Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83) und P. Flor (1986–99).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. e-mail *imn@tuwien.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 18,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC/SWIFT-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Grafisches Zentrum, Wiedner Hauptstraße 8–10, 1040 Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-11823
email: *sekr@oemg.ac.at*

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 18,–

Bankverbindung: Konto Nr. 229-103-892-00 der Bank Austria–Creditanstalt (IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, BLZ 12000, BIC BKAUATWW).

http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 196 (58. Jahrgang) **August 2004**

Inhalt

Das Titelblatt zeigt ein *magisches Sechseck*, eine sechseckige Anordnung der natürlichen Zahlen von 1 bis $h_n = 3n(n-1)+1$, sodass alle in einer Linie stehenden Zahlen dieselbe Summe ergeben. Es wurde unter anderem von Ernst v. Haselberg (Stralsund, 1887), William Radcliffe (Isle of Man, 1895), Martin Kühl (Hannover, 1940) und Clifford W. Adams (1957) entdeckt. Dass es im wesentlichen nur ein einziges nichttriviales magisches Sechseck gibt, wurde von C. W. Trigg 1964 gezeigt.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 196 (2004), 1–14

The Rosetta stone of *L*-functions

Enrico Bombieri

Institute for Advanced Study, Princeton

The purpose of this talk is to describe three *languages* for *L*-functions (Motivic, Galois, Automorphic) and to discuss the relations between these notions.

Zeta and *L*-Functions

Number fields: The Dedekind zeta function of a number field K is defined by

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \Big(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\Big)^{-1},$$

where $\mathfrak{a}$ runs over all integral ideals of K, $\mathfrak{p}$ over all prime ideals of K, and where $N(\mathfrak{a})$ is the absolute norm from K to $\mathbb{Q}$.

The Dedekind zeta function is a generalization of the Riemann zeta function $\zeta(s)$ with similar good properties.

Theorem, Hecke (1920):

(i) The Dedekind zeta function is meromorphic of order 1 with a simple pole at $s = 1$ with residue $2^{r_1}(2\pi)^{r_2}Rh/(w\sqrt{|\Delta(K)|})$, where r_1 is the number of real embeddings of K, r_2 is the number of pairs of complex embeddings of K, w is the order of the group of roots of unity in K, R is the regulator of K, h is the class number and $\Delta(K)$ the discriminant of K.

(ii) We have a functional equation:

$$|\Delta(K)|^{s/2}(\pi^{-s/2}\Gamma(s/2))^{r_1}\,\big((2\pi)^{-s}\Gamma(s)\big)^{r_2}\,\zeta_K(s)$$

remains invariant by the change of variable $s \mapsto 1 - s$.

The Rosetta Stone (Fig. 1) carries an identical text with parallel inscriptions in hieroglyphs, Demotic and Greek. It is associated with the famous egyptologist Champollion (1790–1832), who used it, after he had decyphered Demotic, as the starting point for reading hieroglyphs.

He recognized on the Rosetta stone the name Ptolmys in Greek and Demotic, and from there he identified the same name in hieroglyphs, written in a cartouche. Three years later, in 1821, while studying corresponding hieroglyphic and Greek texts on an obelisk transported to England by Giovanni Belzoni (1778–1823), he recognized the name *Kliopadra*, thus getting the values of twelve hieroglyphs. From there, he was able to complete the monumental task he had started in 1808 at the age of eighteen.

ISSN 0020-7926

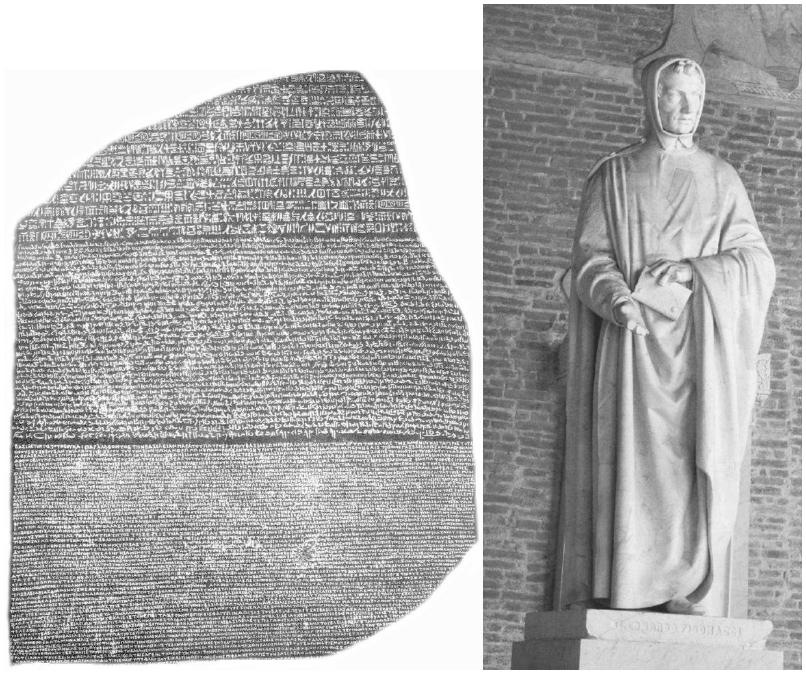

Figure 1: Left: The Rosetta stone, British Museum. Right: Leonardo of Pisa, called Fibonacci.

Hecke Characters

Absolute values: For each place v, let $\|x\|_v$ be the associated absolute value: $N(\mathfrak{p})^{-\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)}$ if $v = \mathfrak{p}$, $|x|$ if $v = \mathbb{R}$, $|x|^2$ if $v = \mathbb{C}$.

Idèles: $J = \prod_v K_v^\times$, with the product restricted to elements x with almost every factor $\|x_v\|_v = 1$, together with a suitable topology. Note that $K^\times \subseteq J$ via the diagonal embedding.

A **Hecke Grössencharacter** *is a continuous homomorphism* $\psi : K^\times \backslash J \to \mathbb{T}$.

The conductor: A place v is *unramified* for ψ if $\psi_v(x_v) := \psi((1, \ldots, 1, x_v, 1, \ldots))$ $= 1$ whenever $\|x_v\|_v = 1$. The conductor $\mathfrak{f}$ of ψ is the ideal

$$\mathfrak{f} = \prod_{\mathfrak{p} \text{ ramified}} \mathfrak{p}^{m_v},$$

where m_v is the smallest exponent for which $\psi_v(x_v) = 1$ for $x_v \in 1 + \mathfrak{p}^{m_v}$.

Grössencharacter of an ideal: It suffices to define it on prime ideals, as $\psi(\mathfrak{p}) = \psi(\omega_v)$ with ω_v a uniformizer of $\mathfrak{p}$ if $\mathfrak{p} \not| \mathfrak{f}$, and 0 otherwise.
For $K_v = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, we have

$$\psi_v(x_v) = \left(\frac{x_v}{|x_v|}\right)^{m_v} |x_v|^{i\tau_v}$$

where $m_v = 0$ or 1 if $K_v = \mathbb{R}$ and $m_v \in \mathbb{Z}$ if $K_v = \mathbb{C}$.

Theorem, Hecke (1920):
(i) The L-function

$$L(s,\psi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\psi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}\text{ ramified}} \left(1 - \frac{\psi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$$

attached to a non-trivial Grössencharacter ψ is entire of order 1.
(ii) Let $\Delta_v = |\Delta(K)| N(\mathfrak{f}_\psi)$ and define

$$\Lambda(s,\psi) = (\Delta_\psi)^{s/2} \prod_{K_v=\mathbb{R}} \pi^{-s/2}\Gamma(s/2 + c_v) \prod_{K_v=\mathbb{C}} (2\pi)^{-s}\Gamma(s + c_v)\, L(s,\psi)$$

where $c_v = (i\tau_v + |m_v|)/2$. Then

$$\Lambda(s,\psi) = w(\psi)\Lambda(1-s,\overline{\psi})$$

for some complex number $w(\psi)$ with $|w(\psi)| = 1$.

Artin L-Functions

Let L/K be a Galois extension of degree d of K with Galois group G and let $\pi : G \to GL_n(\mathbb{C})$ be a representation of G.

Then the lift $\mathfrak{p}O_L$ to L of a prime ideal $\mathfrak{p}$ of K factors as

$$\mathfrak{p}O_L = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{P}_i^e.$$

e is the ramification index, $|O_L/\mathfrak{P}_i| = |O_K/\mathfrak{p}|^f$ and $efr = d$.

G acts on $\{\mathfrak{P}_1,\dots,\mathfrak{P}_r\}$ by permutations; the subgroup $G_{\mathfrak{P}}$ fixing $\mathfrak{P}$ is the *decomposition group* of $\mathfrak{P}$. The elements $\sigma \in G_{\mathfrak{P}}$ with

$$\sigma x \equiv x^{N(\mathfrak{p})} \pmod{\mathfrak{P}}$$

form a right and left coset $(\mathfrak{P}, L/K)$ (the *Frobenius substitution*) of the inertia group $I_{\mathfrak{P}}$ fixing $K(\mathfrak{P}) = O_L/\mathfrak{P}$. Changing $\mathfrak{P}$ into $\eta\mathfrak{P}$ yields $(\eta\mathfrak{P}, L/K) = \eta(\mathfrak{P}, L/K)\eta^{-1}$.

Let $\chi = \mathrm{Tr}(\pi)$ be the character of π and define for $\sigma \in (\mathfrak{P}, L/K)$:

$$\chi(\mathfrak{p}^m) = |I_{\mathfrak{p}}|^{-1} \sum_{\tau \in I_{\mathfrak{p}}} \chi(\sigma^m \tau).$$

Then $\chi(\mathfrak{p}^m)$ is independent of the choices of $\mathfrak{P}$ and σ.

Definition. *The local L-function $L_{\mathfrak{p}}(s, \chi, L/K)$ is defined by*

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \chi, L/K) := \exp\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \chi(\mathfrak{p}^m) N(\mathfrak{p})^{-ms} \Big)$$

and the **Artin L-function** *by*

$$L(s, \chi, L/K) = \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}(s, \chi, L/K).$$

Note that $L(s, 1, L/K) = \zeta(s, K)$. Further properties are listed below.

Direct sum:

$$L(s, \chi_1 + \chi_2, L/K) = L(s, \chi_1, L/K) L(s, \chi_2, L/K).$$

Restriction: Let $L' \supseteq L \supseteq K$ be Galois extensions. Then

$$L(s, \chi, L'/K) = L(s, \chi, L/K).$$

Induction: Let $L' \supseteq L \supseteq K$ be Galois extensions and let χ^* be the character of $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ induced by a character χ of $H = \mathrm{Gal}(L'/L)$. Then

$$L(s, \chi, L'/L) = L(s, \chi^*, L'/K).$$

The character χ^* is the unique character such that $(\chi^*, \psi)_G = (\chi, \psi|_H)_H$ where $(\ ,\ )_G$ is the scalar product on central functions on G normalized with $(1, 1)_G = 1$.

Theorem, Artin (1923): *We have*

$$L(s, \chi, L/K) = \prod_{\mathfrak{p}} \det \Big[I - \frac{\pi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} \Big]^{-1},$$

where

$$\pi(\mathfrak{p}) = \pi(\sigma)|I_\mathfrak{p}|^{-1} \sum_{\tau \in I_\mathfrak{p}} \pi(\tau).$$

For the proof, it is important to note that $|I_\mathfrak{p}|^{-1} \sum_{\tau \in I_\mathfrak{p}} \pi(\tau)$ is idempotent.

An Example: Let $G = \{\pm 1\}$, $L/K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})/\mathbb{Q}$, D square-free. $\Delta = D$ if $D \equiv 1 \pmod 4$, otherwise $\Delta = 4D$.

Case 1: $p \not| \Delta$, $(p) = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$. Here $G_\mathfrak{p} = \{1\}$ and $(\mathfrak{p}, G) = (\bar{\mathfrak{p}}, G) = 1$ by Fermat's Little Theorem.

Case 2: $p \not| \Delta$, (p) prime. Here $G_\mathfrak{p} = \{\pm 1\}$, $I_\mathfrak{p} = \{1\}$ and $((p), G) = -1$, because if (p) does not split then D is not a quadratic residue $(\bmod\ p)$.

Case 3: $p|\Delta$, $(p) = \mathfrak{p}^2$. Here $G_\mathfrak{p} = \{\pm 1\}$, $I_\mathfrak{p} = \{\pm 1\}$ and $(\mathfrak{p}, G) = \{\pm 1\}$.
Take π to be the regular representation

$$\pi\{1, -1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

The local factors are:

$$\begin{aligned}
&\det \begin{bmatrix} 1 - p^{-s} & 0 \\ 0 & 1 - p^{-s} \end{bmatrix} && = (1 - p^{-s})^2 && \text{if } p \text{ splits;} \\
&\det \begin{bmatrix} 1 & -p^{-s} \\ -p^{-s} & 1 \end{bmatrix} && = 1 - p^{-2s} && \text{if } p \text{ remains prime;} \\
&\det \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}p^{-s} & -\frac{1}{2}p^{-s} \\ -\frac{1}{2}p^{-s} & 1 - \frac{1}{2}p^{-s} \end{bmatrix} && = 1 - p^{-s} && \text{if } p \text{ ramifies.}
\end{aligned}$$

Then $L(s, \pi, L/K) = \zeta(s) L(s, (\frac{\Delta}{\cdot}))$.

Identifying $L(s, \pi, L/K) = \zeta(s) L(s, (\frac{\Delta}{\cdot}))$ (where $(\frac{\Delta}{\cdot})$ is the Kronecker symbol) with $\zeta(s, L/K) = \zeta(s) L(s, \chi_\Delta)$, where now χ_Δ is the Dirichlet character, is the quadratic reciprocity law.

In the general case of abelian extensions L/K, the corresponding result is Artin's reciprocity law of class field theory. For example, it implies as a special case the famous Kronecker-Weber theorem that every abelian extension of $\mathbb{Q}$ is a subfield of a cyclotomic field.

Artin's Conjecture: *The L-function $L(s, \chi_\pi, L/K)$ associated to a non-trivial irreducible representation π of* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *is an entire function of s of order* 1.

This conjecture is known only in special cases. The abelian case is due to Artin. The conjecture is also known for characters expressible as linear combinations with positive coefficients of characters induced by cyclic subroups of G. For $\dim(\pi) = 2$ and $G = S_3$ and $G = S_4$: Langlands & Tunnell. For $G = A_5$ with some conditions: Taylor, Buzzard, ... (2002).

Brauer's Theorem: *$L(s, \pi_\chi, L/K)$ is meromorphic of order 1 and satisfies a functional equation ($\Lambda = L \times \{\Gamma$-factors$\}$)*

$$\Lambda(s, \chi_\pi, L/K) = w(\chi_\pi, L/K)\Lambda(1-s, \tilde{\chi}_\pi, L/K)$$

where $\tilde{\chi}_\pi$ is the character of the contragredient of π.

Modular Forms and a Converse Theorem

Let $f(z)$ be a holomorphic modular form of weight k for a subgroup $\Gamma < \Gamma(1)$ generated by $z \mapsto z+h$ and $z \mapsto -1/z$:

$$f(\gamma z) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(\gamma)(cz+d)^k f(z), \qquad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$$

with $\varepsilon(\gamma)$ an appropriate set of multipliers (*Nebentypus*).
Then $f(z)$ is periodic and has a Fourier expansion

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i z/h}.$$

By Mellin transforms, $L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ is meromorphic of order 1, with a simple pole at $s = k$ if $a_0 \neq 0$, and

$$(2\pi/h)^{-s}\Gamma(s)L(s, f) = w(2\pi/h)^{s-k}\Gamma(k-s)L(k-s, f)$$

for $w = i^k\varepsilon[z \mapsto -1/z])$.

Theorem, Hecke (1936): *Conversely, given $L(s, f)$ with the above properties one recovers a modular form f of weight k for Γ, by setting $a_0 = i^{-k}w$ in case $L(s, f)$ has a pole at $s = k$.*

Example: Take $h = 2$,

$$\theta(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}.$$

Then $\theta(z)$ is a modular form of weight $\frac{1}{2}$, multiplier 1 and $L(s, \theta) = \zeta(2s)$. The space of such forms for Γ has dimension 1, hence $\zeta(2s)$ is the unique (up to a scalar) Dirichlet series satisfying the same functional equation as $\zeta(2s)$.

Hecke's converse result uses only the cusp at $i\infty$. Weil's new idea is to control the Fourier expansions at every cusp by 'twisting' the Dirichlet series with Dirichlet characters.

Theorem, Weil (1967): *Let $L(s,f) = \sum a_n n^{-s}$ and write, for a Dirichlet character $\chi \pmod r$:*

$$\Lambda(s, f\otimes\chi) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi(n)n^{-s}.$$

Suppose there are N,k such that for every primitive $\chi \pmod r$ with $(r,N)=1$ we have that $\Lambda(s,f\otimes\chi)$ is entire of order 1 and

$$\Lambda(s,f\otimes\chi) = w_\chi r^{-1}(r^2N)^{\frac{k}{2}-s}\Lambda(k-s,f\otimes\overline{\chi})$$

with $w_\chi = i^k\chi(N)G(\chi)^2$ and $G(\chi) = \sum_{n \,(\mathrm{mod}\, r)} \chi(n)e^{2\pi i n/r}$.

Then $L(s) = L(s,f)$ with f a holomorphic cusp form for $\Gamma_0(N)$.

The Hasse-Weil Zeta Function

The Hasse-Weil zeta function: Let V/K be a variety over a number field. Then for all except finitely many prime ideals $\mathfrak{p}$ the reduction $\overline{V}_\mathfrak{p}$ is defined over the finite field $O_K/\mathfrak{p}$ and yields a Zeta function $Z(T,\overline{V}_\mathfrak{p})$. The global zeta function of V is now

$$\prod_{\mathfrak{p}} Z(N(\mathfrak{p})^{-s},\overline{V}_\mathfrak{p})$$

where the product runs over all prime ideals where the reduction is defined.

If V'/K is another model of V the zeta functions are the same up to finitely many factors.

It is *a difficulty* to define 'good factors' even at places of bad reduction and 'good models' for which the zeta function behaves nicely.

Example 1: Let V be the projective space $\mathbb{P}^n/O_K$. Then

$$\zeta(s,V) = \zeta_K(s)\zeta_K(s-1)\cdots\zeta_K(s-n).$$

Example 2 (Deuring, 1953-57): Let E be an elliptic curve over a number field L, with complex multiplication in the imaginary quadratic field $K = End(E)\otimes\mathbb{Q}$. Assume $K \subseteq L$. Then there is a model of E/L and a Hecke Grössencharacter ψ of L such that

$$\zeta(s,E) = \zeta_L(s)\zeta_L(s-1)L(s-1/2,\psi)L(s-1/2,\overline{\psi}).$$

Example 3 (Taniyama, 1957): Example 2 extends to abelian varieties of CM (complex multiplication) type.

The Taniyama Conjecture

Eichler (1953) proved the functional equation for zeta functions of modular curves $X_0(N) = \mathcal{H}/\Gamma_0(N)$ of genus 1, by showing that in this case $L(s, X_0(N))$ was the Mellin transform of a cusp form of weight 2. Shimura extended this to certain other cases. On the basis of this evidence, Taniyama suggested this held in general.

Conjecture (Taniyama (1955), Shimura, Weil, ...). *Every elliptic curve over $\mathbb{Q}$ is uniformized by a cusp form of weight 2 for $\Gamma_0(N)$. Equivalently, every elliptic curve $E/\mathbb{Q}$ admits the modular curve $X_0(N)$ as a ramified covering, for some N.*

This conjecture was proved by Wiles and Taylor (1995) in the semistable case (namely multiplicative bad reduction only) and now in general by Breuil & Conrad & Diamond & Taylor (2001).

Congruent Numbers

Fibonacci sequence:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots; \qquad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Fibonacci's formula (The *Liber Quadratorum*):

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ad \pm bc)^2 + (ac \mp bd)^2.$$

A **Congruent number** m is a positive integer that is (four times) the area of a rational right triangle. Equivalently there are rational numbers a, b, h with

$$\begin{aligned} h^2 + m &= \square, \qquad & h^2 - m &= \square \\ h^2 &= a^2 + b^2, \qquad & m &= 2ab = 4 \times \text{area}. \end{aligned}$$

Fibonacci: A congruent number m is not a square.

For the congruent number $m = 157$ the smallest solution is (Zagier)

$$a = \frac{340164924391321752560877 0}{411340519227716149383203}, \quad b = \frac{411340519227716149383203}{43333111387429522619220}.$$

The solution? (Tunnell, 1983): *Let*

$$g = q\prod(1-q^{8n})(1-q^{16n}), \quad \theta_2 = \sum q^{2n^2}, \quad \theta_4 = \sum q^{4n^2},$$

$q = e^{\pi i z}$, and define cusp forms of weight $3/2$ for $\Gamma_0(32)$:

$$g\theta_2 = \sum a(n)q^n, \quad g\theta_4 = \sum b(n)q^n.$$

Then a square-free m is not a congruent number if $a(m) = 0$ (m odd), and if $b(m/2) = 0$ (m even). The converse is true, if the Birch & Swinnerton-Dyer conjecture holds for $y^2 = x^3 - m^2x$ (or $my^2 = x^3 - x$).

Comments on proof: m is congruent if and only if the curve E_m defined by $my^2 = x^3 - x$ has rational solutions with $y \neq 0$. The connection with cusp forms uses a deep result of Waldspurger for computing $L(1, E_m)$ (for example, for odd m it yields $L(1, E_m) = \beta a(m)^2/(4\sqrt{m})$, $\beta = \int_1^\infty (x^3 - x)^{-1/3} dx = 2.62205\ldots$), theta lifts and the B&S-D conjecture.

The New Rosetta Stone

Motivic writing: L-functions can be defined from geometry (Hasse, Weil, ...)

Galois writing: L-functions can be defined from finite dimensional representations of the absolute Galois group $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ acting on a vector space V (Artin, Weil, Serre, ...)

Automorphic writing: L-functions can be defined globally from automorphic forms on algebraic groups modulo discrete subgroups (Hecke, Langlands, ...)

Automorphic L-Functions

Langlands ($\sim$1970) vastly extended the concept of automorphic form and automorphic L-function.

Remark: A Hecke character is nothing else than a representation of $GL_1(\mathbb{A})$ in the space of continuous functions on $GL_1(K) \setminus GL_1(\mathbb{A})$.

An automorphic representation is an irreducible component of a representation of $GL_n(\mathbb{A})$ on the space of continuous functions on $GL_n(K) \setminus GL_n(\mathbb{A})$ (with technical conditions). One can then attach to π an L-function, with functional equation $L(s, \pi) = w(\pi)L(1 - s, \tilde{\pi})$ with $\tilde{\pi}$ the contragredient. Also π decomposes as a tensor product $\otimes\pi_v$ of local components, yielding an Euler product for $L(s, \pi)$ with standard factors of degree n.

Automorphic L-functions (Langlands $\sim$ 1970): A concept which fuses together the Artin and Hecke concepts. Given a connected, reductive group G/K and a finite extension L/K one considers an extension ${}^LG$ of G by $\mathrm{Gal}(L/K)$, a finite dimensional complex representation ρ of ${}^LG$ and a representation π of $G(\mathbb{A})$. The theory of Hecke operators gives us, for each local factor π_v of π, a conjugacy class $g_v = g(\pi_v) \in {}^LG$ which generalizes the notion of Frobenius substitution.

The automorphic L-function associated to ρ and π is a product of local factors where for almost every v one has

$$L_v(s, \pi_v, \rho) = \det(I - \rho(g_v)N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}.$$

The goal: The reciprocity law. Given ρ and π there is π' of $G(\mathbb{A})$ such that $L_v(s, \pi_v, \rho) = L_v(s, \pi'_v)$ for almost every v and $L(s, \pi, \rho) = L(s, \pi')$.

The first tool: The principle of functoriality. If H and G are two reductive groups and ${}^LG \to \mathrm{Gal}(L/K)$ factors as

$${}^LG \xrightarrow{\varphi} {}^LH \to \mathrm{Gal}(L/K),$$

then one expects for each π for G to attach Π for H such that one has the equality of conjugacy classes $\{g(\Pi_v)\} = \{\varphi(g(\pi_v))\}$ for almost every v. An important special case is base change, known in some cases.

Other tools: Converse theorems (Piatetski-Shapiro et al., 1979 ff.), theta-liftings, the Selberg-Arthur trace formula.

Reading the Rosetta Stone

Automorphic = Galois: This is a key step with very deep implications. For GL_1, it is Artin's abelian reciprocity law of class field theory, a vast generalization of the quadratic reciprocity law. For GL_2 it is known for dihedral (reduces to GL_1), tetrahedral and octahedral representations and many (but not yet all) icosahedral representations, i.e. $G = S_3$, S_4, A_5 (Artin, Langlands, Langlands & Tunnell, Taylor, Buzzard, ...).

Galois = Motivic: This is also a key step, understood in very few cases, namely GL_1 (Artin, Hecke), elliptic curves $E/\mathbb{Q}$ (the Taniyama conjecture).

Motivic = Automorphic: Known in very few cases. Possibly there are more automorphic L-functions than motivic L-functions coming from geometry.

Applications: If

$$L(s, f) = \prod_v (1 - \omega_1(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}(1 - \omega_2(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1},$$

the symmetric k-th power is

$$L(s, Sym^k f) = \prod_v \prod_{j=0}^{k} \left(1 - \omega_1(\mathfrak{p})^j \omega_2(\mathfrak{p})^{k-j} N(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}.$$

A deep conjecture is that these symmetric powers have analytic continuation and functional equation.

A success of these methods has been to prove such a conjecture for $k = 2, 3, 4$ ($k = 2$ by Rankin and Selberg for classical cusp forms, Gelbart and Jacquet (1979) in general, $k = 3$ and 4 by Kim and Shahidi (2000)).

Classical Problems

We have a good formal understanding for L-functions for Dirichlet characters and cusp forms for congruence subgroups of $\Gamma(1)$, but only limited information on analytical behavior. The functional equation has the form $\Lambda(s, f) = w(f)\Lambda(k-s, \overline{f})$, $k = 1$ or 2. An Euler product for $L(s, f)$ has local factors given by polynomials of degree k. The integer k is the *degree* of $L(s, f)$.

