschnitt 1 beschriebenen Projekts entwickelt.

1. Auf dem Weg zu einer zentralen schriftlichen Reifeprüfung in Österreich

Der österreichische Nationalrat (Parlament) hat im Sommer 2009 eine Neugestaltung der Reifeprüfung beschlossen. Die wesentlichste Änderung gegenüber der gegenwärtigen Reifeprüfung besteht darin, dass die Aufgabenstellungen der schriftlichen Reifeprüfungen in den Fächern Deutsch, Mathematik und einer le-

ISSN 0020-7926

benden Fremdsprache *zentral* und nicht wie bisher durch die jeweilige Klassenlehrerin bzw. den jeweiligen Klassenlehrer erfolgen. Für die Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS) soll diese neue Regelung ab dem Schuljahr 2013/14 gelten, für die Berufsbildenden Höheren Schulen (BHS) ab dem Schuljahr 2014/15.

Vonseiten der Bildungsbehörde wurde die geplante Einführung dieser neuen Reifeprüfung recht vage mit einer besseren „Vergleichbarkeit der Bildungsabschlüsse“ sowie mit einer größeren „Objektivität“ begründet.

Ersteres wirkt etwas befremdend angesichts eines Schulsystems wie dem österreichischen, das seit Jahren stark auf äußere Differenzierung, Schulautonomie und innere Differenzierung bis hin zur Individualisierung setzt. Eine konstruktive Interpretation dieses Arguments könnte sein, dass durch eine Reifeprüfung mit zentraler Aufgabenstellung Gemeinsamkeiten in einem hochdifferenzierten Schulsystem identifiziert bzw. hergestellt werden sollen. Eine Erhöhung der Objektivität wäre – bei einheitlicher Aufgabenstellung – am besten durch Fremdbeurteilung der Arbeiten der Maturant(inn)en nach einheitlichen Korrekturanleitungen erreichbar. Einheitliche Korrekturanleitungen (und Beurteilungskriterien) soll es bei der neuen schriftlichen Reifeprüfung geben, die Feststellung und Beurteilung der erbrachten Leistungen soll jedoch weiterhin einer klassenspezifischen Prüfungskommission obliegen und auf Vorschlag der jeweiligen Klassenlehrerin bzw. des jeweiligen Klassenlehrers erfolgen.

Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“

Das Österreichische Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik am Institut für Didaktik der Mathematik der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt-Wien-Graz wurde bereits im Sommer 2008 vom zuständigen Unterrichtsministerium mit der Entwicklung eines Konzepts für eine zentrale schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik (sRP-M) an AHS sowie mit der Vorbereitung und Durchführung eines Schulversuchs betraut, in dessen Rahmen ausgewählte Schulen erstmals im Schuljahr 2011/12 eine zentrale sRP-M nach diesem Konzept durchführen sollen. Die Erfahrungen aus diesem Schulversuch sollen, zusammen mit den theoretischen und konzeptionellen Entwicklungen, in Empfehlungen zur Gestaltung der zentralen sRP-M ab 2013/14 münden.

Aus fachdidaktischer Sicht lassen sich an der traditionellen sRP-M mehrere Schwachstellen identifizieren. Insbesondere lassen die oft spezifischen Kontexte und die (vor allem operative) Komplexität der Maturaaufgaben vermuten, dass diese Aufgaben den jeweiligen Schülerinnen und Schülern sehr vertraut sein müssen und somit eher reproduktive als eigenständige mathematische Leistungen verlangen. Die beiden folgenden Beispiele, Maturaaufgaben aus dem Jahre 2008, sollen dies exemplarisch illustrieren.

Beispiel 1. Eine Blumenschale, die 12 cm hoch ist, wird außen von einem (halben) Drehhyperboloid und innen von einem Drehparapoloid begrenzt. Die äußeren Abmessungen der Schale betragen: Grundkreisradius 12 cm, oberer äußerer Radius $12 \cdot \sqrt{2}$ cm. Die Gleichung der Parabel, die durch Drehung das Paraboloid erzeugt, lautet $y = 1/20 \cdot x^2 + 2$.

- In die Schale werden 1,5 Liter Wasser gegossen. Wie hoch steht das Wasser in der Schale?
- Soll man diese mit 1,5 Liter Wasser gefüllte Glasschale auf ein Wandbord stellen, das mit maximal 11 kg belastet werden darf? (Dichte von Glas: 2,5 kg/dm^3)

Beispiel 2. Beim Einschalten eines Stromkreises mit einem Ohmschen Widerstand $R = 60$ Ohm und einer bestimmten Eigeninduktivität L steigt der Strom I nach der Funktion $I(t) = I_0 \cdot (1 - e^{-(R/L) \cdot t})$ an, wobei $I_0 0 = 0,1$ A (Ampere) beträgt. Die Halbwertszeit beträgt $t_H = 2,31$ s.

a) Berechne die Eigeninduktivität L.
b) Berechne die Zeit (in s), bis der Strom 0,09 A (Ampere) erreicht.
c) Berechne die im Widerstand R in 1 min geleistete Arbeit.

Nimmt man die häufige Beobachtung hinzu, dass es vielen unserer Maturantinnen und Maturanten an grundlegenden mathematischen Kenntnissen und Fähigkeiten mangelt, dann lässt sich eine zentrale Kritik an der traditionellen sRP-M zu folgender Aussage verdichten:

> *Die österreichischen Schülerinnen und Schüler bewältigen bei der schriftlichen Reifeprüfung mit Bravour relativ komplexe (vorwiegend operative) Aufgaben, zu deren Lösung grundlegende mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten erforderlich sind, über die sie in der Regel nicht (ausreichend) verfügen.*

Wenn dieser Befund zutreffend ist, dann erklärt er zwei geläufige Beobachtungen:

1. Vor der Mathematikmatura sind längere zielgerichtete Übungsphasen unerlässlich. (Manche nennen dieses fokussierte Teaching to the Test – in Anlehnung an M. Wagenschein – eine „Dressur des Unverstandenen“).

2. Eine in Klasse A erfolgreich bewältigte Maturaaufgabe kann man in keiner anderen österreichischen Klasse zur Matura geben, ohne dort eine Katastrophe auszulösen. (Dem hochdifferenzierten österreichischen Mathematikunterricht mangelt es an sichtbaren Gemeinsamkeiten bzw. Verbindlichkeiten; vgl. dazu auch die Abb. 4–6 in Abschnitt 5.)

Mit einer zentralen schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik kann versucht werden, für alle Maturantinnen und Maturanten verbindliche Gemeinsamkeiten herzustellen bzw. sichtbar zu machen und diese für alle sicherzustellen. Eine Herausforderung besteht darin, relevante Gemeinsamkeiten bzw. Verbindlichkeiten zu identifizieren, eine andere darin, Gemeinsamkeiten und Verbindlichkeiten festzulegen, ohne die Freiräume wesentlich einzuschränken (diese eher deutlicher erkennbar, bewusster zu machen). Denn in jedem sozialen System sind Verbindlichkeiten ebenso notwendig (zur Identitätsfindung, Verständigung und Kooperation, etc.) wie Freiräume (zur Selbstverwirklichung, für Kreativität und Innovation).

2. Gegenstand einer zentralen schriftlichen Reifeprüfung aus Mathematik

Für eine kleine, überschaubare und vertraute Lerngruppe wie die eigene Klasse können die Inhalte einer Leistungsüberprüfung vergleichweise problemlos festgelegt werden, zudem stehen verschiedene Verfahren der Leistungsüberprüfung zur Verfügung. Für eine zentrale Leistungsüberprüfung (mit beträchtlichen biografischen Auswirkungen für die Betroffenen) ist die Frage, welche mathematischen Fähigkeiten für alle Schüler(innen) verbindlich sein sollen, ebenso entscheidend wie heikel. Im Sinne des Klagenfurter Konzepts [4] für eine zentrale sRP-M in Österreich muss es sich dabei um Fähigkeiten handeln,

- die für das Fach grundlegend sowie
- gesellschaftlich relevant sind

und die darüber hinaus

- längerfristig verfügbar sein sollten sowie
- leicht („massig“) überprüfbar sein müssen.

Im Kontext dieses Konzepts werden solche Fähigkeiten „Grundkompetenzen“ genannt. Mathematische Grundkompetenzen sind hier somit grundlegende, gesellschaftlich relevante mathematische Fähigkeiten, die allen österreichischen Maturant(inn)en längerfristig verfügbar sein sollten und einer produkt- bzw. zustandsorientierten Überprüfung zugänglich sind.

Gegenstand der zentralen sRP-M im Sinne des Klagenfurter Konzepts sind solche mathematischen Grundkompetenzen; intendiert ist, diese Grundkompetenzen für alle österreichischen Maturantinnen und Maturanten sicherzustellen.

Identifizierung von mathematischen Grundkompetenzen

Bei der Identifizierung von mathematischen Grundkompetenzen sind verschiedene Aspekte zu berücksichtigen:

traditionell-pragmatische Aspekte: „das Wesentliche“ aus dem Lehrplan
fachliche Aspekte: fachliche und fachdidaktische Zusammenhänge
bildungstheoretische Aspekte: Rolle des Individuums in der Gesellschaft
soziale Aspekte: Aushandelung.

Die bei der zentralen sRP-M überprüften mathematischen Fähigkeiten müssen sich selbstverständlich im Rahmen der aktuell gültigen Lehrpläne bewegen. Das bedeutet nicht, dass alle im Lehrplan angeführten Ziele und Inhalte auch in der zentralen sRP-M angesprochen werden müssen (das ist ja auch bei der traditionellen, von der jeweiligen Klassenlehrerin bzw. vom jeweiligen Klassenlehrer erstellten sRP-M nicht der Fall); vieles davon kann durchaus den Freiräumen – mit elaborierteren Methoden der Leistungsüberprüfung – überlassen bleiben. Es meint vielmehr, dass die zentrale sRP-M keine Inhalte und Ziele umfassen kann, die nicht auch im Lehrplan genannt werden. Dies auch dann, wenn sie „wesentlich“ erscheinen.

Die zentrale sRP-M sollte weiters auf Ziele und Inhalte fokussieren, die für das Fach grundlegend sind in dem Sinn, dass entsprechende Defizite einen verständigen Umgang mit diesen mathematischen Inhalten bzw. eine weiterführende Lernentwicklung behindern. Es geht dabei nicht um eine Vorwegnahme weiterführender mathematischer Inhalte, sondern vielmehr um reflektiertes Basiswissen, das verständig eingesetzt und auf dem aufgebaut werden kann.

Konzeptionell zentral ist die bildungstheoretische Positionierung, also die Frage, welche Mathematik die Maturant(inn)en zu ihrem eigenen Nutzen als mündige Bürger(innen) unserer Gesellschaft wie auch zum Nutzen der Gesellschaft lernen und längerfristig verfügbar haben sollen. Die im Klagenfurter Konzept zur zentralen sRP-M vertretene bildungstheoretische Position ist wesentlich durch R. Fischers Konzept der Höheren Allgemeinbildung [1] geprägt: Eines der Schlüsselprobleme unserer arbeitsteiligen Gesellschaft ist das der Verständigung zwischen Expert(inn)en und Lai(inn)en (vgl. etwa [3], S. 113–114). Daher muss die *Kommunikationsfähigkeit mit Expert(inn)en und der Allgemeinheit* ein zentrales Anliegen einer allgemeinbildenden höheren Schule sein – für R. Fischer wird sie zum wesentlichsten *Orientierungsprinzip* für die Auswahl von Inhalten.

Kommunikationsfähigkeit mit Expert(inn)en meint zum einen, die richtigen Fragen an die Expert(inn)en stellen und deren Antworten verständig aufnehmen zu können (wofür *Grundwissen* erforderlich ist), es meint zum anderen aber auch, die Wichtigkeit und Bedeutung der Expertisen für die eigenen Entscheidungen und Handlungen bewerten zu können (was Reflexion bzw. Reflexionswissen erfordert).

Einer Zentralmatura sind in dem in Abb. 1 dargestellten Kompetenzspektrum durch die „massige“ Messung Grenzen gesetzt: Mithilfe „primitiver“ Instrumente wie einem schriftlichen Test sind eher (weniger komplexe) Inhalte messbar, die dem Bereich des Grundwissens zugeordnet werden können; komplexere Anwen-

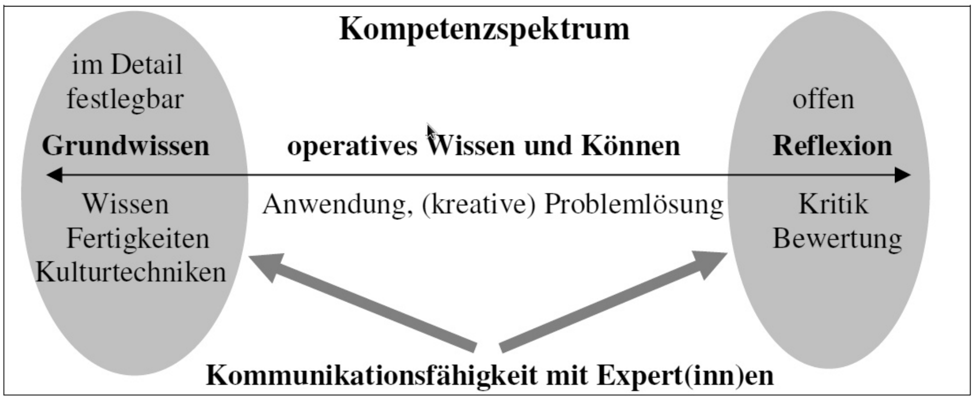


Abbildung 1: Kompetenzspektrum nach R. Fischer [2, S. 11].

dungen, kreative Problemlösungen oder gar Reflexionsprozesse hingegen verlangen entsprechend elaborierte, allenfalls prozessorientierte Evaluationsmethoden. Zentrale Vorgaben verlangen darüber hinaus, dass die überprüften Inhalte im Detail festlegbar sind und klar benannt werden können (Transparenz). Eine Zentralmatura wird sich daher auf die Überprüfung verständigen (allenfalls reflektierten) Grundwissens beschränken und Gemeinsamkeiten und Verbindlichkeiten in diesem Bereich ansiedeln müssen.

Unterrichtlich relevante Bildungsziele sind nicht durch Verordnung vorschreibbar, sie werden sozial ausgehandelt. Dazu sind zentrale Vorgaben (als Vorschläge und Diskussionsgrundlage) notwendig, (rationaler, begründeter, konstruktiver) Widerstand ist erwünscht (vgl. [2], S. 4–7). Bei der Vorbereitung, Durchführung und Evaluation des Schulversuchs wird versucht, solche *Aushandelungsprozesse* zwischen der Projektgruppe, den beteiligten Pilotschullehrer(inne)n und -schüler(inne)n und deren Betreuer(inne)n sowie externen Expert(inn)en zu organisieren.

Die siebenköpfige Steuerungsgruppe[1] des Projekts sRP-M ist recht heterogen mit drei Vertretern der Fachdidaktik Mathematik, zwei Vertreter(innen) der Schuladministration und zwei fachdidaktisch kompetenten Vertretern der Schulpraxis zusammengesetzt – bereits hier ist also Widerstand (bewusst) organisiert. Aufgabe der Steuerungsgruppe ist die Entwicklung des Konzepts, die Festlegung der Grundkompetenzen und die Auswahl der in den Pilottests und im Schulversuch eingesetzten Aufgaben. Drei Mitglieder der Steuerungsgruppe sind zugleich Leiter von drei regionalen Arbeitsgruppen, denen jeweils 2–3 weitere Vertreter(innen) der Schulpraxis angehören. Aufgabe der regionalen Arbeitsgruppen ist die Entwicklung von Aufgaben für die Pilottests und den Schulversuch sowie die Beratung und Betreuung der Lehrerinnen und Lehrer an den Pilotschulen.

[1]M. Dangl, R. Fischer, H. Heugl, B. Kröpfl, M. Liebscher, W. Peschek, H.-St. Siller

Wesentliche Aushandelungsprozesse erfolgen zunächst innerhalb der Steuerungsgruppe sowie mit den Mitarbeiter(inne)n der regionalen Arbeitsgruppen. Hinzu kommen im Rahmen des Projekts organisierte Expert(inn)entreffen mit Vertreter(inne)n der österreichischen Fachdidaktik sowie Vorstellung und Diskussion des Projekts (und der darin vorgesehenen Grundkompetenzen) im Rahmen von wissenschaftlichen Veranstaltungen sowie in Weiterbildungsveranstaltungen für Lehrer(innen).

Zentral sind auch die Aushandelungsprozesse zwischen Mitarbeiter(inne)n der regionalen Arbeitsgruppen und den von ihnen betreuten Pilotlehrer(inne)n. Diese Aushandelungsprozesse werden dokumentiert, in den regionalen Arbeitsgruppen verdichtet und an die Steuerungsgruppe zur Diskussion und Entscheidung weitergegeben.

Die wichtigsten Aushandlungsprozesse basieren jedoch auf den Rückmeldungen der Schülerinnen und Schülern. Diese Rückmeldungen erreichen das Projektteam zum einen über die Lehrerinnen und Lehrer der Pilotschulen (die in ihren Klassen Aushandlungsprozesse erleben), vor allem aber auch über die Pilottests, die in den betreuten Pilotschulen wie auch in nicht betreuten Vergleichsschulen durchgeführt werden.

Es wird versucht, diese Aushandelungsprozesse in ihrer ganzen Komplexität zu erfassen, zu dokumentieren und für die Entscheidungen innerhalb der Steuerungsgruppe nutzbar zu machen.

3. Mathematische Grundkompetenzen

Im Konzept für die zentrale sRP-M [4] wird eine Liste von Grundkompetenzen vorgeschlagen, die nach den zuvor angeführten Kriterien (insbesondere bildungstheoretischen Aspekten) identifiziert wurden, im Rahmen der Pilotphase ausgehandelt, weiterentwickelt sowie konkretisiert werden und Grundlage für die zentrale sRP-M im Rahmen des Schulversuchs 2012 sein sollen; zu einigen der aufgelisteten Grundkompetenzen werden prototypische Aufgaben angegeben.

Die vorgeschlagene Liste der Grundkompetenzen ist thematisch nach vier Themenbereichen geordnet:

- Algebra und Geometrie
- Funktionale Abhängigkeiten
- Analysis
- Wahrscheinlichkeit und Statistik.

Jedem dieser Themenbereiche sind themenspezifische bildungstheoretische Überlegungen vorangestellt, die Themenbereiche selbst sind weiter untergliedert in thematische Abschnitte, für die dann jeweils die vorgeschlagenen Grundkompetenzen aufgelistet werden. So etwa ist der Themenbereich „Funktionale

Abhängigkeiten“ gegliedert in

- Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften
- Lineare Funktion
- Potenzfunktion
- Polynomfunktion
- Exponentialfunktion
- Allgemeine Sinusfunktion

und für den thematischen Abschnitt „Lineare Funktion“ etwa werden folgende Grundkompetenzen angeführt:

Lineare Funktion [$f(x) = k \cdot x + d$]

- Den typischen Verlauf des Graphen kennen
- Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
- Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können:

$$f(x+1) = f(x) + k; \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$$

- Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können
- Den Schnittpunkt zweier linearer Funktionsgraphen ermitteln und im jeweiligen Kontext deuten können
- Direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können.