The Generalized Riemann Hypothesis GRH: *The zeros of the functions* $\Lambda(s, f)$ *with Euler product all lie on the vertical line at the center* $k/2$ *of the critical strip (the critical line).*

The Generalized Lindelöf Hypothesis (GLH): *For every fixed* $\varepsilon > 0$, $L(s, f)$ *has order* $N^{\varepsilon}(|s|+1)^{\varepsilon}$ *in the half-plane to the right of the critical line (except at a possible pole). Here* N *is the conductor.*

Let $\mu(\sigma, f)$ be defined as the best exponent for which

$$|L(\sigma + it, f)| \ll (N(|t|+1))^{\mu(\sigma,f)+\varepsilon}.$$

Then the functional equation and convexity yields $\mu(\sigma, f) \leq (k-\sigma)/2$ for $0 \leq \sigma \leq k$. The Lindelöf hypothesis is $\mu(\sigma, f) = 0$ for $k/2 \leq \sigma \leq k$; a *subconvexity bound* is the statement $\mu(\sigma) < (k-\sigma)/2$ for $k/2 \leq \sigma \leq k$. Such a statement has deep arithmetic consequences which are unattainable using the convexity bound alone. The estimate in the conductor is particularly hard (Duke & Friedlander & Iwaniec, 1989 ff.).

The Generalized Ramanujan Conjecture GRC: Ramanujan conjectured, on the basis of numerical evidence, that $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ for every prime p. In general, this is about the coefficients a_n in $L(s, f) = \sum a_n n^{-s}$. Then GRC is the statement

$$|a_n| \leq n^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon}$$

for every fixed $\varepsilon > 0$.

GRC is a deep statement. For $K = \mathbb{Q}$ and $k = 2$, it is known when f is a holomorphic cusp form of even integral weight for $\Gamma(1)$, as a consequence of Deligne's GRH for varieties over finite fields (1974). It is open already for f a non-holomorphic cusp form (Maaß wave form) for $\Gamma(1)$.

Families

Let $\{\lambda_j\}$ be a real sequence, $\lambda_j \sim j$. Consider the gaps $\Delta_j = \lambda_{j+1} - \lambda_j$ and set

$$\mu_1(N)[a,b] = \frac{1}{N}\,\#\{j : \Delta_j \in [a,b]\}, \quad 0 \leq j < N.$$

Quite often one finds a Cauchy-Poisson distribution

$$\mu_1(N) \to e^{-x}\,dx.$$

Example: This is expected for the sequence $\{p_j/\log p_j\}$, although it remains hopeless to prove.

Example: Again, expected for the (ordered) sequence $\{\pi 2^{-9/4}(m^2 + \sqrt{2}n^2)\}$ and, again, completely open.

Problem: What is the expected behavior for $\{\frac{1}{2\pi}\gamma\log\gamma\}$, where $\zeta(\frac{1}{2} + i\gamma) = 0$ and $\gamma > 0$? (There are applications.)

For $A \in U(N)$, consider the eigenvalues $z_1, \ldots, z_N$ on the unit circle ordered by increasing argument $(\bmod 2\pi)$. Let

$$\mu_{k,N}(A)[a,b] = \frac{1}{N}\,\#\{j : \frac{N}{2\pi}\arg(z_{j+k}/z_j) \in [a,b]\}.$$

Gaudin (1961), Katz & Sarnak (1999):

$$\int_{U(N)} \mu_{k,N}(A)\,dA \to \mu_k([a,b])$$

(here dA is the normalized Haar measure) with

$$d\mu_k = \frac{d^2}{ds^2}\Big(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{k-j}{j!}\Big(\frac{\partial}{\partial T}\Big)^j \det\Big(I + T\,K(s)\Big)\Big|_{T=1}\Big)\,ds$$

and $K(s)$ the operator defined by

$$K(s)\phi(x) = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \frac{\sin(x-y)}{\pi(x-y)}\phi(y)\,dy.$$

Conjecture (Montgomery, Katz & Sarnak): The sequence of zeros of $\zeta(s)$ satisfies the above $U(N)$ statistics.

Extensive calculations by Odlyzko with zeros of $\zeta(s)$ around 10^{20} show a total agreement with the prediction. The only problem is: Why is this so?

There are similar formulas for the other classical groups $SU(N)$, $O(N)$, $SO(N)$, $USp(N)$. The amazing thing is that certain families of L-functions seem to follow the same correlations. For example, the distribution of the j-th zero of $L(s,\chi)$, χ a primitive quadratic character, follows the USp prediction. Instead, the j-th zero of $L(s,E\otimes\chi)$, E an elliptic curve, follows the O prediction (two cases, according to the sign $\pm$ in the functional equation, corresponding to the two connected components $O^{\pm}$ of O).

Katz and Sarnak have shown that in the function field analogue the predictions are verified for families for which Deligne's theory applies, and the associated groups are nothing else than the monodromy groups of the families.

Question: For families of classical L-functions, what should replace monodromy so as to explain how these laws arise?

Question: Is this phenomenon peculiar to L-functions or is it instead the expression of a 'universality law' which holds in a much wider context?

Question: Is there a way of formulating a program to prove GRH following Deligne's blueprint in a new context?

The predictions on correlations have changed our way of thinking about L-functions.

Example: Until very recently, most experts in analytic number theory thought that the maximum order of magnitude of $\log^+|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$ was $\sqrt{\log|t|\log\log|t|}$, based on the known Gaussian behavior of $\log|\zeta(\frac{1}{2}+it)|/\sqrt{\pi\log\log|t|}$ and a probabilistic extrapolation. On RH, it was known that this maximum order cannot exceed $\log|t|/\log\log|t|$, but this is only an upper bound and the gap between the two was ascribed to an intrinsic 'weakness' of analytic methods.

Today, work of Keating and Snaith (2000) leads us to believe that the true maximum order of $\log^+|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$ is $\log|t|/\log\log|t|$. This came as a total surprise to experts.

In the function field case, the discovery of elliptic curves over $\mathbb{F}_p$ with rank as big as $\log N/\log\log N$ (N is the conductor) confirms, *via* a Birch & Swinnerton-Dyer conjecture, the new prediction that the maximum order of $\log^+|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$ is $O(\log|t|/\log\log|t|)$.

Conclusion: The analogy with the function field case is often a good predictor for the classical case, too.

Conclusion: The recent proof by Lafforgue (2002) in the function field case that *motivic = automorphic* gives support to the hoped deciphering of the new Rosetta stone, namely that *motivic = automorphic* also holds in the classical case.

This lecture was presented as a keynote address at the 8th Meeting of the Austrian Mathematical Society (joint conference in cooperation with SIMAI and UMI), which was held September 22–26, 2003 in Bozen (South Tyrol).

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 196 (2004), 15–32

Mathematical Challenges from Genomics and Molecular Biology

Richard M. Karp

Berkeley

A fundamental goal of biology is to understand how living cells function. This understanding is the foundation for all higher levels of explanation, including physiology, anatomy, behavior, ecology, and the study of populations. The field of molecular biology analyzes the functioning of cells and the processes of inheritance principally in terms of interactions among three crucially important classes of macromolecules: DNA, RNA, and proteins. Proteins are the molecules that enable and execute most of the processes within a cell. DNA is the carrier of hereditary information in the form of genes and directs the production of proteins. RNA is a key intermediary between DNA and proteins.

Molecular biology and genetics are undergoing revolutionary changes. These changes are guided by a view of a cell as a collection of interrelated subsystems, each involving the interaction among many genes and proteins. Emphasis has shifted from the study of individual genes and proteins to the exploration of the entire genome of an organism and the study of networks of genes and proteins. As the level of aspiration rises and the amount of available data grows by orders of magnitude, the field becomes increasingly dependent on mathematical modeling, mathematical analysis, and computation. In the sections that follow we give an introduction to the mathematical and computational challenges that arise in this field, with an emphasis on discrete algorithms and the role of combinatorics, optimization, probability, statistics, pattern recognition, and machine learning.

We begin by presenting the minimal information about genes, genomes, and proteins required to understand some of the key problems in genomics. Next we describe some of the fundamental goals of the molecular life sciences and the role of genomics in attaining these goals. We then give a series of brief vignettes illustrating algorithmic and mathematical questions arising in a number of specific areas:

[*]Reprint from *Notices of the American Mathematical Society* 49/5 (2002), 544–553, with kind permission of the AMS and the author Richard M. Karp.

ISSN 0020-7926

sequence comparison, sequence assembly, gene finding, phylogeny construction, genome rearrangement, associations between polymorphisms and disease, classification and clustering of gene expression data, and the logic of transcriptional control. An annotated bibliography provides pointers to more detailed information.

Genes, Genomes, and Proteins

The Double Helix The field of genetics began with Gregor Mendel (1865), who postulated the existence of discrete units of information (which later came to be called genes) that govern the inheritance of individual characteristics in an organism. In the first half of the twentieth century it was determined that the genes are physically embodied within complex DNA macromolecules that lie within structures called chromosomes which occur in every living cell. This set the stage for the epochal discovery of the structure of DNA by Watson and Crick in 1953. They showed that a DNA molecule is a double helix consisting of two strands. Each helix is a chain of *bases*, chemical units of four types: A, C, T, and G. Each base on one strand is joined by a hydrogen bond to a complementary base on the other strand, where A is complementary to T, and C is complementary to G. Thus the two strands contain the same information. Certain segments within these chromosomal DNA molecules contain genes, which are the carriers of the genetic information and, in a sense to be explained later, spell the names of the proteins. Thus the genetic information is encoded digitally, as strings over the four-letter alphabet $\{A, C, T, G\}$, much as information is encoded digitally in computers as strings of zeros and ones.

In humans there are forty-six chromosomes. All but two of these (the sex chromosomes) occur in pairs of "homologous" chromosomes. Two homologous chromosomes contain the same genes, but a gene may have several alternate forms called alleles, and the alleles of a gene on the two chromosomes may be different.

The total content of the DNA molecules within the chromosomes is called the *genome* of an organism. Within an organism, each cell contains a complete copy of the genome. The human genome contains about three billion base pairs and about 35,000 genes.

Proteins Proteins are the workhorses of cells. They act as structural elements, catalyze chemical reactions, regulate cellular activities, and are responsible for communication between cells. A protein is a linear chain of chemical units called amino acids, of which there are twenty common types. The function of a protein is determined by the three-dimensional structure into which it folds. One of the premier problems in science is the *protein folding problem* of predicting the three-dimensional structure of a protein from its linear sequence of amino acids. This problem is far from being solved, although progress has been made by a variety of methods. These range from numerical simulation of the physical forces exerted by the amino acids on one another to pattern recognition techniques which correlate motifs within the linear amino acid sequence with structural features of a protein.

From Genes to Proteins The fundamental dogma of molecular biology is that DNA codes for RNA and RNA codes for protein. Thus the production of a protein is a two-stage process, with RNA playing a key role in both stages. An RNA molecule is a single-stranded chain of chemical bases of four types: A, U, C, and G. In the first stage, called transcription, a gene within the chromosomal DNA is copied base-by-base into RNA according to the correspondence A $\rightarrow$ U, C $\rightarrow$ G, T $\rightarrow$ A, G $\rightarrow$ C. The resulting RNA transcript of the gene is then transported within the cell to a molecular machine called a ribosome which has the function of translating the RNA into protein. Translation takes place according to the genetic code, which maps successive triplets of RNA bases to amino acids. With minor exceptions, this many-to-one function from the sixty-four triplets of bases to the twenty amino acids is the same in all organisms on Earth.

Regulation of Gene Expression All the cells within a living organism (with the exception of the sperm and egg cells) contain nearly identical copies of the entire genome of the organism. Thus every cell has the information needed to produce any protein that the organism can produce. Nevertheless, cells differ radically in the proteins that they actually produce. For example, there are more than 200 different human cell types, and most proteins are produced in only a subset of these cell types. Moreover, any given cell produces different proteins at different stages within its cycle of operation, and its protein production is influenced by its internal environment and by the signals impinging upon it from other cells.

It is clear, then, that the expression of a gene within a cell (as measured by the abundance and level of activity of the proteins it produces) is regulated by the environment of the cell. Transcription of a gene is typically regulated by proteins called transcription factors that bind to the DNA near the gene and enhance or inhibit the copying of the gene into RNA. Similarly, translation can be regulated by proteins that bind to the ribosome. Certain post-translational processes, such as the chemical modification of the protein or the transport of protein to a particular compartment in the cell can also be regulated so as to affect the activity of the protein. Thus gene expression can be viewed as a complex network of interactions involving genes, proteins, and RNA, as well as other factors such as temperature and the presence or absence of nutrients and drugs within the cell.

The Goals of Genomics

In this section we enumerate some of the goals of genomics.

1. Sequence and compare the genomes of different species. To sequence a genome means to determine its sequence of bases. This sequence will, of course, vary from individual to individual, and those individual differences are of paramount importance in determining each individual's genetic makeup, but there is enough agreement to justify the creation of a composite reference genome for a species. For example, any two humans will have the same complement of genes (but different alleles) and will agree in about 999 bases out of 1,000.

The sequencing of the human genome has been a central goal of the world genomics community since 1990. Draft sequences were completed in February 2001, and the quest continues for a much more accurate sequence. This achievement was preceded by the sequencing of many bacterial genomes, yeast, the nematode, and, in June 1999, the fruit fly *Drosophila melanogaster*. The sequencing of a new organism is often of value for medical, agricultural, or environmental studies. In addition, it may be useful for comparative studies with related organisms.

2. Identify the genes and determine the functions of the proteins they encode. This process is essential, since without it a sequenced genome is merely a meaningless jumble of A's, C's, T's, and G's. Genes can be identified by methods confined to a single genome or by comparative methods that use information about one organism to understand another related one.

3. Understand gene expression. How do genes and proteins act in concert to control cellular processes? Why do different cell types express different genes and do so at different times?

4. Trace the evolutionary relationships among existing species and their evolutionary ancestors.

5. Solve the protein folding problem: From the linear sequence of amino acids in a protein, determine the three-dimensional structure into which it folds.

6. Discover associations between gene mutations and disease. Some diseases, such as cystic fibrosis and Huntington's disease, are caused by a single mutation. Others, such as heart disease, cancer, and diabetes, are influenced by both genetic and environmental factors, and the genetic component involves a combination of influences from many genes. By studying the relation between genetic endowment and disease states in a population of individuals, it may be possible to sort out the genetic influences on such complex diseases.

Having completed our brief survey of the general goals of genomics, we now turn to a number of examples of specific problems in genomics. These typically involve the creation of a mathematical model, the development of an algorithm, and a mathematical analysis of the algorithm's performance.

Sequence Comparison

The similarity of a newly discovered gene or protein to known genes or proteins is often an indication of its importance and a clue to its function. Thus, whenever a biologist sequences a gene or protein, the next step is to search the sequence databases for similar sequences. The BLAST (Basic Local Alignment Search Tool) program and its successive refinements serve this purpose and are the most important single software tool for biologists.

In preparation for giving a measure of the similarity between two sequences of residues (i.e., bases or amino acids), we need a definition: An *alignment* of a pair of sequences x' and y' is a new pair of sequences x and y of equal length such that x' is obtained from x and y' is obtained from y by inserting occurrences of the special space symbol (–). Thus, if $x = acbcdb$ and $y = abbdcdc$, then one alignment of x and y is as follows:

$$x' = a\text{–}cbc\text{–}db, \quad y' = ab\text{–}bdcdc.$$

Given an alignment of two sequences x and y, it is natural to assess its quality (i.e., the extent to which it displays the similarity between the two sequences) as a score, which is the sum of scores associated with the individual columns of the alignment. The score of a column is given by a symmetric scoring function σ that maps pairs of symbols from the alphabet $\Sigma \cup \{-\}$ to the real numbers, where is the set of residues. Normally we will choose $\sigma(a,a) > 0$ for all symbols $a \in \Sigma$, so that matched symbols increase the score of the alignment, and $\sigma(a,-) < 0$ for all $a \in \Sigma$, so that misalignments are penalized. In the case of the alphabet of amino acids, $\sigma(a,b)$ reflects the frequency with which amino acid a replaces amino acid b in evolutionarily related sequences.

The global alignment problem is to find the optimal alignment of two strings x and y with respect to a given scoring function σ. A dynamic programming algorithm called the Needleman-Wunsch algorithm solves this problem in a number of steps proportional to the product of the lengths of the two sequences. A straightforward implementation of this algorithm requires space proportional to the product of the lengths of the two sequences, but there is a refinement which, at the cost of doubling the execution time, reduces the space requirement to $m + \log n$, where m and n are the lengths of the shorter and the longer of the two sequences.

A related problem is that of local alignment, in which we seek the highest score of an alignment between consecutive subsequences of x and y, where these subsequences may be chosen as desired. Such an alignment is intended to reveal the extent of local similarity between sequences that may not be globally similar.

This problem can be solved within the same time and space bounds as the global alignment problem, using a dynamic programming algorithm due to Smith and Waterman.

A *gap* is a sequence of consecutive columns in an alignment in which each symbol of one of the sequences (x' or y') is the space symbol (–). Gaps typically correspond to insertions or deletions of residue sequences over the course of evolution. Because mutations causing such insertions and deletions may be considered a single evolutionary event (and may be nearly as likely as the insertion or deletion of a single residue), we may wish to assign a (negative) score to a gap which is greater than the sum of the (negative) scores of its columns. The above dynamic programming algorithms can be adapted for this purpose.

One of the most commonly occurring tasks in computational genomics is to search a database for sequences similar to a given sequence. BLAST is a set of programs designed for this purpose. Ideally, it would be desirable to scan through the entire database for high-scoring local alignments, but this would require a prohibitive amount of computation. Instead, a filtering program is used to find regions of the database likely to have a high-scoring local alignment with the given sequences; the full local alignment algorithm is then used within these regions. One principle underlying the filtering program is that two sequences are likely to have a high-scoring local alignment only if there is a reasonably long exact match between them.

Multiple Alignment The concept of an alignment can be extended to alignments of several sequences. A *multiple alignment* of the sequences $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is an n-tuple $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ of sequences of equal length where, for $i = 1, 2, \ldots, n$, the sequence x'_i is obtained from x_i by inserting occurrences of the space symbol.

Just as in the case of a pairwise alignment, the scoring of a multiple alignment is based on a symmetric score function from $(\Sigma \cup \{-\})^2$ into the real numbers; usually we take $\sigma(-,-)$ to be zero. The score of a multiple alignment is then computed column by column. The *sum-of-pairs scoring method*, in which the score of a multiple alignment is the sum of $\sigma(a, b)$ over all aligned pairs of symbol occurrences, is a natural choice, with the convenient property that the score of an alignment is the sum of the scores of its induced pairwise alignments.

For the commonly used scoring methods, the problem of finding a maximum-score multiple alignment of a set of sequences is NP-hard, and various heuristics are used in practice.

Hidden Markov Models Multiple alignments are an important tool for exhibiting the similarities among a set of sequences. Hidden Markov Models (HMMs) provide a more flexible probabilistic method of exhibiting such similarities. An HMM is a Markov chain that stochastically emits an output symbol in each state.

It is specified by a finite set of states, a finite set of output symbols, an initial state, transition probabilities $p(q,q')$, and emission probabilities $e(q,b)$. Here $p(q,q')$ is the probability that the next state is q' given that the present state is q, and $e(q,b)$ is the probability of emitting output symbol b in state q. In typical biological applications the output symbols are residues (nucleotides or amino acids), and an HMM is used to represent the statistical features of a family of sequences, such as the family of globin proteins. A subsequent section describes the construction of an HMM representing the statistical features of human genes.

An HMM for a family of sequences should have the property that sequences in the family tend to be generated with higher probability than other sequences of the same length. In view of this property, one can judge whether any given sequence lies in the family by computing the probability that the HMM generates it, a task that can be performed efficiently by a simple dynamic programming algorithm.

In order to construct a hidden Markov model of a family of sequences, one needs a *training set* consisting of representative sequences from the family. The first step in constructing the HMM is to choose the set of states and the initial state and to specify which transition probabilities and which emission probabilities can be nonzero. These choices are guided by the modeler's knowledge of the family. Given these choices, one can use the *EM-algorithm* to choose the numerical values of the nonzero transition probabilities and emission probabilities in order to maximize the product of the emission probabilities of the sequences in the training set.

Sequence Assembly

The genomes of different organisms vary greatly in size. There are about 3 billion base pairs in the human genome, 120 million in the genome of the fruit fly *Drosophila melanogaster*, and 4.7 million in the genome of the bacterium *E. coli*. There is no magic microscope than can simply scan across a genome and read off the bases. Instead, genomes are sequenced by extracting many fragments called reads from the genome, sequencing each of these reads, and then computationally assembling the genome from these reads. The typical length of a read is about 500 bases, and the total length of all the reads is typically five to eight times the length of the genome. The reads come from initially unknown locations distributed more or less randomly across the genome. The process of sequencing a read is subject to error, but the error rate is usually low.

Shotgun sequencing is conceptually the simplest way to assemble a genome from a set of reads. In this method the reads are compared in pairs to identify those pairs that appear to have a significant overlap. Then the reads are aligned in a manner consistent with as many of these overlaps as possible. Finally, the most likely genomic sequence is derived from the alignment.

During the 1990s The Institute for Genomic Research (TIGR) used the shotgun method to sequence the genomes of many microorganisms, of size up to about five megabases. However, the method was not believed to be applicable to organisms, such as *Homo sapiens*, having much larger genomes containing many *repeat families*. Repeat families are sequences that are repeated with very little variation throughout a genome. For example, the ALU repeat family consists of nearly exact repetitions of a sequence of about 280 bases covering about 10 percent of the human genome. Repeat families in a genome complicate the sequence assembly process, since matching sequences within two reads may come from distinct occurrences of a repeat sequence and therefore need not indicate that the reads overlap.

The Human Genome Project, an international effort coordinated by the U.S. Department of Energy and the National Institutes of Health, favors a divide and conquer approach over the shotgun sequencing approach. The basic idea is to reduce the sequencing of the entire genome to the sequencing of many fragments called *clones* of length about 130,000 bases whose approximate locations on the genome have been determined by a process called *physical mapping*.

In 1998 the biologist Craig Venter established Celera Genomics as a rival to the Human Genome Project and set out to sequence the human genome using the shotgun sequencing approach. Venter was joined by the computer scientist Gene Myers, who had conducted mathematical analyses and simulation studies indicating that the shotgun sequencing approach would work provided that most of the reads were obtained in pairs extracted from the ends of short clones. The advantage of using paired reads is that the approximate distance between the two reads is known. This added information reduces the danger of falsely inferring overlaps between reads that are incident with different members of the same repeat family. Celera demonstrated the feasibility of its approach by completing the sequencing of *Drosophila melanogaster* (the fruit fly) in March 2000.

In February 2001 Celera and the Human Genome Project independently reported on their efforts to sequence the human genome. Each group had obtained a rough draft sequence covering upwards of 90 percent of the genome but containing numerous gaps and inaccuracies. Both groups are continuing to refine their sequences. The relative merits of their contrasting approaches remain a topic of debate, but there is no doubt about the significance of their achievement.

Gene Finding

Although the sequencing of the human genome is a landmark achievement, it is not an end in itself. A string of three billion A's, C's, T's, and G's is of little value until the meaning hidden within it has been extracted. This requires finding the genes, determining how their expression is regulated, and determining the functions of the proteins they encode. These are among the goals of the field of *functional genomics*. In this section we discuss the first of these tasks, gene finding.

Living organisms divide into two main classes: prokaryotes, such as bacteria and blue-green algae, in which the cell does not have a distinct nucleus, and eukaryotes, in which the cells contain visibly evident nuclei and organelles. Gene finding within prokaryotes is relatively easy because each gene consists of a single contiguous sequence of bases. In higher eukaryotes, however, a gene typically consists of two or more segments called *exons* that code for parts of a protein, separated by noncoding intervening segments called *introns*. In the process of transcription the entire sequence of exons and introns is transcribed into a *pre-mRNA transcript*. Then the introns are removed and the exons are spliced together to form the mRNA transcript that goes to a ribosome to be translated into protein. Thus the task of gene identification involves parsing the genomic region of a gene into exons and introns. Often this parsing is not unique, so that the same gene can code for several different proteins. This phenomenon is called *alternative splicing*.

The identification of a gene and its parsing into exons and introns is based on signals in the genomic sequence that help to identify the beginning of the first exon of a gene, the end of the last exon, and the exon-intron boundaries in between. Some of these signals derive from the nature of the genetic code. Define a *codon* as a triplet of DNA bases. Sixty-one of the sixty-four codons code for specific amino acids. One of these (ATG) is also a start codon determining the start of translation. The other three codons (TAA, TAG, and TGA) are stop codons which terminate translation. It follows that the concatenation of all the exons starts with ATG (with occasional exceptions) and ends with one of the three stop codons. In addition, each intron must start with GT and end with AG. There are also important statistical tendencies concerning the distribution of codons within exons and introns and the distribution of bases in certain positions near the exon-intron boundaries. These deterministic signals and statistical tendencies can be incorporated into a hidden Markov model for generating genomic sequence. Given a genomic sequence, one can use a dynamic programming algorithm called the Viterbi algorithm to calculate the most likely sequence of states that would occur during the emission of the given sequence by the model. Each symbol is then identified as belonging to an exon, intron, regulatory region, etc., according to the state that the HMM resided in when the symbol was emitted.

Another approach to gene finding is based on the principle that functioning genes tend to be preserved in evolution. Two genes in different species are said to be *orthologous* if they are derived from the same gene in a common ancestral species. In a pair of species that diverged from one another late in evolution, such as man and mouse, one can expect to find many orthologous pairs of genes which exhibit a high level of sequence similarity; hence the fact that a sequence from the human genome has a highly similar counterpart in the mouse increases the likelihood that both sequences are genes. Thus one can enhance gene finding in both man and mouse by aligning the two genomes to exhibit possible orthologous pairs of genes.

Phylogeny Construction

The evolutionary history of a genetically related group of organisms can be represented by a *phylogenetic tree*. The leaves of the tree represent extant species. Each internal node represents a postulated *speciation event* in which a species divides into two populations that follow separate evolutionary paths and become distinct species.

The construction of a phylogenetic tree for a group of species is typically based on observed properties of the species. Before the era of genomics these properties were usually morphological characteristics such as the presence or absence of hair, fur, or scales or the number and type of teeth. With the advent of genomics the trees are often constructed by computer programs based on comparison of related DNA sequences or protein sequences in the different species.

An instance of the phylogeny construction problem typically involves n species and m *characters*. For each species and each character a *character state* is given. If, for example, the data consists of protein sequences of a common length aligned without gap symbols, then there will be a character for each column of the alignment, and the character state will be the residue in that position. The output will be a rooted binary tree whose leaves are in one-to-one correspondence with the n species.

The informal principle underlying phylogenetic tree construction is that species with similar character states should be close together in the tree. Different interpretations of this principle yield different formulations of the tree construction problem as an optimization problem, leading to several classes of tree construction methods. In all cases, the resulting optimization problem is NP-hard. We shall discuss *parsimony methods*, *distance-based methods*, and *maximum-likelihood methods*.

Parsimony Methods The internal nodes of a phylogenetic tree are intended to represent ancestral species whose character states cannot be observed. In *parsimony methods* of tree construction the task is to construct a tree T and an assignment A of character states to the internal nodes to minimize the sum, over all edges of the tree, of the number of changes in character state along the edge.

Distance-Based Methods Distance-based methods are based on the concept of an *additive metric*. Define a *weighted phylogenetic tree T* as a phylogenetic tree in which a nonnegative length $\lambda(e)$ is associated with each edge e. Define the distance between two species as the sum of the lengths of the edges on the path between the two species in the tree. The resulting distance function is called the *additive metric* realized by T.

Distance-based methods for phylogeny construction are based on the following assumptions:

1. There is a well-defined evolutionary distance between each pair of species, and this distance function is an additive metric.

2. The "correct" phylogenetic tree, together with appropriately chosen edge distances, realizes this additive metric.

3. The evolutionary distances between the extant species can be estimated from the character state data for those species.

This suggests the following *additive metric reconstruction problem*: Given a distance function D defined on pairs of species, construct a tree and a set of edge distances such that the resulting additive metric approximates D as closely as possible (for a suitable measure of closeness of approximation).

The following is an example of a simple stochastic model of molecular evolution which implies that the distances between species form an additive metric. The models used in practice are similar, but more complex.

The model is specified by a weighted phylogenetic tree T with edge lengths $\lambda(e)$. The following assumptions are made:

1. All differences between the character states of species are due to random mutations.

2. Each edge e represents the transition from an ancestral species to a new species. Independently for each character, the number of mutations during this transition has a Poisson distribution with mean $\lambda(e)$.

3. Whenever a mutation occurs, the new character state is drawn uniformly from the set of all character states (not excluding the character state that existed before the mutation).

The *neighbor-joining algorithm* is a widely used linear-time algorithm for the additive metric reconstruction problem. Whenever the given distance function D is an additive metric, the neighbor-joining algorithm produces a weighted tree whose metric is D. The neighbor-joining algorithm also enjoys the property of *asymptotic consistency*. This means that, if the data is generated according to the stochastic model described above (or to certain generalizations of that model) then, as the number of characters tends to infinity, the tree and edge weights produced by the neighbor-joining algorithm will converge to the correct tree and edge weights with probability one.

Maximum Likelihood Methods *Maximum likelihood methods* for phylogeny construction are based on a stochastic model such as the one described above. Let A_x be the observed assignment of states for character x to the extant species. For any model $M = (T, \lambda)$ specifying the tree structure and the edge lengths, let $L_x(M)$ be the probability of observing the assignment A_x, given the model M. Define $L(M)$, the likelihood of model M, as the product of $L_x(M)$ over all characters x. The goal is to maximize $L(M)$ over the set of all models. This problem is NP-hard, but near-optimal solutions can be found using a combination of the following three algorithms:

1. an efficient algorithm based on dynamic programming for computing the likelihood of a model $M = (T, \lambda)$;

2. an iterative numerical algorithm for optimizing the edge lengths for a given tree; i.e., computing $F(T) = max_{\lambda} L(T, \lambda)$;

3. a heuristic algorithm for searching in the space of trees to determine $max_T F(T)$.

Genome Rearrangement In comparing closely related species such as cabbage and turnip or man and mouse, one often finds that individual genes are almost perfectly conserved, but their locations within the genome are radically different. These differences seem to arise from global rearrangements involving the duplication, reversal, or translocation of large regions within a genome. This suggests that the distance between genomes should be measured not only by counting mutations, but also by determining the number of large-scale rearrangements needed to transform one genome to another.

To study these problems mathematically we view a genome as a sequence of occurrences of genes, define a set of primitive rearrangement operations, and define the distance between two genomes as the number of such operations needed to pass from one genome to the other. As an example, consider the case of two genomes that contain the same n genes but in different orders, and in which the only primitive operation is the reversal of a sequence of consecutive genes. Each genome can be modeled as a permutation of $\{1, 2, \ldots, n\}$ (i.e., a sequence of length n containing each element of $\{1, 2, \ldots, n\}$ exactly once), and we are interested in the *reversal distance* between the two permutations, defined as the minimum number of reversal operations required to pass from one permutation to the other. To make the problem more realistic we can take into account that genes are oriented objects and that the reversal of a segment not only reverses the order of the genes within it, but also reverses the orientation of each gene within the segment. In this case each genome can be modeled as a *signed permutation*, i.e., a permutation with a sign ($+$ or $-$) attached to each of the n elements, and the reversal operation reverses the order of a sequence of consecutive elements and the sign of each of these elements. It turns out that the problem of computing the reversal distance between two (unsigned) permutations is NP-hard, but there is an elegant quadratic-time algorithm for computing the reversal distance between two signed permutations.

DNA Microarrays

In this section we describe a key technology for measuring the abundances of specific DNA or RNA molecules within a complex mixture, and we describe applications of this technology to the study of associations between polymorphisms and disease, to the classification and clustering of genes and biological samples, and to the analysis of genetic regulatory networks.

Two oriented DNA molecules x and y are called *complementary* if y can be obtained by reversing x and replacing each base by its complementary base, where the pairs (A,T) and (C,G) are complementary. There is a similar notion of complementarity between RNA and DNA. *Hybridization* is the tendency of complementary, or nearly complementary, molecules to bind together.

Specific molecules within a complex sample of DNA or RNA can be identified by detecting their hybridization to complementary DNA *probes*. A DNA microarray is a regular array of DNA probes deposited at discrete addressable spots on a solid surface; each probe is designed to measure the abundance of a specific DNA or RNA molecule such as the mRNA transcript of a gene. It is possible to manufacture DNA microarrays with tens of thousands of spots on a surface the size of a postage stamp.

Here we concentrate on the applications of DNA microarrays, omitting all technological details about the manufacture of the arrays, the application of DNA or RNA samples to the arrays, and the measurement of hybridization. It is important to note, however, that at the present state of the art the measurements are subject to large experimental error. Methods of experimental design and statistical analysis are being developed to extract meaningful results from the noisy measurements, but currently one can obtain only a rough estimate of the abundance of particular molecules in the sample.

Associations between Polymorphisms and Disease

The genomes of any two humans differ considerably. Each of us carries different alleles (commonly occurring variant forms) of genes and *polymorphisms* (local variations in the sequence, typically due to mutations). Of particular interest are *Single-Nucleotide Polymorphisms* (SNPs) caused by mutations at a single position. Several million commonly occurring SNPs within the human genome have been identified. It is of great interest to find statistical associations between a genotype (the variations within an individual's genome) and phenotype (observable characteristics such as eye color or the presence of disease). Some genetic diseases result from a single polymorphism, but more commonly there are many genetic variations that influence susceptibility to a disease; this is the case for atherosclerosis, diabetes, and the many types of cancer. Microarrays are a fundamental tool for association studies because they enable an experimenter to apply DNA probes for thousands of different polymorphisms in a single experiment. The statistical problems of finding subtle associations between polymorphisms and complex diseases are currently being investigated intensively.

Classification and Clustering Based on Microarray Data

Microarrays can be used to identify the genetic changes associated with diseases, drug treatments, or stages in cellular processes such as apoptosis (programmed cell death) or the cycle of cell growth and division. In such applications a number of array experiments are performed, each of which produces noisy measurements of the abundances of many gene transcripts (mRNAs) under a given experimental condition. The process is repeated for many conditions, resulting in a *gene expression matrix* in which the rows represent experiments, the columns represent genes, and the entries represent the mRNA levels of the different gene products in the different experiments. A fundamental computational problem is to find significant structure within this data. The simplest kind of structure would be a partition of the experiments, or of the genes, into subclasses having distinct patterns of expression.

In the case of *supervised learning* one is given independent information assigning a *class label* to each experiment. For example, each experiment might measure the mRNA levels in a leukemia specimen, and a physician might label each specimen as either an acute lymphoblastic leukemia (ALL) or an acute myeloid leukemia (AML). The computational task is to construct a decision rule that correctly predicts the class labels and can be expected to generalize to unknown specimens. In the case of *unsupervised learning* the class labels are not available, and the computational task is to partition the experiments into homogeneous clusters on the basis of their expression data.

Typically the number of genes measured in microarray experiments is in the thousands, but the classes into which the experiments should be partitioned can be distinguished by the expression levels of a few dozens of critical genes, with the other genes being irrelevant, redundant, or of lesser significance. Thus there arises the *feature selection problem* of identifying the handful of genes that best distinguish the classes inherent in the data. Sometimes a gene expression matrix contains local patterns, in which a subset of the genes exhibit consistent expression patterns within a subset of experiments. These local patterns cannot be discerned through a global partitioning of the experiments or of the genes but require identification of the relevant subsets of genes and of experiments. Research on the feature selection problem and on the problem of identifying local patterns is in its infancy.

Supervised Learning Machine learning theory casts the problem of supervised learning in the following terms. Given a set of *training examples* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ drawn from a probability distribution over R^d, together with an assignment of a class label to each training example, find a rule for partitioning all of R^d into classes that is consistent with the class labels for the training examples and is likely to generalize correctly, i.e., to give correct class labels for other points in R^d. There is a general principle of machine learning theory which, informally stated, says that, under some smoothness conditions on the probability distribution from which the training examples are drawn, a rule is likely to generalize correctly if

1. each training example lies within the region assigned to its class and is far from the boundary of that region;

2. the rule is drawn from a "simple" parametrized set of candidate rules. The notion of simplicity involves a concept called the Vapnik-Chervonenkis dimension, which we omit from this discussion.

One reasonably effective decision rule is the *nearest neighbor rule*, which assigns to each point the same class label as the training example at minimum Euclidean distance from it.

In the case of two classes (*positive examples* and *negative examples*) the *support vector machine* method is often used. It consists of the following two stages:

Mapping into feature space: Map each training example x to a point $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots)$, where the i are called *features*. The point $\phi(x)$ is called the *image* of training example x.

Maximum-margin separation: Find a hyperplane that separates the images of the positive training examples from the images of the negative training examples and, among such separating hyperplanes, maximizes the smallest distance from the image of a training example to the hyperplane.

The problem of computing a maximum-margin separation is a quadratic programming problem. It turns out that the only information needed about the training examples is the set of inner products $\phi(x)T\phi(y)$ between pairs (x, y) of training examples. It is possible for the images of the training examples to be points in an infinite-dimensional Hilbert space, as long as these inner products can be computed. *Mercer's Theorem* characterizes those functions $K(x, y)$ which can be expressed as inner products in finite- or infinite-dimensional feature spaces. These functions are called *kernels*, and the freedom to use infinite-dimensional feature spaces defined through their kernels is a major advantage of the support vector machine approach to supervised learning.

Clustering Clustering is the process of partitioning a set of objects into subsets based on some measure of similarity (or dissimilarity) between pairs of objects. Ideally, objects in the same cluster should be similar, and objects in different clusters should be dissimilar.

Given a matrix of gene expression data, it is of interest to cluster the genes and to cluster the experiments. A cluster of genes could suggest either that the genes have a similar function in the cell or that they are regulated by the same transcription factors. A cluster of experiments might arise from tissues in the same disease state or experimental samples from the same stage of a cellular process. Such hypotheses about the biological origin of a cluster would, of course, have to be verified by further biochemical experiments.

Each gene or experiment can be viewed as an n-dimensional vector, with each coordinate derived from a measured expression level. The similarity between points can be defined as the inner product, after scaling each vector to Euclidean length 1. When experiments are being clustered the vectors are of very high dimension, and a preliminary feature selection step is required to exclude all but the most salient genes.

In the K-means algorithm the number of clusters is specified in advance, and the goal is to minimize the sum of the distances of points from the centers of gravity of their clusters. Locally optimal solutions can be obtained by an iterative computation which repeats the following step: Given a set of K clusters, compute the center of gravity of each cluster; then reassign each point to the cluster whose center of gravity is closest to the point.

Maximum likelihood methods assume a given number of clusters and also assume that the points in each cluster have a multidimensional Gaussian distribution. The object is to choose the parameters of the Gaussian distributions so as to maximize the likelihood of the observed data. In these methods a point is not definitely assigned to a cluster, but is assigned a probability of lying in each cluster.

Merging methods start with each object in a cluster by itself and repeatedly combine the two clusters that are closest together as measured, for example, by the distance between their centers of gravity. Most merging and splitting methods that have been proposed are heuristic in nature, since they do not aim to optimize a clearly defined objective function.

The Logic of Transcriptional Control

Cellular processes such as cell division, programmed cell death, and responses to drugs, nutrients, and hormones are regulated by complex interactions among large numbers of genes, proteins, and other molecules. A fundamental problem of molecular life science is to understand the nature of this regulation. This is a very formidable problem whose complete solution seems to entail detailed mathematical modeling of the abundances and spatial distributions within a cell of thousands of chemical species and of the interactions among them. It is unlikely that this problem will be solved within this century.

One aspect of the problem that seems amenable to mathematical methods is the logic of transcriptional control. As Eric Davidson has stated, “A large part of the answer lies in the gene control circuitry encoded in the DNA, its structure and its functional organization. The regulatory interactions mandated in the circuitry determine whether each gene is expressed in every cell, throughout developmental space and time, and if so, at what amplitude. In physical terms the control circuitry encoded in the DNA is comprised of cis-regulatory elements, i.e., the regions in the vicinity of each gene which contain the specific sequence motifs at which those regulatory proteins which affect its expression bind; plus the set of genes which encode these specific regulatory proteins (i.e., transcription factors).”

It appears that the transcriptional control of a gene can be described by a discrete-valued function of several discrete-valued variables. The value of the function represents the level of transcription of the gene, and each input variable represents the extent to which a transcription factor has attached to binding sites in the vicinity of the gene. The genes that code for transcription factors are themselves subject to transcriptional control and also need to be characterized by discrete-valued functions. A regulatory network, consisting of many interacting genes and transcription factors, can be described as a collection of interrelated discrete functions and depicted by a “wiring diagram” similar to the diagram of a digital logic circuit.

The analysis of this control circuitry involves biochemical analysis and genomic sequence analysis to identify the transcription factors and the sequence motifs characteristic of the sites at which they bind, together with microarray experiments which measure the transcriptional response of many genes to selected perturbations of the cell. These perturbations may involve changes in environmental factors such as temperature or the presence of a nutrient or drug, or interventions that either disable selected genes or enhance their transcription rates. The major mathematical challenges in this area are the design of informative perturbations and the inference of the transcriptional logic from information about transcription factors, their binding sites, and the results of microarray experiments under perturbed conditions.

Bibliography

In this section we provide references for the principal topics introduced in this article.

Sequence Comparison

[1] D. GUSFIELD, Algorithms on Strings, Trees and Sequences, Cambridge University Press, 1997.

Hidden Markov Models; Phylogeny Construction

[2] R. DURBIN, S. EDDY, A. KROCH, and G. MITCHISON, Biological Sequence Analysis, Cambridge University Press, 1998.

Sequence Assembly

[3] EUGENE W. MYERS et al., A whole-genome assembly of Drosophila, Science 287 (2000), 2196–2204.

Gene Finding

[4] S. SALZBERG, D. SEARLS, and S. KASIF (Eds.), Computational Methods in Molecular Biology, Elsevier Science, 1998.

Genome Rearrangement

[5] P. PEVZNER, Computational Molecular Biology, MIT Press, 2000.

DNA Microarrays

[6] M. SCHENA (Ed.), DNA Microarrays: A Practical Approach, Oxford University Press, 1999.

Supervised Learning

[7] N. CRISTIANINI and J. SHAWE-TAYLOR, An Introduction to Support Vector Machines, Cambridge University Press, 1999.

Clustering

[8] B. EVERITT, S. LANDAU, and M. LEESE, Cluster Analysis, Edward Arnold, fourth edition, 2001.

The Logic of Transcriptional Control

[9] E. DAVIDSON, Genomic Regulatory Systems, Academic Press, 2001.

Richard M. Karp is a member of the International Computer Science Institute (ICSI), Berkeley, and a University Professor at the University of California, Berkeley. His e-mail address is karp@icsi.berkeley.edu.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 196 (2004), 35–46

Der Spieler, der Ästhet und St. Petersburg

Kann man sich Reichtum erspielen?*

Leon Taylor

Es ist ein ruhiger Wintertag. Die Theater im Zentrum haben *Nightmare on Pennsylvania Avenue* wiederaufgenommen, und die Footballsaison ist vorüber. Aber hier ist eine Möglichkeit, die Zeit totzuschlagen. Ich habe beim Kauf der heutigen Morgenausgabe von *News-Free Press* eine Münze Wechselgeld herausgekriegt. Angenommen, ich werfe die Münze so lange, bis Kopf oben ist (Ende des Spiels). Wenn Kopf beim ersten Mal erscheint, zahle ich Ihnen einen Dollar; 2 \$ wenn das erstmals beim zweiten Wurf passiert, 4 \$ beim dritten Wurf; et cetera, et cetera, et cetera, wie der König von Siam sagen würde. Allgemein, wenn Kopf erstmals beim n-ten Wurf kommt, zahle ich Ihnen 2^{n-1} \$ (Gähn!) Nun, wieviel würden Sie eine Teilnahme an diesem unterhaltsamen Glücksspiel einsetzen?

Wenn Sie wie ein Computer denken, werden Sie Ihre Geldbörse samt Kreditkarte, Wohnungsschlüssel und Weihnachtsflugticket nach Tahiti dafür geben. Der Erwartungswert dieser langweiligen Wette spaziert nämlich davon gegen unendlich.

1. Unerwarteter Erwartungswert

Schwer zu glauben? Rechnen wir's uns aus! Der Erwartungswert der Wette ist die beste mathematische Schätzung für ihren Wert. Um ihn zu berechnen, müssen Sie alle Möglichkeiten bedenken, wie wahrscheinlich sie sind, und was sie Ihnen im Falle ihres Eintretens brächten. Ein Beispiel: Angenommen wir hätten vereinbart, dass ich die Münze nur einmal werfe. Dann hätten Sie eine Chance von 50 %, dass Kopf kommt, mit dem stattlichen Gewinn von 1 \$. Und sie hätten eine 50 %-Chance auf Adler, die für Sie nichts wert wäre. Kopf oder Adler: das deckt offenbar alles ab. Deshalb ist der Erwartungswert der Wette $(1/2)\cdot 1\,\$ + (1/2)\cdot 0\,\$ = 0.50\,\$$.

*Von R. Winkler ins Deutsche übersetzter Nachdruck des Artikels: Leon Taylor, *The gambler, the aesthete, and St. Pete*, Quantum, Jan/Feb 1998, pp. 20–25. Mit freundlicher Genehmigung des Springer-Verlages

ISSN 0020-7926

Aber ich habe versprochen, die Münze nicht nur einmal zu werfen, sondern, ungeachtet geschwollener Daumen, so lange, bis Kopf erscheint.

Wenn dieses gesegnete Ereignis beim zweiten Wurf eintritt, bekommen Sie 2 $. Um beim zweiten Wurf erstmals Kopf zu werfen, müssen wir beim ersten Wurf Adler gehabt haben. Was ist die Wahrscheinlichkeit für Adler zuerst und Kopf danach? Ein Wurf beeinflusst den anderen nicht, deshalb dürfen wir über die beiden unabhängig voneinander nachdenken. Beim ersten Wurf ist die Wahrscheinlichkeit für Adler 50 %. Beim zweiten Wurf ist die Wahrscheinlichkeit für Kopf 50 %. Wir haben demnach die Chance 1/2, bis zum zweiten Wurf zu kommen, und davon die Hälfte, dass auch noch beim zweiten Wurf Kopf erscheint. Die Wahrscheinlichkeit, erstmals beim zweiten Wurf Kopf zu erhalten, ist daher

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Die erwartete Auszahlung dabei ist $(1/4) \cdot 2\,\$ = 0.50\,\$$.

Doch weiter. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Kopf beim dritten Wurf erscheint? Wir müssen bei den ersten zwei Würfen Adler erhalten und dann Kopf. Deshalb beträgt die Wahrscheinlichkeit für den ersten Kopf beim dritten Wurf

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Sie sehen das Muster: Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Kopf genau beim n-ten Wurf auftritt, ist $(1/2)^n$.

Um schließlich den Erwartungswert der Wette zu berechnen, sind die erwarteten Auszahlungen für alle möglichen Wurfergebnisse zu addieren. Schließlich könnten Sie ja Glück haben; es könnte sein, dass bis zum zehnten Wurf kein Kopf auftritt – oder bis zum hundertsten. Wir (und Ihr Steuerberater) müssen alle diese Möglichkeiten in Betracht ziehen. Wir wollen etwas Papier sparen (in Wahrheit alles Papier der Welt) und eine Reihe verwenden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n\,\$)\frac{1}{2^n} = 0{,}50\,\$ + 0{,}50\,\$ + 0{,}50\,\$ + \ldots \qquad (1)$$

Das ist eine unendliche Zahl von 50-Cent-Münzen. Mehr als die Milchstraße je aufnehmen kann.

Warum erhalten wir dieses seltsame Resultat? Bei jeder möglichen Wurffolge gleichen die Aussicht, Kopf zu erhalten, und die Auszahlung einander aus. Sie haben die Chance 1/2, Kopf beim ersten Wurf zu erhalten, aber die Auszahlung wird nur 1 sein. Sie haben eine Chance von nur 1/1024, den ersten Kopf beim zehnten Wurf zu erhalten, aber die Auszahlung wird 512 $ sein. Die erwartete Auszahlung ist stets 0,50 $. Aber Sie können den ersten Kopf bei jedem beliebigen von unendlich vielen Würfen haben. Die Wette umfasst diese Unendlichkeit von Möglichkeiten, deshalb divergiert das, was wir locker den „Erwartungswert" genannt haben, – wir können ihn nicht wirklich berechnen – gegen unendlich.

Schwer widersteht man der Versuchung, zu sagen: „Natürlich kann der Wert nicht endlich sein. Die Summe besteht ja aus unendlich vielen Termen!"Aber nehmen Sie an, Sie könnten nur 1 \$ gewinnen, egal wann Sie den ersten Kopf erzielen. Dann wäre der Erwartungswert der Wette

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1\,\$)\frac{1}{2^n} = 0{,}50\,\$ + 0{,}25\,\$ + 0{,}125\,\$ + \ldots \tag{2}$$

Das ist auch eine unendliche Reihe, aber die Glieder werden kleiner und kleiner, schrumpfen gleichsam zu einem Atom, einem Neutrom einem Quark… Bemerkenswerterweise summiert sich diese Reihe zu 1 auf. Überzeugen Sie sich selbst: Stecken Sie das Problem in Ihren Rechner und lassen Sie ihn ein paar Stunden rechnen. Oder Tage. Oder versuchen Sie das:

Problem 1: Nehmen Sie die Formel für die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe zur Hand. Verwenden Sie diese und beweisen Sie, dass (2) gegen 1 \$ konvergiert.

Nun betrachten Sie nochmals (1). Diese Reihe, die gegen unendlich strebt, fordert eine Nachdenkpause. Eine Wette mit unendlicher Auszahlung!

Aber Sie würden nicht wirklich Ihr gesamtes Vermögen für diese Wette mit unendlicher Auszahlung einsetzen. Warum nicht?

2. Ein realistischeres Spiel

Vielleicht bezweifeln Sie (meine Frau tut das), dass ich unendlich reich sei. Dann kann ich Ihnen, selbst für eine sehr lange Folge, nur zahlen, was ich besitze. Und das wird die Auszahlung beschränken, die Sie erwarten können. Der französische Mathematiker Poisson zeigte das an einem eleganten Beispiel. Nehmen wir aus Bequemlichkeit an, dass in der Wette 2^n \$ für den ersten Kopf beim n-ten Wurf vereinbart sind und dass ich nur einen gewissen Betrag M besitze. Denken Sie über dieses Spiel nach: Ich vereinbare, dass ich die Münze höchstens N Mal werfe oder bis Kopf erscheint, je nachdem welcher Fall früher eintritt. Auszahlen werde ich nur, was ich kann. Natürlich können wir N so groß machen wie wir wollen.

Wie groß mein riesiges Vermögen ist, hat einen Einfluss darauf, wieviel ich davon habe, wenn erst spät Kopf auftritt. Um dies genauer zu verstehen, brauchen wir eine Beziehung zwischen meinem Vermögen und der Zahl der Würfe. Aus Gründen, die (hoffentlich) bald klar werden, würde Poisson mein Vermögen als $M = 2^\nu(1+h)$ schreiben. Dabei ist ν eine ganze Zahl, die wir nachher mit der Zahl der Würfe vergleichen können, und $0 \leq h < 1$. Zuerst werden wir ein ν finden, das die Größe M meines Vermögens annähert, dann wählen wir h so, um dies exakt zu machen. Und jetzt hervor mit dem Taschenrechner …

Problem 2: Angenommen, mein Vermögen M betrage 67,5 Mio. \$ (schön wär's!). Was sind v und h?

Wie immer v auch gewählt sei, sehen wir uns an, was nach v Würfen passiert. Ihr Erwartungswert für die Wette für diese Würfe ist

$$\frac{1}{2}2+\frac{1}{4}4+\ldots+\frac{1}{2^v}2^v = 1+1+\ldots+1 = v.$$

Erinnern Sie sich an $M = 2^v(1+h)$, und das ist mindestens 2^v. Wenn ich die Münze mindestens v Male werfen muss, bevor Kopf erscheint, dann muss ich Ihnen alles zahlen, was ich habe, also $2^v(1+h)$. Also ist der Erwartungswert der Wette (nicht nur für die ersten v Würfe)

$$v+2^v(1+h)\frac{1}{2^v} \tag{3}$$

oder

$$v+1+h. \tag{4}$$

Ihr Erwartungswert für die Wette bleibt also zwischen $v+1$ und $v+2$. Wenn mein Vermögen zum Beispiel 67,5 Mio. \$ beträgt, werden Sie für die Wette nicht mehr als 27 \$ oder 28 \$ einsetzen.

Problem 3: Woher wissen wir, dass (3) stimmt?