Beispiele für mathematische Grundkompetenzen

„Beim Abitur (auch bei Schularbeiten) müssten z.B. viel mehr, dafür aber kürzere, ‚einfachere‘ Aufgaben gestellt werden, auch solche, die sich auf inhaltliches Verständnis beziehen, nicht nur Routineaufgaben.“ [6, S. 159])

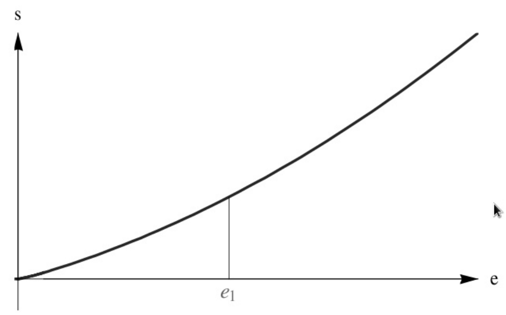
Zur Illustration und Konkretisierung werden im Folgenden zu einigen Grundkompetenzen (GK) aus verschiedenen Themengebieten zugehörige prototypische Aufgabenstellungen (aus [4]) exemplarisch angeführt (Seiten 23–24).

4. Grundkompetenzen (für alle) sichern – Gemeinsamkeiten herstellen

Nach den Vorstellungen des Klagenfurter Konzepts [4] soll die schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik vor allem darauf abzielen, in Form entsprechender Grundkompetenzen bildungstheoretisch relevantes mathematisches Wissen und

Beispiel: Es sei $s \mapsto s(e)$ die Funktion, die jedem Einkommen e die zugehörige Einkommenssteuer $s(e)$ zuordnet; e_1 sei ein bestimmtes Einkommen (siehe Grafik).

Was bedeuten die Terme $T_1 : e_1 - s(e_1)$ und $T_2 : \frac{s(e_1)}{e_1}$ in diesem Kontext?



Grundkompetenz: Terme im Kontext interpretieren können.

Beispiel: Die Bewegung eines Körpers werde durch die Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t) = 36 - t^2$ beschrieben.

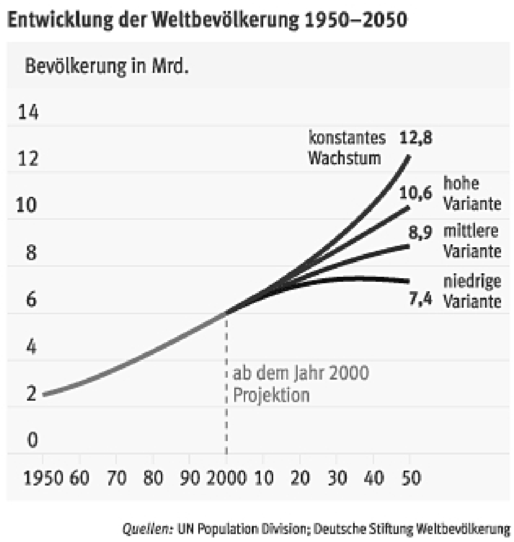
Stellen Sie den Weg des Körpers in den ersten sechs Sekunden durch ein Integral dar!

Grundkompetenz: Entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können.

Beispiel: Die UNO veröffentlichte mehrere Prognosemodelle für die Entwicklung der Weltbevölkerung ab dem Jahr 2000. Bei einer der vier Varianten wurde linear modelliert.

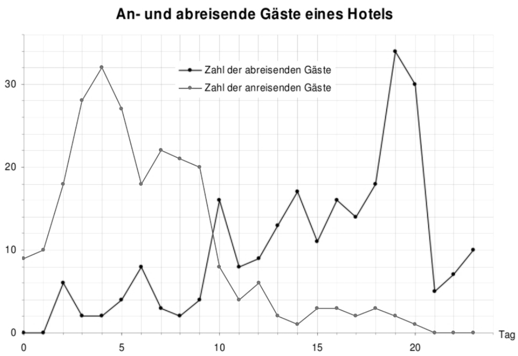
Welche Variante ist dies?

Geben Sie die für diese Modellierung zugrunde liegende jährliche Bevölkerungszunahme an!



Grundkompetenz: Den typischen Verlauf des Graphen einer linearen Funktion kennen. Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können.

Beispiel:
(i) An welchen Tagen ist die Gästezahl gestiegen?
(ii) An welchem Tag war die Gesamtzahl der Gäste am größten?
(iii) An welchem Tag war der Zuwachs der Gästezahl am größten?



Grundkompetenz: Werte aus Liniendiagrammen ablesen bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln können.

Beispiel: Veränderungen der Parameter einer Funktionsgleichung bewirken Veränderungen des zugehörigen Funktionsgraphen.

Wie verändert sich der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot bx$, $a > 0$ und $b > 1$, wenn

(i) der Wert von a erhöht wird (b bleibt konstant),
(ii) der Wert von b erhöht wird (a bleibt konstant)?

Grundkompetenz: Die Wirkung der Parameter a und b einer Exponentialfunktion mit $f(x) = a \cdot bx$ kennen.

Beispiel: Ein Meteorologe meint, die Wahrscheinlichkeit, dass es im Land Salzburg im März schneit, sei 70%. Welche der folgenden Aussagen gibt die Bedeutung der Aussage des Meteorologen am besten wieder?

Im März schneit es in 70% aller Salzburger Gemeinden. ☐
Im Land Salzburg schneit es an 70% aller Märztage ☐
Im Land Salzburg gibt es 70% aller Schneefälle im März ☐
Man hat über viele Jahre für das Land Salzburg Aufzeichnungen gemacht, aus denen hervorgeht, dass es in ca. 70% aller Jahre im März Schneefall gab ☐
Die Wahrscheinlichkeit von 70% ist größer als $\frac{1}{2}$, daher schneit es im Land Salzburg im März sicher jedes Jahr ☐
Es ist sicher, dass es in Salzburg in 7 der kommenden 10 Jahre im März schneien wird ☐

Grundkompetenz: Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit in einer Versuchsserie anwenden und interpretieren können.

Können für alle Maturantinnen und Maturanten sicherzustellen und damit Gemeinsamkeiten herzustellen. Diese Zielsetzung hat mindestens zwei Implikationen:

1. Grundkompetenzen müssen in einem hohen Ausmaß nachgewiesen werden.
2. Defizite im Bereich der Grundkompetenzen dürfen nicht durch andere Leistungen kompensierbar sein.

Nur unter diesen Voraussetzungen ist gemeinsam geteiltes Wissen und Können in relevantem Umfang erreichbar.

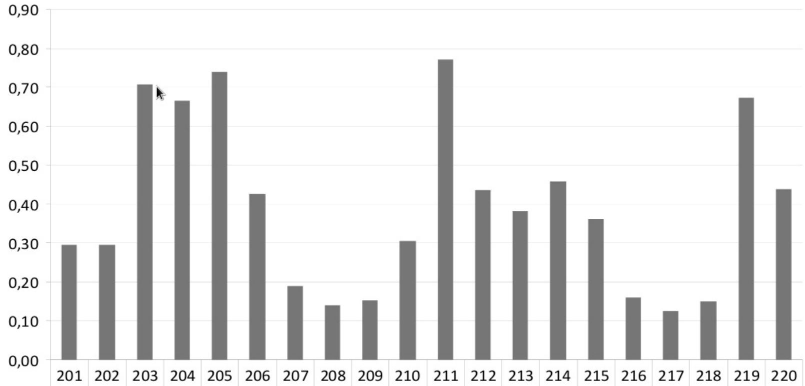
Die Notendefinition in § 14 der österreichischen Leistungsbeurteilungsverordnung 1974 liefert dafür einen geeigneten rechtlichen Rahmen: Für ein „Genügend" müssen die Lehrplananforderungen *in den wesentlichen Bereichen überwiegend*, für ein „Befriedigend" müssen sie *zur Gänze erfüllt werden* (wobei Mängel in der Durchführung durch merkliche Ansätze zur Eigenständigkeit ausgeglichen werden können).

Mit „Gut" sind Leistungen zu bewerten, mit denen die Lehrplananforderungen über das Wesentliche hinaus erfüllt werden und die merkliche Ansätze zur Eigenständigkeit sowie die Fähigkeit zur Anwendung des Wissens und Könnens auf neuartige Aufgaben erkennen lassen; für ein „Sehr gut" müssen die Lehrplananforderungen weit über das Wesentliche hinaus erfüllt und deutliche Eigenständigkeit bzw. Fähigkeiten zur Anwendung des Wissens und Könnens auf neuartige Aufgaben nachgewiesen werden.

Das Klagenfurter Konzept [4] sieht für die zentrale sRP-M zwei Typen von Aufgaben vor:

Mit Aufgaben vom Typ 1 sollen einzelne Grundkompetenzen unmittelbar überprüft werden (die zuvor angeführten prototypischen Aufgaben sind durchwegs diesem Typ zuzuordnen), es wird eine hohe Lösungsquote (ca. 75%) verlangt und Defizite sind nicht durch Leistungen bei Aufgaben vom Typ 2 kompensierbar. Es werden mit diesen Aufgaben die Lehrplananforderungen in den wesentlichen Bereichen angesprochen, bei entsprechenden Leistungen ist eine positive Note (maximal „Befriedigend") erreichbar.

Aufgaben vom Typ 2 sind in der Regel etwas komplexer, ihre Bearbeitung verlangt die Vernetzung mehrerer Grundkompetenzen und/oder deren Reflexion und somit auch ein gewisses Maß an Eigenständigkeit, die Art der Aufgabenstellung ist vielfältiger und enthält auch ungewohnte, allenfalls für die Schülerinnen und Schüler neuartige Elemente. Leistungen in diesem Bereich weisen über die wesentlichen Lehrplananforderungen hinaus und führen zur Verbesserung der Note innerhalb der positiven Notenskala.



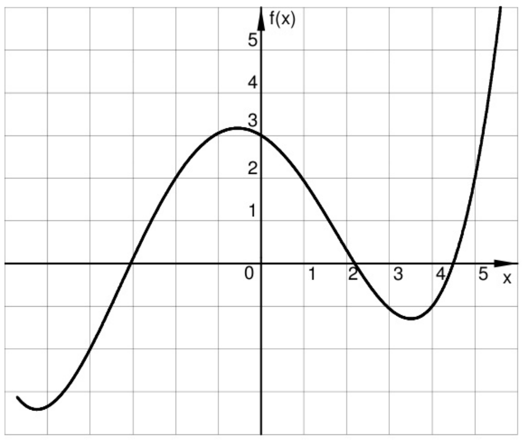
	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
Gesamt	0,30	0,30	0,71	0,67	0,74	0,43	0,19	0,14	0,15	0,31	0,77	0,44	0,38	0,46	0,36	0,16	0,13	0,15	0,67	0,44

Abbildung 2: Lösungshäufigkeiten bei 20 Aufgaben (Typ 1) des 2. Pilottests. (Grafik F. Picher)

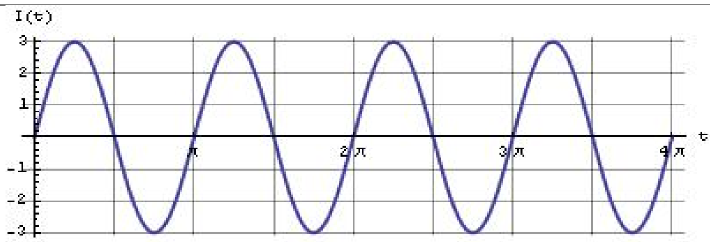
A208 Änderungsmaße bestimmen. Gegeben ist der Graph der Funktion f.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die folgenden Änderungsmaße der Funktion f:

Die absolute Änderung der Funktion f im Intervall $[3;5]$ beträgt: ....
Der Differenzenquotient der Funktion f im Intervall $[-4;-2]$ beträgt: ....



B217 Wechselstrom. Der zeitliche Verlauf der Stromstärke $I(t)$ mit $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ist in der folgenden Graphik dargestellt (I in Ampere, t in Sekunden). *Aufgabenstellung:* Lesen Sie aus der Graphik den Scheitelwert I_0 der Stromstärke und den Wert der Kreisfrequenz ω ab!



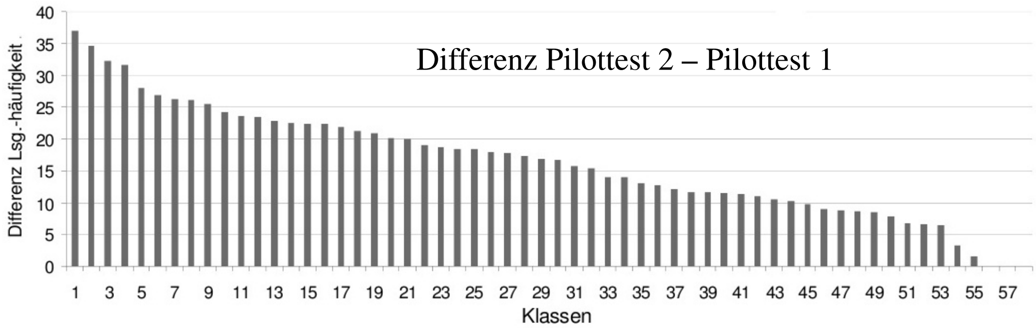


Abbildung 3: Zuwächse bei den Lösungshäufigkeiten. (Grafik: F. Picher) Hinweise: Bei Klassen mit mehreren Schulformen (G, RG, . . .) wird in dieser Grafik jede Schulform als eigene Klasse ausgewiesen. Klasse 56 hat sich gegenüber Pilottest 1 nicht verändert, Klasse 57 und 58 haben den ersten Pilottest nicht mitgeschrieben.

5. Einige Beobachtungen bei den ersten Pilottestungen

Im Jänner/Februar 2010 begann die Zusammenarbeit mit den 20 Pilotschulen. Sehr bald nach den regionalen Auftaktveranstaltungen wurde in 49 Pilotklassen (6. Klassen, knapp 1.000 Schülerinnen und Schüler) ein „Pre-Test“ (1. Pilottest) zu Inhalten der 5. Klasse geschrieben. Da zuvor durchgeführte Testungen prototypischer Aufgaben bei Studierenden im 1. Studienabschnitt sehr mäßige Ergebnisse brachten, waren die Erwartungen der Projektgruppe bezüglich des 1. Pilottests nicht allzu hoch gesteckt; mit durchschnittlich 24% richtig gelösten Aufgaben (vom Typ 1) lagen die Ergebnisse im Rahmen dieser Erwartungen.

Ein halbes Schuljahr später, zu Beginn der 7. Klasse, wurde in den Pilotklassen der 2. Pilottest zu Inhalten der 6. Klasse geschrieben.

Abb. 2 zeigt die Lösungshäufigkeiten bei den 20 Aufgaben (Nr. 201–220) vom Typ 1, die durchschnittliche Lösungshäufigkeit betrug 39%. Als besonders schwierig haben sich dabei die Aufgaben A208 „Änderungsmaße bestimmen“ und B217 „Wechselstrom“ mit Lösungshäufigkeiten von 14% bzw. 13% erwiesen. (Man vergleiche diese beiden Aufgaben mit den zwei eingangs angeführten Maturaaufgaben aus dem Jahre 2008.)

Sehr ermutigend waren die in nahezu allen Klassen beobachtbaren (deutlichen) Zuwächse bei den Lösungshäufigkeiten gegenüber Pilottest 1 (Abb. 3) – was natürlich nicht darüber hinwegtäuschen kann, dass auch die Ergebnisse von Pilottest 2 noch recht weit von den erwünschten Ergebnissen entfernt sind.

Ein wichtiges Argument für eine zentrale sRP-M, aber auch eine große damit verbundene Herausforderung, zeigt sich in den beiden folgenden Abbildungen: Abb. 4 zeigt für jede der 20 Aufgaben (Typ 1) von Pilottest 2 anhand eines Kastenschaubildes die Verteilung der durchschnittlichen Lösungshäufigkeiten in den 58 Klassen – und macht die enormen Unterschiede (bis zu 100%-Punkten!) zwischen

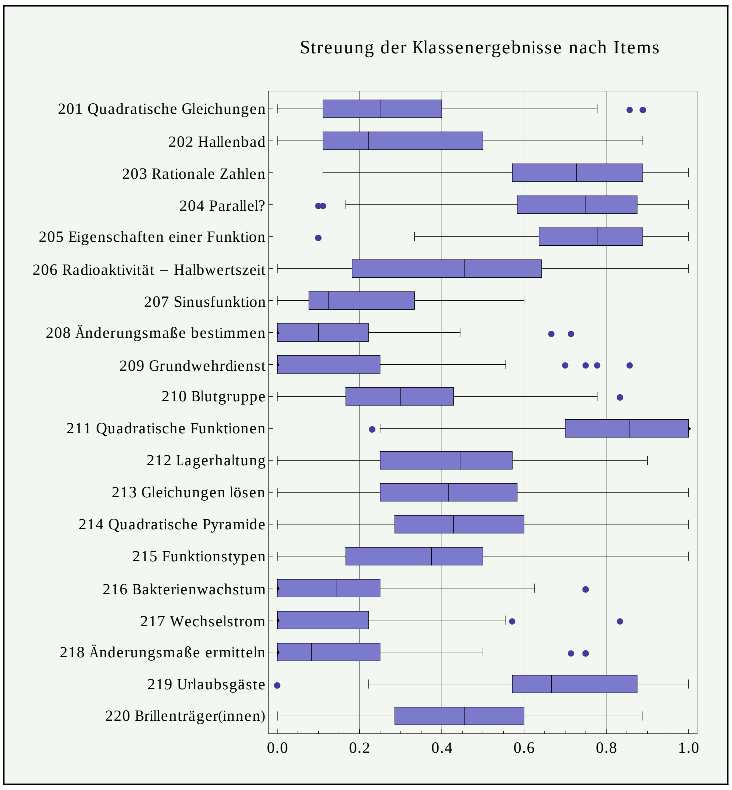


Abbildung 4: Verteilung der durchschnittlichen Lösungshäufigkeiten bei den einzelnen Aufgaben. (Grafik: M. Dangl)

den einzelnen Klassen deutlich.

In Abb. 5 wird für jede Klasse die durchschnittliche Lösungshäufigkeit jeder Aufgabe als Punkt aufgetragen (bei übereinander liegenden Punkten ist nur ein Punkt erkennbar), die einzelnen Klassen sind nach der durchschnittlichen Lösungshäufigkeit bei allen 20 Aufgaben fallend gereiht (die Durchschnittswerte in den einzelnen Klassen sind durch eine Linie miteinander verbunden). Man erkennt, dass es kaum größere „weiße Flecken“ gibt, es also in fast jeder Klasse Aufgaben mit sehr hoher Lösungshäufigkeit und solche mit sehr niedriger Lösungshäufigkeit gibt – und aus Abb. 4 weiß man, dass es sich dabei keineswegs um die jeweils selben Aufgaben handeln muss. Letzteres wird auch anhand von Abb. 6 deutlich, wo die Schwankungen der durchschnittlichen Lösungshäufigkeiten über alle Klassen exemplarisch anhand einer Aufgabe (A214 „Quadratische Pyramide“) sichtbar gemacht werden.

Insgesamt wird aus Abb. 4–6 deutlich, dass die Situation in jeder Klasse eine andere ist und Gemeinsamkeiten kaum erkennbar sind. Solche herzustellen, erweist sich damit als ebenso dringliche wie schwierige Aufgabe.

Abbildung 5: Streuung der durchschnittlichen Lösungshäufigkeiten der Aufgaben in den 58 Klassen. (Grafik: M. Dangl)

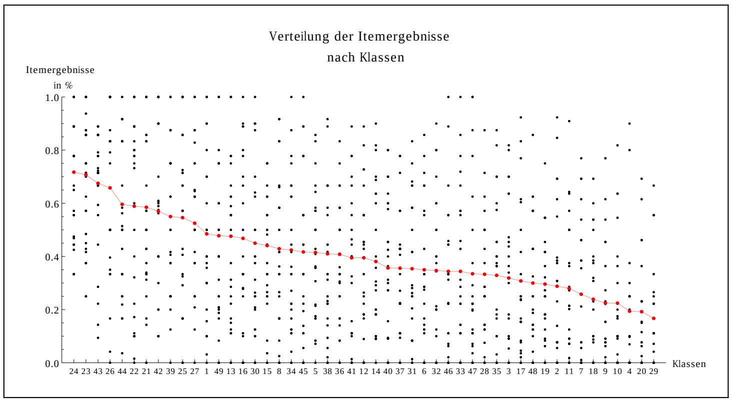
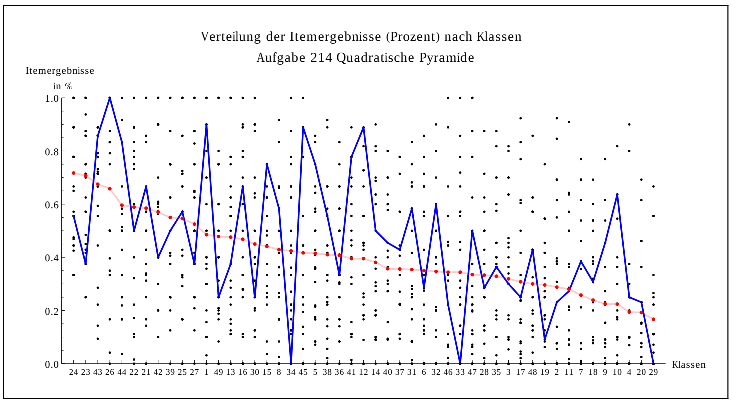


Abbildung 6: „Oszillieren“ der durchschnittlichen Lösungshäufigkeiten bei Aufgabe 214. (Grafik: M. Dangl)



6. Abschließende Bemerkungen

Mit einer so konzipierten sRP-M ist ein mehrfacher Paradigmenwechsel verbunden, der vielen österreichischen Lehrerinnen und Lehrern (manchmal auch deren Schülerinnen und Schülern) Angst zu machen scheint. Der Paradigmenwechsel bezieht sich auf den Wechsel von der Leistungspräsentation der traditionellen Reifeprüfung hin zu einer Leistungsfeststellung, ebenso auf den Übergang von einer in der Intimität des jeweiligen Klassenzimmers verhandelbaren Intransparenz der Anforderungen der traditionellen sRP-M hin zu transparenter, aber unpersönlicher und unbestechlicher „Objektivität“ zentral gestellter Anforderungen. Der Paradigmenwechsel bezieht sich aber auch auf den Wechsel von vermeintlich unbegrenzten Freiräumen hin zu diesen Freiraum einschränkenden Verbindlichkeiten wie auch auf gravierende Veränderungen hinsichtlich der Kompensierbarkeit von grundlegenden Defiziten durch Leistungsnachweise bei anderen Anforderungen.

Ganz besonders aber zielt die hier skizzierte Konzeption einer zentralen sRP-M auf ein verändertes Verständnis von Mathematik und Mathematikunterricht ab (was ebenfalls durchaus rational begründete Ängste erzeugen kann). Es ist ja nicht so, dass im traditionellen Mathematikunterricht keine Kompetenzen erworben werden, dass dabei nicht auch gewisse Formen von mathematischem Verständnis gefordert wären. Verständnis ist aber immer relativ und vieldeutig, die Forderung nach einem bestimmten Verständnis (mathematischer Inhalte, der Mathematik generell oder des Mathematikunterrichts) wird somit immer eine normative Setzung sein (müssen). Letztlich zielt die hier skizzierte Form der sRP-M nur vordergründig auf eine Objektivierung der finalen Leistungsüberprüfung ab; ihr bedeutsameres Ziel ist

– ein verändertes Verständnis grundlegender mathematischer Inhalte und Tätigkeiten (Reduktion operativer Inhalte und Tätigkeiten, Intensivierung kommunikativer und reflektierender Aspekte der Mathematik)
– ein verändertes Verständnis davon, was in der (Schulmathematik grundlegend sein soll (und warum)
– ein verändertes Verständnis der (Schulmathematik generell und ihrer Rolle in unserer Gesellschaft.

Diese Veränderungen sollten von den Schülerinnen und Schülern ebenso vollzogen werden wie von ihren Lehrerinnen und Lehrern – was für beide eine nicht unbeträchtliche Herausforderung darstellt. Wenn die erforderlichen Umstellungen in sinnvoller Weise gelingen sollen, dann braucht die Schulen dafür Zeit. Der vorgesehene Zeitrahmen mit einer bundesweiten Zentralmatura im Jahr 2014 scheint viel zu knapp bemessen. Wenn an diesem Termin festgehalten wird, werden weitreichende Übergangsregelungen erforderlich sein.

Literatur

[1] Fischer, R. (2001): Höhere Allgemeinbildung. In A. Fischer-Buck u. a. (Hrsg.), Situation – Ursprung der Bildung (S. 151–161). Leipzig: Universitätsverlag.

[2] Fischer, R. (2009): Grundbildung und Gesellschaft. *http://imst.uni-klu.ac.at/tagung2009/sym/programm/Fischer.pdf*

[3] Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik, Bd. 13. Weinheim und Basel: Beltz.

[4] IDM/AECC-M (2009): Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik". *http//www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Konzept_sRP_M_9-09.pdf*

[5] Peschek, W. (2011): Sicherung von Grundkompetenzen am Beispiel des österreichischen Zentralabiturs. In: M. Helmerich u. a. (Hrsg.), Mathematik verstehen. Philosophische und Fachdidaktische Perspektiven (S. 211–220). Wiesbaden: Vieweg & Teubner.

[6] Reichel, H.-C. (1998): Anhang: Gedanken zu den (eher schlechten) Ergebnissen der dritten TIMS-Studie (TIMSS) (Die mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildung der 17/18-jährigen Schülerinnen und Schüler. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 98/5, 159–160.

Adresse des Autors: Werner Peschek, Institut f. Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt. Sterneckstr. 15, A-9020 Klagenfurt.
email *werner.peschek@uni-klu.ac.at*.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 216 (2011), 31–52

Mathematik in Wien: Technische Universität Wien

A. Arnold, M. Drmota, U. Schmock, R. Viertl (Hrsg.)
Fakultät für Mathematik der TU Wien

Zur folgenden Übersicht über die Institute und Forschungsgruppen der Fakultät für Mathematik an der Technischen Universität Wien haben viele Personen einzelne Beiträge geliefert. Der Herausgeber der IMN und die vier Institutsleiter agierten gemeinsam als Autoren und Herausgeber dieses Artikels und möchten sich bei allen Kolleginnen und Kollegen herzlich für die Mühe bedanken.

Institut für Analysis und Scientific Computing (E101) 32
Forschungsgruppe „Numerik und Simulation von Differentialgleichungen“ 33
Forschungsgruppe „Structural Analysis and Interpolation“ 34
Forschungsgruppe „Funktionalanalysis“ 34
Forschungsgruppe „Advanced Scientific Computing“ 35
Forschungsgruppe „Computational Neuroscience and Biomedical Engineering“ 36
Forschungsgruppe „Mathematische Modellbildung und Simulation“ 37
Forschungsgruppe „Partielle Differentialgleichungen und dynamische Systeme“ 37
Sonstige Tätigkeiten 38

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie (E104) 39
Forschungsgruppe „Algebra“ 39
Forschungsgruppe „Computational Logic“ 40
Forschungsgruppe „Differentialgeometrie und Geometrische Strukturen“ 41
Forschungsgruppe „Geometrisches Modellieren und Industrielle Geometrie“ 42
Forschungsgruppe „Kombinatorik und Algorithmen“ 43
Forschungsgruppe „Diskrete und Konvexe Geometrie“ 44

Institut für Wirtschaftsmathematik (E105) 45
Forschungsgruppe „Finanz- und Versicherungsmathematik“ 45
Forschungsgruppe „Ökonometrie und Systemtheorie“ 47
Forschungsgruppe „Ökonomie“ 48
Forschungsgruppe „Operations Research and Control Systems“ 49

Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie (E107) 51
Forschungsgruppe „Computational Statistics“ 51
Forschungsgruppe „Mathematische Stochastik“ 52
Forschungsgruppe „Statistische Methoden“ 52

ISSN 0020-7926

Institut für Analysis und Scientific Computing (E101)

Das heutige Institut 101 geht, wenn man seine Geschichte bis in die 1950er-Jahre zurückverfolgt, hauptsächlich auf die beiden früheren Lehrstühle Mathematik I (Prof. Duschek) und Mathematik III (Prof. Inzinger) zurück. Wesentliche Schritte auf dem Weg zum heutigen Institut waren die Gründung des *Mathematischen Labors* im Jahr 1954, die Berufung von Prof. Bukovics 1959 als Nachfolger von Duschek, die Einführung des Diplomstudiums *Technische Mathematik* im Jahr 1964 – wodurch der Beginn einer forschungsorientierten angewandten Mathematik an der TH Wien markiert wurde –, die Berufung von Prof. Stetter an das neue Institut für Numerische Mathematik im Jahr 1965, die Berufung von Prof. Weiss im Jahr 1980 als Nachfolger von Inzinger und somit die Etablierung des Forschungsgebiets der singulären Randwertprobleme; der Wechsel eines der ganz großen österreichischen Mathematiker an die TU Wien durch die Berufung von Prof. Hlawka im Jahr 1981; und schließlich die Berufung von Prof. Langer im Jahr 1991 als sein Nachfolger mit dem Schwerpunkt Operatortheorie und Funktionalanalysis. Die Neugliederung der Institutsstruktur im Jahr 2004 und der vollständige personelle Wechsel bei den Professorenstellen in den Jahren 2005–2010 führten zu einer graduellen Verlagerung der Forschungsaktivitäten zu Partiellen Differentialgleichungen und schließlich zu den derzeit existierenden Forschungsgruppen, die weiter unten genauer dargestellt sind.

Das Institut hat vier Professuren: *Angewandte Analysis* (Arnold, seit 2005), *Mathematische Analysis* (Jüngel, seit 2006), *Computational Mathematics* (Melenk, seit 2005) und *Computational PDEs* (Schöberl, seit 2010). Weiteres von der TU Wien finanziertes Personal sind 13 a.o. Professoren bzw. Dozenten, 7,5 Universitätsassistenten sowie 5,5 allgemeine Universitätsbedienstete. Darüber hinaus sind am Institut noch 23 wissenschaftliche Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter aus Zweit- und Drittmitteln finanziert. Letztere stammen u.a. aus dem FWF geförderten Wissenschaftskolleg „Differentialgleichungen“ (gemeinsam mit der Uni Wien), dem TU-Doktoratsprogramm “Partial differential equations in technical systems: modeling, simulation, and control”, 6 weiteren FWF-Einzelprojekten, und weiteren hier nicht aufgezählten Projekten verschiedenster öffentlicher und privater Auftraggeber.

Das Institut ist Zentrum der Ausbildung in Analysis, Numerischer Mathematik und Angewandter Mathematik für Studierende der Mathematik. Es obliegt ihm auch die Mathematik-Ausbildung für die Studienrichtungen Elektrotechnik, Geodäsie und Technische Physik. Daneben werden zahlreiche weitere Vorlesungen, Seminare und Praktika in den verschiedensten Bereichen angeboten.

Forschungsgruppe „Numerik und Simulation von Differentialgleichungen“

Jens Markus Melenk (Numerik partieller Differentialgleichungen), Ewa Weinmüller (Singuläre RWP gewöhnlicher Differentialgleichungen und Algebro-Differentialgleichungen), Anton Arnold (Transparente Randbedingungen und hochoszillierende Gleichungen), Winfried Auzinger (Steife Differentialgleichungen und a posteriori Fehlerschätzungen), Othmar Koch (Nichtlineare Evolutionsgleichungen), Dirk Praetorius (Numerik partieller Differentialgleichungen).

Zahlreiche Phänomene in den Naturwissenschaften und der Technik werden durch Differential- und Integralgleichungen beschrieben. Die effiziente numerische Lösung solcher Gleichungen ist die Kernkompetenz der Forschungsgruppe „Numerik und Simulation von Differentialgleichungen“. Die behandelten Themenstellungen reichen von der Modellbildung (typischerweise in Zusammenarbeit mit Anwendern) über die Entwicklung und Analyse effizienter Algorithmen bis hin zur ihrer konkreten Realisierung in Programmpaketen. Ein allen Gruppenmitgliedern gemeinsames Forschungsthema sind die mit adaptiven Verfahren verbundenen Fragestellungen wie z.B. Fehlerschätzer, Steuerung der Diskretisierungsparameter, Konvergenz und Optimalität von adaptiven Verfahren.

Die numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen ist mit finiten Elemente Methoden (FEM) und Randelementmethoden (BEM) vertreten. Methodisch im Vordergrund stehen dabei Verfahren höherer und hoher Ordnung, effiziente Techniken zur Behandlung von Diskretisierungen von Integraloperatoren („Matrixkompressionstechniken“) sowie die Techniken zur Kopplung verschiedener Diskretisierungen (insbesondere FEM-BEM-Kopplung, transparente Randbedingungen). Thematisch werden derzeit Verfahren für Gleichungen untersucht, die in der Festkörpermechanik, in der Modellierung ferromagnetischer Materialien und bei Wellenausbreitungsproblemen (akustische und elektromagnetische Streuprobleme, Photonik, Quantenmechanik) auftreten.

Ein wichtiger Themenschwerpunkt sind Randwertprobleme singulärer Differentialgleichungen (ODEs) und Algebro-Differentialgleichungen (DAEs). Mit singulären ODEs lassen sich zahlreiche Anwendungsprobleme beschreiben, z.B. Beulprobleme dünnwandiger Schalen, der Fluß von Substanzen in porösen bzw. extrem dichten Medien wie Beton, Restriktionen für die Fremdbeteiligung bei Inlandsinvestitionen, Lawinenabgänge. Anwendungen von DAEs finden sich z.B. bei der Beschreibung elektronischer Schaltkreise und chemischer Reaktionen. In der Forschung steht die Entwicklung von Algorithmen hoher Ordnung im Vordergrund, die mittels a posteriori Fehlerschätzern und Gitteranpassungsstrategien effizient und zuverlässig sind. Ein besonderes Augenmerk gilt der Robustheit der Algorithmen bzgl. der Singularitäten. Die langjährige Expertise auf diesem Gebiet kann auch in der Form frei verfügbarer Software (die *Matlab*-Bibliotheken *sbvp* und *bvpsuite*) abgerufen werden.

Weitere Themen sind die Analyse und der Einsatz strukturerhaltender numerischer Verfahren für zeitabhängige Probleme. Schwerpunktmäßig betrachet wird die Mehrteilchen-Schrödinger-Gleichung (in Varianten, die durch Modellreduktion via MCTDHF oder TDDFT entstehen). Ein weiterer Forschungsgegenstand sind dissipative Raumdiskretisierungen und monotonieerhaltende Zeitdiskretisierungen der Navier-Stokes-Gleichungen.

Forschungsgruppe „Structural Analysis and Interpolation"

Rainer Mlitz (Assoziative Ringe und Algebren, Radikaltheorie), Martin Blümlinger (Harmonische Analysis, Funktionalanalysis), Wolfgang Herfort (Proendliche Graphen, Proendliche HNN-Konstruktionen).

Dieser Titel umfasst Forschung in den Bereichen allgemeine Radikaltheorie, Dichtesätze und Multioperatorgruppen, Harmonische Analyse sowie proendliche Gruppentheorie. Diese Forschungsgruppe, im Zuge von Forschungsevaluationen, universitären Strukturplänen, etc. aufgrund der Personalstruktur eher als „Kanton übrig" entstanden, kann sehr wohl international beachtete Forschung vorweisen.

Rainer Mlitz gilt als Experte im erstgenannten Bereich. Harmonische Analyse wird von Martin Blümlinger vertreten, er ist auch durch Arbeiten auf dem Gebiet der Gleichverteilung modulo 1 ausgewiesen. In langjähriger Zusammenarbeit haben W. Herfort und P.A. Zalesskii (UNB-Brasilia) die Struktur virtuell freier pro-p-Gruppen geklärt. U.a. ergab sich ein pro-p-Analogon des Satzes von J. Stallings. W. Herfort und P.A. Zalesskii haben im Dezember 2008 am Erwin Schrödinger-Institut eine Fachtagung *Profinite Groups* abgehalten. Auch hat sich in letzter Zeit der Beginn einer Zusammenarbeit mit dem Algebra-Institut in Fragen zur wilden Topologie abgezeichnet. W. Hojka, der jetzt dem Algebra-Institut angehört, hat im Rahmen seiner Dissertation begonnen, sich hierfür zu interessieren und hat jüngst vielversprechende Resultate über die Fundamentalgruppe etwa des harmonischen Archipels gefunden. Im Rahmen eines FWF-Projekts konnte G. Bergauer eine proendliche Version des Satzes von van-Kampen für Gruppoide beweisen, und sein Vortrag im Rahmen der oben genannten Tagung hat Beachtung gefunden.

Forschungsgruppe „Funktionalanalysis"

Michael Kaltenbäck (Operatortheorie, Funktionenräume ganzer Funktionen), Martin Blümlinger (Harmonische Analysis, Funktionalanalysis), Harald Woracek (Funktionalanalysis, Komplexe Analysis, Randwertprobleme mit singulären Potentialen, Operatortheorie).