Problem 4: Zeigen Sie, dass das Spiel bei einem Vermögen von 67,5 Mio. \$ nicht mehr als 27 \$ oder 28 \$ wert ist.

Diese berechneten Werte – 27 \$ oder 28 \$ – wirken plausibel. Jedoch wird über Poisson überliefert: „Wenn er zu wählen hatte, etwa zwischen zwei gegensätzlichen Ideen diejenige, auf die er seine theoretischen Überlegungen anwenden sollte, erwies sich seine Entscheidung üblicherweise als falsch.“ Auch wenn etwa Caesar's Palace in Las Vegas ein geringeres Vermögen hat als die New Yorker Notenbank, so muss die Möglichkeit eines Bankrotts nicht der Grund dafür sein, dass Sie nur ein paar Dollar für die Wette riskieren würden. Der französische Mathematiker Joseph Bertrand wandte ein, dass das Haus die maximale Auszahlung im Spiel stets durch Änderung der Einheiten limitieren kann. Nehmen wir an, das Vermögen sei 600.000 \$ oder 60.000.000 Pennies. Dann würde für Kopf beim ersten Wurf nur einen Penny ausbezahlt, oder einen Kupferspan oder ein Sandkorn oder ein Wasserstoffmolekül. „Die Angst vor Insolvenz kann unbeschränkt reduziert werden“, sagte Bertrand. Ob Sie nun die Bank sprengen oder nicht, es bleibt immer noch die grundlegende Frage: Warum würden die meisten von uns nur wenige Dollar für eine Wette mit einem Erwartungswert von vielen Tausenden Dollar zahlen?

3. Sie wetten um Ihr Leben

Ein weiterer Zugang zu dem Problem besteht darin, ähnliche Wetten in der realen Welt zu betrachten und zu fragen, warum Menschen dafür nicht alles einsetzen würden. Denken wir an einen Akteur, der Insolvenz nie zu fürchten scheint – die Regierung. Sie gebe Lose in einer Lotterie aus. Los 1 zahle 1 \$ aus, wenn Kopf beim ersten Wurf kommt. Los 2 zahle 2 \$, wenn Kopf nicht vor dem zweiten Wurf kommt, Los 3 zahlt 4 \$, wenn Kopf nicht vor dem dritten Wurf nicht kommt. Los 4 zahlt 8 \$, wenn Kopf nicht vor dem vierten Wurf kommt. Und so weiter. Für 50 Cent pro Stück würden Sie vielleicht die Lose 1 und 2 kaufen. Aber würden Sie Los 50.000.000 kaufen? Nicht nach Antoine-Augustin Cournot, dem Begründer der mathematischen Ökonomie. Er verwies auf die französische Lotterie, wo man fünf Zahlen aus 90 auswählte und auf gewisse Kombinationen wettete. Die Lotterie hat mangels Nachfrage jene Wette zurückgezogen, wo auf eine spezielle Kombination von fünf Zahlen gesetzt wurde. „Man stellt sich vor", schrieb Cournot, „dass es eine Untergrenze für die Gewinnchance geben muss."

Mag sein, dass gewisse Wahrscheinlichkeiten unter der Schwelle der Wahrnehmung liegen. Im achtzehnten Jahrhundert war die Wahrscheinlichkeit, dass ein 56-jähriger Mann über Nacht stirbt, etwa 1:10.000. Die meisten Männer in ihren besten Jahren verschwenden keinen düsteren Gedanken an die Möglichkeit, vor dem nächsten Frühstück zu sterben. Entsprechend könnte man die Wahrscheinlichkeit von 1:10.000 als unterhalb der Wahrnehmungsschwelle betrachten, sagte der französische Naturalist Buffon. Wenn Sie den Erwartungswert meiner Wette berechnen, werden Sie diese und kleinere Wahrscheinlichkeiten mit Null gleichsetzen. (Sie werden sich vielleicht fragen, warum Buffon nicht die Wahrscheinlichkeit wählte, dass ein Mann in seinen 20ern über Nacht stürbe. Vielleicht lag das daran, dass Buffon mit diesem Alter ein Duell gefochten hatte, als Student in Angers. Mit den Jahren wurde er vorsichtiger, so sehr, dass er das Glücksspiel als *le mal épidémique* bezeichnete.)

Als erfahrener Praktiker, der das Unendliche als *une idée de privation* betrachtete, schien Buffon dafür prädestiniert, die These zu entwickeln, dass gewisse Ereignisse zu unwahrscheinlich seien, als dass wir uns darum kümmerten. Als der englische Historiker Edward Gibbon davon hörte, tat er es als lächerlich ab und schrieb: „Angenommen es wäre eine öffentliche Lotterie ausgeschrieben zur Auswahl eines sofortigen Todesopfers, und unser Name stünde auf einem von 10.000 Losen. Sollten wir völlig unbeschwert sein?"

Würden eine Million Lose die moderne Seele beruhigen? Die Bundesbehörden lassen gefährliche Substanzen nur in solchen Konzentrationen zu, dass weniger als ein Todesopfer unter einer Million während 70 Jahren täglicher Nahrungsaufnahme zu erwarten sind. Nehmen wir also schon kleinere Wahrscheinlichkeiten wahr als unsere Vorfahren? Vielleicht. Oder vielleicht fürchten wir das Sterben mehr? Die Festlegung einer Schwellenwahrscheinlichkeit beginnt willkürlich zu erscheinen. Condorcet schlug vor, als Schwelle das Risiko einer Fahrt mit der Fähre von Dover nach Calais zu nehmen. Das war vor der Französischen Revolution. (Angesichts seines Schicksals hätte Condorcet als kleineres Risiko sicher jenes für die Segelfahrt von Calais angesehen. Er kam in französischen Gefängnissen um.) Würden wir heutzutage die Gefahr, im Ärmelkanal auf dem Weg nach Frankreich zu ertrinken als zu klein erachten, um in Erwägung gezogen zu werden?

4. Familienfehde

Am einfachsten machen Sie abschließend ein Gedankenexperiment. Angenommen, ein Casino könnte unendlich hohe Beträge auszahlen. Würden Sie Ihr gesamtes Einkommen für diese Wette riskieren? Ich nicht.

Aber warum weigern sich Menschen, Wetten mit unendlichen Auszahlungen anzunehmen – das heißt mit einem unendlichen mathematischen Erwartungswert? Die berühmteste Lösung dieses Problems stammt von Daniel Bernoulli, der über die Frage nachdachte, wie sie sein Cousins Nikolaus gestellt hatte. Die Bernoullis waren eine angesehene aber geradezu verhexte Familie von Mathematikern. Als Protestanten in den spanischen Niederlanden waren sie zur Zeit der Spanischen Furie vor den Massakern 1583 durch Katholiken aus Antwerpen geflohen. Sie ließen sich schließlich in der Schweizer Stadt Basel nieder, wo sie begannen, sich gegenseitig auf subtile Weise zu verfolgen.

Denn die Familie der Bernoullis war durch die Eifersucht gespalten. Daniels rebellischer Onkel Jakob wurde Astronom nach dem Motto *Invito patre, sidera verso:* Gegen meines Vaters Willen greife ich nach den Sternen. Jakob war auch ein hervorragender Mathematiker. Er war der erste, der einen Vorschlag unterbreitete, wie Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen wie dem, nach zehn Würfen erstmals Kopf zu erhalten, zu berechnen seien. Geheim unterrichtete er seinen jüngeren Bruder Johann in Mathematik, der sich seines Vaters Wunsch, er solle Geschäftsmann werden, widersetzte. Johann erwies sich als gelehriger Student – zu gelehrig für Jakob, der fürchtete, dass ihn sein Bruder als Mathematiker an der Universität Basel verdrängen würde. Vielleicht hatte er halb Recht: Als er 1705 starb, folgte ihm Johann auf seiner Position nach.

Arrogant, hoheitsvoll, distanziert und selber der berühmteste Mathematiker seiner Zeit, betrachtete er mit Argusaugen seinen eigenen begabten Sohn Daniel, der im Alter von elf Jahren begann, bei seinem etwas älteren Bruder Mathematikunterricht zu nehmen. Sein Vater Johannes versuchte ihn ins Geschäftsleben zu zwingen. Daniel bevorzugte Medizin und Mathematik. Glücklicherweise eröffneten sich ihm Aussichten. Im Alter von 25 wurde er von Basel nach St. Petersburg an die neue russische Akademie gelockt, um dort zu unterrichten. Jedoch gab es dort keine Studenten, außer jenen zwei, die jeder Professor mit sich brachte. In einer Zeit, als die meisten Mathematiker den Großteil ihrer Zeit mit Unterricht verbringen mussten, war für einen an der Forschung interessierten Mathematiker die Akademie wie ein Paradies. Aber St. Petersburg – Zar Peters neue Hauptstadt, die aus den Sümpfen der Newa herauswuchs auf Kosten von tausenden Leben wie auch des Architekten, der unter die Knute des Zaren geriet – war jung, wild und roh. Die Zustände bei Hof waren schwer zu ertragen, und als die Unterstützer der Akademie verschwanden, verdunkelte sich ihre Zukunft. Unter dem Vorwand einer Krankheit quittierte Bernoulli 1733, nach acht Jahren, seinen Dienst und machte sich aus dem Staube. Wohlwollend (eine Seltenheit unter Bernoullis) vermittelte er seinen Posten einem tüchtigen jungen Freund aus der Schweiz, der zwischen dem ersten und zweiten Essensaufruf eine wissenschaftliche Arbeit hinschleudern konnte. Der Name des Freundes war Leonhard Euler.

Der Ästhet Daniel hatte die Lebensart der Spieler im heiligen Russland verachtet. Dennoch hatte er von dort anscheinend gelernt, dass Spieler wenig für Wetten von anscheinend unendlichem Wert zu zahlen bereit sind: Der Spieler denkt nicht ans Geld, sondern an den Nutzen des Geldes; an das Potenzial, Glück zu verschaffen.

Nehmen wir an, jeder zusätzliche Dollar trage weniger und weniger zu Ihrer Zufriedenheit bei. Sie beziehen aus dem ersten Dollar, den Sie ausgeben, mehr Befriedigung als aus dem hundertsten; mehr aus dem hundertsten Dollar als aus dem millionsten. Dann kann die Befriedigung, die Sie selbst bei unendlicher Auszahlung aus so einer Geldmenge ziehen, bescheiden sein. Sie würden nur wenige Dollar dafür ausgeben.

Bernoulli argumentierte, dass die Befriedigung durch einen Zugewinn proportional zu seiner Größe sei, aber invers zum bestehenden Vermögen. Ein Gewinn von 1.000 $ bedeutet für Sie mehr als ein Gewinn von 10 $, aber 1.000 $ bedeuten mehr für Sie, wenn Sie arm sind, als wenn Sie ein Millionär sind. Sei x die Menge Geld, die Sie besitzen und dx ein Zuwachs Ihres Geldes. (Wohlgemerkt: dx ist ein Symbol und nicht das Produkt von d und x.) Sei y die Befriedigung, die Sie aus Ihrem Geld beziehen und dy der Zuwachs an Befriedigung. Dann, behauptete Bernoulli, gilt

$$dy = \frac{k \cdot dx}{x} \tag{5}$$

für eine geeignete positive Zahl k.

Anders formuliert heißt (5): Die Änderung Ihrer Befriedigung hängt direkt proportional von der Änderung Ihres Vermögens ab, aber indirekt proportional von ihrem Vermögen selbst. Wenn Sie beispielsweise so reich sind wie Krösus (bevor er von Kyros dem Großen besiegt wurde) und Ihre Großmutter schenkt Ihnen zum Geburtstag einen Scheck über 5 $, so wird Ihre Befriedigung lediglich unwesentlich wachsen; dy wird winzig sein. Viel hängt auch von k ab. Das ist eine Konstante, welche Ihre Konsumneigung bemisst, Ihre Fähigkeit, mit raschem Zuwachs an Vermögen umzugehen. Für Gebildete nimmt k eher höhere Werte an: Sie werden sich eines Millionengewinns mehr erfreuen, wenn Sie wissen, was man damit tun kann. Um diese Ideen zu fassen, verwendete Bernoulli die Infinitesimalrechnung und ermittelte aus (5) eine logarithmische Funktion, welche Befriedigung und Vermögen verbindet:

$$y(x) = k \log x + c,$$

mit einer Konstanten c. Spezifizieren wir c als Produkt aus -1, k und dem Logarithmus von Ihrem Vermögen α vor der Annahme der Wette:

$$y(x) = k \log x - k \log \alpha$$

oder

$$y(x) = k \log \frac{x}{\alpha}. \tag{6}$$

Zweckmäßigerweise drückt hier y Ihren relativen Gewinn (oder Verlust) an Glück aus, wenn Ihr Vermögen wächst (oder schwindet). Nach der Art nüchterner Ökonomen nennen wir diese Funktion *Nutzen* des Geldgewinns x. Wenn Ihr Vermögen bei α bleibt, dann wird Ihre y-Messung bei Null bleiben, denn $y = k \log 1 = 0$.

Zurück zur Wette. Setzen wir der Einfachheit halber $k = 1$. Sie beginnen mit dem Vermögen α. Wenn Sie erstmals beim n-ten Wurf Kopf erhalten, dann wird zu α der Wert 2^{n-1} hinzukommen. Ihr prächtiges neues Vermögen x wird $\alpha + 2^{n-1}$ sein. Der Nutzen $y(x)$ dieses Vermögens für Sie wird $\log[(\alpha + 2^{n-1})/\alpha]$ sein. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $1/2^n$. Wir berücksichtigen jeden Wurf, wo eine Kopf erstmals auftreten kann, und können den erwarteten Nutzen U der Wette für Sie definieren:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \log\left(\frac{\alpha + 2^{n-1}}{\alpha}\right). \tag{7}$$

Was würden Sie für diese Wette zahlen? Sicher werden Sie nicht mehr zahlen als Sie meinen, dass die Wette für Sie wert sei. Wir haben bereits gesehen, dass dieser Wert geringer ist als der mathematische Erwartungswert der ursprünglichen St. Petersburger Wette, der unendlich ist. Die Frage ist, ob wir mit diesem Nutzenbegriff zu einer genaueren Schätzung gelangen, was die Wette für Sie wert wäre, im Sinne Ihrer Befriedigung. Es mag helfen, die Frage von hinten her anzugehen. Nehmen wir an, Sie hätten das Recht, die Wette gratis zu nehmen. Wieviel müsste ich Ihnen zahlen, um Sie zur Aufgabe dieses Rechtes zu bewegen? Es müsste ein Wert sein – nennen wir ihn D –, von dem Sie annehmen, er würde Ihnen ebensoviel Befriedigung verschaffen wie die Wette. Angenommen Sie addieren D zum Vermögen α hinzu, das Sie bereits besitzen. Dann – man denke an (6) – wäre der Nutzen Ihres neuen Vermögens $\log[(\alpha + D)/\alpha]$. Sie wollen Ihre Wette nicht aufgeben, es sei denn dieser Nutzen ist wenigstens so groß wie jener, den Sie sich aus der Wette erwarten. Wir müssen D so wählen, dass $\log[(\alpha + D)/\alpha]$ dem Wert von (7) gleich ist. Um dies zu tun, bringen wir (7) in eine angenehmere Gestalt. Wegen $\log(x_1/x_2) = \log x_1 - \log x_2$ können wir

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \log\left(\alpha + 2^{n-1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \log \alpha$$

schreiben. Weil $\log\alpha$ eine Konstante ist, können wir es aus der zweiten Summe herausheben:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)\log\left(\alpha+2^{n-1}\right) - \log\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Aber die letzte Summe (Manna vom Himmel!) ergibt gerade den Wert 1, also

$$U = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)\log\left(\alpha+2^{n-1}\right) - \log\alpha. \tag{8}$$

Da wir D als Argument einer logarithmischen Funktion behandeln wollen, ziehen wir möglichst viel von (8) in eine Logarithmusfunktion. Wegen $\log x_1 + \log x_2 = \log x_1 x_2$ und $r\log x = \log x^r$, können wir (8) zu

$$U = \log\left(\prod_{n=1}^{\infty}(\alpha+2^{n-1})^{1/2^n}\right) - \log\alpha \tag{9}$$

umformen. Endlich haben wir unseren Ausdruck für D:

$$D = \prod_{n=1}^{\infty}\left((\alpha+2^{n-1})^{1/2^n}\right) - \alpha.$$

Problem 5: Überprüfen Sie, dass, wie versprochen, $\log[(\alpha+D)/\alpha]$ mit dem Wert von (9) übereinstimmt.

Nach Bernoullis Rechnung würden Sie, wenn Sie mit einem Vermögen von 100 \$ beginnen (das heißt $\alpha = 100\,\$$), nicht mehr als etwa 4 \$ für die Wette zahlen. (Das heißt, D wird etwa 4 \$ sein. Als ich Bernoullis Gleichung auf meinem kleinen Computer ausprobierte, erhielt ich als Resultat 4,39 \$.) Mit anderen Worten: Sie würden die Wette aufgeben für Angebote, die 4 \$ merklich überschreiten).

Problem 6: Verifizieren Sie Bernoullis Schätzung, dass Sie nicht viel mehr als 4 \$ für die Wette zahlen würden, wenn Sie mit einem Vermögen von 100 \$ beginnen.

Problem 7: Wie viel würden Sie ungefähr zahlen, wenn Sie mit einem Vermögen von 1.000 \$ beginnen?

Eigentlich hatte sich Bernoulli des alten Begriffs von Erwartungswert bemächtigt, den Rechtsgelehrte des siebzehnten Jahrhunderts entwickelt hatten, um den kirchlichen Grundsatz anzugreifen, dass Spiel und Wucher ungerecht seien. Sie versuchten, einen gerechten Zinssatz für Banken und Versicherer berechnen, die Risiko übernehmen. Sie meinten, Gerechtigkeit bedeute, dass alle denselben Preis für ein Risiko übernehmen müssten – den mathematischen Erwartungswert. Bei dieser Auslegung des Erwartungswertes blickt man in die Zukunft wie ein Richter mit steinerner Miene. In Bernoullis Theorie hingegen erwägt man die Zukunft wie ein besorgter Kaufmann. Der Wert eines Risikos schwankt von einer Person zur anderen; nicht alle werden denselben Preis zahlen. Dieses Argument ärgerte Nikolaus Bernoulli, Professor für Römisches und Kirchenrecht. Er entgegnete, sein Cousin sei daran gescheitert, „die Erwartungen jedes Teilnehmers im Einklang mit Gleichheit und Gerechtigkeit zu bewerten.“Daniel replizierte sehr simpel, dass seine Theorie „perfekt mit der Erfahrung übereinstimme“. Bernoulli eichte die Mathematik so, dass sie mit der Welt zusammenpasst.

5. Was ist’s wirklich wert?

Großer Schritt um mehr als ein Jahrhundert. Unter den Ökonomen treten die Jungtürken auf, die ihre Krummsäbel der Infinitesimalrechnung schwingen. Lustvoll räumen sie mit der Lehre der Alttürken auf, dass der Wert eines Gutes vom Ausmaß der Arbeit abhänge, welche in seine Produktion investiert werden musste. Nein, behaupten sie, der Werte eines Gutes hänge in Wahrheit von der Befriedigung ab, die der Konsument daraus zieht, speziell aus der letzten konsumierten Einheit. Die jungen Türken nennen die Einheit für diese Befriedigung den marginalen Nutzen und machen ihn zu ihrem Prüfstein. Seltsamerweise schreiben sie dieses Konzept nicht Daniel Bernoulli zu, sondern einem englischen Philosophen, Jeremy Bentham.

Im zwanzigsten Jahrhundert kamen die Ökonomen endlich zurecht mit dem Weisen von St. Petersburg. Unter ihnen hisste der Österreicher Carl Menger die rote Fahne. Was, wenn die Auszahlung von 2^{n-1} für den n-ten Wurf erhöht würde? Sie könnten das durch Angabe einer unbeschränkten logarithmischen Funktion tun. Strebt die Geldmenge x gegen unendlich, so auch der Nutzen $U(x)$ aus diesem Geld. Zum Beispiel ist es gut möglich, eine Geldsumme x_n zu finden, sodass $U(x_n) = 2^{n-1}$ gilt. Aber in diesem Fall wäre der Nutzen der Wette

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots$$

Willkommen zurück in der Unendlichkeit!

Die offensichtliche Lösung war, eine obere Schranke anzunehmen für das Ausmaß an Befriedigung, die man von irgendeiner Geldmenge beziehen kann – das heißt die Nutzenfunktion zu beschränken. Das bedeutet, in (6) einen maximalen Wert für $y(x)$ anzugeben – sagen wir eine Million Nutzenseinheiten für jedes Einkommen ab 10 Mio. \$. Ein Spieler mit dieser Nutzenfunktion würde kein Vergnügen daraus gewinnen, mehr als 10 Mio. \$ zu gewinnen. Deshalb würde er für keine Wette mehr als 10 Mio. \$ zahlen. Tatsächlich kannte Bernoulli diese Lösung. Sein Artikel wiederholte eine Bemerkung eines weiteren Schweizer Mathematikers, Gabriel Cramer, dass die Wertfunktion beschränkt sein sollte. (Cramer war ein begnadeter Problemlöser. Die Cramersche Regel, um Matrizen für die Lösung simultaner Gleichungen zu verwenden, hilft uns immer noch, alles zu modellieren – von Wirbelstürmen bis zur Weltwirtschaft.) Unglücklicherweise hatte sich Cramer eine Funktion ausgedacht, wo der Gesamtwert der Geldes bis zu einer gewissen Geldakkumulation, sagen wir 10 Mio. \$, gleich der Geldmenge war, alles Geld über diesen Wert hinaus aber nichts mehr wert war. Der marginale Nutzen stürzte plötzlich von 1 auf 0 ab. Sicher sollte die Abnahme aber glatter erfolgen.

Hyperbelähnliche Nutzenfunktionen würden besser passen als Cramers Funktion. Sei w der Reichtum und Z der Glückszustand. Man betrachte die Funktion

$$U(w) = \frac{Zw}{Z+w}. \tag{10}$$

Das ist eine feine Nutzenfunktion. Sehen Sie selbst!

Problem 8: Zeigen Sie, dass $U(w)$ in (10) für Reichtum 0 auch Nutzen 0 liefert und marginalen Nutzen 1; und eine glatte asymptotische Annäherung des Nutzens an Z, wenn der Reichtum zunimmt.

Was hat das alles mit der Gegenwart zu tun? Nun, warum investieren Gesellschaften so wenig in die Ansammlung von Wissen? Man führe sich die Notlage der reinen Mathematik vor Augen – des Fundaments für Wissenschaft und Technologie. Reine Mathematik hilft der Wirtschaft beim Wachstum, dennoch geben wir wenig dafür aus. Das gleiche war der Fall zu Daniels Zeiten. Obwohl die Herrscher erkannten, dass Mathematik die Navigation ihrer Schiffe und die Genauigkeit ihrer Kanonen verbessern würde, wollten nur wenige dafür etwas ausgeben. Die kurze Liste beginnt mit Friedrich von Preußen und endet mit Katharina von Russland. (Ihr Beitrag war gut investiertes Geld, in besessene Mathematiker. Während er in der „Äneis" blätterte, stieß Euler zufällig auf diese Zeile: „Vorne ruht am Anker der Kiel, und hinten am Strandseil." Darauf ließ er das Buch sinken, griff zur Feder und modellierte das Schwanken eines Schiffes.) Was die Eifersucht der Bernoullis schürte, war ihr beständiges Gedränge um eine Handvoll Stellen und Preise: Johann Bernoulli warf einen seiner Söhne aus dem Haus, weil er einen Preis der Akademie der Wissenschaften in Paris gewann, um den sich auch Johann bemühte. E. T. Bell, ein brillianter Mathematikhistoriker, bemerkte: „Warum sollten menschliche Wesen, wenn sie sich über Kartenspiele aufregen können, nicht auch wegen Mathematik ereifern können, die doch unendlich aufregender ist?"

Für ein Volk sind Investitionen in Grundlagenforschung wie ein Spiel, eine Suche nach Ideen mit hohen Auszahlungen und kleinen Wahrscheinlichkeiten, eine Versuchsreihe mit einem Kopf beim hundertsten Wurf. Wären erwartete Auszahlungen so bedeutend, dann wären wir Narren, nicht mehr in Forschung zu investieren. Aber leihen wir unser Ohr Bernoulli: Worauf es ankommt, ist nicht die Geldmenge, die wir erwirtschaften – es ist die Befriedigung, die wir daraus beziehen. Angenommen, wir hätten keine Verwendung für eine weitere halbe Millarde.

Dann würden wir vorziehen, unser bestehendes Einkommen zu behalten, anstatt Teile davon im Spiel zu riskieren.

Aus diesem Grunde werden Appelle, mehr Forschung zu finanzieren, weil diese später einmal hohe Auszahlungen in Geld bewirken wird, das Volk nicht bewegen. Was hingegen die Herzen und Geldtaschen öffnen mag, ist ein Aufruf, für Forschung etwas einzusetzen, weil sie ein Spiel ist, ein historischer Nervenkitzel. Denken Sie an das Wettrennen um die erste Mondlandung!

Bemerkungen zur Zeitschrift „Quantum“ Die Zeitschrift „Quantum“ wurde von 1990 bis 2001 von der “National Science Teachers Association” in Zusammenarbeit mit der Springer-Verlag New York herausgegeben. Der Name „Quantum“ ist die Übersetzung des Namens des russischen Schwestermagazins „Kvant“, das 1970 vom Mathematiker A. N. Kolmogorov und dem Physiker I. K. Kikoyin gegründet wurde. Diese Zeitschrift wendet sich vor allem an interessierte Schüler, wobei die Artikel von Wissenschaftlern verfasst werden.

Die ÖMG hat auf Grund einer Initiative von Peter Michor die Möglichkeit, ausgewählte (und ins Deutsche übersetzte) Artikel von „Quantum“ nachzudrucken. Die Redaktion der IMN möchte damit in vermehrtem Maß Schüler sowie AHS- und BHS-Lehrer ansprechen. In den IMN 189 (April 2002, pp. 21–31) ist bereits der Artikel „Funktionalgleichung und Gruppen“ von Y. S. Brodsky und A. K. Slipenko, in den IMN 192 (April 2003, pp. 22-29) der Artikel „Kettenbrüche“ von Yu. Nesterenko und E. Nikishin und in den IMN 194 (Dezember 2003, pp. 1–12), „Ein Ritt auf Sierpinskis Teppich und eine Kreuzfahrt entlang einer unendlichen Küstenlinie“ von I. M. Sokolow erschienen.