Viele der Gebiete der Analysis, die in den letzten Jahren und Jahrzehnten einen Boom erlebt haben, fußen auf den Erkenntnissen der klassischen Analysis, deren Entwicklung sich von der Antike bis heute erstreckt. Diese klassische Analysis brachte ab dem 19. Jahrhundert eine Reihe von *spin offs* hervor. Unter anderem entwickelten sich die komplexe Analysis, die Funktionalanalysis – mit den Zweigen Operatortheorie, Spektraltheorie u.v.m. – und die harmonische Analysis zu eigenen, tief liegenden mathematischen Disziplinen. Viele Resultate in diesen Disziplinen sind von ausgesprochener Eleganz, struktureller Tiefe und mathematischer Schönheit. Abgesehen davon bieten diese Theorien Methoden und Lösungsansätze in vielen anderen Gebieten der Mathematik wie z.B. in der Theorie der Differentialgleichungen und der Numerik, aber auch in der Physik, Chemie und diversen technischen Wissenschaften. Die Forschungsgruppe beschäftigt sich unter anderem speziell mit den sogenannten Hilberträumen ganzer Funktionen und ihrer Verallgemeinerungen.

Das ist eine fruchtbare Melange aus Operatortheorie und komplexer Analysis, welche u.a. eine elegante Herangehensweise zu diversen Differentialgleichungen mit singulären Potentialen bietet.

Forschungsgruppe „Advanced Scientific Computing“

Joachim Schöberl (FEM, elektromagnetische Feldsimulationen), Christoph Überhuber (Modellbildung, Entwicklung spezieller numerischer Verfahren und Simulation).

Die Arbeitsgruppe forscht an numerischen Methoden, mit denen aktuelle ingenieurwissenschaftliche Aufgabenstellungen bewältigt werden können. Die Anwendungsgebiete umfassen unter anderem Elektrotechnik und Strömungsmechanik. Die grundlegenden Gleichungen sind hier einerseits die Maxwellgleichungen, die die Interaktion von elektrischen und magnetischen Feldern beschreiben, und die Navier-Stokes-Gleichungen, die das Verhalten inkompressibler Strömungen modellieren. Gemeinsam mit Industriepartnern wird die detaillierte Feldverteilung in einem Transformator berechnet, um damit Verluste zu minimieren. In einem anderen Projekt werden elektromagnetische Sensoren simuliert, die für die Erkundung von Erdölreservoiren eingesetzt werden.

Im Zentrum der Forschung steht die Finite Elemente-Methode (FEM) mit vielen ihrer non-standard-Varianten. Schwerpunkte sind sogenannte kompatible Diskretisierungen, bei denen qualitative Eigenschaften des mathematischen Modells in

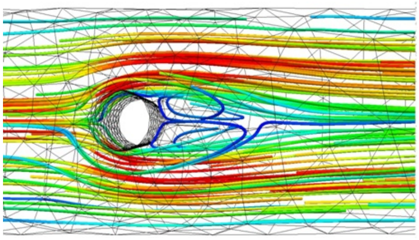


Abbildung 1: Umströmung eines Zylinders: Visualisierung einer FEM-Simulation.

das numerische Modell übertragen werden. Z.B. wird eine quellenfreie Strömung auch durch eine exakt quellenfreie numerische Lösung approximiert. Vieles beruht dabei auf dem de Rham-Komplex, einer exakten Sequenz von Funktionenräumen, und deren Abbildung auf eine exakte Sequenz von endlichdimensionalen Approximationsräumen. Aus der Erhaltung qualitativer Eigenschaften kann oft auch auf die Stabilität des numerischen Modells geschlossen werden. Die Veröffentlichungen der Forschergruppe liegen vorwiegend im Bereich der numerischen Methoden und umfassen unter anderem schnelle Lösungsverfahren, a priori- und a posteriori-Fehlerschätzer und Variationsungleichungen.

In der Forschungsgruppe wird das Softwarepaket *Netgen/NGSolve* entwickelt, das als open source frei verfügbar ist und international vielfach genutzt wird. Das Programm *Netgen* kann geometrische Modelle aus CAD importieren und dafür automatisch eine Finite Elemente-Vernetzung generieren. Im Programm *NGSolve* werden die erforschten numerischen Algorithmen effizient implementiert, damit sie auch für komplexe technische Anwendungen eingesetzt werden können.

Forschungsgruppe „Computational Neuroscience and Biomedical Engineering"

Frank Rattay (Computational Neuroscience), Gabriele Schranz-Kirlinger (Numerische Lösung von Differentialgleichungen).

„Technik für Menschen" – diesem Mission-Statement der TU Wien entsprechend, erfordern gut funktionierende Hilfsmittel der Biomedizinischen Technik die gediegene Zusammenarbeit vieler Wissenschaftsbereiche, die in zunehmenden Maße mathematische Verfahren inkludieren. Österreichische Vorzeigebeispiele sind die Entwicklung einer gedankengesteuerten Armprothese, ebenso wie die Erfolge funktioneller Elektrostimulation zur Überbrückung von Hörlosigkeit, Blindheit und bei motorischen Störungen. Effektive Methoden künstlich erzeugter Nervensignale beruhen auf der mathematischen Beschreibung der Wirkung elektrischer Felder auf erregbare Zellmembranen und werden durch Systeme gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen beschrieben. Besonderheiten in anatomischen und physiologischen Details begründen Widersprüche zwischen im Human-

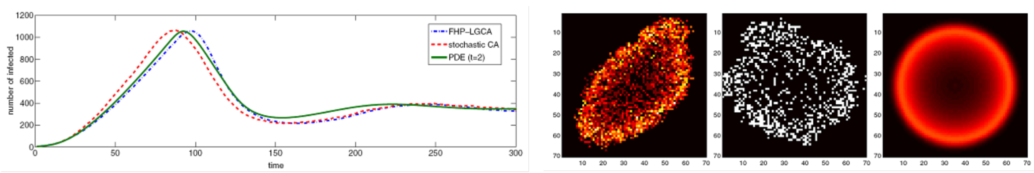


Abbildung 2: Ausbreitung einer Epidemie – Vergleich von Modellbildungsmethoden: Lattice Gas Cellular Automata LCGA, Stochastische Zelluläre Automaten SCA, Partielle Differentialgleichungen PDE (aus einem Grippeinfektionsmodell für Österreich).

bereich gemachten Beobachtungen und Prognosen aus Tierexperimenten, sodass das boomende Fach „Computational Neuroscience“ auch hier zu einem wichtigen neuen Werkzeug wurde.

Laufende FWF-Projekte befassen sich mit dem Human Cochlear Model und Neuromodulativer Mobilitätsverbesserung in Paraplegikern.

Forschungsgruppe „Mathematische Modellbildung und Simulation“

Felix Breitenecker (Systemsimulation, Physical modelling, E-learning).

Schwerpunkte dieser Forschungsgruppe sind Physical Modelling/Systemsimulation, Computational Physiology, Computational Health Care Systems Analysis, Fortgeschrittene und Alternative Mathematische Modellierungsmethoden und Diskrete Modellbildung und Simulation. Der Bereich Physical Modelling beschäftigt sich mit akausaler Modellbildung. Das Gebiet Computational Physiology konzentriert sich im Anwendungsbereich auf Modelle für das Herzkreislaufsystem, für Stofftransfer und für Zellwachstum, im Methodenbereich auf diskrete Modelle wie Zelluläre Automaten und Lattice Boltzmann in Verbindung mit Optimierung; speziell werden „Inverse Modelle“ entwickelt, die auf die Entwicklung nicht-invasiver Messmethoden hinzielen. Computational Health Care Systems Analysis führt Modellbildung und Simulation in den relativ neuen Bereich “Health Technology Assessment” (vgl. Abb. 2) ein. Der Schwerpunkt Diskrete Modellbildung und Simulation verbindet “Discrete Event Modelling and Simulation” mit räumlichen Modellbildungsansätzen. Mit dieser Technik wird derzeit ein dynamisches Modell für die Raumbelegung an der TU Wien entwickelt, unter Berücksichtigung verschiedener Buchungsstrategien und Optimierung.

Forschungsgruppe „Partielle Differentialgleichungen und dynamische Systeme“

Anton Arnold (Partielle Differentialgleichungen), Ansgar Jüngel (Partielle Differentialgleichungen), Peter Szmolyan (Dynamische Systeme).

Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen sind das wichtigste mathematische Werkzeug bei der Modellierung und Analyse von Phänomenen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften. Zu den Aufgaben in dieser Forschungsgruppe gehören die vollständige Formulierung sachgemäß gestellter Probleme und die systematische Modellreduktion. Dies beinhaltet theoretische Untersuchungen der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, deren stetige Abhängigkeit von den Problemdaten sowie das strukturelle Lösungsverhalten (z.B. im Limes für kleine Modellparameter oder als Langzeit-Konvergenz gegen stationäre Lösungen). Diese Analysen basieren unter anderem auf Methoden für (nicht)lineare partielle Differentialgleichungen, Kompaktheitstechniken sowie asymptotischen Methoden. Für die Untersuchung des Langzeitverhaltens von Lösungen besteht in dieser Arbeitsgruppe besondere Expertise im Bereich der *Entropiemethode*, bei der geeignete Lyapunov-Funktionale für oft nichtlineare Systeme konstruiert und analysiert werden.

Beispiele für untersuchte Gleichungstypen sind Schrödinger-Modelle, Drift-Diffusionssysteme mit Kreuzdiffusion und nichtlineare parabolische Gleichungen höherer Ordnung. Ein weiterer Forschungsschwerpunkt sind kinetische Gleichungen – ein sehr aktuelles Gebiet, das mit den Namen P. L. Lions und C. Villani (Fields-Medaillien 1994, 2010) verbunden ist. Konkrete Anwendungen stammen dabei aus dem Bereich der Halbleitermodellierung und -simulation, Quantentransportproblemen, Evolutionsproblemen in Biologie und Chemie (z.B. für Chemotaxis, Tumorwachstum und Polymerströmungen). Zu diesen Themenbereichen bestehen zahlreiche Kooperationen mit Anwendern aus der Halbleiterindustrie, mit Elektrotechnikern, theoretischen Physikern sowie Mechatronikern.

Ein Schwerpunkt im Bereich der dynamischen Systeme ist die Asymptotik und Dynamik von Mehrskalenproblemen, die in vielen Bereichen der Ingenieurs- und Biowissenschaften von Bedeutung sind. Ein weiteres Projekt in diesem Bereich ist die Dynamik nichtlinearer Wellen, die als wichtige Klasse von Lösungen der PDGl der Kontinuumsmechanik auftreten.

Sonstige Tätigkeiten

Geschichte der Mathematik: Dieses Gebiet wird von Christa Binder betreut, z.B. durch die Organisation von internationalen Symposien (im Jahr 2010 gab es das X. Österreichische Symposion zur Geschichte der Mathematik).

Organisation von Workshops und Tagungen: Durch Mitglieder des Instituts werden pro Jahr im Schnitt sechs wissenschaftliche Tagungen organisiert. Von der Größe und Teilnehmerzahl stechen dabei die *Equadiff 2007* (an der TU Wien) und die im dreijährigem Rhythmus stattfindende Konferenzreihe *Mathmod* heraus.

Öffentlichkeitsarbeit: Die größte Publizität erfährt die Mathematik über den *math.space*, welcher im *MuseumsQuartier* der Stadt Wien beheimatet ist und vom Institutsmitglied Rudolf Taschner mit sehr großem Erfolg geleitet wird. Die Aufgabe von *math.space* ist, der breiten Öffentlichkeit die Mathematik als Kulturgut zu vermitteln, das einerseits eine jahrtausendealte Geschichte hat und andererseits in einer Vielzahl moderner, technischer Anwendungen essentiell ist. Der *math.space* bietet jedes Jahr Hunderte Veranstaltungen und Kurse für junge Leute, vom Kindergartenalter bis zur Matura, an. Die Abendvorträge beleuchten oft Grenzbereiche von der Mathematik zu benachbarten Wissenschaften wie z.B. der Philosophie. Diese Veranstaltungen haben eine große Fangemeinde und sind über Wien hinaus attraktiv.

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie (E104)

Das Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie wurde im Rahmen der Neustrukturierung der TU Wien im Jahr 2004 durch Zusammenlegung der früheren Institute für Geometrie, des Instituts für Algebra und Computermathematik und der Abteilung für Analysis gegründet. Ziel des Instituts ist es, Diskrete Mathematik und Geometrie von grundlegenden bis zu anwendungsorientierten Fragestellungen zu vertreten, wobei insbesondere Verbindungen zur Informatik im Vordergrund stehen. Am Institut wirken derzeit fünf Professoren (Dietmar Dorninger, Michael Drmota, Monika Ludwig, Helmut Pottmann, Hellmuth Stachel), 18 Dozenten und Privat-Dozenten, 24 Assistentinnen und Assistenten (davon 14 durch Forschungsprojekte finanziert). Neben den Forschungsaktivitäten ist das Institut stark in der Lehre engagiert (Studien der Technischen Mathematik, Lehramt Mathematik und Geometrie, Servicelehrveranstaltungen für Architektur, Bauingenierwesen, Chemie, Informatik, Maschinenbau, Wirtschaftsinformatik). Der jetzige Dekan der Fakultät für Mathematik und Geoinformaton (Dietmar Dorninger) und der Studiendekan (Günther Karigl) sind ebenfalls Mitglieder des Instituts.

Forschungsgruppe „Algebra“

Geleitet von Martin Goldstern, gehören ihr Martin Goldstern, Reinhard Winkler, Gerhard Dorfer, Günther Eigenthaler, Helmut Länger und Johann Wiesenbauer an. Durch Forschungsprojekte finanziert ist die Arbeit von Gernot Greschonig, Katherine Thompson, Wolfram Hojka und Wolfgang Wohofsky.

Zentrale Themen der Arbeitsgruppe sind diskrete Strukturen und Zusammenhänge zwischen diskreten und kontinuierlichen Strukturen.

Wir beschäftigen uns mit Anwendungen der Logik (speziell Mengenlehre und Modelltheorie) in Algebra, Topologie und Maßtheorie; typische Fragen sind etwa die nach der Anzahl oder Größe oder Komplexität von Strukturen mit vorgegebenen Eigenschaften: Wie groß muss eine nicht-messbare Menge sein, wie kompliziert ist die Klasse aller abzählbaren Ordnungen, etc. Methoden sind vor allem Forcing, Forcing-Axiome (Martins Axiom) und andere kombinatorische Prinzipien (wie „Karo“), gelegentlich deskriptive Mengenlehre sowie auch modelltheoretische Konzepte wie Saturiertheit oder (modelltheoretische) Stabilität. Es gibt informelle Forschungskooperationen mit Jakob Kellner und Sy Friedman (Universität Wien), Saharon Shelah (Jerusalem), Michael Pinsker (Paris), Menachem Kojman (Beer Sheva), Tomek Bartoszynski (Washington D.C.), Stefan Geschke und Philipp Schlicht (Bonn), Mirna Dzamonja (East Anglia), James Cummings (CMU Pittsburgh).

Ein weiteres Thema sind topologische und maßtheoretische Aspekte der Zahlentheorie, Fraktale und topologische Dynamik. Eine typische Frage ist die nach der Struktur der Homotopiegruppe eines Fraktals, etwa des Sierpinski-Dreiecks; in den letzten Jahren hat sich in diesen Fragen auch eine Zusammenarbeit mit dem Institut 101 ergeben, im Rahmen derer Gruppen und topologische Gruppen untersucht werden, die „wilden“ topologischen Räumen zugeordnet sind. Die Methoden kommen aus der Algebra (Gruppentheorie), Topologie (Kompaktifizierungen) und Kombinatorik (combinatorics on words). Es gibt Kooperationen mit Jörg Thuswaldner (Leoben), Greg Conner (Utah) sowie mit Forschern in Montpellier und Rennes.

Schließlich beschäftigen wir uns auch noch mit universeller Algebra, speziell mit Verbänden mit einer zusätzlichen „Komplement“-Operation und/oder Analoga der Implikation, also Verallgemeinerungen von Booleschen Algebren; diese algebraischen Strukturen spielen in der axiomatischen Quantenmechanik sowie in der mathematischen Logik (als nichtklassische Logiken wie z.B. Gödel-Logik, Lukasiewicz-Logik) eine Rolle. Hier gibt es eine ÖAD-Kooperation mit Forschern in Olomouc.

Forschungsgruppe „Computational Logic“

Die Forschungsgruppe „Computational Logic“, die von M. Baaz geleitet wird, befasst sich mit algorithmischen Aspekten der Logik und ihren Anwendungen. Schwerpunkte sind u.a. Beweistheorie, Automatentheorie, nichtklassische Logiken, Automatisches Beweisen sowie juridische Logik.

Die Beweistheorie geht auf David Hilbert zurück und war ursprünglich als Grundlagentheorie der Mathematik angelegt (im Sinne von „Alle Mathematik ist Beweisen“.) Sie entwickelte sich aber durch die bahbrechenden Arbeiten von Kurt Gödel völlig neu und ihre Aufgabe ist es jetzt u.a., mathematischen Beweisen implizite Informationen wie Schranken zu entnehmen oder nichtelementare Beweise auf elementare zurückzuführen.

Die Automatentheorie ist die Disziplin der formalen Sprachen und Automaten, die eine wesentliche Rolle bei der Entwicklung der modernen Informatik gespielt haben und denen es zu verdanken ist, dass zahlreiche Aufgabenstellungen wie der Bau von Compilern automatisiert werden können.

Die nichtklassischen Logiken enstanden durch methodologische Überlegungen zu den Schranken der zweiwertigen Logik. In ihrer modernen Form dienen sie u.a. der besseren Modulation von wissensbasierten Systemen (diese Arbeitsgruppe ist weltweit führend auf dem Gebiet der Gödel-Logiken).

Automatisches Beweisen stellt eine Weiterentwicklung der Beweistheorie dar, in der völlig neue mathematische und logische Techniken verwendet werden, die es erlauben, insbesonders die Beweissuche zu optimieren.

Das juridische Schließen induziert durch das Grundparadigma, in jedem Fall entscheiden zu müssen, eine völlig andersartige Form von Logik. Die Entwicklung der juridischen Logik ist eine der unabdingbaren Voraussetzungen, um das juridische Schließen zu automatisieren. Nach solchen Automatisierungen wird in Europa in naher Zukunft wegen der Vernetzung völlig unterschiedlicher Rechtssysteme ein starker Bedarf entstehen.

Die Arbeitsgruppe führt zahlreiche internationale Tagungen durch und ist auch maßgeblich an der Leitung der Kurt Gödel-Gesellschaft beteiligt und damit an der Organisation der Kurt Gödel Fellowship Prizes, den weltweit höchstdotierten Auszeichnungen auf dem Gebiet der Logik. Im Jahr 2014 wird die Arbeitsgruppe wesentlich zur Organisation der *Federated Logic Conferences* zusammen mit dem *Logic Colloquium* beitragen (es werden ungefähr 2.000 Teilnehmer erwartet.) Die Arbeitsgruppe betreut außerdem das WWTF-Projekt der Gemeinde Wien von Agata Ciabattoni "Fuzzy Logic: from Mathematics to Medical Applications".