Buchbesprechungen

Allgemeines und Geschichte

M. Aigner, G. M. Ziegler: Proofs from *The Book*. Third Edition. With 250 Figures. Including Illustrations by K. H. Hofmann. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, VIII+239 S. ISBN 3-540-40460-0 H/b € 29,95.

Die erste Ausgabe dieses Werkes wurde an vielen Stellen sehr enthusiastisch rezipiert, so auch in den IMN Nr. 181 (1999) und Nr. 191 (2002). Das Buch wurde inzwischen in viele Sprachen übersetzt und auch um einige Kapitel erweitert. Interessanterweise wurde auch ein Kapitel der ersten Ausgabe wieder entfernt, dessen Inhalt nach Angabe der Autoren nicht kurz und einfach in vollständiger Weise darstellbar war.

Ohne die bisherigen Rezensionen wiederholen zu wollen, sei doch auf den Umstand hingewiesen, daß in diesem Werk zum Teil sehr tiefliegende mathematische Resultate auf knappe und elegante Art bewiesen werden, oft durch Angabe mehrerer Beweise.

Die Lektüre setzt von seinen Leserinnen und Lesern einiges an mathematischen Vorkenntnissen voraus, belohnt aber durch tiefgründige Einblicke in die Welt der Mathematik.

Das Buch hat sich auch als Quelle für Seminarvorträge bestens bewährt.

F. Rendl (Klagenfurt)

M. Aigner, G. M. Ziegler: Das *Buch* der Beweise. 2. Auflage. Mit Zeichnungen von K. H. Hofmann. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, VIII+271 S. ISBN 3-540-40185-7 H/b € 29,95.

Das ist die zweite deutsche Auflage des ursprünglich auf englisch erschienenen mathematischen Bestsellers *Proofs from The Book*. Neu aufgenommen wurden ein Kapitel über Eulersche Partitionsidentitäten mit einem bijektiven Beweis des Pentagonalzahlensatzes und eines über das Kartenmischen. Im Kapitel 16 kamen der Stern-Brocot-Baum und die damit zusammenhängende Aufzählung der positiven rationalen Zahlen von Calkin und Wilf dazu. In einem separaten Kapitel finden sich drei verschiedene Beweise für die Reihe der Reziproken der Quadratzahlen. Meiner Meinung nach zeigt diese Reihe, dass sich die ursprüngliche Idee des Buches, es gäbe zu jedem Resultat den „perfekten“ Beweis, nicht durchhalten lässt. Hier gibt es ja mehrere Beweise, die als „perfekt“ angesehen werden können. Das wären etwa die Interpretation der Reihe als unendlich-dimensionales Analogon des Pythagoräischen Lehrsatzes, der Vergleich der Produktdarstellung des Sinus mit seiner Potenzreihenentwicklung oder der in Kapitel 20 gegebene Beweis aus der Partialbruchzerlegung des Cotangens. Aber auch unter den in diesem Kapitel behandelten elementaren Beweisen ist es schwer, den besten oder einfachsten auszuwählen. Noch einfacher als die hier gegebenen Beweise scheint übrigens der von Josef Hofbauer im American Mathematical Monthly 109 (2002), 196–200, angegebene zu sein. Es ist ja gerade das Überraschende an der Mathematik, dass sich ein und dasselbe „Resultat“ oft auf den verschiedensten Wegen beweisen lässt, was ja auch durch das vorliegende Buch eindrucksvoll bewiesen wird.

J. Cigler (Wien)

B. Cipra: Misteaks. ... and how to find them before the teacher does ... Third Edition. A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2000, XV+70 S. ISBN 0-56881-122-5 P/b \$ 5,95.

Wenn bei der Multiplikation zweier 5-stelliger Zahlen eine 7-stellige Zahl herauskommt, so kann das einfach nicht stimmen. Der Autor stellt – übersichtlich geordnet – viele Situationen zusammen, in denen man leicht und mit nur wenig Übung Fehler in den Lösungen von Aufgaben erkennen kann. Wenn eine Funktion zwischen 0 und 10 nie den Wert 3 übersteigt, so kann das bestimmte Integral über diesen Bereich nicht 50 sein; Symmetrien in Ausdrücken bleiben bei der Weiterverarbeitung fast immer erhalten; in einer Formel für den Flächeninhalt kann aus Dimensionsgründen keine 3. Potenz stehen, die nicht gekürzt werden kann, etc. Der Komödiant und Neurologe Gunther Philipp hat einmal geschrieben, dass er bei der bekannten Aufgabe „Man sieht einen Berg unter dem Winkel 10 Grad und 3 km weiter unter dem Winkel 8 Grad; wie hoch ist der Berg?“ die Höhe des Berges als 0,2 cm berechnete. Hätte er dieses Buch gelesen, so hätte er diese „Lösung“ nicht abgegeben.

G. Pilz (Linz)

U. Daepp, P. Gorkin: Reading, Writing, and Proving. A Closer Look at Mathematics. (Undergraduate Texts in Mathematics.) Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2003, XVI+395 S. ISBN 0-387-00834-9 H/b € 64,95.

Students have usually little training in rigouros mathematical reasoning. They have an intuitive sense of why things are true, but not the exposure to the detailed and critical thinking necessary to survive in the mathematical world. The intention of the authors has been to bridge this gap. It is based on Pólya’s four step process: learn to understand the problem, devise a plan to solve the problem, carry out the plan, and look back and check what the results told you.

This book was originally written for a course of first and second year college students (and their teachers). Many illustrations, a wide variety of examples with and without proofs aid students in the transition from calculus to higher level mathematics.

G. Kirlinger (Wien)

A. Stubhaug: Es war die Kühnheit meiner Gedanken. Der Mathematiker Sophus Lie. Aus dem Norwegischen übersetzt von K. Hartmann-Butt. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2003, XIII+572 S. ISBN 3-540-43657-X H/b € 39,95.

Das vorliegende Werk ist eine sehr ausführliche Lebensbeschreibung des norwegischen Mathematikers Sophus Lie. Dem Autor Arild Stubhaug, kompetent unter anderem durch ein Studium der Mathematik und der Literaturwissenschaften, ist es gelungen, ein breites Bild der politischen und wissenschaftlichen Situation Norwegens zur Zeit Lies zu geben. Das Buch bringt allen großen Gewinn, die sich für Sophus Lie und seine Zeit interessieren. Insbesondere erfährt man viel über den wissenschaftlichen Kontakt zwischen Lie und andere mathematischen Größen der damaligen Zeit wie Klein, Darboux, Poincare… Wie schon in der Biographie von Niels Henrik Abel kommt der Autor ohne eine einzige mathematische Formel oder präzise mathematische Definition aus.

G. Kirlinger (Wien)

Algebra und Zahlentheorie

T. Bröcker: Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker. (Grundstudium Mathematik.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2003, X+366 S. ISBN 3-7643-2178-4 P/b € 28,79.

Nach einem einleitenden Abschnitt („Schulweisheiten“) wird der Standardinhalt einer Lehrveranstaltung zur Linearen Algebra präsentiert, die Auflistung der fünf Kapitelüberschriften kann hier genügen: Vektorräume, Matrizenrechnung, die Determinante, Bilinearformen, die Jordansche Normalform. Ein umfangreicher Abschnitt ist der Linearen Geometrie in projektiven und affinen Räumen über einem Vektorraum mit kommutativem Grundkörper gewidmet. Neben Strukturaussagen über die jeweiligen Unterräume finden sich die projektiven sowie affinen Klassifikationen der Quadriken. Die Kopplung zwischen projektiven Quadriken und quadratischen Formen wird diskutiert. Einem Kapitel zur Tensorrechnung folgen zwei Abschnitte über Lineare Gruppen und Liealgebren. Das mit „Quaternionen und orthogonale Gruppen” überschriebene Kapitel stellt die Beziehungen zur Physik her. Abschließend wird die Lineare Geometrie auf Moduln über einem kommutativen Ring erweitert.

Dieses Lehrbuch stellt eine sehr umfassende und breit angelegte Beschreibung der Linearen Geometrie dar, es ist daher für einschlägig Lehrende sehr zu empfehlen. Aufgrund der vielen Übungsaufgaben sowie der instruktiven Präsentation der Inhalte und Zusammenhänge ist es auch hervorragend zum weiterführenden Selbststudium geeignet.

P. Paukowitsch (Wien)

G. Castellini: Categorical Closure Operators. (Mathematics: Theory & Applications.) Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2003, XII+300 S. ISBN 0-8176-4250-1, 3-7643-4250-1 H/b € 94,16.

The book is a substantial extension of the author's survey *Categorical Closure Operators*, published in: J. Koslowski and A. Melton (Eds.): *Categorical Perspectives*, Birkhäuser, Boston , 2001 (p. 109–150). It presents the contemporary theory of categorical closure operators, one of the main branches of categorical topology. The purpose of the theory is to develop a categorical characterization of the classical topological concepts. It provides a tool that allows us to extend these concepts to an arbitrary category so that the results of the theory have many applications in other fields of mathematics, particularly topology, algebra, and discrete mathematics.

The author, a leading specialist in the field, divided the book into two parts. The first one deals with the general theory, starting with basic definitions and gradually moving to more advanced properties. The second part discusses applications to the classical concepts of epimorphisms, separation, compactness, and connectedness. Many examples, mostly of topological and algebraic nature, are presented illustrating the various concepts introduced. A comprehensive list of references is also included.

There is only one other book on the theory of categorical closure operators, namely: D. Dikranjan and W. Tholen: *Categorical Structure of Closure Operators*, Kluwer Acad. Publ., 1995. The benefit of the Castellini's book is that, after introducing the reader to the general theory, it presents a number of applications based on quite recent results achieved in this field. Thus the book provides basic literature for those interested in the theory of closure operators and its applications. It is an excellent exposition of a part of modern mathematics.

J. Šlapal (Brno)

G. Greaves: Sieves in Number Theory. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Vol. 43.) Springer, Berlin u.a. 2001, XII+304 S. ISBN 3-540-41647-1 H/b DM 189,– (2004: € 133,70).

Seit der Formulierung des Siebes des Eratosthenes wurde eine Vielzahl von Siebmethoden als Werkzeuge in die der Zahlentheorie eingesetzt. Das 1974 erschienene Werk *Sieve Methods* von H. Halberstam und H.-E. Richert diente und dient dabei als Standardreferenz für dieses Gebiet.

Der Autor des vorliegenden Buches widmet sich in 7 Kapiteln den sogenannten *kleinen Sieben*, da die immensen Fortschritte auf dem Gebiet der Siebtheorie eine Einschränkung nötig machten.

In Kapitel 1 werden Grundlagen und eine einheitliche Notation etabliert, Kapitel 2 beschreibt die Selbergsche Λ^2-Methode für obere Schranken. Das 3. Kapitel beinhaltet die kombinatorischen Siebe von Brun und Rosser, Kapitel 4 geht dann auf die analytischen Aspekte des Rosserschen Siebes in beliebiger Dimension ein. Im zentralen Kapitel 5 wird mit gewichteten Sieben ein Gebiet behandelt, auf dem der Autor zahlreiche Beiträge beigesteuert hat. Die nicht triviale Abschätzung des Restterms im linearen Sieb nach Ivaniec bildet den Inhalt von Kapitel 6, und Kapitel 7 beschließt das Buch mit der Behandlung des Ankeny-Onishi-Siebes und der $\Lambda^2\Lambda$-Methode von Selberg.

Die Stärken des Buches liegen auf jeden Fall in der klaren und gut aufgebauten Darstellung der beschriebenen Themen. Etwas zu wenig Wert wurde auf Anwendungen der Resultate gelegt, die seit jeher eine wichtige Rolle in der Siebtheorie eingenommen haben. Abschließend kann man sagen, dass das vorliegende Buch einen sehr umfassenden Einblick in die beschriebenen Gebiete liefert. Aufgrund der komplexen Thematik sollte der Leser jedoch einführendes Grundwissen mitbringen.

M. Lamberger (Graz)

R. S. Irving: Integers, Polynomials, and Rings. A Course in Algebra. (Undergraduate Texts in Mathematics.) Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2004, XV+284 S. ISBN 0-387-20172-6 P/b € 39,95, ISBN 0-387-40397-3 H/b.

This is a very elementary introduction to elementary number theory and some related topics in algebra (rings, fields, polynomials), centered around the Euclidean algorithm. It emphasizes mathematical thinking: proof techniques like induction are explained in detail, cautionary tales of faulty proofs are told, and definitions are preceeded by pages of motivational chitchat.

The topics chosen are well suited for a student's first exposure to "serious" mathematics (much more so, in the reviewer's opinion, than the calculus course that is the norm in almost all curricula almost everywhere). One purely superficial gripe: the extremely pale and spindly text face is unpleasant to read (and helps to give TeX/LaTeX an undeservedly bad name).

S. Frisch (Graz)

K. Jänich: Lineare Algebra. Zehnte Auflage. Mit zahlreichen Abbildungen. (Springer-Lehrbuch.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, XII+270 S. ISBN 3-540-40207-1 P/b € 19,95.

Falls ein Lehrbuch für die mathematische Grundausbildung naturwissenschaftlich und technisch orientierter Studienrichtungen im universitären Bereich derart akzeptiert wird, daß nach 25 Jahren die 10. Auflage begrüßt werden kann, dann liegt ein meisterlich konzipiertes Werk vor! Der Band ist charakterisiert durch die sehr geschickte Verzahnung von präzisem mathematischen Problemlösen und anwendungsorientiertem Problemstellen. Die Testfragen berücksichtigen zwei Lesergruppen, die Mathematiker und die Physiker. Die Kapitelüberschriften mögen zur inhaltlichen Beschreibung dieses Standardwerkes genügen: Mengen und Abbildungen, Vektorräume, Dimensionen, Lineare Abbildungen, Matrizenrechnung, Determinante, Lineare Gleichungssysteme, Euklidische Vektorräume, Eigenwerte, Hauptachsen-Transformation, Klassifikation von Matrizen. Diesem inhaltlich und didaktisch vorbildlichen Lehrbuch für Studenten und Dozenten sind noch viele weitere Auflagen zu wünschen!

P. Paukowitsch (Wien)

H. Kurzweil, B. Stellmacher: The Theory of Finite Groups. An Introduction. (Universitext.) Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2004, XII+387 S. ISBN 0-387-40510-0 H/b € 69,95.

Es liegt nun die englische Übersetzung des in IMN 180, S. 48, ausführlich besprochenen deutschsprachigen Lehrbuchs vor – ein wunderbares Lehrbuch, für Neulinge jedoch eine "harte" Nuss!

Günter Lettl (Graz)

T. Y. Lam: A First Course in Noncommutative Rings. Second Edition. (Graduate Texts in Mathematics 131.) Springer, New York u.a. 2001, XIX+385 S. ISBN 0-387-95325-6 P/b (2004: € 53,45), ISBN 0-387-95183-0 H/b DM 181,79.

Ten years ago, the first edition (see the review in Vol. 182, p. 38) of this book appeared. It is quite rare that a book can become a classic in its field in such a short time, but this did happen for this excellent book. Of course, minor changes were made for the second edition; new exercises and an appendix on uniserial modules were added. Every part of the text was written with love and care. The explanations are very well done, useful examples help to understand the material, and the exercises in the text (a solution manual is available) do help a lot to turn the reader into an active participant. The material covers the structure theory of (noncommutative) rings: the Wedderburn-Artin theory, the theory of radicals, and the classes of primitive, prime, division, ordered, (semi-)local and (semi-)perfect rings. The results are applied to the representation theory of groups.

G. Pilz (Linz)

S. K. Lando: Lectures on Generating Functions. (Student Mathematical Library, Vol. 10.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003, XV+148 S. ISBN 0-8218-3481-9 P/b $ 29,–.

In his preface the author states: "I wanted to write a simple and accessible introduction to generating functions, paying attention first of all to striking examples". He begins with the lucky tickets problem of A. A. Kirillov and shows how it can be solved with generating functions and how asymptotic estimates of the solution can be derived. A simpler method by inclusion and exclusion is given in a later chapter. There are a lot of other very interesting examples reaching from the well-known Fibonacci or Catalan numbers to Euler and tangent numbers which are connected via the Bernoulli-Euler triangle introduced by V. I. Arnol'd with its combinatorial background consisting of up down permutations or equivalently Morse polynomials. Also Flajolet's approach to continued fractions of generating functions is shown, some asymptotic estimates of coefficients of generating functions are given, and finally some gems of the theory of partitions and of enumeration problems for embedded graphs are sketched. The book is very stimulating and the text is accessible to interested undergraduates with some mathematical maturity. The problems seem to be more difficult. Here some hints for the solutions would be appropriate.

J. Cigler (Wien)

M. Ram Murty: Problems in Analytic Number Theory. (Graduate Texts in Mathematics 206.) Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2001, XVI+452 S. ISBN 0-387-95143-1 H/b DM 98,– (2004: € 58,80).

Wie schon in seinem Buch *Problems in Algebraic Number Theory* (Springer GTM 190, gemeinsam mit J. Esmonde), beschreitet der Autor im vorliegenden Buch einen Zugang zum gewählten Thema, der auf dem eigenständigen Lösen von Problemen und Beispielen basiert.

Die erste Hälfte des Buches besteht zum einen aus Resultaten und Beispielen, die der Leser dazu benutzen soll, die weiterführenden, oft zusammenhängenden Probleme zu lösen. Jedes Kapitel ermöglicht es dem Leser, in kleinen Etappen ein Teilgebiet der analytischen Zahlentheorie auf eigene Faust zu erkunden, wobei je nach Schwierigkeit Hilfestellungen gegeben werden. Die zweite Hälfte des Buches enthält die Lösungen aller gestellten Aufgaben und rundet das vorliegende Werk so zu einem vollwertigen Standardlehrbuch für analytische Zahlentheorie ab.

Das Buch ist in 10 Abschnitte unterteilt, deren Überschriften der Vollständigkeit halber aufgezählt seien: Arithmetische Funktionen, Primzahlen in arithmetischen Progressionen, der Primzahlsatz, Integralmethoden, Funktionalgleichungen, Hadamard-Produkte, Explizite Formeln, die Selberg-Klasse, Siebmethoden und p-adische Methoden.

Zum zweiten Mal ist es dem Autor gelungen, eine exzellente Auswahl an Problemen und Beispielen zu treffen, deren Lösung den Leser auf vortreffliche Weise den Arbeitsmethoden des jeweiligen Kapitels näherbringen wird. Das Buch ist als Einführung in die analytische Zahlentheorie zum Selbststudium sowie als Begleittext für eine Vorlesung uneingeschränkt zu empfehlen.

M. Lamberger (Graz)

E. B. Vinberg: A Course in Algebra. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 56.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003, X+511 S. ISBN 0-8218-3318-9 H/b $ 89,–.

This book arose from courses on algebra which the author taught at two Moscow universities. On the one hand it covers the classical stock of linear algebra including tensor product and tensor algebra. On the other hand, the standard topics of algebra up to Galois theory are treated and some more advanced subjects are touched upon: module theory, algebraic varieties, linear representations, associative algebras, and Lie groups. More than 200 exercises and a list of answers to some of them are provided. Concerning the algebraic part, the presentation is unusual: the elements of group theory (up to Sylow's theorem) are treated in two separate chapters, but ring and field theory are scattered through the book which probably makes it difficult for the reader to follow. For instance, polynomial rings and factorization in Euclidean domains are dealt with in chapter 3, whereas the definition of an ideal enters the scene only more than 200 pages later. To some extent the style changes when progressing from undergraduate to beginning graduate level: the elementary topics are presented in a broad and easyily understandable way, whereas the argumentation grows more and more concise in the chapters devoted to more advanced topics. So the reader is forced to learn to stand on his own feet, which by the way is intended by the author. The book is recommendable for those who look for an unconventional text on algebra.

G. Kowol (Wien)

Geometrie, Topologie

S. Lang: Introduction to Differentiable Manifolds. Second Edition. With 12 Illustrations. (Universitext.) Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2002, XI+250 S. ISBN 0-387-95477-5 H/b € 59,95.

This volume is an introduction to differential manifolds which is intended for postgraduate or advanced undergraduate students. Consequently, manifolds are assumed finite-dimensional (the infinite dimensional case is treated in another book of the same author).

Basic concepts are presented, which are used in differential topology, differential geometry, and differential equations. Charts are used systematically in order to avoid 'hiding geometric thoughts under an irrelevant formalism'. However, as local coordinates are useful for computations and are used frequently in the literature, often also a local coordinate formulation is given. In order to give a self-contained and complete treatment, the first chapter summarizes basic facts on differential calculus, with the intention to make the reader think of the derivative of a map as a linear transformation.

The book is well readable, and it is of interest not only for mathematicians, but also for theory-oriented researchers in applied sciences (e.g. in nonlinear control theory), who need an introduction to this important topic.

I. Troch (Wien)

Analysis

M. J. Ablowitz, A. S. Fokas: Complex Variables. Introduction and Applications. Second Edition. (Cambridge Texts in Applied Mathematics.) Cambridge University Press, 2003, XII+647 S. ISBN 0-521-53429-1 P/b £ 29,95.

Ein hervorragendes Lehrbuch der Funktionentheorie, das sich gegenüber den hierzulande vornehmlich verwendeten Texten durch den sehr umfangreichen Abschnitt 2, „Anwendungen“, auszeichnet. Allein der Theorie der asymptotischen Auswertung von Integralen sind 56 von 512 Seiten gewidmet. Darüber hinaus behandeln die Anwendungen auch ausführlich Riemann-Hilbertprobleme.

Zu vergleichen ist etwa der klassische Text von M. Lavrentiev und B. Chabat: Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Mir, Moscou, 2ème éd., 1977.

N. Ortner (Innsbruck)

H. Amann, J. Escher: Analysis I. Zweite, korrigierte Auflage. (Grundstudium Mathematik.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2002, XV+445 S. ISBN 3-7643-6928-0 P/b € 28,79.

Originialität und Wert des Buches liegen in der Betonung des Wesentlichen und im Blick für das Wesentliche. Welches sind die zentralen Themen einer „Analysis I“ in einer Reihe „Grundstudium Mathematik“? Konvergenz (II), Stetigkeit (III), Differenzierbarkeit (IV), Funktionenfolgen (V): Das sind die Kapitelüberschriften des vorliegenden Buches. Ich kenne kein anderes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, das diese vier Säulen so klar und präzise herausarbeitet.

Vom Leser wird eine beträchtliche Bereitschaft zur Abstraktion erwartet, was den Autoren den Vorwurf des Bourbakismus eintrug – völlig zu Unrecht wie beispielsweise an Hand des 4. Abschnitts von Kap. V, „Funktionenfolgen“, leicht zu sehen ist: Er ist mit „Polynomiale Approximation“ überschrieben und behandelt: Banachalgebren, Dichtheit und Separabilität, den Satz von Stone und Weierstraß, trigonometrische Polynome, periodische Funktionen und den trigonometrischen Approximationssatz. Natürlich kann darüber diskutiert werden, ob diese Themen in eine Analysis I gehören – dass sie aber wichtige Teile konkreter Analysis ausmachen, steht außer Zweifel. Korrespondierend wird auch großer Wert auf konstruktive numerische Verfahren und auf gute Fehlerabschätzungen gelegt.

Der Anspruch an die Abstraktion spiegelt sich auch in der Aufgabe der Trennung der Behandlung von Funktionen einer und mehrerer Variablen wider – aber auch darin, dass, wie seit Dieudonné üblich, die Analysis in Hilbert- und Banachräumen formuliert wird. Dementsprechend enthält das Buch einen guten Teil der mengentheoretischen Topologie (ein Achtel des Buches), der elementaren Funktionalanalysis oder der Approximationstheorie.

Der Rezensent der 1. Auflage (die sich von der 2. nur durch Fehlerkorrekturen unterscheidet) im Zentralblatt für Mathematik [0909.26001] schreibt: „Originelle Ideen, wie man eine Einführung in die Analysis vollziehen könnte, sucht man hier leider vergebens.“ Dieses unreflektierte Urteil ist falsch, wie ich hoffe, oben nachgewiesen zu haben. Es entspringt einer beliebten, allerdings wenig intelligenten Attitüde, „Formalismus und Strukturalismus à la Bourbaki“ als Mode zu verteufeln und dabei den ungeheuren Wert zu übersehen, den das Werk von N. Bourbaki für die Entwicklung der Mathematik hatte und hat.

Die Analysis I von Amann und Escher verbindet in vorbildlicher Weise die Idee der Analysis nach Dieudonné, H. Cartan und L. Schwartz mit konkreter Analysis und wird daher uneingeschränkt empfohlen.

N. Ortner (Innsbruck)

D. Estep: Practical Analysis in One Variable. With 211 Illustrations. (Undergraduate Texts in Mathematics.) Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2002, XX+621 S. ISBN 0-387-95484-8 H/b € 59,95.

Diese Einführung in die Analysis für Funktionen einer Veränderlichen stellt die Ideen der Analysis in Zusammenhang mit Grundfragen der angewandten Mathematik als Approximation der Lösungen „physikalischer“ Modelle dar. Daraus resultieren sowohl eine ungewohnte Anordnung des Stoffes, als auch eine starke Betonung jener Aspekte, die für das numerische Rechnen wichtig sind. So wird im ersten Teil – mit „Zahlen und Funktionen, Folgen und Grenzwerte“ überschrieben – z.B. der Funktionsbegriff zunächst nur für Abbildungen zwischen Teilmengen rationaler Zahlen eingeführt, und anschließend werden sofort Lipschitz-Stetigkeit sowie Konvergenz und Divergenz von Folgen und Reihen bis hin zum Bisektionsverfahren diskutiert. Es folgen die Irrationalzahlen als Grenzwerte von Folgen und Funktionen reeller Zahlen und die Existenz der Inversen. Eine Diskussion des Bisketionsverfahrens sowie des Fixpunktsatzes von Banach und des darauf beruhenden numerischen Verfahrens beenden den ersten Teil.

Der zweite Teil ist der Differential- und Integralrechnung gewidmet, wobei vor allem der Zugang über den Begriff „streng differenzierbar“ auffällt, bei dem (im Gegensatz zu dem im dritten Teil behandelten üblichen Differenzierbarkeitsbegriff) der Fehler der linearen Approximation von mindestens zweiter Ordnung gegen Null geht. Anschließend werden einige Differentialgleichungen als Motivation des unbestimmten Integrals bzw. des bestimmten Integrals mit variabler oberer Grenze behandelt. Es folgt ein Abschnitt über numerische Integration (von Anfangswertaufgaben) mit einer relativ ausführlichen Diskussion über gleichmäßige Konvergenz von Cauchy-Folgen von Funktionen auf (großen) Intervallen. Als Anwendungen folgen bestimmte Integrale, Logarithmus- und Exponentialfunktion sowie Fixpunktiteration und Newton-Verfahren.

Im dritten Teil werden schließlich Stetigkeit und Differenzierbarkeit (im Gegensatz zur strengen Differenzierbarkeit), Häufungspunkte von Folgen, uneigentliche Grenzwerte, der Approximationssatz von Weierstrass und Bernstein-Polynome, Taylor-Polynome und Polynom-Interpolation, Picard-Iteration und das Vorwärts-Euler-Verfahren behandelt.

Die Darstellung ist durch eine Vielzahl gut gewählter und ausführlich diskutierter und illustrierter Beispiele gekennzeichnet. Ebenso werden zahlreiche Übungsbeispiele am Ende jedes Kapitels bereitgestellt, die häufig durch eine kurze Diskussion der Schwachstellen des eben diskutierten mathematischen Konzepts (z.B. des Riemannschen Integralbegriffes) und durch Hinweise auf weiterführende Konzepte abgerundet werden. Der Autor legt – so wie auch viele Ingenieure – Wert darauf, nicht die Anwendung von Formeln zu zeigen, sondern wesentliche mathematische Begriffe und Ideen verständlich darzustellen und dabei Anwender zu motivieren, sich auch tatsächlich mit der nicht immer einfachen Materie inhaltlich auseinanderzusetzen. Insgesamt ist so ein Band entstanden, der einen wichtigen Beitrag zur Lösung der Frage liefert, wie im Zeitalter eines sich stets verstärkenden Computereinsatzes die für Anwender wesentlichen Konzepte der mathematischen Analysis anwendungsorientiert, aber ohne Vernachlässigung mathematischer Genauigkeit unterrichtet werden können.

I. Troch (Wien)

A. Guzman: Derivatives and Integrals of Multivariable Functions. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2003, X+319 S. ISBN 0-8176-4274-9, 3-7643-4274-9 P/b € 68,–.

Das Buch behandelt in zwei Abschnitten zu je drei Kapiteln die Differentiation und Integration von Funktionen in mehreren Variablen. In den ersten drei Kapiteln werden Differenzierbarkeit und die Ableitung skalarer und vektorwertiger Funktionen ausführlich diskutiert. Die nächsten drei Kapitel umfassen in analoger

Weise die Grundbegriffe der Integration von skalaren und vektorwertigen Funktionen in mehreren Variablen. Ausführlich werden Linien- und Flächenintegrale sowie die wichtigsten Integralsätze der Vektoranalysis dikutiert.

Das Buch ist mathematisch rigoros und didaktisch vorzüglich aufbereitet, stellt aber hohe Ansprüche an die Vorkenntnisse des Lesers. Der sichere Umgang mit Funktionen und der Topologie des Euklidischen Raums wird vorausgesetzt. Gleiches gilt für die erforderlichen Grundkenntnisse über lineare Algebra. Hier wird vom Leser vor allem die Vertrautheit mit Vektorräumen, Unterräumen, Dimensionalität und linearer Unabhängigkeit erwartet. Ein großer Fundus von Übungsbeispielen mit Lösungen am Ende des Buches erleichtern die Einarbeitung in dieses schöne und wichtige Gebiet der Mathematik.

E. Werner (München)

K. Jänich: Analysis für Physiker und Ingenieure. Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen. 4. Aufl. Mit 461 Figuren. (Springer-Lehrbuch.) Springer, Berlin u.a. 2001, XI+419 S. ISBN 3-540-41985-3 P/b DM 59,90 (2004: € 29,95).

Dieser Band ist die vierte Auflage eines erstmals 1982 erschienen Lehrbuches. Angesichts der doch großen Zeitspanne sei er wie ein erstmals erschienenes Buch besprochen. Es handelt sich in gewisser Weise (wenn auch der Teil über Differentialgleichungen eine Wiederholung ist) um den dritten Band einer Reihe von Analysis-Lehrbüchern und behandelt — wie der Untertitel sagt — komplexe Funktionen einer komplexen Veränderlichen (Grundbegriffe, analytische Funktionen, komplexe Integration, Potenz- und Laurentreihen, Identitätssatz, analytische Fortsetzung, Residuenkalkül), Gewöhnliche Differentialgleichungen (einfache Beispiele, dynamische Systeme, lineare Differentialgleichungen und Systeme, Rand- und Eigenwert-Aufgaben, Greensche Funktionen und δ-Funktion) und Spezielle Funktionen der Mathematischen Physik (Gleichungen aus Separationsansätzen, Differentialgleichungen in der komplexen Ebene, Kugel- und Zylinderfunktionen).

Dem Autor gelingt es in hervorragender Weise, den Leser zur Auseinandersetzung mit nicht immer einfachen mathematischen Begriffen und Aussagen zu motivieren. Dazu tragen die zahlreichen Zeichnungen ebenso bei wie die ausführlichen Diskussionen der Bedeutung von Begriffen und Aussagen. Die Stoffauswahl ist als sehr geglückt zu bezeichnen. Klassische und „modernere“ Themen werden ihrer Bedeutung entsprechend behandelt, wobei die Ideen hinter Begriffen (z.B. reell-analytisch und analytische Fortsetzung) bzw. von Methoden (etwa Konstruktion Greenscher Funktionen) und Eigenschaften von Funktionen und Systemen (z.B. Greensche Funktion, Phasenporträt eines dynamischen Systems) im Vordergrund der Betrachtungen stehen. Die einzelnen Kapitel beginnen jeweils mit einer Einführung in das Thema und werden durch eine Zusammenfassung der wichtigsten Inhalte sowie einen Test (Auswahl der Antwort aus drei Möglichkeiten) abgeschlossen. Am Ende des Bandes werden die korrekten Antworten zu den Tests sowie Hinweise zu den Übungsaufgaben gegeben. Ein sehr empfehlenswerter Band für Lehrende und Studierende (auch der Mathematik), der sowohl als Grundlage oder Ergänzung zu Vorlesungen, als auch für das Selbststudium geeignet ist.

I. Troch (Wien)

W. J. Kaczor, M. T. Nowak: Problems in Mathematical Analysis III. Integration. (Student Mathematical Library, Vol. 21.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003, IX+356 S. ISBN 0-8218-2050-8 P/b \$ 49,–.

Eine hervorragende Aufgabensammlung zur Riemannschen und Lebesgueschen Integrationstheorie der Funktionen in einer Variablen, die klassische Aufgabensammlungen (wie Polya-Szegő, Günter-Kusmin, Bass, Ostrowski, Fichtenholz) an Systematik übertrifft, und durch Aufnahme neuerer Probleme (beispielsweise aus dem Amer. Math. Monthly) auch erweitert. Ergänzend sollte das “Handbook of Integration” von D. Zwillinger (Boston, 1992) betrachtet werden.

N. Ortner (Innsbruck)

C. W. Henson, J. Iovino, A. S. Kechris, E. Odell: Analysis and Logic. Edited by C. Finet and C. Michaux. (London Mathematical Society Lecture Note Series 262.) Cambridge University Press, 2002, XIV+267 S. ISBN 0-521-64861-0 P/b £ 29,95.

Dieser Band aus der Reihe *Lecture Notes* der London Mathematical Society erfüllt die in höchstem Maße verdienstvolle Aufgabe, die oft unterschätzte Relevanz der mathematischen Logik für Kerngebiete der Analysis und auch anderer klassischer Teile der Mathematik zu verdeutlichen.

Der Band enthält drei voneinander unabhängige, durchschnittlich jeweils knapp 100 Seiten umfassende Artikel, auf die hier sehr kurz einzeln eingegangen werden soll. Die Artikel entstanden als schriftliche Fassungen von drei Vortragsserien im Rahmen einer Tagung 1997 an der Universität von Mons-Hainaut, Belgien.

Der erste Artikel (Ultraproducts in Analysis) stammt von C. Ward Henson und José Iovino und beschäftigt sich vor allem mit Anwendungen der Modelltheorie in der Funktionalanalysis. Im Zentrum stehen normierte Räume, für die eine geeignete Signatur eingeführt wird, sowie die Begriffe der positiv beschränkten Formel und der approximativen Erfülltheit. Darüber können dann eine Modelltheorie aufgebaut und geeignete Ultraprodukte konstruiert werden. Eines der typischen Hauptergebnisse besagt, dass eine positive beschränkte Formel genau dann im Ultraprodukt approximativ erfüllt ist, wenn die Menge der Strukturen, wo sie erfüllt ist, im zugrundegelegten Ultrafilter liegt.

Der zweite Artikel (Actions of Polish Groups and Classification Problems) von Alexander S. Kechris ist der Deskriptiven Mengenlehre zuzuordnen und sollte von besonders breitem Interesse sein. Er gliedert sich in zwei Teile und beschäftigt sich vor allem mit den Möglichkeiten, die Schwierigkeit von verschiedenen Klassifikationsproblemen zu beschreiben, indem man die Kompliziertheit der zugrundegelegten Äquivalenzrelationen untersucht. Auch wenn nicht jeder Leser speziell an den im vorliegenden Artikel behandelten Aktionen Polnischer Gruppen interessiert sein mag (einzelne Kapitel sind speziell den Aktionen abzählbarer Gruppen, lokalkompakter Gruppen sowie der vollen symmetrischen Gruppe auf einer abzählbaren Menge gewidmet), so bringt der äußerst klar geschriebene Artikel doch so tiefe Einsichten, dass kaum ein Mathematiker aus der Lektüre nicht Wertvolles mitnehmen wird. Der zweite Teil vertieft den Stoff anhand der Turbulenztheorie von Hjorth.

Der letzte der drei Artikel (On Subspaces, Asymptotic Structure, and Distortion of Banach Spaces; Connections with Logic) von Edward Odell schließlich beschäftigt sich mit der reizvollen und facettenreichen Ramseytheorie in Banachräumen.

Jedem Mathematiker kann wenigstens ein Schmökern in diesem sehr attraktiven Band empfohlen werden.

R. Winkler (Wien)

T. W. Körner: A Companion to Analysis. A Second First and First Second Course in Analysis. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 62.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004, XIV+590 S. ISBN 0-8218-3447-9 H/b $ 79,–.

The book is intended for students with a solid knowledge of the fundamentals of one-variable and multivariable calculus. The text presents most of the central theory and methods of calculus at a higher level including material from the areas of calculus of variations and differential equations and including many stimulating exercises. A special feature of the book is an appendix containing 345 problems. Some of these exercises are standard, some form commentaries on the main text and others have been taken or adapted from the Cambridge mathematics exam. A collection of hints, (partial) answers and remarks on some of the exercises can be found on an AMS page at *http://www.ams.org/bookpages/gsm-62*. Students who work through this text or a part of it will improve their understanding of calculus and their technique of solving problems and will be better prepared for advanced lectures. The textbook is a valuable contribution to the literature in analysis.

C. Nowak (Klagenfurt)

Funktionalanalysis

I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek: Basic Classes of Linear Operators. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2003, XVII+423 S. ISBN 3-7643-6930-2 P/b € 83,46.

Dieses Buch ist eine überarbeitete und erweiterte Neuauflage des gut zwanzig Jahre alten Klassikers "Basic Operator Theory" von I. Gohberg und S. Goldberg, welches sich zu einem Standardwerk in der Operatortheorie entwickelt hat. Zusammen mit "Classes of Linear Operators, Vol. I, Vol. II" derselben drei Autoren bietet dieses Buch die Möglichkeit, ein sehr detailiertes und weitreichendes Wissen über lineare Operatoren zu bekommen. Inhaltlich beginnen die Autoren mit den grundlegenden Eigenschaften von Hilberträumen, was es auch für Leser ohne besondere Vorkenntnisse attraktiv erscheinen lässt, einen Blick in "Basic Classes of Linear Operators" zu wagen. Nach der Präsentation der wichtigsten allgemeinen Resultate über Operatoren auf Hilberträumen legen die Autoren einen Schwerpunkt auf kompakte Operatoren. Später werden auch allgemeiner Operatoren auf Banachräumen, Fredholmoperatoren, Spur und Determinante von Operatoren sowie Töplitzoperatoren behandelt.

M. Kaltenbäck (Wien)

C. S. Kubrusly: Hilbert Space Operators. A Problem Solving Approach. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2003, XIII+149 S. ISBN 0-8176-3242-5, 3-7643-3242-5 P/b € 68,–.

Dieses Buch stellt eine Einführung in die Theorie der Operatoren auf Hilberträumen dar. Der Autor verfasste dieses 149 Seiten starke Werk aber nicht als konventionelles Lehrbuch, sondern er versuchte, dem Leser die Materie durch einander abwechselnde Theorieabschnitte und Problemstellungen näher zu bringen. Dadurch wird der Leser dazu angehalten, sich mit der Materie intensiver auseinander zu setzen. Die Aufgaben sind gut ausgewählt und haben auch einen angebrachten Schwierigkeitsgrad. Außerdem befinden sich am Ende eines jeden Kapitels Lösungsvorschläge zu den gestellten Problemen. Der Inhalt des Buches, das sich vorrangig an höher semestrige Studenten richtet, spannt sich von den grundlegenden Begriffsbildungen und Eigenschaften von Operatoren auf Hilberträumen über die Betrachtung von invarianten Teilräumen, Shift-Operatoren, spektralen Eigenschaften von Operatoren sowie hypernormalen und paranormalen Operatoren bis hin zu einem Beweis des Satzes von Lomonosov über invariante Teilräume.

M. Kaltenbäck (Wien)

Dynamische Systeme

J. Banks, V. Dragan, A. Jones: Chaos. A Mathematical Introduction. (Australian Mathematical Society Lecture Series 18.) Cambridge University Press, 2003, XI+294 S. ISBN 0-521-53104-7 P/b £ 27,95.

This booklet emerged from a one-semester undergraduate course and presents basic ideas and results of chaotic discrete dynamical systems in one dimension in a form that should be accessible to anyone who has taken a first course in undergraduate calculus. The essential feature of this introduction is the geometrically motivated approach leading to some useful notions. In the first part geometric analysis of the connection between the graphs of a function and its higher iterates is used to study the three ingredients of Devaney's chaos, namely sensitive dependence, transitivity and denseness of periodic points. With the exception of the last chapter the functions considered are self-maps of the unit interval. A very nice result is a sufficient test for determining whether a function has chaotic behaviour, involving the use of Schwarzian derivative. In the last part a piecewise linear method is used for obtaining topological conjugacy. The book contains many examples, exercises, hints for additional reading and references. It can be warmly recommended for beginning students in mathematics.

C. Nowak (Klagenfurt)

T. Kappeler, J. Pöschel: KdV & KAM. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Vol. 45.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2003, XIII+279 S. ISBN 3-540-02234-1 H/b € 99,95.

The main topic of the present book is the periodic Korteweg de Vries equation, which can be viewed as an infinite dimensional integrable Hamiltonian system admitting a complete set of independent integrals in involution. The authors show that it admits a global bi-analytic map such that the new coordinates are Birkhoff coordinates (cartesian action-angle variables) for the KdV equation. This is then used as the starting point for studying small Hamiltonian perturbations by applying suitable generalizations of the KAM theory.

It is well written and comes with an introduction to integrable Hamiltonian systems and KAM theory, which makes it self-contained and accessible to graduate students as well. As an additional bonus, all chapters can be read independently of each other. I can only highly recommend it to anybody interested in infinite dimensional integrable systems.

G. Teschl (Wien)

A. Katok: Combinatorial Constructions in Ergodic Theory and Dynamics. (University Lecture Series, Vol. 30.) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003, IV+121 S. ISBN 0-8218-3496-7 P/b $ 29,–.

Dieses Buch gliedert sich in zwei Teile. Der erste behandelt Approximation und Generizität in der Ergodentheorie, der zweite Kozyklen, Kohomologie und kombinatorische Konstruktionen.

Im ersten Teil geht es vordringlich um die Approximation maßerhaltender Systeme auf einem Lebesgueraum durch gewisse endliche Objekte, sogenannte periodische Prozesse. Verschiedene Typen solcher Approximationen sind von Interesse und werden behandelt. Gemeinsam ist ihnen, dass sie die Voraussetzungen eines grundlegenden Satzes erfüllen, welcher besagt, dass die Menge der approximierbaren Systeme groß im Baireschen Sinne ist. Dies unterstreicht die Relevanz dynamischer Eigenschaften, welche unter gewissen Approximierbarkeitsbedingungen bewiesen werden können. Tatsächlich sind die meisten der zahlreichen Ergebnisse des ersten Teils von dieser Art oder unter diesem Gesichtspunkt zu sehen.

Der zweite Hauptteil schließlich beschäftigt sich mit den ergodentheoretischen Varianten von Kozyklen, Kohomologie, Korändern etc. Dabei rücken unterschiedliche Aspekte der Dynamik in den Vordergrund, die vielfältige Themen berühren.

Der Autor ist einer der weltweit führenden Fachleute auf dem sehr weiten und mit den unterschiedlichsten Disziplinen überlappenden Gebiet der dynamischen Systeme. Der Stil ist relativ verbal gehalten und wenig formalisiert. Dadurch werden die grundlegenden Strategien gut sichtbar, insbesondere die Rolle kombinatorischer Konstruktionen in einem eher analytischen Gebiet. Dementsprechend angenehm ist das Buch zu lesen. Sollte das Buch weitere Auflagen erfahren, so könnte die Lesbarkeit wahrscheinlich nur durch die Berichtigung der in gewissen Abschnitten relativ häufigen Druckfehler noch weiter verbessert werden, sowie vielleicht durch die Aufnahme eines Index.

R. Winkler (Wien)

X.-Q. Zhao: Dynamical Systems in Population Biology. (CMS Books in Mathematics.) Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2003, XIII+276 S. ISBN 0-387-00308-8 H/b € 79,95.

This volume is an introduction into the theory of periodic semiflows and its application to population dynamics. The selection of the material is, according to the author's own words, subjective, influenced by personal interests, and based mainly on the author's and his collaborators work (nevertheless 294 references are listed).

After an introduction to abstract discrete dynamical systems on metric spaces and a discussion of global dynamics in certain types of monotone discrete dynamical systems on ordered Banach spaces, the concept of periodic semiflow is introduced and various results are presented. After that, applications are shown: first to a discrete-time, size-structured chemostat model and then – being the main concern of this book – to the global dynamics of various periodic and almost periodic systems such as continuous-time periodic population models, N-species competition in a periodic chemostat, almost periodic competitive systems, to competitor-competitor-mutualist parabolic systems and to a periodically pulsed bioreactor model. For these various types of systems different qualitative methods are used and developed respectively.

The book terminates with chapters on global dynamics in an autonomous, nonlocal and delayed predator-prey model and on existence, uniqueness and stability respective attractivity properties of periodic travelling waves in periodic reaction-diffusion equations. This volume is written primarily for mathematicians and is of interest for researchers in this area.

I. Troch (Wien)

Angewandte und numerische Mathematik

Z. Drmač, V. Hari, L. Sopta, Z. Tutek, K. Veselić (eds.): Applied Mathematics and Scientific Computing. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003, X+350 S. ISBN 0-306-47426-3 H/b € 131,–.

Der Band enthält die schriftlichen Fassungen von Vorträgen einer gleichnamigen Tagung, die im Juni 2001 in Dubrovnik stattfand und die das Ziel hatte, Mathematiker und Anwender aus den Ingenieur- und Naturwissenschaften zusammenzubringen. Der erste Teil umfasst die Manuskripte eines Mini-Kurses über "Domain Decomposition Methods" (Schwarz-Methoden für partielle Differentialgleichungen) von M. Sarkis (Worcester Polytechnic, USA) sowie jene der eingeladenen Vortäge über "Modification and Maintenance of ULV Decompositions" von J. L. Barlow (Pennsylvania State Univ), "Advances in Jacobi Methods" von Z.Drmač, V. Hari (Univ. Zagreb), I. Slapničar (Univ. Split), "Modeling of Curved Rods" von M. Jurak, J. Tambača, Z. Tutek (Univ. Zagreb), "Incompressible Newtonian Flow Through Thin Pipes" von E. Marušić-Paloka (Univ. Zagreb) und "First Order Eigenvalue Perturbation Theory and the Newton Diagram" von J. Moro, F. M. Dopico (Univ. Carlos III de Madrid). Im zweiten Teil folgen 15 ausgewählte Beiträge zu Themen aus Analysis, numerischer Mathematik und Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften, deren Autoren bis auf drei Ausnahmen von kroatischen Universitäten kommen.

I. Troch (Wien)

K. Hashimoto, Y. Oishi, Y. Yamamoto (eds.): Control and Modeling of Complex Systems. Cybernetics in the 21st Century. Festschrift in Honor of Hidenori Kimura on the Occasion of his 60th Birthday. (Trends in Mathematics.) Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2003, XXIX+337 S. ISBN 0-8176-4325-7, 3-7643-4325-7 H/b € 98,–.

Aus Anlaß des 60. Geburtstages von Hidenori Kimura wurde im November 2001 ein Symposium an der Universität Tokio abgehalten, an dem etwa 150 Wissenschafter teilnahmen. Der vorliegende Band enthält eine Auswahl von 20 Beiträgen, die auf den während dieses Symposiums gehaltenen Vorträgen beruhen. Der Band beginnt mit einer kurzen Würdigung von Hidenori Kimura und einem Verzeichnis seiner wissenschaftlichen Werke (10 Bücher, 12 Buchkapitel, 108 Zeitschriftenartikel). Die wissenschaftlichen Beiträge sind in die Kapitel „Signalverarbeitung“ mit vier Beiträgen von Byrnes und Lindquist, Georgiou, Y. Yamamoto und Nagahara sowie von Kwon und Han integriert, um Hidenori Kimuras Interesse an diesem Gebiet und dessen Verbindung mit zeit-diskreten Kontrollproblemen zu würdigen. Dieser hat auch auf dem Gebiet der „Identifikation“ gearbeitet und dessen Bedeutung für praktische Anwendungen betont. Daher folgt ein Kapitel mit drei Arbeiten von Milanese und Taragna, Vidyasagar und Karandikar und von Oishi zu diesem Thema. Im dritten Teil sind fünf Arbeiten von Anderson und Bombois, Chen und Hara, Tsumura, Sugie und von Hara und Iwasaki zum Thema „Robuste Regelung“ zusammengefaßt. Dieses Gebiet kann als das zentrale Arbeitsgebiet von Hidenori Kimura bezeichnet werden. Der vierte Teil ist kommenden Herausforderungen an die Regelungs- und Steuerungstheorie gewidmet, und Beiträge von Guo, Imura, S. Yamamoto und Ushio, Mita und Nam sowie von Sampei, Date udn Nakaura befassen sich mit dem Thema „Hybride, chaotische und nichtlineare Systeme“. Der letzte Teil ist „Anwendungen der Kontrolltheorie“ gewidmet – die Beiträge stammen von den Autoren Tomizuka, Adachi und Hashimoto, Namiki und Ishikawa und sollen Interesse und Kompetenz von Hidenori Kimura auf dem Gebiet der Anwendungen würdigen.

Insgesamt ist dieser Band gleichzeitig eine Übersicht über wichtige Themen, ungelöste Fragen und wichtige gegenwärtige und zukünftige Forschungsgebiete auf dem Gebiet der Regelungs- und Steuerungstheorie und von Interesse für alle auf diesem Gebiet wissenschaftlich Arbeitenden.

I. Troch (Wien)

R. Plato: Concise Numerical Mathematics. Translated by R. Le Borne, S. Le Borne. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 57.) American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, XIV+453 S. ISBN 0-8218-2953-X H/b \$ 85,–.

This textbook has been developed from two-semester courses in numerical mathematics taught repeatedly by the author at TU Berlin. It adresses students and graduates of mathematics, computer sciences, and natural and engineering sciences.

The following basic topics are treated in an elementary and concise form: 1. Interpolation by Polynomials, 2. Spline Functions, 3. The Discrete Fourier Transform and its Applications, 4. Direct Solution of Linear Systems of Equations, 5. Nonlinear Systems of Equations, 6. The Numerical Integration of Functions, 7. Explicit One-Step Methods for Initial Value Problems of Ordinary Differential Equations, 8. Multistep Methods for Initial Value Problems of Ordinary Differential Equations, 9. Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, 10. Jacobi, Gauss-Seidel and Relaxation Methods for the Solution of Linear Systems of Equations, 11. The Conjugate Gradient and *GMRES* ("generalized minimal residual method") Methods, 12. Eigenvalue Problems, 13. Numerical Methods for Eigenvalue Problems, 14. Peano's Error Representation, 15. Approximation Theory, 16. Computer Arithmetic. Many well chosen exercises are added. The author concludes every chapter by further comments and hints to the literature. Most of the references to German monographs appearing in the German edition are replaced by references to textbooks in English, and some new publications are added. There exists an online service which is available under *http://www.math.tu-berlin.de/numerik/plato/amsbook* with hints for the exercises and *Matlab* routines. The book can be recommended both to students and teachers. It is a valuable contribution to the literature in numerical mathematics.

C. Nowak (Klagenfurt)

E. Süli, D. F. Mayers: An Introduction to Numerical Analysis. Cambridge University Press, 2003, X+433 S. ISBN 0-521-00794-1 P/b £ 24,95*, ISBN 0-521-81026-4 H/b £ 65,–.

This is an excellent book for introducing undergraduates to the fascinating discipline of numerical analysis. It is the result of many years of lectures held by the authors at the University of Oxford, a fact that explains the evident ability of the book of addressing questions frequently asked by students.

Reading of "An Introduction to Numerical Analysis" is also made enjoyable and motivating by the many historical notes regarding mathematicians who have contributed considerably to this discipline. Though the book is broader in character, two topics are treated with particular emphasis: Polynomial approximation (and integration) and the numerical solution of ordinary differential equations (ODEs).

The book is organized into 14 chapters. The first four of them are dedicated to the solution of linear and nonlinear algebraic problems. Chapter 5 is devoted to symmetric eigenproblems. Polynomial approximation and numerical integration are discussed in detail in six chapters. Chapters 12 and 13 provide a nice introduction to numerical schemes, their stability, and accuracy in solving initial value and boundary value problems for ODEs. A short introduction to the finite element method is given in the last chapter. All chapters are completed with excellent historical and technical notes and many exercises. (The solutions to exercises are available; contact *solutions@cambridge.org*) A. Borzi (Graz)

A. Heck: Introduction to Maple. Third Edition. With 221 Illustrations. Springer, New York u.a. 2003, XVI+828 S. ISBN 0-387-00230-8 H/b € 49,95.