Gegenwärtige Mitglieder der Arbeitsgruppe sind: Matthias Baaz (Leiter), Agata Ciabattoni, Moataz El-Zeki, Oliver Fasching, Werner Kuich (emeritiert), Friedrich Urbanek, Anna Zamanski (Zamanski ist Marie-Curie-Fellow, diese Arbeitsgruppe betreut mit Anna Zamanski bereits den sechsten Marie-Curie-Fellow, was einen Spitzenwert in Europa darstellt.)

Forschungsgruppe „Differentialgeometrie und Geometrische Strukturen“

Die Forschungsgruppen *Differentialgeometrie und Geometrische Strukturen* und *Geometrisches Modellieren und Industrielle Geometrie* (s.u.) sind aus den früheren Lehrkanzeln für Darstellende Geometrie und dem Institut für Geometrie hervorgegangen, deren schon 1867 beginnende Geschichte in einschlägigen Publikationen der TH bzw. TU Wien gut dokumentiert ist. Die Lehrtätigkeit hat neben dem Service für Ingenieursfächer und der Technischen Mathematik auch einen Schwerpunkt in der Ausbildung der Studierenden des Lehramts.

Die von Hellmuth Stachel geleitete Forschungsgruppe *Differentialgeometrie und Geometrische Strukturen* hat vielfältige Interessen, die ausführlich auf der Webseite *http://dmg.tuwien.ac.at/fg3* beschrieben sind. Die derzeit aktivsten Forschungsthemen sollen im Folgenden stichwortartig beschrieben werden:

Bewegliche Strukturen sowie *Geometrie der Mechanismen* (H. Stachel, G. Nawratil). Dieser Forschungsschwerpunkt befasst sich mit dem seit langer Zeit interessierenden Thema der Starrheit und Beweglichkeit verschiedener Strukturen, z.B. mit hinreichenden Bedingungen für infinitesimale oder endliche Flexibilität oder mit Bewegungsinvarianten. Dazu gehören auch anwendungsorientierte Fragestellungen wie geometrisch motivierte „Performance Indices“ für Stewart-Gough-Plattformen und 6R-Roboter oder deren Charakterisierung und Klassifizierung hinsichtlich singulärer Lagen oder möglicher Selbstbewegungen und das damit verknüpfte Borel-Bricard-Problem. Dieser Forschungsschwerpunkt wird unterstützt durch das vom FWF und RFBR geförderte österreichisch-russischen Projekt *Flexible polyhedra and frameworks in different spaces*, zu dessen auswärtigen

Mitgliedern I. Sabitov (Moskau) und V. Alexandrov (Novosibirsk) gehören.

Geometrie über Ringen (H. Havlicek, B. Odehnal). Hier ordnen sich Untersuchungen zu verschiedenen Themen unter: *Geometrie der Matrizen* (adjazenztreue Abbildungen, graphentheoretische Kennzeichnungen), *verallgemeinerte Kettengeometrien* (Automorphismen, projektive Darstellungen, blockierende Mengen, divisible Designs), *Anwendungen in der Quantentheorie* (Beschreibung kommutierender Pauli-Operatoren durch endliche Geometrien, insbesondere durch projektive Geraden über Faktorringen von $\mathbb{Z}$ und durch symplektische polare Räume, endliche Analoga zur Quantenverschränkung) sowie die *Geometrie nicht-unimodularer Punkte* (sehr allgemeiner Punktbegriff). Fördergeber waren u.a. der FWF und das Zentrum für interdisziplinäre Forschung der Universität Bielefeld. Letzteres ermöglichte die Durchführung einer dreimonatigen Kooperationsgruppe unter der Leitung von H. Havlicek und M. Saniga (Slowakische Akademie der Wissenschaften).

Affine Differentialgeometrie (F. Manhart). Als Thema aktueller Forschung sei die Charakterisierung von Flächen bestimmter Klassen hinsichtlich differentialgeometrischer Invarianten genannt, und zwar sowohl im affinen wie auch relativgeometrischen oder im minkowskischen Sinn.

Forschungsgruppe „Geometrisches Modellieren und Industrielle Geometrie“

Die Tätigkeit dieser von Prof. Helmut Pottmann geleiteten Forschungsgruppe reicht von anwendungsbezogenen Themen der geometrischen Datenverarbeitung bis zur Differentialgeometrie. Auf der Webseite *http://dmg.tuwien.ac.at/fg4* finden sich die Forschungsschwerpunkte *Matching und Registrierung*, *Algorithmische und Diskrete Differentialgeometrie*, *Geometrische Optimierungsprobleme*, *Algorithmische Linien- und Kugelgeometrie* und *Geometrie für Freiformarchitektur*. Auf das Letztere soll im Folgenden ausführlicher eingegangen werden, weil es einerseits zur internationalen Sichtbarkeit der Forschungsgruppe besonders beiträgt und andererseits ein sehr gutes Beispiel dafür darstellt, wie eine Kombination aus neuer reiner und angewandter Mathematik ein bisher unbekanntes Anwendungsfeld eröffnet.[1]

Geometrie für Freiformarchitektur. Einer der herausragenden Trends in der modernen Architektur ist das Streben nach der Realisierung von freien Formen. Solche Projekte stoßen nicht selten an die Grenzen des mit vertretbarem Zeitaufwand und finanziellem Einsatz Machbaren. Der Mathematik und besonders der Geometrie und Optimierung kommt in diesem Prozess immer öfter die Rolle einer Problemlöserin zu. Zur großen Überraschung der Beteiligten hat sich herausgestellt, dass dieses Gebiet nicht nur ein gänzlich neues Anwendungsfeld der Mathema-

[1] Interessierte Leser seien auf den Übersichtsartikel von H. Pottmann and J. Wallner, *Freiformarchitektur und Mathematik*, Mitteilungen der DMV, 18(2):88–95, 2010 hingewiesen.

tik eröffnet, sondern dass Fragestellungen, die ihren Ursprung in geometrischen Details von Freiformarchitektur haben, auch umgekehrt befruchtend auf die mathematische Forschung wirken. Besonders interessante Themen sind:

— Die Realisierung von Freiformflächen als Stahl-Glas-Konstruktionen mit ‚torsionsfreier' Tragstruktur hat einen direkten Bezug zur diskrete Differentialgeometrie und den Krümmungen von Flächen, genauso wie zu den Geometrien von Möbius, Laguerre und Lie;

— Das Bauen von glatten Freiformflächen und die dazu notwendigen Überlegungen zur Herstellung von gekrümmten Paneelen durch wiederverwertbare Form-Werkzeuge führt auf komplexe, gemischt kontinuierlich-diskrete Optimierungsprobleme;

— Tragstrukturen aus gekrümmten Trägern und das allgemeine Panelisierungsproblem stehen im Zusammenhang mit Mustern aus geodätischen Linien und mit Blaschkes Geometrie der Gewebe;

— Kreis- und Kugelpackungen auf Flächen zeigen eine Analogie zu Uniformisierung und der konformen Geometrie der Flächen, in Anlehnung an die bekannte Approximation von konformen Abbildungen durch ebene Kreispackungen.

Der große Erfolg der Forschungsgruppe in diesem Bereich spiegelt sich darin wieder, dass entsprechende Publikationen, die dem Gebiet der geometrischen Datenverarbeitung (*Geometry Processing*) zuzuordnen sind, alljährlich als SIGGRAPH papers erscheinen konnten. Ein weiterer Indikator für das Interesse an diesem Thema über die Grenzen der Mathematik hinaus ist der Erfolg der im September 2010 veranstalteten 2. Tagung über *Advances in Architectural Geometry* mit 250 Teilnehmern aus den verschiedensten Bereichen und einem kompetitiv referierten Tagungsband, der von der Architektur-Abteilung des Springer-Verlags herausgegeben wurde.

Geförderte Forschungsprojekte in diesem Zusammenhang sind das Nationale Forschungsnetzwerk S92 *Industrial Geometry* des FWF, in dessen Verlauf das Gebiet entwickelt wurde, sowie das FWF-Einzelprojekt *Discrete surfaces with applications in architectural design*, das von der FFG geförderte Projekt *Computing Multilayer Freeform Structures* gemeinsam mit Fa. Waagner-Biro und TU Graz, sowie das EU-Projekt *ARC*, "Architectural freeform structures from single-curved panels", gemeinsam mit der Fa. Evolute (Wien) und der Fa. RFR (Paris).

Forschungsgruppe „Kombinatorik und Algorithmen"

Der Aufschwung der Diskreten Mathematik in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts ist untrennbar mit der Entwicklung des Computers verbunden. Dies spiegelt sich auch an der TU Wien wider, wo Gerd Baron und Wilfried Imrich etwa um 1970 begonnen haben, sich mit Graphentheorie zu beschäftigen. Später haben Helmut Prodinger und Peter Kirschenhofer, teilweise unter Beteiligung von

Robert Tichy, kombinatorische Problemstellungen, die mit der der Analyse von Algorithmen zusammenhängen, aufgegriffen. Viele der jetzigen Mitarbeiter der Forschungsgruppe *Kombinatorik und Algorithmen*, die im Wesentlichen aus der von Gerd Baron geleiteten Abteilung *Diskrete Mathematik* (die erst ein Teil des Instituts für Algebra und Diskrete Mathematik und später des Instituts für Geometrie war) entstanden ist, sind durch die genannten Personen und ihre wissenschaftlichen Ausrichtungen mitgeprägt worden.

Sie wird seit ihrer Gründung im Jahr 2004 von Michael Drmota geleitet und ihre wissenschaftlichen Schwerpunkte sind die kombinatorische, analytische und probabilistische Analyse von Algorithmen und Datenstrukturen sowie zahlentheoretische Fragestellung, die mit Ziffernentwicklungen und verwandeten dynamischen Systemen in Verbindung stehen. Das Nationales Forschungsnetzwerk *Analytic Combinatorics and Probabilistic Number Theory* (2006–2011) des FWF wird von Michael Drmota (in Zusammenarbeit mit Peter Grabner von der TU Graz) koordiniert, und zwei der 11 wissenschaftlichen Teilprojekte (*Analytic and Probabilistic Methods in Combinatorics*: Michael Drmota und Bernhard Gittenberger, *Combinatorial Analysis of Data Structures and Tree-Like Structures*: Alois Panholzer) sind an der Forschungsgruppe angesiedelt.[2] In den letzten Jahren wurden einige Workshops und Tagungen von der Forschungsgruppe (mit-)organisiert, z.B. das *ESI Programme on "Combinatorics and Statistical Physics"* (2008) oder die *AofA'10: 21st International Meeting on Probabilistic, Combinatorial and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms* (TU Wien, 2010).

Forschungsgruppe „Diskrete und Konvexe Geometrie"

Die Mitglieder und ihre Arbeitsgebiete sind Monika Ludwig (Diskrete und konvexe Geometrie, geometrische Analysis), Peter M. Gruber (Diskrete und konvexe Geometrie, Geometrie der Zahlen), Gabriel Maresch (Geometrische Analysis und optimaler Transport), Franz Schuster (Konvexgeometrie und geometrische Analysis), Christian Steineder (Konvexgeometrie und symbolische Dynamik)/

Die Mitglieder der Forschungsgruppe beschäftigen sich mit Fragen der diskreten und konvexen Geometrie sowie mit Anwendungen dieser Gebiete in der geometrischen Analysis. Prof. Peter M. Gruber war lange Jahre Leiter dieser Forschungsgruppe. In seiner Monographie "Convex and Discrete Geometry" (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 2007) sind wichtige Entwicklungen in diesen Gebieten zusammengefasst.

Seit 2010 ist Prof. Monika Ludwig Leiterin der Forschungsgruppe. Ein Forschungsschwerpunkt, der von ihr, Christoph Haberl (Univ. Salzburg) und Franz Schuster sowie deren Dissertanten vertreten wird, ist die Untersuchung von addi-

[2] Für eine Einführung in diese Themen siehe Alois Panholzer: *Algorithms, random tree models and combinatorial objects*, Internat. Math. Nachrichten Nr. 214 (2010), 1–16.

tiven Funktionen – sogenannten Bewertungen – auf konvexen Körpern und deren Anwendungen in geometrischen und analytischen Ungleichungen. Weitere wichtige Anwendungsbereiche, zu denen die Forschungsgruppe beiträgt, sind die lokale Theorie der Banachräume, die Integralgeometrie und die stochastische Geometrie. In diesen Bereichen bestehen enge Kooperationen mit dem Polytechnic Institute of New York University, der Tel Aviv University und den Universitäten in Osnabrück und Frankfurt.

Institut für Wirtschaftsmathematik (E105)

Forschungsgruppe „Finanz- und Versicherungsmathematik“

Die Vorläufer der Forschungsgruppe für Finanz- und Versicherungsmathematik sind der Lehrstuhl für Versicherungsmathematik bzw. die Abteilung für Versicherungsmathematik des Instituts für Analysis, Technische Mathematik und Versicherungsmathematik. Diese wurden von Karl-Heinz Wolff geprägt, der unter anderem auch als Lehrbuchautor, als Pionier der mathematischen Behandlung der Sozialversicherung[3] sowie in der Praxis als Generaldirektor des Hauptverbands der österreichischen Sozialversicherungsträger hervorgetreten ist.

Mit der Berufung von Wittengenstein-Preisträger Walter Schachermayer übersiedelte die Abteilung für Versicherungsmathematik im Jahr 1998 an das Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie. Mit Schachermayer wurde die moderne, stochastische Finanzmathematik ein neuer Schwerpunkt und seither wird an der TU Wien gewissermaßen Forschung und Lehre für *Aktuare dritter Art* im Sinne Bühlmanns[4] betrieben, also Aktuare, die neben den deterministischen und klassischen Techniken aus Leben- und Sachversicherung mit Martingalmethoden, stochastischer Analysis und anderen Hilfmitteln aus der Theorie der stochastischen Prozesse vertraut sind.[5]

In den Jahren 2001–2003 gab es ein eigenes Institut für Finanz- und Versicherungsmathematik, das 2004 als Forschungsgruppe Teil des neugeschaffenen Instituts für Wirtschaftsmathematik wurde.

Uwe Schmock wurde 2003 als Professor für Versicherungsmathematik berufen. Er leitet auch seit 2006 das Christian-Doppler-Labor für Portfolio Risk Management (*PRisMa Lab*), in dem gemeinsam mit den Industriepartnern Bank Austria, COR&FJA sowie der Österreichischen Bundesfinanzierungsagentur (ÖBFA) an anwendungsorientierter Grundlagenforschung gearbeitet wird.

---

[3] Hans Bühlmann, *Über die Finanzierung der Rentenversicherung*. In: Festschrift zm 60. Geburtstag von Karl-Heinz Wolff, pp. 7–19. Orac, Wien, 1994.

[4] Hans Bühlmann, *Actuaries of the third kind?* ASTIN Bulletin 17:137–138, 1987.

[5] Siehe Hartmut Milbrodt and Manfred Helbig, *Mathematische Methoden der Personenversicherung*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1999.

Der START-Preis 2006 durch Josef Teichmann brachte aufregende neue mathematische Impulse. Seine Arbeiten zur Theorie der Zinsstrukturmodelle enthalten tiefliegende Querverbindungen zu Geometrie, Differentialgeometrie und unendlichdimensionalen stochastischen Evolutionsgleichungen.

Nachdem 2008 Schachermayer wieder an die Universität Wien wechselte, folgte Teichmann 2009 einem Ruf an die ETH Zürich.

Die Forschungsgruppe organisiert immer wieder (große) Veranstaltungen (*VISS 2011*, *AMaMeF 2007*, *ALM 2004*, *CRM 2001*) und hat Kooperationen und enge Kontakte mit entsprechenden Forschungsgruppen, z.B. jenen an der Universität Wien, der ETH Zürich und der TU Berlin. Ferner pflegen wir eine enge Kooperation mit der Österreichischen Aktuarvereinigung (AVÖ), haben Praktiker aus der Finanz- und Versicherungsbranche als externe Lektoren und stellen eine moderne Aktuarausbildung zur Verfügung. Einige der aktuellen Forschungsthemen sollen nun kurz beschrieben werden:

Abhängigkeitsmodellierung und Risikomanagement (Uwe Schmock): Dieses Gebiet umfasst sowohl die Modellierung stochastischer Abhängigkeiten als auch deren Schätzung, insbesondere schlägt es auch eine Brücke zur angewandten und mathematischen Statistik. Eine zentrale Rolle spielen die zugehörigen Anwendungen in der Finanz- und Versicherungsmathematik. Einige Themen, die auch im Rahmen von Dissertationsprojekten bearbeitet werden, sind das asymptotische Verhalten von Schätzern für Abhängigkeitsmaße (wie z.B. Kendalls Tau), qualitative und quantitative Auswirkungen von Abhängigkeiten bei Kreditrisiken, Modellierung und Schätzung abhängiger Veränderungen der Kreditwürdigkeit, Aggregation abhängiger Kreditrisiken und deren Zusammenführung mit Marktrisiken, gemeinsame Modellierung risikoloser Zinsintensitäten und Kreditrisikozuschlägen sowie theoretische Aspekte adaptierter Abhängigkeiten und deren Anwendungen in der Lebensversicherung, der dynamischen Portfoliooptimierung und der Modellierung des Kundenverhaltens.

Konkrete Finanzmathematik (Friedrich Hubalek): Hier geht es um die Umsetzung der allgemeinen Semimartingaltheorie auf konkrete Modelle, speziell um Lévy-Prozesse und (affine) stochastische Volatilitätsmodelle mit Sprüngen. Wir betrachten unter anderem optimale Absicherungsstrategien, verschiedene Familien äquivalenter Martingalmaße, Entropie-Minimierung sowie Anwendung der Laplace- und Fourier-Transformation zur Bewertung asiatischer Optionen. Immer wieder gibt es aus den Anwendungen motivierte weiterführende Querverbindungen, etwa zur Theorie der spektral-negativen Lévy-Prozesse oder zur Verteilung des Supremums stabiler Prozesse, wo Hilfsmittel aus der Theorie der Gleichverteilung mod 1 hilfreich waren.

Stochastische Kontrolltheorie in der Risikotheorie (Peter Grandits): Zwei wichtige Beispiele für die Anwendung von kontrolltheoretischen Methoden in der Versicherungsmathematik sind die Minimierung von Ruinwahrscheinlichkeiten eines

Versicherungsunternehmens bzw. die Maximierung der ausbezahlten diskontierten erwarteten Dividenden. Im ersten Fall ergeben sich interessante Fragestellungen aus dem Gebiet der Integralgleichungen, während man im zweiten Fall oft zu freien Randwertproblemen geführt wird.

Asymptotische Analysis in der Finanzmathematik (Stefan Gerhold): Praktiker, die fortgeschrittene finanzmathematische Modelle verwenden, benutzen in der Regel Näherungsformeln zur schnellen Kalibrierung an Marktdaten. Darunter fallen z.B. asymptotische Ausdrücke für Optionspreise, die das Verhalten für große oder kleine Basispreise oder Laufzeiten wiedergeben. Resultate dieser Art können etwa mit Sattelpunktapproximationen oder der Theorie der großen Abweichungen gewonnen werden. Aus den Bedürfnissen des *PRisMa Labs* entstand eine Analyse der Konvergenzgeschwindigkeit des Longstaff-Schwartz-Algorithmus, welcher in der Finanzindustrie etwa zur Bewertung von Zinsderivaten mit Kündigungsrechten verwendet wird. Ein weiterer Schwerpunkt liegt auf der Portfoliooptimierung unter Transaktionskosten. Hier erhellen asymptotische Methoden die Abweichung des optimalen Nutzens vom klassischen friktionslosen Fall.

Forschungsgruppe „Ökonometrie und Systemtheorie“

Die Forschungsgruppe Ökonometrie und Systemtheorie ist aus dem ehemaligen Institut für Ökonometrie entstanden. In den letzten 30 Jahren wurde die FG wesentlich von Prof. Manfred Deistler geprägt, der sowohl in Ökonometrie, Zeitreihenanalyse als auch der ingeniuerwisenschaftlichen geprägten Systemidentifikation wesentliche Beiträge geliefert hat. Die Forschungsarbeit dieser Gruppe konzentriert sich auf die „datengetriebene Modellierung“, also auf das Problem, aus Daten ein mathematisches Modell zu schätzen, das die Daten bzw. das zugrundeliegende System möglichst gut erklärt. Insbesondere hat sich die Forschungsgruppe mit der Strukturtheorie (z.B. Parametrisierung) linearer dynamischer Systeme, der Identifikation (Schätzung) solcher Systeme mit sogenannten subspace-Algorithmen und der Theorie und Schätzung von dynamischen Faktormodellen beschäftigt. Gerade hochdimensionale Zeitreihen sind eine große Herausforderung, da für die meisten Zeitreihenmodelle die Zahl der Parameter quadratisch mit der Zahl der Variablen steigt. Dynamische Faktormodelle bieten eine interessante Alternative, da eine Reduktion der Komplexität sowohl in der Dynamik (über die Zeit) als auch im Querschnitt (über die Variablen) möglich ist. Zusätzlich zur Forschung zu theoretisch-methodischen Fragestellungen wie z.B. der Analyse der strukturellen Eigenschaften von bestimmten Modellklassen und der statistischen Analyse von Schätzverfahren hat die Gruppe auch eine Reihe von angewandten Projekten z.B. auf dem Gebiet der Energiewirtschaft, der Modellierung von supply chains und der Umweltökonomie durchgeführt.

Weiters hat(te) die Gruppe mit Edwin Deutsch und Bernhard Böhm auch Forscher, die sich mit klassischen ökonometrischen Fragen und Anwendungen im

Bereich der Wohnbaufinanzierung, Arbeitsmarkt, international vernetzten strukturellen Makromodellen, usw. beschäftigt haben.

Forschungsgruppe „Ökonomie"

Diese Forschungsgruppe geht auf das im Jahr 1971 gegründete „Institut für Volkswirtschaftslehre und Wirtschaftspolitik" unter der Leitung von Prof. Helmut Frisch zurück. Ein zentrales Argument für die Berufung von Prof. Frisch war, dass er mit den modernen, in Österreich damals kaum bekannten Methoden der Mathematischen Ökonomie bestens vertraut und daher für eine Lehrtätigkeit im Rahmen des Studienzweigs Wirtschafts- und Planungsmathematik der Technischen Mathematik besonders gut geeignet war. Zentrale Forschungsthemen waren theoretische und empirische Arbeiten zu der Monetarismusdiskussion, Theorien industrieller Preisbildung, die Analyse der Wettbewerbsintensität der österreichischen Wirtschaft sowie wissenschaftliche Arbeiten zum Thema Inflation. In den 1980er-Jahren wandte sich Ernst Fehr der experimentellen Ökonomie zu und führte in diesem Zusammenhang an der TU Wien diverse Experimente durch, die den Ausgangspunkt seiner überaus erfolgreichen internationalen Karriere darstellen. In den letzten Jahren vor seinem Tod im Jahr 2006 hatte Prof. Frisch in seiner Funktion als Präsident des Staatsschuldenausschusses besonderes Interesse an fiskalpolitischen Themen wie z.B. der Konzeption und Implementierung einer Staatsschuldenbremse. Darüber hinaus widmete er sich vor allem der Beschäftigung mit der Geldtheorie und verfasste gemeinsam mit Sylvia Staudinger Arbeiten zum Thema „Optimale geldpolitische Strategien von Zentralbanken".

In den 1990er-Jahren war das „Institut für Volkswirtschaftslehre und Wirtschaftspolitik" in „Institut für Volkswirtschaftslehre und Wirtschaftsinformatik" umbenannt worden. Im Jahr 2004 kam es zur Gründung des Instituts für Wirtschaftsmathematik, wobei das „Institut für Volkswirtschaftslehre und Wirtschaftsinformatik" zur „Forschungsgruppe Ökonomie" wurde, welche von 2004 bis 2008 von Hardy Hanappi geleitet wurde. Im Februar 2008 wurde Alexia Fürnkranz-Prskawetz als Professorin für „Mathematische Ökonomie" berufen und übernahm in der Folge die Leitung der Forschungsgruppe Ökonomie.

Innerhalb der Forschungsgruppe Ökonomie existieren zurzeit drei Forschungsschwerpunkte: Dynamische Makroökonomie, Bevölkerungsökonomie und Evolutionäre Ökonomie.

Der von Franz X. Hof verfolgte Forschungsschwerpunkt „Dynamische Makroökonomie" beschäftigt sich mit der Frage, wie sich das Streben nach Status auf die kurz- und langfristige Entwicklung von zentralen makroökonomischen Variablen (Konsum, Ersparnis, Beschäftigung, Wirtschaftswachstum, etc.) auswirkt. Insbesondere wird untersucht, wie die aus dem Streben nach Status resultierenden Ineffizienzen durch geeignete Besteuerung des Konsums, der Arbeit und des Kapitals eliminiert werden können. In zukünftigen Arbeiten soll der Heterogenität von Individuen und den Auswirkungen des Grads der Risikoaversion besondere Beachtung geschenkt werden.

Im Bereich der „Bevölkerungsökonomie“ (geleitet von Alexia Fürnkranz-Prskawetz) werden vorwiegend dynamische, altersstrukturierte Modelle auf der Mikro- und Makroebene analysiert, welche sich mit den Auswirkungen der Bevölkerungsalterung auf Arbeitsmarkt, Humankapital und Gesundheitsinvestitionen beschäftigten. Weitere Forschungsschwerpunkte bilden langfristige Wachstumsmodelle mit endogener Bevölkerungsstruktur, die Beziehung von Altersstruktur und Produktivität auf Firmenebene sowie altersstrukturierte Transferströme ökonomischer Ressourcen über das Alter.

Das Forschungsgebiet „Evolutionäre Ökonomie“ (geleitet von Hardy Hanappi) verbindet eine dynamische, mikro-, meso- und makroökonomische Aspekte integrierende Beschreibung ökonomischer Prozesse mit neuen formalen Methoden – Evolutionäre Spieltheorie, agentenbasierte Simulation und Theorie sozialer Netzwerke. Klassischer Ökonomie und Schumpeter folgend wird eine Integration politischer und ökonomischer Aspekte in Form „politischer Ökonomie“ angestrebt, wodurch auch die Einbeziehung der Untersuchung von Wirtschaftspolitik zur Konsequenz wird. Die Verleihung des *ad personam* Jean Monnet Lehrstuhl für Politische Ökonomie der Europäischen Integration zeigt, dass die in umfassender Lehrtätigkeit, zahlreichen Publikationen und internationalen Forschungskooperationen zum Ausdruck kommenden Aktivitäten breite Anerkennung finden.

Mittels Drittmittelprojekten (FWF, ÖNB) ist es gelungen, den Personalstand der Forschungsgruppe in den letzten Jahren zu erhöhen. Um auch weiterhin ein fundiertes Lehrangebot in den Wirtschaftswissenschaften anbieten zu können und die Forschungstätigkeiten auf internationalem Niveau auszuweiten, ist ein weiterer Ausbau der Forschungsgruppe geplant. Die Kooperation mit anderen Ökonomie-Instituten in Wien (Uni Wien, WU Wien, IHS, WIFO, etc.) soll fortgeführt und über unterschiedliche geplante Programme wie Doktoratskollegs intensiviert werden.

Forschungsgruppe „Operations Research and Control Systems“

Diese Forschungsgruppe blickt bereits auf eine langjährige Geschichte zurück. Ihr Vorläufer, das Institut für Unternehmensforschung der damaligen Technischen Hochschule Wien, wurde im Jahre 1972 gegründet und bestand anfänglich aus dem neuberufenen Lehrstuhlinhaber, Gustav Feichtinger, einem Universitätsassistenten und einer Sekretärin. In der Lehre wurden die klassischen Felder des Operations Research wie Entscheidungs-, Warteschlangen-, Zuverlässigkeits- und Instandhaltungstheorie sowie Mathematische Optimierung abgedeckt. Themenbereiche wie Manpower Planning, Populationsdynamiken und Dynamische Optimierung unterstrichen bereits in den ersten Jahren den interdiziplinären Ansatz des bald auf vier Stammwissenschafter angewachsenen Forschungsteams.

Die Umsetzung der Forschungs- und Lehrziele erfolgt heute unter der Leitung von Vladimir Veliov gemeinsam mit Josef Haunschmied, Alexander Mehlmann, Gernot Tragler, Emeritus Gustav Feichtinger sowie derzeit sieben vollzeitbeschäftigten wissenschaftlichen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern, welche aus Drittmitteln (sowohl Forschungsförderung als auch Industrieprojekte) finanziert werden (drei Doktorandinnen und vier Postdocs).

Seit den späten Siebzigerjahren zählen die *Optimale Kontrolle gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme* (auch solcher mit hybriden Dynamiken, Delays oder stochastischen Inputs) und ihre Anwendungen auf intertemporale Entscheidungsprobleme in Wirtschaft und Gesellschaft zu den Schlüsselbereichen in der Forschung. In der weiteren Folge kamen Gebiete wie die *Differentialspieltheorie* und die *Nichtlineare Dynamische Systemtheorie* hinzu. Die *Dynamische Optimierung heterogener Systeme* wird seit gut zehn Jahren auf höchstem Niveau betrieben.

Die Hauptanwendungen mathematischer Optimierung der Forschungsgruppe liegen derzeit in den folgenden Bereichen: Endogenes Wachstum in heterogenen Ökonomien; Globale Erwärmung, Emissionsbeschränkungen und Verhalten ökonomischer Agenten; Ansteckende und evolutionäre Phänomene in heterogenen Populationen; Optimale Prävention, Therapie und polizeiliche Maßnahmen in dynamischen Modellen des Drogenkonsums; Gesundheitsökonomie; Dynamische Modelle der öffentlichen Sicherheit; Wirtschaftsgeographie; Kontrolle demographischer Parameter in Populationen konstanter Größe.

Diese und andere Anwendungen führen erfahrungsgemäß zu bisher ungelösten methodischen Problemen. Dies erfordert und fördert die Entwicklung neuer Lösungsverfahren für die Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme, insbesondere gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungssysteme. Der optimalen Kontrolle heterogener Systeme und solcher mit Stufenstruktur in unterschiedlichen Ausprägungsformen kommt hier wachsende Bedeutung zu. Parallel dazu werden für die praktische Umsetzung wie bisher numerische Verfahren entwickelt und implementiert. So soll beispielsweise die im Rahmen der Erstellung eines Lehrbuchs zum Leben erweckte Toolbox *OCMat* (*http://orcos.tuwien.ac.at/research/ocmat_software/*) sukzessive ausgebaut werden. Weiters sollen im Operations Management (teilweise in Zusammenarbeit mit der Industrie) die bisherigen Anstrengungen weiter intensiviert werden. Der historische Personalhöchststand im Bereich Operations Research an der TU Wien soll durch das Einwerben von Drittmitteln weiter ausgebaut werden, um die bisherigen methodischen Schwerpunkte in der mathematischen Optimierung mit ihren mannigfaltigen wirtschaftlichen und technischen Anwendungen weiterhin erfolgreich im internationalen wissenschaftlichen Spitzenfeld zu platzieren. Die vielfältigen Interessen der Forschungsgruppe sind ausführlich auf der Webseite *http://orcos.tuwien.ac.at* beschrieben und dokumentiert.

Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie (E107)

Das Institut wurde im Jahr 1967 als „Institut für Statistik“ mit einer Professorenstelle gegründet. Diese hatte damals Walther Eberl inne. Später wurde das Institut zum „Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie“ erweitert. Kurze Zeit war auch die Versicherungsmathematik eingegliedert und der Name des Instituts lautete „Institut für Statistik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Versicherungsmathematik“. Seit der Neustrukturierung der TU Wien im Jahre 2002 trägt das Institut wieder die Bezeichnung „Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie“.

Das Institut ist zuständig für die Forschung und Lehre sowie für die Beratung auf den Gebieten der *Theoretischen und Angewandten Statistik*, der *Wahrscheinlichkeitstheorie* und der *Stochastischen Prozesse mit deren Anwendungen*.

Die wesentlichen Arbeitsschwerpunkte in der Forschung sind Anwendungen der Statistik in den Technischen Wissenschaften, Statistik mit EDV-Unterstützung, statistische Analyse unscharfer Information, Geostatistik, Regional- und Informationsstatistik, Mathematische Statistik, Multivariate Statistik, Robuste Statistik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse sowie Zuverlässigkeitsanalyse.

Die Lehre umfasst Statistik- und Wahrscheinlichkeitstheorie-Lehrveranstaltungen für die meisten Studienrichtungen der Technischen Universität Wien insbesondere die Betreuung der Bachelor-Studien *Statistik und Wirtschaftsmathematik* und *Software & Information Engineering* sowie des Masterstudiums *Statistik*. Außerdem ist der noch bestehende *Studienzweig Statistik* des auslaufenden Diplomstudiums *Technische Mathematik* zu betreuen.

Am Institut existieren drei *Forschungsgruppen*, nämlich *Computational Statistics*, *Mathematische Stochastik* und *Statistische Methoden*.

Forschungsgruppe „Computational Statistics“

Thema der Forschungsgruppe *Computational Statistics* ist jener moderne Zweig der Statistik, der Auswertemethoden mit Computerunterstützung entwickelt. Statistische Methoden werden für die Anwendung heute meist erst mit der Implementierung am Computer interessant. Die Entwicklung geeigneter Algorithmen ist längst eine eigenständige Forschungsrichtung der Statistik geworden. Arbeitsgebiete dieses Schwerpunkts sind Analyse großer Datensätze, Analyse von unscharfen Daten, Communication Networks, Data Mining, Geostatistik, Mixed Models, sowie nichtlineare und robuste Methoden. Die Weiterentwicklung des weltweit verwendeten Analysesystems *R*. *Computational Statistics* ist als Teil des Forschungsschwerpunkts Computational Science der TU Wien zu sehen.

Forschungsgruppe „Mathematische Stochastik“

Das Aufgabengebiet der Forschungsgruppe *Mathematische Stochastik* ist die Wahrscheinlichkeitstheorie, die Mathematische Statistik und die Analyse Stochastischer Prozesse. Im Einzelnen werden folgende Forschungsgebiete bearbeitet: Bayessche Statistik, Didaktik der Stochastik, Nichtparametrische Methoden, Statistische Mechanik, Statistische Versuchsplanung, Theorie allgemeiner Zufallsgrößen, unscharfe Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Warteschlangen, Zufällige Fraktale.

Forschungsgruppe „Statistische Methoden“

Die dritte Forschungsgruppe *Statistische Methoden* beschäftigt sich mit Stochastischen Modellen zur Beschreibung nichtdeterministischer Vorgänge sowie deren Anwendung. Dies sind beispielsweise Probleme der Zuverlässigkeitstheorie und zeitraffender Lebensdaueranalysen, Fragen der Datenqualität und der Analyse unscharfer Information (Fuzzy Information), Entwicklung von Entscheidungsmodellen, basierend auf unscharfer Information, Entwicklung und Anwendung multivariater Methoden, Entwicklung und Anwendung robuster statistischer Methoden, Statistik stochastischer Prozesse.

Am Institut wurden und werden laufend Forschungsprojekte, die von verschiedenen Institutionen gefördert werden, durchgeführt. Derzeit sind sechs extern finanzierte Forschungsprojekte in Bearbeitung. Zur statistischen Beratung und zur Durchführung statistischer Analysen als Auftragsarbeiten wurde ein *Statistisches Labor* gegründet. Im Rahmen dessen wurden weitgestreute Beratungen und Drittmittelaufträge durchgeführt. Leiter dieses Labors ist Prof. Rudolf Dutter. Konkrete Publikationen und Forschungsergebnisse sind den regelmäßig publizierten Jahresrückblicken des Instituts zu entnehmen. Vom Institut bzw. einzelnen Institutsangehörigen wurden mehrere Tagungen bzw. kleinere Symposien veranstaltet.

Zurzeit sind am Institut drei Stellen für Universitätsprofessoren besetzt: „Angewandte Statistik unter besonderer Berücksichtigung der Regional- und Informationswissenschaften“, „Technische Statistik“ und „Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik“ (im Entwicklungsplan der TU Wien sind allerdings vorgesehen: „Computational Statistics“, „Mathematische Stochastik“ und „Technische Statistik“). Weiters sind derzeit fünf Universitätsdozentenstellen, eine Assistenzprofessur, eine Stelle eines wissenschaftlichen Beamten und eine halbe Universitätsassistentenstelle besetzt. Außerdem sind stark fluktuierend Forschungsassistenten im Rahmen verschiedener Forschungsprojekte beschäftigt.[6]

[6] Für weitere Details siehe die Jahresrückblicke des Instituts, sowie: R. Viertl (Hrsg.), *30 Jahre Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie 1967–1997*, Schriftenreihe der TU Wien, 2002.

Buchbesprechungen

D. J. Albers, G. L. Alexanderson (eds.): Mathematical People (J. LANG) . 54

D. V. Alekseevsky, H. Baum (eds.): Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry (A. ČAP) 54

M. Audin: Hamiltonian Systems and Their Integrability (H. WORACEK) . 55

C. Bär: Elementary Differential Geometry (F. MANHART) 55

F. Catoni et al: The Mathematics of Minkowski Space-Time (H. WORACEK) 56

E. de Faria, W. de Melo: Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics (F. SCHWEIGER) 56

R. Goodman, N. R. Wallach: Symmetry, Representations, and Invariants (A. ČAP) 57

K. Gürlebeck, K. Habetha, W. Sprößig: Holomorphic Functions in the Plane and *n*-dimensional Space (H. WORACEK) 57

M. A. H. Maccallum, A. V. Mikhailov (eds.): Algebraic Theory of Differential Equations (G. PILZ) 58

N. Memon, J. D. Farley, D. L. Hicks, T. Rosenorn (eds.): Mathematical Methods in Counterterrorism (G. PILZ) 58

O. O'Shea, U. Dudley: The Magic Numbers of the Professor (M. KRONFELLNER) 59

Y. Pesin, V. Climenhaga: Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems (F. SCHWEIGER) 59

E. J. Straube: Lectures on the $\mathcal{L}^2$-Sobolev Theory of the $\bar{\partial}$-Neumann Problem (F. HASLINGER) 60

D. Treschev, O. Zubelevich: Introduction to the Perturbation Theory of Hamiltonian Systems (H. WORACEK) 60

D. J. Albers, G. L. Alexanderson (eds.): Mathematical People. Profiles and Interviews. Second Edition. Introduction by P. J. Davis. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 2008, xxvi+386 S. ISBN 978-1-56881-340-0 H/b $ 59,–.