This is the third edition of the best-selling *Introduction to Maple* by André Heck. Apart from the correction of typing errors and the updating of many examples some chapters were rewritten completely. In particular, the chapter on differential equations now also contains partial differential equations and numerical methods. Linear Algebra is now based on the new packages *LinearAlgebra* and *VectorCalculus* instead of the older package *linalg*. The chapter on simplification has been updated and expanded and a new chapter on Gröbner basis theory has been added. The book is based on version 8 of *Maple*.

The author gives an introduction to Computer Algebra in general and to the Computer Algebra System *Maple* in particular. Among others the following topics are being dealt with: functions, definition and manipulation of polynomials and rational functions, differentiation and integration, simplification, graphics, the solving of equations and differential equations. The solving of a set of polynomial equations is based on the *Maple* package *Groebner*.

There is quite a host of examples from various fields like physics, chemistry and kinematics. For instance Linear Algebra methods are applied in the computation of π-electron energies and electronic charge distributions in molecules, the forward and inverse kinematics of serial robot manipulators are discussed and a model for cadmium transfer through the human body is investigated. Moreover each chapter is rounded off by numerous exercises to be solved by the reader. A list of relevant references is given at the end of the book. The book can be recommended to readers who intend to learn *Maple* from scratch. But at the same time it is also a good reference for skilled *Maple* users. The reader should at least have some knowledge on mathematics at an intermediate level.

A. Gfrerrer (Graz)

B. Cordani: The Kepler Problem. Group Theoretical Aspects, Regularization and Quantization, with Application to the Study of Perturbations. (Progress in Mathematical Physics, Vol. 29.) (Mit CD-ROM.) Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2003, XVII+439 S. ISBN 3-7643-6902-7 H/b € 83,–.

Zum Thema des Titels sind schon früher ein paar Monografien erschienen; das vorliegende Buch ist wohl die bisher umfassendste Darstellung der verschiedenen Gesichtspunkte, und dies in beliebiger Raumdimension.

Nach einem einführenden Überblick über den gesamten Inhalt werden auf klassischer Ebene die Separation der Veränderlichen in den verschiedenen dazu geeigneten Koordinatensystemen, verschiedene Sätze von Winkel- und Wirkungsvariablen und mehrere Regularisierungsverfahren der Bewegungsgleichung behandelt. Quantenmechanisch wird die Schrödingergleichung in den dazu geeigneten Koordinatensystemen separiert und es werden verschiedene Zugänge zur Quantisierung des Problems behandelt. Die Darstellung des Systemphasenraums als koadjungierte Bahn einer (pseudoorthogonalen) Liegruppe ermöglicht die Anwendung der geometrischen Quantisierung. Schließlich wird auch auf das Keplerproblem mit magnetischem Monopol eingegangen, und nach einer guten Einführung in die Störungstheorie werden insbesondere verschiedene achsialsymmetrische Störungen behandelt. Mehrere Anhänge fassen die differenzialgeometrischen Grundlagen der klassischen Theorie samt Liegruppen knapp zusammen.

Die Stärke der Darstellung liegt vor allem im umfassenden Überblick über die verschiedenen Zugänge zum Problemkreis und den ausführlich gebrachten analytischen Rechnungen. Während die Erklärungen auf klassischer Ebene ziemlich erschöpfend sind, sind sie in den quantenmechanischen Teilen, in denen Funktionalanalysis und Hilbertraumdarstellungen benötigt werden, knapp und manchmal unklar ausgefallen; dies betrifft insbesondere den allerdings kurzen Abschnitt 9. Die grundlegenden Ideen der geometrischen Quantisierung kann und muss man in den angegebenen Spezialwerken nachlesen, aber auch die Erläuterungen der sonstigen hier benötigten darstellungstheoretischen Zusammenhänge sind oft unklar, und das auf S. 196 in Rem. 9.1 angegebene Zitat aus Barut/Raczka betreffend die Gleichwertigkeit von induzierten und Multiplikatordarstellungen ist im hier vorgestellten Rahmen unzutreffend: A. a. O. werden ausdrücklich operatorwertige Multiplikatoren zugelassen, sonst besteht die behauptete Äquivalenz nicht.

Das Buch enthält neben einem Sachverzeichnis eine Tabelle der Abbildungen und eine Bibliografie, in der auch die Titel der Zeitschriftenarbeiten angeführt sind, wobei allerdings alle deutschen Titel elementare Rechtschreibfehler aufweisen. Auf einer beigefügten CD findet man ein Programm für Störungsrechnungen und eines für die Behandlung des Zweizentrenproblems.

W. Bulla (Graz)

S. J. Gustafson, I. M. Sigal: Mathematical Concepts of Quantum Mechanics. (Universitext.) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2003, X+249 S. ISBN 3-540-44160-3 P/b € 39,95.

The present textbook is a very readable introduction to modern mathematical topics in quantum mechanics intended for students of mathematics or physics. However, even though much background material (both mathematical and physical) has been included to make the book relatively self-contained, it still proceeds at a fast pace and requires some amount of work, especially for beginners. On the other hand, it quickly reaches topics of current interest. Clearly the price one has to pay for this is lacking mathematical rigor and most proofs are only sketched.

The topics covered include spectral theory, scattering theory, many-particle systems, path integrals, quasi-classical asymptotics, resonances, quantum field theory, and theory of radiation. I consider the book a valuable addition to the textbook literature in this field.

G. Teschl (Wien)

D. F. Parker: Fields, Flows and Waves. An Introduction to Continuum Models. With 90 Figures. (Springer Undergraduate Mathematics Series.) Springer, London, Berlin, Heidelberg, 2003, XII+270 S. ISBN 1-85233-708-7 P/b € 24,95.

Das Buch soll als erste Einführung in die Verwendung von mathematischen Konzepten in Kontinuumstheorien dienen. Es ist mathematisch nicht allzu schwierig verfaßt, da es die Hauptintention des Verfassers ist, den Leser in die physikalischen Ideen der Impuls- und Erhaltungssätze einzuführen und dabei auf natürliche (und nahezu spielerische) Weise die sich ergebenden gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zu entwickeln.

Dem Titel des Buches entsprechend werden eingangs die wesentlichen Begriffe der Kontinuumstheorien (Felder und Potentiale) sowie die Laplace- und Poissongleichungen behandelt. In den verbleibenden sechs Kapiteln werden dann im Rahmen der Kontinuumstheorie die Elastizität von Festkörpern, die Bewegungsgleichung einer elastischen Saite, Schwingungen und Wellen bei Festkörpern und die Grundzüge der Fluidmechanik besprochen. Die beiden letzten Kapitel der Monographie sind elektromagnetischen Wellen und ihrer Beschreibung nach der Maxwell-Theorie sowie Diffusionsvorgängen in der Biologie und Populationslehre gewidmet. Das Buch ist ausgezeichnet lesbar und kann als gute Einführung in die wesentlichen Ideen der Kontinuumstheorie empfohlen werden.

E. Werner (München)

Finanzmathematik

M. Capiński, T. Zastawniak: Mathematics for Finance. An Introduction to Financial Engineering. With 75 Figures. (Springer Undergraduate Mathematics Series.) Springer, London, Berlin, Heidelberg, 2003, X+310 S. ISBN 1-85233-330-8 P/b € 29,95.

Das vorliegende Buch gibt eine umfassende Einführung in die grundlegendsten und wichtigsten Aspekte der Finanzmathematik. Dabei werden folgende Inhalte behandelt: Diskrete Marktmodelle, Portfolio-Management (CAPM), Optionsbewertung (Binomial- und Black-Scholes-Modell), Financial Engineering und stochastische Zinsmodelle. Das Buch stellt die Inhalte in einfacher Form dar, wobei größtenteils auf exakte mathematische Beweisführungen zugunsten allgemeiner Verständlichkeit verzichtet wird (beispielsweise wird die gesamte stochastische Analysis vernachlässigt). Zusammenfassend gibt dieses Buch einen guten, integrierten Überblick über die wesentlichen Inhalte der Finanzmathematik, stellt jedoch beinahe keine mathematischen Anforderungen an die Leser. Es ist auch auf Grund der vielen Beispiele selbst für Anfänger eines Mathematik-Studiums, oder aber auch für Wirtschaftsstudierende leicht verständlich.

M. Predota (Graz)

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

K. L. Chung, F. AitSahlia: Elementary Probability Theory. With Stochastic Processes and an Introduction to Mathematical Finance. Fourth Edition. With 57 Figures. (Undergraduate Texts in Mathematics.) Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2003, XIII+402 S. ISBN 0-387-95578-X H/b € 79,95.

Es ist eine heikle Aufgabe, ein Buch über Wahrscheinlichkeitstheorie zu schreiben, das exakt ist, keine Maßtheorie voraussetzt und für Anfänger lesbar bleibt. Chung hat das Problem gelöst, indem er die grundlegenden Begriffe im Text einführt, mit Beispielen erläutert, und dann die Abfolge *Voraussetzung–Behauptung–Beweis* durchsteht. Die Beweise finden sich entweder explizit im Text, oder sind in Anhänge zusammengefasst, die sich bei Bedarf an einzelne Kapitel anschließen. In einigen tieferliegenden Fällen wird der Beweis durch ein Literaturzitat ersetzt. Ganz ohne Vorkenntnisse geht es trotzdem nicht ab: Der Leser muß mit Analysis vertraut sein. Auf diese Weise wird der übliche Stoff bis hin zum Zentralen Grenzwertsatz und den Gesetzen der großen Zahlen abgehandelt.

Der ins Auge gefasste Leserkreis von Anfängern schätzt dies offensichtlich, wie die jetzt notwendig gewordene vierte Auflage zeigt.

Gegenüber der 25 Jahre zurückliegenden dritten Auflage wurde das Buch durch AitSahlia um zwei Kapitel über Portfoliotheorie aus dem Bereich der Wirtschaftswissenschaften und durch Chung um einen Anhang über Martingale erweitert. Für den Fachmathematiker ist es interessant, die Begriffsbildungen der Wirtschaftswissenschaftler zu lesen, mit denen er selten in Berührung kommt, und eine neue Anwendung der Stochastischen Prozesse kennenzulernen.

W. Knödel (Stuttgart)

E. J. Dudewicz, B. L. Golden, Z. Govindarajulu (eds.): Modern Mathematical, Management, and Statistical Sciences, II. (American Series in Mathematical and Management Sciences, Vol. 49.[1]) American Sciences Press, Columbus, 2003, 203 S. ISBN 0-935950-53-2 P/b $ 235,–.

Die neun Arbeiten dieses Sammelbandes enthalten theoretische Grundlagenarbeiten, die Entwicklung von Methoden und Algorithmen sowie Anwendungsbeispiele. Der Bogen spannt sich von der Schätz- und Testtheorie, der Zuverlässigkeitstheorie, der statistischen Qualitätskontrolle bis zur Versuchsplanung. *D. Plachky* benutzt einen Zusammenhang zwischen der negativen Binomialverteilung und der negativen hypergeometrischen Verteilung, um den kritischen Wert eines gleichmäßig besten Hypothesentests für die Erfolgswahrscheinlichkeit im einseitigen Fall zu ermitteln. *M. R. Yilmaz* widmet sein Interesse subjektiven Wahrscheinlichkeiten, die er als Konstrukt auffasst, das vorhandene Informationen nutzt. Es werden verschiedene Konstruktionsansätze erörtert, wovon ein spezielles Modell herausgegriffen und durch instruktive Beispiele illustriert wird.

Konsistente Parameterschätzer in Regressionsmodellen mit Fehlern in den Regressorvariablen, die auf einer korrigierten Scorefunktion basieren, werden von *W.-K. Fung, X.-P. Zhong* und *B.-Ch. Wei* vorgeschlagen. Daneben werden noch einige diagnostische Kenngrößen konstruiert und ein Datensatz, der die Modellierung von Hauspreisen in Boston betrifft, analysiert. *K. Gürsoy* und *M. N. Katehakis* diskutieren das Problem einer dynamischen optimalen Zuordnung eines Mechanikers zu defekten Komponenten eines seriellen Systems. Unter der Annahme, dass die Lebensdauern und die Reparaturzeiten der Komponenten unabhängig geometrisch verteilt sind, kann für ein System mit zwei Komponenten gezeigt werden, dass die Systemverfügbarkeit durch die Zuordnung des Mechanikers zur zuverlässigsten Komponente maximiert wird, unabhängig von den Parameterwerten der Reparaturverteilung.

Verteilungseigenschaften und Implikationen des geschätzten Indexes für die sogenannte Prozessunfähigkeit, der für Prozesse mit symmetrischen und unsymmetrischen Toleranzen definiert ist, werden von *P. C. Lin, W. L. Pearn* und *K. S. Chen* angegeben, die auch einen Test für Prozessunfähigkeit vorschlagen. *A. Nanthakumar* und *K. Selvalvel* diskutieren die Eigenschaften eines sequentiellen Schätzers

[1]Dieses Werk ist gleichzeitig erschienen als: American Journal of Mathematical and Management Sciences, Volume 23 (2003), issues 1 and 2.

und einer Stoppregel für den Prozessfähigkeitsindex C_{pm} bei fest vorgegebener Breite des Schätzintervalls.

M. A. Lejeune entwickelt einen Austauschalgorithmus für die Konstruktion supersaturierter, saturierter und nicht saturierter Versuchspläne und testet die Effizienz seiner Methode an Hand verschiedener Standard-Kriterien. Die Anwendbarkeit seines Verfahrens wird mittels eines realen Beispiels illustriert. Ein Programmlisting in *Delphi* beschließt diese Arbeit. Die Analyse von Mittelwerten ist eine Technik, in der eine Gruppe von Behandlungsmittelwerten verglichen wird, um festzustellen, ob sich irgendwelche dieser Gruppenmittelwerte signifikant vom Gesamtmittelwert unterscheiden. Dies kann als Alternative zur klassischen Varianzanalyse mit festen Effekten angesehen werden. In der Arbeit von *E. J. Dudewicz* und *P. R. Nelson* wird der diffizile Fall ungleicher (heteroszedastischer) Gruppenvarianzen behandelt und eine ausführliche Studie der Gütefunktionen in Abhängigkeit vom Signifikanzniveau und der Gruppenanzahl präsentiert. Momente von Ordnungsstatistiken und beste lineare Parameterschätzer für die verallgemeinerte Lambdaverteilung werden schließlich von *M. Z. Raqab* vorgestellt und mit anderen Schätzern verglichen.

Die vorliegenden Arbeiten sind auch für Nichtspezialisten lesbar. Sie sind verständlich geschrieben mit ausführlichen Beweisen, detaillierten Algorithmen und vollständigen Datenanalysen. Jeder an statistischen Methoden und deren Anwendungen interessierter statistisch vorgebildeter Leser wird daher den einen oder anderen Artikel dieser Sammlung zu schätzen wissen.

E. Stadlober (Graz)

S. N. Mishra, B. K. Sinha, S. V. Sabnis (eds.): Forum for Interdisciplinary Mathematics, Proceedings on Statistics, Combinatorics, and Related Areas. (American Series in Mathematical and Management Sciences, Vol. 48[2]) American Sciences Press, Columbus, 2002, 217 S. ISBN 0-935950-52-4 P/b $ 235,–.

Dieser Tagungsband ist zwei großen indischen Statistikern gewidmet, die durch kurze Biographien und den Abdruck ihrer Publikationslisten gewürdigt werden. Shanti S. Gupta (1925–2002) hat lange an der Purdue University in den USA gewirkt und mehr als 200 Arbeiten auf dem Gebiet des *ranking and selection* von Verteilungen verfasst. V. K. Srivastava (1944–2001) war an der Universität in Lucknow (Indien) tätig und hat in seinen mehr als 150 Beiträgen Fragestellungen aus der Ökonometrie und statistischen Schätztheorie behandelt.

M. Deza, M. Dutour und *E. Panteleeva* beschäftigen sich mit polyedrischen konvexen Kegeln und gerichteten Mehrfachschnitten auf n Punkten. Für $n = 3,4,5$ werden die Anzahlen der Facetten und extremen Strahlen mit ihren Adjazenzen

[2]Dieses Werk ist gleichzeitig erschienen als: American Journal of Mathematical and Management Sciences, Volume 22 (2002), issues 3 and 4.

und Inzidenzen explizit berechnet. Einige neue Resultate für allgemeines n werden ebenfalls angegeben. *N. M. Singhi, G. R. Vijayakumar* und *N. U. Devi* diskutieren einige Ergebnisse im Zusammenhang mit der partiellen Ordnung auf der Menge von finiten Untermengen einer partiell geordneten Menge. Das klassische Behrens-Fisher-Problem greifen *P. Sing, K. K. Saxena* und *O. P. Srivastava* auf. Es wird ein neuer Test konstruiert, der eine Alternative zu den bekannten Tests von Welch-Satterthwaite und Cochran-Cox darstellt. Für die praktische Anwendbarkeit dieser neuen Prozedur fehlen noch entsprechende Tabellen mit den kritischen Werten der Teststatistik. *T. Ahmad* und *A. Rai* schlagen einen stratifizierten Stichprobenplan für Umweltstudien vor, der sowohl die räumliche Struktur der Umweltvariablen, als auch den Effekt von Clusterungseigenschaften kontaminierter Nachbarschaftsgebiete berücksichtigt. *R. Dasgupta* studiert die Gleichmäßigkeit der Oberfläche von Industrieprodukten, die durch die maximale Abweichung in der Dicke beschrieben wird. An Hand von Beispielen wird gezeigt, dass die Verteilung der Gleichmäßigkeit durch Extremwertverteilungen ausreichend genau approximiert werden kann.

H. Toutenburg und *V. K. Srivastava* betrachten gewichtete Parameterschätzer bei gemischten Regressionsproblemen mit fehlenden Werten in den Regressorvariablen und vergleichen deren Eigenschaften mit den Eigenschaften konventioneller Least Square Schätzer und gemischter Regressionsschätzer. *M. Pal, G. Chattopadhyay* und *B. K. Sinha* fassen ein System S als Mischung von k Subsystemen S_i mit den Wahrscheinlichkeitsgewichten p_i auf und setzen voraus, dass jedes Subsystem aus einem seriellen System mit 2 Komponenten besteht. Für solche Systeme werden jeweils Charakterisierungen bzgl. unterschiedlicher Verteilungen angegeben. *A. Dharmadhikari* betrachtet die Performance von m Typen von Komponenten in n Umgebungen und setzt für jede der mn Beobachtungskombinationen Exponentialverteilung mit verschiedenen Skalierungsparametern voraus, die noch zusätzlich multiplikativ vom Typ, der Umgebung und der Interaktion Typ$\times$Umgebung abhängen. Für das Modell einer doppelten Varianzanalyse mit Interaktion werden die Eigenschaften von Schätzern und Hypothesentests untersucht.

Im Mittelpunkt der Arbeit von *U. J. Dixit* und *V. U. Dixit* steht das Testen von Parametern einer rechts abgeschnittenen Exponentialverteilung. *P. Singh, A. N. Gill* und *S. N. Mishra* stellen eine Klasse von Selektionsprozeduren vor, bei denen eine Teilmenge zufälliger Größe aus k Populationen mit unterschiedlichen Exponentialverteilungen so ausgewählt wird, dass diese Teilmenge die Population mit dem kleinsten Skalierungsparameter mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $p > 1/k$ enthält. Eine der Hauptquellen von systematischen Fehlern und fehlenden Antworten bei persönlichen Interviews ist die soziale Verträglichkeit der Antworten auf sensible Fragen. *S. Gupta* und *B. Thornton* vergleichen die Technik der partiellen Randomisierung mit zwei anderen Methoden und demonstrieren die Brauchbarkeit dieses Ansatzes an Hand eines Datenbeispiels.

Die Artikel decken ein breites Spektrum an Fragestellungen ab, die für Fachleute aus dem Bereich der Statistik durchaus von Interesse sein könnten. Allerdings ist der Preis dieses Sammelbandes von $ 235,– unangemessen hoch, was seine Verbreitung auf einige wenige Fachbibliotheken beschränken wird.

E. Stadlober (Graz)

E. Pap (ed.): Handbook of Measure Theory, Vols. I+II. North-Holland/Elsevier, Amsterdam, 2002, 1636 S. ISBN 0-444-50263-7 H/b € 260,–.

Das aus zwei schön ausgestatteten Bänden bestehende Werk ist eine bemerkenswerte Publikation, die in gewisser Weise die meisten wichtigen Resultate zeitgenössischer Maßtheorie zusammenfasst. Die beiden Bände enthalten insgesamt 37 Kapitel über verschiedene Aspekte der Maß- und Integrationstheorie von verschiedenen Autoren, die in 9 Teile gegliedert sind. Dabei werden neben klassischen Gebieten der Maßtheorie auch aktuellere Themen wie Fuzzy-Modelle in angemessener Weise behandelt. Damit werden die beiden Bände zu einer enzyklopädieartigen Zusammenfassung der Maß- und Integrationstheorie, wenn auch, bedingt durch die verschiedenen Autoren, Redundanzen auftreten. Dies ist aber nicht nur von Nachteil, da die einzelnen Kapitel unabhängig voneinander gelesen werden können. Im Einzelnen ist das Handbuch in folgende Teile gegliedert: Part 1, *Classical Measure Theory*, umfasst sieben Kapitel, darunter historische Aspekte, Paradoxien, Konvergenzsätze, Radon-Nikodym-Sätze und Konvergenzfragen. Part 2, *Vector Measures*, besteht aus drei Kapiteln, die Vektor-Integration, den Rieszschen Darstellungssatz und stochastische Prozesse sowie stochastische Integration in Banachräumen umfassen. Part 3, *Integration Theory*, umfasst 4 Kapitel mit den Inhalten Daniell-Integral, Pettis-Integral, Henstock-Kurzweil-Integral sowie eine Übersicht über mengenwertige Integration und mengenwertige Wahrscheinlichkeitstheorie. Part 4, *Topological Aspects of Measure Theory*, umfasst 4 Kapitel zu den Themenkreisen ‘Density topologies’, ‘FN-topologies and group-valued measures’, ‘products of topological measure spaces’, sowie ‘perfect measures and related topics’. Damit ist der erste Band abgeschlossen.

Der zweite Band beginnt wie der erste mit einer Liste von Autoren und besteht aus 5 Teilen, einem Autoren- und Sachindex, die beide sehr umfassend sind. Part 5, *Order and Measure Theory*, enthält 5 Kapitel mit folgenden Themen: ‘Riesz spaces and ideals of measurable functions’, ‘Measures on quantum structures’, ‘Probability on MV-algebras’, ‘Measures on clans and on MV-algebras’, sowie ‘Triangular norm-based measures’. Part 6, *Geometric Measure Theory*, behandelt in 2 Kapiteln ‘Geometric measure theory’ und ‘Fractal measures’. Part 7, *Relation to Transformation and Duality*, umfasst 5 Kapitel mit den Themen ‘Positive and complex Radon measures in locally compact Hausdorff spaces’, ‘Measures on algebraic-topological structures’, ‘Liftings’, ‘Ergodic theory’ und ‘Generalized derivatives’. Part 8, *Relation to the Foundations of Mathematics*, beschreibt ‘Real valued measurability and some set-theoretic aspects’ und ‘Nonstandard analysis and measure theory’. Der letzte Teil, Part 9, *Non-Additive Measures*, besteht aus

5 Kapiteln mit folgenden Themen: ‘Monotone set-functions-based integrals’, ‘Set functions over finite sets: Transformations and integrals’, ‘Pseudo-additive measures and their applications’, ‘Qualitative possibility functions and integrals’ und dem Abschlusskapitel ‘Measures of information’. Die beiden Bände enthalten zahlreiche Literaturhinweise und bilden insgesamt eine nahezu vollständige Übersicht über den aktuellen Stand der Maßtheorie. Ein Autorenindex mit über 1500 Namen sowie die Druckqualität und schöne Ausstattung machen die beiden Bände zu einem Nachschlagwerk mit hohem Standard, das jedem mit Maßtheorie befassten bestens empfohlen werden kann.

R. Viertl (Wien)

Internationale Mathematische Nachrichten

Abelpreis 2004

Den mit umgerechnet 728.000 € dotierten „Abel-Preis für Mathematik“ teilen sich in diesem Jahr der Brite Sir *Michael Francis Atiyah* von der Universität Edinburgh und der US-Amerikaner *Isadore M. Singer* vom MIT. Die beiden Wissenschaftler wurden für den Brückenschlag zwischen Mathematik und theoretischer Physik geehrt.

Der zum zweiten Mal verliehene Abel-Preis wurde im Jahr 2002 zum 200. Geburtstag des norwegischen Mathematik-Genies Niels Henrik Abel (1802–1829) gestiftet und soll sich nach Wunsch der Norwegischen Akademie der Wissenschaften in der Disziplin Mathematik als Äquivalent zum Nobelpreis etablieren.

Die Auszeichnung wird jährlich vergeben. Der erste Preisträger war im vergangenen Jahr der Franzose *Jean-Pierre Serre*.

(ORF)

International Congress of Mathematicians 2006 in Madrid

Der “International Congress of Mathematicians 2006” wird von 22.–30. August 2006 in Madrid stattfinden. Vorregistrierungen können bereits auf der Internetseite *http://www.icm2006.org* vorgenommen werden.

(Manuel de León, President, ICM 2006)

5th MATHMOD Vienna

The “5th IMACS Symposium on Mathematical Modelling” (5th MATHMOD Vienna) will take place at Vienna University of Technology from February 8–10, 2006.

The scope of the conference covers theoretic and applied aspects of the various types of mathematical modelling (equations of various types, automata, Petri nets, bond graphs, qualitative and fuzzy models, etc.) for systems of dynamic nature (deterministic, stochastic, continuous, discrete or hybrid with respect to time, etc.). Comparison of modelling approaches, model simplification, modelling uncertainties, port-based modelling, and the impact of items such as these on problem solution, numerical techniques, validation, automation of modelling and software support for modelling, co-simulation, etc. will be discussed in special sessions as well as applications of modelling in control, design or analysis of systems in engineering and other fields of application.

For further information see *http://simtech.tuwien.ac.at/MATHMOD/* or contact Univ.Prof. Dr. Inge Troch, Vienna University of Technology, Wiedner Hauptstrasse 8–10, 1040 Wien, Austria, Phone: (+43)1-58801-10116, Fax: (+43)1-58801-10199, e-mail *inge.troch@tuwien.ac.at*.