This is the second edition of a book which first appeared in 1985. It contains a number of interviews with mathematicians of the 20th century. It is meant to be some counterbalance to the fact that mathematics does not exist in today's general awareness. D. J. Albers and G. L. Alexanderson report that in a currently popular world history textbook there are only four to five (out of 1000) pages relating to science. The word 'mathematics' does not even show up in volume 2 (covering the time after the year 1450, mind you). The first edition of this book bravely claimed that it wanted to enhance the awareness of mathematics and its history. In hindsight, this seems a trifle farfetched: At the time being the general appreciation of mathematics has all but approached the zero level line. Anyway, this book provides quite some insight into the realm of modern mathematics. It does show mathematical people with their personal experiences, their skills, their opinions and their foibles. For those who have a stereotype image of scientists at the back of their mind it may well shed a new light on the matter. Did you ever suppose that Donald Knuth always had an inferiority complex? And that he is an accomplished organist and composer? Or, think of H. S. M. Coxeter: Which little piece of geometry would he be most tempted to show to other people? I'm afraid you have to check it out yourself. This is quite a book. I can recommend it to all mathematicians and, beyond that, to whoever is interested in this marvellous piece of human knowledge. J. Lang (Graz)

D. V. Alekseevsky, H. Baum (eds.): Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry. (ESI Lectures in Mathematics and Physics.) EMS, Zürich, 2008, x+539 S. ISBN 978-3-03719-051-7 P/b € 58,–.

Pseudo-Riemannian geometry is often considered as being just a minor variation of Riemannian geometry, but it turns out that it offers many specific aspects and interesting problems. Exploring these issues was the aim of a research program organized by the editors of this volume at the Erwin Schrödinger Institute (ESI) in Vienna in 2005. The book presents an overview on the activities during this program in form of thirteen articles by various authors.

The main topics discussed in these articles are holonomy groups of (both symmetric and non-symmetric) pseudo-Riemannian manifolds, special metrics in split signature, conformal pseudo-Riemannian geometry, geodesics and causality, and relations of pseudo-Riemannian geometry to mathematical physics, in particular to supergravity. A preface by the editors puts the articles into perspective.

Reading this volume, one gets a nice impression of the particularities of pseudo-Riemannian geometry and a nice panorama of several important topics of current research in the field. A. Čap (Wien)

M. Audin: Hamiltonian Systems and Their Integrability. Translated by A. Pierrehumbert. Translation Edited by D. Babbitt. (SMF/AMS Texts and Monographs, Vol. 15.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island – Société Mathématique de France, 2008, xii+149 S. ISBN 978-0-8218-4413-7 P/b $ 55,–.

Die Autorin präsentiert in dem vorliegenden Werk Methoden der algebraischen Geometrie und differentiellen Galois-Theorie zur Untersuchung vollständig integrabler Hamiltonscher Systeme. Nachdem in Kapitel 1 einige Grundlagen zusammengestellt wurden, wird in Kapitel 2 der Satz von Arnold-Liouville gezeigt. Kapitel 3 widmet sich Galois theoretischen Methoden und dem Satz von Morales-Rames, der bei diesem Zugang die zentrale Rolle spielt. In Kapitel 4 wird dann, indem Gleichungen vom Lax-Typ betrachtet werden, auf Methoden der algebraischen Geometrie eingegangen. Schließlich wird das Buch durch zwei Anhänge abgerundet, wo einige Begriffe und Sätze aus der differentiellen Galois-Theorie und aus der algebraischen Geometrie kurz zusammengefasst sind.

Die Darstellung der Materie ist sehr erklärend, manchmal mehr informell als formal, von vielen Beispielen begleitet und durch Aufgaben ergänzt. Das Buch ist aus diversen Vorlesungen an summer schools und Ähnlichem entstanden und ist für den fortgeschrittenen Studenten oder Wissenschafter, der sich mit dem Thema auseinanderzusetzen beginnt, eine interessante Bereicherung.

H. Woracek (Wien)

C. Bär: Elementary Differential Geometry. Cambridge University Press, 2010, xii+317 S. ISBN 978-0-521-89671-9 H/b £ 65,00, ISBN 978-0-521-72149-3 P/b £ 27,99*.

The present textbook is a highly recommendable introduction to elementary differential geometry. The prerequisites are first year courses on calculus and linear algebra only. The book starts with an axiomatic approach to Euclidean geometry thus clarifying the geometric structure behind. The following chapters treat curves and regular surfaces respectively. In chapter four the inner geometry of surfaces is discussed including the exponential map and Jacobi fields. Also included are a section on cartography and remarks on models of hyperbolic geometry. The last two chapters are devoted to the variation of the Gauss curvature and compact surfaces leading to the Gauss Bonnet theorem. Throughout the book the author is successful in combining mathematical precision with geometrical motivation. Many examples, exercises and illustrations make this textbook very appropriate for self-study, too.

F. Manhart (Wien)

F. Catoni et al: The Mathematics of Minkowski Space-Time. With an Introduction to Commutative Hypercomplex Numbers. (Frontiers in Mathematics.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2008, xix+255 S. ISBN 978-3-7643-8613-9 P/b € 42,69.

Minkowski Space-Time ist ein formaler Rahmen, in dem die spezielle Relativitätstheorie formuliert werden kann. In dem vorliegenden Buch wird, basierend auf der wissenschaftlichen Arbeit der Autoren, ein geometrischer Zugang mittels hyperkomplexer Zahlen präsentiert. Es werden einige physikalische Beispiele, allen voran das bekannte Zwillingsparadoxon, diskutiert.

Zunächst werden algebraische und geometrische Eigenschaften hyperkomplexer Zahlen dargestellt und trigonometrische Funktionen untersucht. Danach werden einige Tatsachen über holomorphe Funktionen in diesen Bereichen zusammengestellt, und Flächen mit konstanter Krümmung betrachtet. In einem Anhang werden noch weitere spezielle (kommutative) hyperkomplexe Zahlensysteme eingeführt und Funktionen zwischen solchen untersucht.

Die Präsentation lässt oft konzeptuelle Klarheit und mathematische Strenge vermissen. Trotzdem zeigt das vorliegende Werk auf, dass hyperkomplexe Zahlen interessante Perspektiven auf diverse Phänomene eröffnen können.

H. Woracek (Wien)

E. de Faria, W. de Melo: Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics. (Cambridge studies in advanced mathematics 115.) Cambridge University Press, 2008, viii+191 S. ISBN 978-0-521-88861-5 H/b £ 35,–.

Die Theorie der Iteration komplexer Funktionen hat in den letzten Jahrzehnten bedeutende Fortschritte gemacht und auch verblüffende Ergebnisse gebracht, wie etwa die Existenz quadratischer Polynome, deren Juliamenge positives Lebesguemaß hat (Buff und Cheritat 2005). Dieses Buch stellt wichtige Hilfsmittel der komplexen Dynamik und deren Anwendungen dar, von denen die Theorie der quasikonformen Homöomorphismen und der Satz, dass rationale Abbildungen keine wandernden Gebiete besitzen (Sullivan 1985), genannt seien. Es muss aber gesagt werden, dass man schon gute Kenntnisse aus der Funktionentheorie benötigt, um die Schönheiten dieses Buchs zu verstehen.

F. Schweiger (Salzburg)

R. Goodman, N. R. Wallach: Symmetry, Representations, and Invariants. (Graduate Texts in Mathematics 255.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, xx+716 S. ISBN 978-0-387-79851-6 H/b EUR 59,95.

This is a monograph on Lie groups and linear algebraic groups, which contains a huge amount of information on the theory of such groups, their representation theory and invariant theory. The book presents in a very nice way the standard material that can be found in several other sources, but also goes far beyond the standard topics in several directions. This applies for example to the treatment of Howe duality, the detailed discussion of branching laws, and the study of representations on spaces of regular functions. The authors use a large variety of methods ranging from pure algebra and algebraic geometry via geometric invariant theory to analysis. Some background material is collected in four appendices, and many exercises for the ambitious reader are provided.

There is a large overlap in content with the classical book "Representations and Invariants of the Classical Groups" by the same authors, but this material has been substantially rewritten. Several new parts have been added, and some parts have been re-organized or are presented in a different style. The book can be read at various levels of detail, which makes it useful as a reference book on the subject as well as an introductory work or as the basis for courses on different levels.

A. Čap (Wien)

K. Gürlebeck, K. Habetha, W. Sprößig: Holomorphic Functions in the Plane and n-dimensional Space. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2008, xiv+394 S. ISBN 978-3-7643-8271-1 P/b € 37,34.

Die Autoren präsentieren in dem vorliegenden Werk eine Einführung in die Theorie holomorpher Funktionen mit einer Variablen und Werten in einer Clifford-Algebra $Cl(n)$. Diese Theorie ist, wenn auch nicht allzu weit verbreitet, doch ein aktives Forschungsgebiet und definitiv von gewisser Schönheit. Sie hat auch verschiedenste Anwendungen in der Analysis, meist im Bereich der Funktionen mehrerer Veränderlicher (spezielle PDEs, BMO, Dirac-Operatoren, etc.).

Die Materie wird von Grund auf entwickelt, der Aufbau folgt dabei einer klassischen Aufbauvariante der komplexen Analysis. Das Buch ist in vier Abschnitte unterteilt. Im ersten Abschnitt werden die algebraischen und geometrischen Grundlagen von komplexen Zahlen, Hamiltonschen Quaternionen, und Clifford-Algebren dargelegt. Im zweiten Abschnitt werden Funktionen, insbesondere differenzierbare Funktionen, in diesen Bereichen untersucht. In den Abschnitten drei und vier werden die Betrachtungen dann weniger elementar; diese Abschnitte befassen sich mit (Cauchy-Typ) Integralsätzen, bzw. mit Entwicklungen in Potenzreihen oder Laurentreihen. Das Buch schließt mit einem Anhang, in dem einige Begriffe und Sätze aus der reellen und komplexen Analysis (über Differentialformen, Integralsätze, Funktionenräume) zusammengestellt werden.

Die Präsentation des Stoffs kann als sehr gelungen bezeichnet werden. Das Buch ist angenehm zu lesen und mit viel Liebe zu Materie und Detail geschrieben. Insbesondere hervorzuheben sind die häufigen historischen Bemerkungen, oftmals mit Bildern der Hauptdarsteller, die den Stoff mit Leben versehen und interessante Einblicke in die geschichtliche Entwicklung ermöglichen. Ebenso erwähnenswert ist die beigelegte CD mit einer ausführlichen Literaturdatenbank (leider nur für Windows-User), und einigen Maple-packages. Deklarierte Zielgruppe sind Studenten der Mathematik oder Physik, dementsprechend wenige Kenntnisse werden vorausgesetzt und dementsprechend ausführlich ist die Darstellung gehalten. Insgesamt gesehen ein gelungenes Werk, welches das Potential hat, die Zielpersonen anzusprechen und für das Gebiet zu begeistern.

H. Woracek (Wien)

M. A. H. Maccallum, A. V. Mikhailov (eds.): Algebraic Theory of Differential Equations. (London Mathematical Society Lecture Note Series 357.) Cambridge University Press, 2009, viii+240 S. ISBN 978-0-521-72008-3 P/b £ 40,–.

The role and use of Galois Theory for algebraic equations is well understood. Much less "popular" is the role of Galois Theory for differential equations. Given such an equation, one defines its Galois group as the group of symmetries of the solutions of this equation which preserve the algebraic and differential relations. The setup for all this is, of course, based on differential rings. Studied are conditions for solvability, uniqueness of solutions, and the possibility to represent the solution in a "closed form", as well as the decomposition of linear systems into independent smaller parts. This book is an excellent introduction to a relatively new approach to partial and ordinary differential equations using very effective algebraic methods.

G. Pilz (Linz)

N. Memon, J. D. Farley, D. L. Hicks, T. Rosenorn (eds.): Mathematical Methods in Counterterrorism. Springer, Wien, New York, 2009, xiii+389 S. ISBN 978-3-211-09441-9 H/b € 98,95.

This new area of mathematics collects methods and strategies to combat terrorism by analyzing, understanding and forcasting terrorist networks. The main tools are, of course, graphs and posets, which are studied for aspects which might be relevant for terror cells. The change of the internal structure of these cells and its forecast (long- and short term) are studied by means of matrix analysis, but also differential equations, probability theory, and topology. It does not come as a surprise that game theory is also used extensively to get insight into optimal strategies of the organisation and funding, both for terrorists and for "counterterrorists". The big problem of handeling gigantic ammounts of data and how to convert information to knowledge is also addressed. As with many new areas of application of mathematics, often modelling is in the center of interest, and not much deep mathematics is applied. Sometimes the analysis looks a bit naive, because assumptions are needed which are not available to the user. But these shortcomings might change rapidly in the future.

G. Pilz (Linz)

O. O'Shea, U. Dudley: The Magic Numbers of the Professor. The Mathematical Association of America, 2007, xi+168 S. ISBN 978-0-88385-557-7 H/b £ 21,99.

Das Buch enthält – in Form eines Dialogs zwischen einem Journalisten und einem Mathematiker (dem „Professor") – unzählige erstaunliche Kuriositäten über verschiedenste Zahlen, z.B. die numerischen Daten (Gründungsjahr, Fläche, Zahl der Distrikte,...) von Irland (der Heimat des ersten Autors), über die Bedeutung der Zahl 3 für das Christentum, der Zahl 11 für das Apollo-Programm der NASA, der Zahl 25 für den Fußballclub Celtic Glasgow, der Zahl 9 für John Lennon, sowie numerische Koinzidenzen bei Abraham Lincoln und John F. Kennedy. Natürlich werden auch Palindromzahlen, Fibonaccizahlen, Pi und die „Satanszahl" 666 ausführlich behandelt. Etwas makaber muten die Zahlenspielereien rund um den Terroranschlag von 9/11, die Weltkriege und den Irak-Krieg an. Aber diese Kapitel kann man ja auch überblättern, denn die Abschnitte dieses Buchs kann man in jeder beliebigen Reihenfolge lesen. Die Autoren distanzieren sich (Gott sein Dank) eindeutig von allen Spekulationen, dass hinter all diesen Koinzidenzen irgendwelche tieferen Geheimnisse stecken könnten. Ihr Ziel ist nur Unterhaltungsmathematik – und das vom Feinsten.

M. Kronfellner (Wien)

Y. Pesin, V. Climenhaga: Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems. (Student Mathematical Library 52.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009, xvi+314 S. ISBN 978-0-8218-4889-0 P/b $ 51,–.

In diesem Buch werden viele Sichtweisen angesprochen und zusammengeführt. Nach einem einführenden Kapitel über symbolische Dynamik und Cantorsche Mengen folgen ein Kapitel über Dimensionstheorie und eines über Maßtheorie, deren Zusammenhang im nächsten Kapitel beschrieben wird. Die weiteren Abschnitte sind wichtigen Modellen gewidmet: dem FitzHugh-Nagumo-Modell, dem Bifurkationsdiagramm für die reelle quadratische Familie (auch logistische Abbildungen genannt), chaotische Attraktoren, Smales Hufeisen und dem Lorenzmodell. Die Präsentation ist vor allem an Ideen orientiert und Beweise werden oft übergangen, aber das Buch ist eine wertvolle Ergänzung der vorhandenen Literatur.

F. Schweiger (Salzburg)

E. J. Straube: Lectures on the $\mathcal{L}^2$-Sobolev Theory of the $\bar{\partial}$-Neumann Problem. (EMS Lectures in Mathematics and Physics.) EMS, Zürich, 2010, viii+206 S. ISBN 978-3-03719-076-0 P/b € 42,–.

The $\bar{\partial}$-Neumann problem has its roots in the 1950s, and ties together the analysis of several complex variables with analysis, geometry, and potential theory. Many modern techniques in Several Complex Variables have their roots in the analysis of the $\bar{\partial}$-Neumann problem, and the problem itself has opened up whole new fields during the development of tools for its analysis. The book grew out of courses for advanced graduate students and young researchers given by the author at the Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics in Vienna and at Texas A & M University. The first part presents the basic L^2-theory including a general form of the Kohn-Morrey formula with applications to the canonical solution of the inhomogeneous Cauchy-Riemann differential equations and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem. The second part is devoted to subelliptic estimates and compactness of the $\bar{\partial}$-Neumann operator explaining interesting connections to different fields in analysis and algebra. The last part contains a thorough and far reaching treatment of the regularity in Sobolev spaces of the $\bar{\partial}$-Neumann operator. Regularity in the $\bar{\partial}$-Neumann problem has been one of the driving forces of the theory. This problem is the prototype of an elliptic PDE coupled with a boundary condition that is not coercive, and the special flavor of the theory of several complex variables often manifests itself when trying to understand how much boundary structure is needed in order to gain regularity. The methods used include elliptic regularization, properties of the Bergman projection and foliation theory, and the results bring the reader to the frontiers of research. Each part contains informative remarks about the literature and further developments. The bibliography consists of more than 300 references. This book will certainly serve as an important source for future research in Complex Analysis.

F. Haslinger (Wien)

D. Treschev, O. Zubelevich: Introduction to the Perturbation Theory of Hamiltonian Systems. (Springer Monographs in Mathematics.) Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, x+211 S. ISBN 978-3-642-03027-7 H/b € 87,95.

In diesem Buch wird eine Einführung in die Störungstheorie Hamiltonscher Systeme gegeben. Insbesondere finden sich KAM-Theorie, die Poincare-Melnikov-Methode oder Versionen des Satzes von Aubry-Abramovici. Die Darstellung ist manchmal etwas kurz gehalten, aber in jedem Fall vollständig, exakt, und verständlich. Es wird erwartet, dass der Leser einiges an Vorkenntnissen über PDE/Dynamische Systeme, insbesondere Hamiltonsche Systeme, mitbringt.

Das Buch ist in mehrere Kapitel gegliedert, in denen verschiedene Methoden vorgestellt und diskutiert werden. Diese sind im Wesentlichen unabhängig voneinander lesbar.

Obwohl aus einer Serie von Vorlesungen entstanden, ist dieses Werk wohl eher weniger als Einführung für Studenten gedacht; für den Wissenschaftler, der sich mit den behandelten Methoden beschäftigt oder diese benützen möchte, stellt das vorliegende Buch sicher einen wertvollen Literaturbeitrag dar.

H. Woracek (Wien)

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

ÖMG-Tagung 2011 – CSASC 2011:
25.–28. September 2011, Donau-Universität Krems

Die diesjährige Tagung der ÖMG findet vom 25.–28. September an der Donau-Universität Krems in Zusammenarbeit mit den mathematischen Gesellschaften von Tschechien, der Slowakei, von Slowenien und der Katalanischen Mathematischen Gesellschaft statt. Diese Tagung steht in der Tradition der vergangenen Nachbarschaftstagungen und der ersten gemeinsamen Tagung mit den genannten Gesellschaften „CSASC 2010“ im Jänner 2010 im Prag.

Neben eingeladenen Hauptvorträgen werden Minisymposien organisiert und Sektionsvorträge angeboten werden. Minisymposien können bis Mai bei der Tagungsleitung eingereicht werden und sollten jeweils von Vertretern von wenigstens zwei der Länder Österreich, Tschechien, Slowakei, Slowenien, Katalonien co-organisiert sein. Als Hauptvortragende konnten

Vicent Caselles (Universitat Pompeu-Fabra, Barcelona)
Franc Forstnerič (Univ. Ljubljana)
Christoph Helmberg (TU Chemnitz)
Barbara Kaltenbacher (Univ. Klagenfurt)
Daniel Král’ (Karls-Univ. Prag)
Pavol Quittner (Comenius Univ. Bratislava)

gewonnen werden. Die Anmeldung zur Tagung erfolgt über *http://dmg.tuwien.ac.at/OMG/OMG-Tagung*, wobei die Anmeldegebühr für ÖMG-Mitglieder 100 € bzw. für Studierende 60 € beträgt. Die Anmeldung zu einem Sektionsvortrag ist gleichzeitig möglich.

(Michael Drmota, Vorsitzender der ÖMG)

Persönliches

Die ÖMG gratuliert ihrem ehemaligen Vorsitzenden Prof. Heinz Engl zur Wahl zum Rektor der Universität Wien.

Protokoll der Generalversammlung der ÖMG

Ort: TU Wien, *Zeit:* Freitag, 26. November 2010, 17:10 Uhr

TOP 1: Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit. Der Vorsitzende begrüßt die Generalversammlung. Die Beschlussfähigkeit wird festgestellt.

TOP 2: Berichte des Vorsitzenden und weiterer Vorstandsmitglieder, insbesondere des Kassiers

Bericht des Vorsitzenden:

— M. Drmota führt aus, dass Mathematik zu den führenden Wissenschaftszweigen in Österreich gehört. Er weist aber insbesondere auf die momentanen Probleme (außeruniversitäre Institute, insbesondere ESI) hin und bittet alle Mitglieder, hier zu helfen.
— Die Gesellschaft verfolgt die Entwicklungen zur Lehrerausbildung neu: Diese ist in ihrer Form noch nicht absehbar, aber es ist ein Wille zur qualitativen Verbesserung zu spüren.
— Die ÖMG ist bemüht, die Zukunftsaussichten für junge Mathematikerinnen und Mathematiker in Österreich zu verbessern, um dem Braindrain entgegenzuwirken.
— Der Vorsitzende weist auf den Erfolg des Mathe-Briefs hin, welcher von Helmberg in Pkt. 5 besprochen wird.
— ÖMG-Archiv: Der Vorsitzende ruft alle Mitglieder auf, ihnen bekannte Materialien dem neuen ÖMG-Archiv zukommen zu lassen.
— Alle Ausgaben der IMN sind eingescannt und online verfügbar.
— Die ÖMG ist seit Kurzem Vertragspartner von Springer als Herausgeber der *Monatshefte für Mathematik*. M. Drmota gibt einen kurzen Bericht über die Vorgänge, die dazu geführt haben. (Es folgt eine kurze Diskussion über die Preise der Monatshefte: C. Krattenthaler erklärt, dass Preisgestaltung Sache des Verlags ist, allerdings ist das Namensrecht an den Monatsheften weiterhin ungeklärt, und damit ein Problem bei Vertragsaustritt gegeben).

Herausgeber der IMN: J. Wallner berichtet von Veränderungen in der Redaktion: R. Tichy stößt hinzu, M. Drmota ist ausgeschieden.

Kassier: G. Larcher präsentiert die Entwicklung des letzten Jahres. Einnahmen von ung. 39.800 stehen Ausgaben von ung. 26.400 gegenüber, also ein Überschuss von 13.500, vor allem durch Zeitschriftenverkauf und Zinsertrag. Die Ausgaben entwickeln sich über die letzten Jahre stabil.

TOP3: Bericht der Rechnungsprüfer und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands

Der Bericht der Rechnungsprüfer liegt schriftlich vor und wird durch H. Humenberger verlesen. P. Szmolyan und H.G. Feichtinger berichten von keinen Beanstandungen. Der Antrag zur Entlastung des Vorstands wird einstimmig angenommen.

TOP4: Berichte aus den Landessektionen und der Didaktikkommission

Wien: C. Krattenthaler berichtet von 2 ERC Grants (Constantin und Arzhantseva), und der laufenden Besetzung von 5 Professuren an der Uni Wien.

Linz: F. Pillichshammer berichtet von der Besetzung einer Professur für Stochastik, welche gerade läuft. Im Februar wird wieder eine Projektwoche für talentierte Schüler im Gebiet der Angewandten Mathematik veranstaltet.

Salzburg: P. Hellekalek berichtet von einem Umbruch in Salzburg: Die Pensionierung von Leistungsträgern führt zu personeller Unterbesetzung. P. Hellekalek drückt insbesondere dem pensionierten F. Schweiger seine Wertschätzung aus. Weiters berichtet er von der Berufung von Haberl auf eine befristete Professur. Die Professur für Statistik wird ein zweites Mal ausgeschrieben, nachdem das erste Verfahren eingestellt wurde.

Klagenfurt: W. G. Nowak (die neu zu wählende Landesvorsitzende) berichtet: Derzeit sind 2 Professuren ausgeschrieben, für Diskrete Mathematik und Angewandte Analysis. Die Berufung von B. Kaltenbacher ist erfolgt.

Graz: W. Woess berichtet vom Start eines FWF-Doktoratskollegs (mit Sprecher Woess). 2 Professuren werden momentan besetzt, und die Nachfolge von R. Burkard ist ausgeschrieben. In Leoben wurde E. Hausenblas berufen.

Innsbruck: G. Kirchner gibt den Ausblick auf einen weiteren Tag der Mathematik im Februar.

Didaktikkommission: H. Humenberger beantragt folgende personelle Veränderungen: Die Aufnahme von G. Hohenwarter aus Linz und B. Thaller aus Graz und das Ausscheiden von Ebenberger. Der Vorsitzende schlägt vor, diese Änderungen zu bestätigen, der Antrag wird einstimmig angenommen. H. Humenberger berichtet über die Vorgänge bei der Lehrerausbildung neu (Mettinger und Hoppmann waren bei der letzten Sitzung der Didaktikkommission zu einer Diskussion eingeladen). Es gibt mehrere Denkmöglichkeiten: PHs in Unis eingegliedert (große Probleme in Deutschland mit diesem Modell); ganze Lehrerausbildung an PHs; Fachliche Ausbildung an Unis, Fachdidaktik und Didaktik an PHs. Humenberger sieht hier einen begrenzten Auftrag für die Mathematik als eines von 28 Fächern, sieht aber die Notwendigkeit, der Abwanderung der Lehrerausbildung an die PHs entgegenzuwirken.

TOP 5: Mathe-Brief. Helmberg berichtet über den Mathe-Brief, von der Idee (die Kommunikation der ÖMG mit den Lehrern ist verbesserbar) und der Konkretisierung. Seit März 2010 sind 8 Mathe-Briefe herausgekommen, und der Mathe-Brief erreicht inzwischen 225 Lehrer. Es wird nach dem Ausscheiden von Schlöglmann ein weiteres Redaktionsmitglied gesucht.

TOP 6: Statutenänderung. Die von Vorstand und Beirat vorgeschlagene Statutenänderung wird verlesen, und vom Vorsitzenden erläutert:

— Neuer Punkt c. in den Vereinszwecken in §2.2 (alle weiteren Punkte bleiben bzw. rücken auf):

> c. Anregung, Förderung und Herausgabe fachwissenschaftlicher Druckschriften

— Neuer §13, (die jetzigen §§13 und 14 rücken auf):

> §13. Herausgabe fachwissenschaftlicher Druckschriften: Der Vorstand der ÖMG bestellt (gegebenenfalls zusammen mit einem Verlag) für die Herausgabe von regelmäßig erscheinenden mathematischen Druckwerken den Editor-in-Chief und in Abstimmung mit dem Editor-in-Chief die weiteren Mitglieder der Redaktion. Er kann diese Aufgaben auch einer von ihm eingesetzten Kommission überantworten.

Die Änderung der Statuten wird einstimmig beschlossen.

TOP 7: Neuwahl der Landesvorsitzenden, Veränderungen im Beirat. Der Wahlvorschlag für die Landesvorsitzenden (Graz: Woess, Innsbruck: Kirchner, Klagenfurt: Nowak, Linz: Pillichshammer, Salzburg: Hellekalek, Wien: Krattenthaler) wird einstimmig angenommen. Die gewählten Landesvorsitzenden nehmen die Wahl an. Die Aufnahme von Tichy in den Beirat wird einstimmig beschlossen.

M. Drmota fügt seinem Bericht die Namen der letztlich verstorbenen Mitglieder hinzu. Die Generalversammlung hält eine Schweigeminute für die verstorbenen Mitglieder.

TOP 8: Verleihung des Förderungspreises und der Studienpreise. Die Studienpreise ergehen an Dr. Veronika Pillwein und an Dr. Clemens Bruschek. M. Drmota und der Vorsitzende der Vergabekommission, J. Wallner, übergeben die Preise. J. Wallner hält eine kurze Laudatio.

Der Förderungspreis wird an Arne Winterhof verliehen. M. Drmota übergibt den Preis und die Inzingermedaille. Die Laudatio wird durch Gerhard Larcher gegeben.

TOP 9: Allfälliges. Keine allfälligen Punkte sind zu besprechen.

(Vorsitzender: M. Drmota, Schriftführung: B. Lamel)

Laudatio auf Arne Winterhof, Förderungspreisträger der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 2010

Ich freue mich sehr, den heurigen Förderpreisträger Arne Winterhof vom Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics der Österreichischen Akademie der Wissenschaften in Linz kurz vorstellen dürfen:

Arne Winterhof hat Mathematik und Informatik an der TU Braunschweig studiert und dort 1996 mit einer Dissertation über „Zyklische Transformationen und Potenzvektoren über endlichen Körpern“ bei Klaus Burde promoviert.

Von 1995 bis 1999 war er wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Algebra und Zahlentheorie an der TU Braunschweig und von 1999 bis 2002 Forschungsassistent am Institut für Diskrete Mathematik der ÖAW bei Harald Niederreiter, und hat sich dort auch im Jahr 2001 habilitiert. Der Titel seiner Habilitationsschrift lautete "Character Sums over Finite Fields and Applications".

Von 2002 bis 2003 war er mit Niederreiter dann an der National University in Singapur. Im Jahr 2003 war er dort einer der Gewinner des National Science Awards von Singapur.

Im August 2003 ist Winterhof dann nach Österreich zurückgekehrt als einer der ersten Mitarbeiter am neu gegründeten Radon-Institut in Linz, und zwar als Experte für Monte Carlo- und quasi-Monte Carlo-Methoden an die damals von mir gemeinsam mit Walter Schachermayer geleitete Abteilung für Finanzmathematik.

Er ist bis heute am RICAM beschäftigt, hat während seiner Tätigkeit hier laufend FWF-Projekte betreut, hat 2004 den Edmund Hlawka-Preis verliehen bekommen, ist seit 2005 Mitherausgeber des Journals *Finite Fields and Their Applications* und hat 2008 den "Best Paper Award der Conference on Arithmetics in Finite Fields" erhalten.

Die Publikationsliste von Arne Winterhof hat mit Stand 27.10.2010 insgesamt 113 Einträge, rein statistisch gesehen könnte diese Anzahl inzwischen bereits weiter gewachsen sein. Es ist das also ein enormes Werk, das Arne Winterhof hier im Laufe von etwa 12 Jahren vorgelegt hat.

Neben einigen rein zahlentheoretischen und rein kombinatorischen Arbeiten beschäftigt sich Winterhof vor allem mit der Entwicklung tiefliegender mathematischer Werkzeuge zur Konstruktion und Analyse von Pseudozufallsfolgen. Seine Arbeit impliziert wichtige Anwendungen in der Kryptographie, Kodierungstheorie und mathematischen Physik (insbesondere im Bereich der Quantenalgorithmen).

Winterhof kann auf eine große Anzahl von Hauptvorträgen an Internationalen Konferenzen und darüber hinaus auf viele weitere eingeladene Vorträge und Forschungsaufenthalte an zahlreichen nationalen und internationalen Universitäten und Forschungseinrichtungen verweisen. Arne Winterhof ist ohne Zweifel einer der Top-Spezialisten auf seinem Arbeitsgebiet und mit mehr als 20 Koautoren international exzellent vernetzt.

Als Lehrender und als wissenschaftlicher Betreuer hat er bereits die Karrieren zahlreicher junger nationaler und internationaler Kollegen wissenschaftlich begleitet. Eine rege Gutachtertätigkeit von ca. 20 Gutachten pro Jahr spricht ebenfalls für seinen hohen Stellenwert in der mathematischen Gesellschaft. Die Organisation und Co-Organisation verschiedener exzellenter internationaler Workshops, die Teilnahme an Programmkomittees und die Herausgeberschaft von Konferenzbänden und Zeitschriften komplettieren sein wissenschaftliches Wirken.

Herrn Winterhofs Forschungen beinhalten also exzellente Beiträge sowohl zur reinen Mathematik, insbesondere zur Zahlentheorie (und dort vor allem im Bereich der Exponentialsummen und der endlichen Körper), als auch zu Anwendungsgebieten wie Kryptographie, Kodierungstheorie, numerische Analysis und mathematische Physik. Er scheut sich auch nicht, neue Gebiete (z.B. die Theorie der Quantenalgorithmen) wissenschaftlich zu betreten. Aus der Vielzahl beeindruckender von Herrn Winterhof erzielter Ergebnisse und entwickelter Techniken möchte ich nur zwei der aus meiner Sicht wesentlichsten Resultate hervorheben und ganz kurz beschreiben:

1. Die lineare Komplexität ist ein Maß für die Unvorhersagbarkeit und somit kryptographische Eignung einer Folge, während sogenannte Gittertests in der Theorie der Quasi-Monte Carlo-Methoden im Hinblick auf numerische Integration schlechte Folgen aussortieren. Beide Konzepte wurden lange Zeit als verschieden angesehen. Herr Winterhof bewies in einer Reihe von Arbeiten, dass beide Konzepte im Wesentlichen gleichwertig sind. Somit sind kryptographisch interessante Folgen insbesondere auch interessant für Quasi-Monte Carlo-Anwendungen.

2. In Zusammenarbeit mit Igor Shparlinski konstruierte Winterhof sogenannte AMUBS (das ist eine Abkürzung für approximative mutual unbiased bases). Das sind Familien von Orthonormalbasen des n-dimensionalen Vektorraums über den komplexen Zahlen, bei denen Skalarprodukte von Vektoren aus zwei verschiedenen Basen ein sehr kleines Skalarprodukt haben. Solche AMUBS sind von großem Interesse für die Quanten-Informationstheorie. Winterhofs Konstruktion involviert dabei elliptische Kurven und Exponentialsummen.

Ich bin überzeugt, Herr Winterhof ist ein sehr würdiger Förderungspreisträger, und ich gratuliere ihm sehr herzlich zu dieser Auszeichnung.

G. Larcher (Linz)

Neue Mitglieder

Florian Aigner – Streubenbergerstr. 13, 4850 Timelkam. geb. 1992. Student an der TU Wien, Preisträger der Österreichischen Mathematikolympiade.

Jussi Behrndt, Univ.-Prof. Dr. – TU Graz, Steyrergasse 30, 8010 Graz. geb. 1975. 2002–2006 wiss. Mitarbeiter an der TU Berlin, 2006–2007 Forschungsstipendiat Univ. Groningen, 2007–2010 Gastprofessuren an der TU Wien und der TU Berlin, seit 2011 Universitätsprofessor für Differentialgleichungen an der TU Graz. *http://www.numerik.math.tugraz.at/∼behrndt*, email *behrndt@tugraz.at*.

Clemens Bruschek, Dr. – Universität Wien, Nordbergstr. 15, 1090 Wien. geb. 1981. Studium der Technischen Mathematik an der Universität Innsbruck, Doktorat an Univ. Innsbruck und Univ. Wien, seit 2009 PostDoc an der Univ. Wien. Studienpreisträger der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. email *clemens.bruschek@univie.ac.at*.

Dmitry Efrosinin, Dr. – Altenbergerstr. 69, 4040 Linz. geb. 1977. Univ.-Assistent am Institut für Stochastik der Univ. Linz. Webseite *http://www.stochastik.jku.at/efrosinin*, email *dmitry.efrosinin@jku.at*.

László Gyenes, Mag. – Prof. Dobrovsky Str. 14/B/4, 3013 Tullnerbach-Lawies. geb. 1959. email *gyenes@gmx.com*.

Christoph Haberl, Dr. – Univ. Salzburg, Hellbrunner Str. 34, 5020 Salzburg. geb. 1981. 2005 Abschluss Technische Mathematik an der TU Wien, 2007 Doktorat ebendort. Beschäftigt an der TU Wien und von 1/2009–6/2010 am Polytechnic Institute of New York University. Seit 2010 Professor an der Univ. Salzburg. email *christoph.haberl@sbg.ac.at*.

Roland Motschilnig – Mosergasse 11/3, 1090 Wien. geb. 1981. Studium der Mathematik an der Karl Franzens-Universität Graz. Seit 2008 Austrian Airlines. email *roland.motschilnig@hotmail.com*.

Veronika Pillwein, Dr. – Univ. Linz, Altenbergerstr. 69, 4040 Linz. geb. 1975. 2004 Abschluss Technische Mathematik, 2008 Doktorat. Studienpreisträgerin der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft. email *vpillwei@risc.jku.at*.

Stefan Rainer, Dipl.-Ing. – Univ. Innsbruck, Technikerstr. 13, 6020 Innsbruck. geb. 1984. Universitätsassistent an der Univ. Innsbruck. email *stefan.rainer@uibk.ac.at*.

Giovanna Roda, Dr. – Liechtensteinstr. 109/15, 1090 Wien. geb. 1966. Unternehmerin. email *giovanna.roda@gmail.com*, *http://at.linkedin.com/in/giovannaroda*.

Birgit Vera Schmidt – Hilmteichstr. 18a/4, 8010 Graz. geb. 1986. Studentin der Technischen Mathematik, TU Graz. email *birgit.v.schmidt@student.tugraz.at*.

Dominik Vu, Dipl.-Ing. – University of Memphis, Dept. of Mathematical Sciences — 373 Dunn Hall, Memphis TN-38152. geb. 1985. Studium der Technischen Mathematik an der TU Wien, seit 2009 Doktorand an der Univ. of Memphis, Tennessee. email *dominik.vu@memphis.edu*.