(Inge Troch)

Ehrenpromotion von Rolf Schneider in Salzburg

Am 29. April 2004 fand an der Universität Salzburg aus Anlass der Ehrenpromotion von Prof. *Rolf Schneider* (Univ. Freiburg) ein Festkolloquium über Konvexgeometrie statt.

Es wurden folgende Vorträge gehalten:

Jörg Wills (Univ. Siegen): On convex bodies and lattice points and on my first question to Rolf Schneider.

Peter McMullen (University College London): Mixed fibre polytopes.

Richard Vitale (University of Connecticut, Storrs): Convex bodies: volume and dimension.

Stefano Campi (Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia): Variational problems in Convex Geometry: results and prospects.

Peter Gruber (TU Wien): Asymptotic approximation of convex bodies.

Wegen des großen Interesses an der Ehrenpromotion drucken wir auch die Laudatio von Prof. *Christian Buchta* und die Dankesworte von Prof. *Rolf Schneider* ab.[3]

Hohe Festversammlung!

Es ist mir die ehrenvolle Aufgabe zuteil geworden, den Werdegang und das wissenschaftliche Werk Rolf Schneiders zu skizzieren.

Rolf Schneider wurde am 17. März 1940 in Hagen (Westfalen) geboren. Seine Mutter war wegen der Bombenangriffe auf Magdeburg evakuiert worden und hielt sich bei ihrer Mutter in der Gegend von Hagen auf. Sein Vater war zu dieser Zeit dienstverpflichtet.

[3] Die Redaktion der IMN bedankt sich bei Prof. Christian Buchta und Prof. Rolf Schneider für das Überlassen ihrer Manuskripte.

Der Großvater mütterlicherseits war Seeoffizier und kam im Frühjahr 1916 in der Seeschlacht im Skagerrak ums Leben. Die Mutter hätte gern Chemie studiert, was jedoch die Umstände nicht zuließen.

Der Großvater väterlicherseits war Schneidermeister und wanderte in die USA aus — ursprünglich in der Absicht, seine Familie nachkommen zu lassen; doch dazu kam es letztendlich nicht. Der Vater war Architekt und Oberbaurat.

Die Grundschule begann Rolf Schneider in Soest (Westfalen). 1949 übersiedelte die Familie nach Frankfurt, wo sein Vater fortan beruflich tätig war. In Frankfurt absolvierte Rolf Schneider auch das Realgymnasium bis zum Abitur im Jahr 1959.

Anschließend diente er in der Bundeswehr in der Panzerartillerie in Niederlahnstein bei Koblenz am Rhein. Er war der Feuerleitstelle zugeteilt, weil er mit mathematischen Tafeln umgehen konnte.

Schon in seiner Schulzeit war ihm klar, dass er Mathematik studieren wollte. Sein Vater riet ihm ab und schlug vor, er solle Statiker werden. Der Beginn eines Physikstudiums in Frankfurt war dann ein gewisser Kompromiss. In der Quantenmechanik hatte er Aufgaben zu lösen, die er als unbefriedigend empfand, weil ihm der Hintergrund äußerst unklar erschien. Das veranlasste ihn noch vor dem Vordiplom, zur Mathematik zu wechseln.

Das Mathematikstudium in Frankfurt schloss er 1964 im neunten Semester mit einer Diplomarbeit bei Ruth Moufang ab. Aus der Diplomarbeit gingen zwei Publikationen hervor, die im „Archiv der Mathematik“ erschienen sind. Die erste gibt eine Kennzeichnung der Kugel, die zweite beschäftigt sich mit Ähnlichkeits- und Translationssätzen für Eiflächen. Das Thema seiner Diplomarbeit suchte er sich selbst und berichtete Ruth Moufang darüber erst, als schon Ergebnisse vorlagen. Über die Diplomarbeit trug er 1966 auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Moskau vor. Unter den Zuhörern war A. D. Aleksandrov.

1967 promovierte er in Frankfurt, wieder bei Ruth Moufang. Die Ergebnisse der Dissertation sind in der „Mathematischen Zeitschrift“ unter dem Titel „Zur affinen Differentialgeometrie im Großen“ veröffentlicht.

Als Student war Rolf Schneider wissenschaftliche Hilfskraft und hatte Übungen zur Analysis zu betreuen. Eine Übungsteilnehmerin fiel ihm durch ihre besondere Begabung auf. Umso überraschter war er, als ihm die junge Dame am Ende des Semesters mitteilte, die Mathematik wäre nicht das Richtige für sie, und deshalb würde sie zur Biologie wechseln. Später schrieb diese Dame in ihrer Autobiographie: “I also did courses in mathematics and theoretical mechanics which fascinated me for a year, until I found these topics too difficult. Via the class in chemistry I got reminded of my true interests in biology.” Es handelt sich um Christiane Nüsslein-Volhard, die 1995 für ihre Forschungen in der Entwicklungsbiologie den Nobelpreis für Medizin erhielt.

Eine andere junge Dame fiel Rolf Schneider in Südtirol beim Schifahren auf. Damals hieß sie Anjetta Müller. Seit 1967 ist sie seine Frau. 1970 wurde der erste

Sohn, Jan, 1975 der zweite Sohn, Thomas, geboren.

Nach dem Studienabschluss ist Rolf Schneider zunächst Verwalter einer Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten in Frankfurt. 1967 trifft er im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach Günter Ewald, der ihm eine Assistentenstelle in Bochum anbietet. 1969 habilitiert sich Rolf Schneider in Bochum. 1970 wird er Wissenschaftlicher Rat und Professor in Frankfurt und noch im selben Jahr Ordinarius an der TU Berlin, als Nachfolger von Kurt Leichtweiß, der nach Stuttgart geht. Die Zeit in Berlin ist rau, die politische Situation belastend. Bald ist Rolf Schneider Vorsitzender des Fachbereichsrats, was einem Dekan entspricht, und leidet unter den Mühen, die dieses Amt mit sich bringt, wie etwa Sitzungsdauern von bis zu 14 Stunden.

1974 folgt er einem Ruf an die Universität Freiburg im Breisgau. Der Abschied aus Berlin fällt ihm nicht schwer. Um die Enttäuschung über die unbefriedigenden Umstände an der TU Berlin der Universitätsspitze gegenüber zum Ausdruck zu bringen, verzichtet er auf Bleibeverhandlungen.

In Freiburg findet er eine gute Atmosphäre vor, die ihm die ideale Voraussetzung für eine erfolgreiche wissenschaftliche Arbeit bietet. Zwar nimmt er auch in Freiburg akademische Ämter auf sich — gegenwärtig ist er Dekan der Fakultät für Mathematik und Physik —, doch die Belastung hält sich in Grenzen, zumindest bezogen auf den Gesamtzeitraum von 30 Jahren.

Heute liegen ca. 140 Artikel in den angesehensten mathematischen Fachzeitschriften vor, mehr als 100 davon sind in Freiburg entstanden. Auch die vier von Rolf Schneider verfassten Bücher entfallen auf die Freiburger Zeit.

Sowohl die Bücher als auch die Zeitschriftenartikel beschäftigen sich mit der Konvexgeometrie, der Integralgeometrie und der Stochastischen Geometrie. Einige der früheren Arbeiten haben Bezüge zur Differentialgeometrie. Es werden die unterschiedlichsten Fragen behandelt, sodass es vollkommen unmöglich erscheint, wenigstens summarisch die wichtigsten Aspekte anzuführen. Ich kann hier nur einige Beispiele herausgreifen, wobei die Auswahl unter dem Gesichtspunkt der erhofften Verständlichkeit für ein allgemeines Publikum getroffen wurde.

Eine in der „Mathematischen Zeitschrift“ erschienene Arbeit trägt den Titel „Zu einem Problem von Shephard über die Projektionen konvexer Körper“. Ein konvexer Körper ist ein Objekt mit der Eigenschaft, dass die Verbindungslinie von zwei beliebigen Punkten vollständig im Objekt enthalten ist. Demnach sind im dreidimensionalen Raum eine Kugel, ein Würfel oder eine Pyramide konvexe Körper, eine gekrümmte Banane dagegen nicht, wenn die Verbindungslinie der beiden Endpunkte nicht im Inneren der Banane verläuft. In Rolf Schneiders Arbeit geht es nun um folgende Frage: Wenn von zwei konvexen Körpern der erste in jede Richtung einen größeren Schatten (dem Inhalt nach) wirft als der zweite, hat dann der erste auch größeres Volumen als der zweite? Im Allgemeinen ist das nicht der Fall. Die Arbeit beschreibt einerseits Körperklassen, für die der Schluss richtig ist, und andererseits solche, für die er nicht richtig ist. Der Schlüssel zur Behandlung des Problems ist die Idee Rolf Schneiders, den so genannten Projektionenkörper heranzuziehen. Die erfolgreiche Verwendung des Projektionenkörpers hat die Anregung gegeben, bei einem verwandten Problem, dem Busemann-Petty-Problem, analog zum Projektionenkörper den Schnittkörper zu definieren, mit dessen Hilfe schließlich der Durchbruch zum Erfolg geglückt ist. Als Busemann-Petty-Problem bezeichnet man folgende Frage: Wenn von zwei zentralsymmetrischen konvexen Körpern der erste in jeder Richtung eine größere Schnittfläche (dem Inhalt nach) hat als der zweite, wobei sich Schnittfläche auf einen Schnitt mit einer Hyperebene durch den Ursprung bezieht, hat dann der erste auch größeres Volumen als der zweite? In den Dimensionen 3 und 4 lautet die Antwort ja, was nicht sehr überrascht. Ab der Dimension 5 jedoch lautet die Antwort nein, was intuitiv schwer nachvollziehbar ist. Um das Interesse zu dokumentieren, das das Busemann-Petty-Problem bis zu seiner Lösung in den letzten Jahren auf sich gezogen hat, möchte ich die Namen von Mathematikern nennen, die zur Lösung beigetragen haben: Ball, Bourgain, Gardner, Giannopoulos, Koldobsky, Larman, Lutwak, Papadimitrakis, Rogers, Schlumprecht und Zhang. Ein der Mathematik ferner Stehender fragt sich vielleicht, inwiefern es interessiert, von den Schatten, die ein Körper wirft, oder von den Inhalten seiner Schnitte auf den Körper selbst zu schließen. Denken Sie in diesem Zusammenhang etwa an das Interesse Ihres Arztes, aus zweidimensionalen Röntgenbildern Schlüsse auf Ihren dreidimensionalen Körper zu ziehen.

Ich komme zu einem zweiten Beispiel, zu einer im „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ erschienenen Arbeit mit dem Titel „Gleitkörper in konvexen Polytopen“. Ein konvexes Polytop ist ein konvexer Körper mit ebenen Seitenflächen. Ein Würfel oder eine Pyramide sind Polytope, eine Kugel dagegen nicht. Ein Körper, der in jeder Richtung gleich dick ist, heißt Körper konstanter Breite. Ein solcher Körper hat die Eigenschaft, dass man ihn in einem passenden Würfel vollständig frei drehen kann, wobei er stets an allen Seitenflächen des Würfels entlanggleitet. Analog ist ein Rotor in einem konvexen Polytop erklärt. Die Arbeit enthält eine vollständige Klassifikation (in allen Dimensionen) der Paare von konvexen Polytopen und zugehörigen Rotoren. Der Beweis benützt Hilfsmittel aus der harmonischen Analyse, nämlich Kugelfunktionen und ihren Zusammenhang mit den Darstellungen der Drehgruppe. Der Beweis ist in Helmut Groemers Monographie “Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics”, Cambridge University Press, 1996, vollständig aufgenommen worden.

Das dritte Beispiel ist eine in den „Commentarii Mathematici Helvetici“ erschienene Arbeit. Aus der klassischen Differentialgeometrie weiß man, dass die einzigen hinreichend glatten Eiflächen mit konstanter mittlerer Krümmung die Ränder von Kugeln sind. Dasselbe gilt für die Gaußsche Krümmung sowie in höheren Dimensionen für jede der elementarsymmetrischen Krümmungsfunktionen. In der Arbeit wird dieses Ergebnis auf allgemeine konvexe Körper ausgedehnt, ohne jede Differenzierbarkeitsvoraussetzung. Die Krümmungsfunktionen werden dabei durch entsprechende Krümmungsmaße ersetzt. Es liegt also im natürlichen Rahmen der konvexen Körper ein differentialgeometrischer Satz vor, der an keinerlei analytische Voraussetzungen gebunden ist. Der Satz erklärt beispielsweise, warum es nur kugelförmige Seifenblasen geben kann.

Das vierte und letzte Beispiel, eine in den „Mathematischen Annalen" erschienene Arbeit, betrifft die Approximation konvexer Flächen durch Polytope. Unter Approximation versteht man die Ersetzung eines komplizierten Objekts durch ein einfacheres. Bei der Approximation einer konvexen Fläche durch ein konvexes Polytop wird die gegebene Fläche durch eine Fläche ersetzt, die aus ebenen Stücken besteht. Denken Sie hier vielleicht an einen Fußball, der bekanntlich aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken zusammengenäht ist. Wie sollte man auch aus einem Stück Leder die Oberfläche einer Kugel herstellen? Das aus den 12 Fünfecken und den 20 Sechsecken zusammengebaute Objekt ist ein konvexes Polytop, das eine Kugel approximiert. Bei einer solchen Approximation nimmt man zwangsläufig eine Abweichung in Kauf. Je mehr Seitenflächen oder Eckpunkte man für das approximierende Polytop zulässt, desto kleiner wird die Abweichung. Rolf Schneiders Resultat gibt nun für allgemeine glatte konvexe Körper beliebiger Dimension bei vorgegebener zugelassener Eckenzahl jene Abweichung an, die man jedenfalls in Kauf nehmen muss, und zwar asymptotisch, das heißt für eine sehr groß zu denkende Zahl zugelassener Eckpunkte.

Um es nochmals zu sagen: Das war jetzt eine Skizze von vier Forschungsarbeiten, die ich aus den 140 vorhandenen herausgegriffen habe.

Die Arbeiten Rolf Schneiders zeichnen sich durch natürliche Fragestellungen aus. Ein Nichtmathematiker fragt sich vielleicht, was man sich unter einer natürlichen Frage vorstellen soll. Nun, einem wissenschaftlich tätigen Mathematiker wird es keine Schwierigkeit bereiten, beliebig viele mathematische Probleme anzugeben, die ungelöst sind. Die Fortschritte bei der Lösung mancher dieser Probleme werden in Fachkreisen mit größtem Interesse verfolgt, und ein Kollege, dem die Lösung letztendlich glückt, erwirbt sich weltweites Ansehen. Die Lösung anderer Probleme, mag sie auch noch so schwierig sein, ist völlig bedeutungslos. Was eine natürliche Fragestellung ist, darüber herrscht unter den Kundigen weitgehender Konsens, auch wenn es kaum möglich ist, die Kriterien klar zu definieren. Halten Sie sich vielleicht vergleichsweise vor Augen, dass sich unter Musikliebhabern ein Konsens darüber herstellen lässt, dass die Musik, die wir gestern Abend gehört haben, höher zu bewerten ist, als die Musik, die mein fünfjähriger Sohn und meine dreijährige Tochter mit den Trommeln produzieren, die ihnen meine Schwägerin geschenkt hat. Dennoch würde man sich schwer tun, jemandem, der noch nie Musik gehört hat, den Unterschied zu erklären.

Die Zeit schreitet voran, und ich muss ein Ende meiner Ausführungen ansteuern. So möchte ich einige bedeutende Leistungen Rolf Schneiders außerhalb seiner überragenden Forschungsergebnisse nur aufzählen.

Rolf Schneider hat vier Bücher verfasst. Das bedeutendste davon, “Convex Bodies — the Brunn-Minkowski Theory”, ist gut zehn Jahre nach seinem Erscheinen *der* Klassiker der Konvexgeometrie. Allein dieses Buch zu schreiben hätte ausgereicht, weltberühmt zu werden. Auch die anderen drei Bücher sind zu Standardwerken der Gebiete, die sie behandeln, nämlich der Integralgeometrie und der Stochastischen Geometrie, geworden.

Als Gutachter für mathematische Fachzeitschriften, in Herausgebergremien und redaktionellen Beiräten sowie als Mitglied wissenschaftlicher Programmkomitees zahlreicher internationaler Tagungen hat Rolf Schneider richtungsweisend gewirkt.

An mehreren Orten hat Rolf Schneider die Konvexgeometrie gefördert, einer davon ist Salzburg. Jahrzehntelang hat er hier meinen verehrten Vorgänger, Herrn Professor August Florian, und meinen Kollegen Hans Linhart beim Aufbau des Forschungsschwerpunkts „Diskrete Geometrie und Konvexgeometrie“ unterstützt. Auf den von 1975 bis 2003 in Salzburg veranstalteten Geometrie-Tagungen hat Rolf Schneider wesentliche Beiträge geleistet.

Er hält phantastische Vorlesungen, und im Lauf der Jahre hat die Liste der Fächer, über die er Vorlesungen gehalten hat, eine beachtliche Länge erreicht.

Die Nachricht von dieser Ehrenpromotion hat sich um den ganzen Globus verbreitet, und wir haben Applaus dazu aus Peking genauso bekommen wie aus New York.

Das gewaltige wissenschaftliche Schaffen haben Sie, sehr verehrte Frau Schneider, über Jahrzehnte unterstützt und sich auf diese Weise um die Mathematik und die Wissenschaft verdient gemacht.

So wünsche ich im Namen aller Anwesenden sowie im Namen aller, die diese Ehrung mit Interesse verfolgen und aus den verschiedensten Gründen nicht persönlich kommen konnten, Ihnen, sehr geehrter, lieber Herr Schneider, und ebenso Ihnen, sehr verehrte Frau Schneider, für den weiteren Lebensweg Glück, Gesundheit und Gottes Segen.

Christian Buchta

Magnifizenz, Spektabiles, verehrte Festgäste, liebe Freunde, liebe Familie!

An einem solchen Tag stürmt auf den Betroffenen eine Vielfalt von Gefühlen ein. Vorherrschend ist das Gefühl der Dankbarkeit. Die hohe Ehre, die mir zuteil wird, hat ja zunächst eine Initiative erfordert, dann Abwägung, Begutachtung, Überzeugungsarbeit vielleicht, Gremienarbeit, und letztlich viel organisatorischen Aufwand. Den Initiatoren sei als Ersten von Herzen gedankt, nicht minder herzlich dem Fachbereich, der Fakultät und der Universität sowie allen, die an der Vorbereitung dieses festlichen Tages mitgewirkt haben. Bei einer solchen Ehrung wird man zum Glück nicht vorher gefragt; wie hätte ich sonst zulassen können, dass meine Person so viel Aufmerksamkeit erregt und so viel Aufwand verursacht!

Ebenso groß wie das Gefühl der Dankbarkeit ist die Freude: Freude über die Ehrung, aber auch große Freude über die neue und besondere Verbundenheit mit Salzburg. Dass man Salzburg lieben muss, ist trivial; ich muss also mehr anführen, um meine besondere Neigung zu Salzburg zu belegen. Die Anfänge dieser Zuneigung waren nicht-mathematisch. Bald nach unserer Eheschließung begannen meine Frau und ich, uns für Volkskunst und Bauernmöbel zu interessieren. Da war Salzburg oft Reiseziel und Ausgangspunkt für sammlerische Streifzüge. Im Salzburger Museum Carolino Augusteum gab es 1971 eine Ausstellung über Hinterglasbilder, die uns zu einem Teilgebiet unseres Sammelns angeregt hat. In jenen Jahren gab es in der Getreidegasse ein Antiquitätengeschäft Oberholzner. An mehreren Volkskunst-Sammlerstücken von dort, aber auch aus der Umgebung von Salzburg, haben wir noch heute unsere Freude.

Nun aber zur Mathematik in Salzburg! Im Jahre 1975 begann die Reihe der Salzburger Tagungen über Diskrete Geometrie, die noch heute im Gedächtnis vieler Geometer sind. Unserem hochverehrten Kollegen August Florian verdanken wir diese Zusammenkünfte von Geometern verschiedener Richtungen, die sehr fruchtbar waren und uns allen unvergesslich sind. Weitere Kolloquien und Tagungen in Salzburg haben mir diese Stadt zur liebsten für mathematische Treffen werden lassen. Mit großer Freude konnten viele von uns Geometern hier im vorigen Jahr an dem Festkolloquium zum 75. Geburtstag von Herrn Florian teilnehmen. Für Ihre langjährige Förderung der Geometrie, Herr Florian, bleiben wir Ihnen zu größtem Dank verpflichtet.

Wir sind alle froh, dass sich Herrn Florians Nachfolge, nach einigen Verzögerungen, in so glücklicher Weise gestaltet hat, durch die Berufung von Herrn Buchta, der in der Mathematik sowohl das geometrisch Schöne als auch das volkswirtschaftlich Nützliche pflegt und fördert.

Neben den Gefühlen der Dankbarkeit und der Freude weckt die mir zuteil gewordene Ehrung natürlich auch weitere Gefühle, die sich aber nicht so leicht benennen und beschreiben lassen. Am deutlichsten ist mir ein Gefühl der Zustimmung zu meinem mathematischen Weg, die Bestätigung also, vielleicht doch nicht alles falsch gemacht zu haben. Die Anfänge waren ja etwas unklar. Wie Sie gehört haben, hatte ich schon in der Schule eine Neigung zur Mathematik, aber mein Vater wollte mich Statiker werden lassen, mit dem Hinweis, da könnte ich doch genug rechnen. Nun, rechnen wollte ich eigentlich gar nicht, und ich will es auch heute noch nicht, wenn es sich vermeiden lässt. Ich habe dann ein Physik-Studium begonnen, mit fortdauernder Vorliebe für die Mathematik, wenn auch nicht ohne Selbstzweifel. Diese Zweifel führten dazu, dass ich noch vor dem Vordiplom umsatteln wollte auf Medizin. Ich habe dafür sogar ein Pflegepraktikum absolviert, aber nach sechs Wochen war ich geheilt, und von da an war der Weg frei für die Mathematik.

Auf diesem weiteren Weg habe ich mich durch die Jahre hinweg immer mit *den* mathematischen Fragen beschäftigt, die mir gerade interessant erschienen, und mit den offenen Problemen, die ich gern gelöst hätte. Unmittelbarer wirtschaftlicher Nutzen oder der Entwurf von Projekten für die Einwerbung von Drittmitteln waren mir also keine Leitideen. Dieses Geständnis mag heutzutage provokant wirken, aber ich stehe dazu. Dass meine Arbeit nicht unbemerkt geblieben ist und sogar dieser hohen Ehrung für würdig befunden worden ist, bestärkt mich in der Hoffnung, dass unser akademisches Leben auch in Zukunft nicht ganz vom Utilitaristischen und Quantifizierbaren beherrscht werden wird.

Die Mathematik ist ja ein Zwitterwesen: einerseits reine Geisteswissenschaft und hohe Kulturleistung, andererseits immens anwendbar und nützlich und existenziell wichtig für unsere industrialisierte Gesellschaft. Nutzen für die Gesellschaft hat sich aber ständig ergeben, ohne dass er gefordert wurde. Nehmen wir ein einziges Beispiel, aus Österreich. Als Johann Radon seine heute nach ihm benannte Transformation entwickelte, konnte er nicht ahnen, dass sie Jahrzehnte später in die mathematischen Grundlagen der Computer-Tomographie eingehen würde. Hätte er zu seiner Zeit einen Antrag auf Förderung eines Projektes stellen sollen, das man später Computer-Tomographie nennen würde? Ich sehe es auch heute nicht als sinnvoll an, wenn sich Mathematik in jeder Phase durch ihren Anwendungsbezug rechtfertigen soll. Gewisse Zwänge und Trends dazu gibt es ja, aber Trends können sich ändern. Am Beginn meiner Professorenzeit waren etwa „Leistung“ und „Elite“ Tabuworte, *das* hat sich geändert. Ich habe die Hoffnung, dass man nach einer vergleichbaren Zeit auch wieder von der Mathematik als einer Kulturleistung sprechen kann, ohne rot zu werden oder Nachteile befürchten zu müssen.

Wie sich im Hochschulbereich Trends innerhalb einer Generation umkehren können, wird mir deutlich, wenn ich die Anfangszeit meines Professorenlebens in Berlin vergleiche mit der Endzeit heute; von Endzeit darf ich reden, weil ich im nächsten Jahr emeritiert werde. Anfangs- und Endphase dieser 35 Jahre haben gemeinsam, dass es sich jeweils hochschulpolitisch um eine Umbruchszeit handelt. Nun leben wir nach Tucholsky zwar ständig in einer Übergangszeit, aber die genannten Phasen heben sich doch beide hervor durch eine besondere Hektik in der Hochschulreform, wenn auch mit grundsätzlich anderen Vorzeichen. Typische Schlagworte im Gefolge der 68er-Jahre waren „Abschaffung der Ordinarienherrschaft“ und „Demokratisierung der Hochschulen“. Gewiss waren Reformen notwendig und berechtigt, aber es wurden doch viele Kinder mit dem Bade ausgeschüttet. Die demokratisierte Gruppenuniversität wurde rasch zum Spielball der ideologisch geprägten Studentengruppen, die weniger Forschung und Lehre verbessern, sondern vielmehr die Gesellschaft in ihrem Sinne umgestalten wollten. Zeit und Energie wurden in Grabenkämpfen zwischen den Gruppen vergeudet, und es wurde mehr und mehr verpönt, etwa Leistung zu fordern oder gar von Elite zu reden. Änderungen der Hochschulgesetze gab es in rascher Folge. Ich erinnere mich noch, dass ich in unserem Fachbereichsrat an der TU Berlin zu einem Thema X, an dessen Inhalt ich mich aber nicht erinnere, einmal den folgenden Beschluss eingebracht habe: „Der Fachbereichsrat wird sich mit dem Thema X erst wieder befassen, wenn eine Beruhigung der Gesetzeslage eingetreten ist.“ So wurde es beschlossen, und niemand hat den Beschluss beanstandet.

Ich bin versucht, diese Art der Beschlussfassung zu reaktivieren. Die Gesetzgebung im Hochschulbereich ist nämlich wieder einmal hektisch. So haben wir uns etwa in Baden-Württemberg gerade an ein Hochschulgesetz vom Jahr 2000 mit insgesamt 472 Paragraphen gewöhnt, bekommen aber Anfang 2005 ein neues, nun mit 97 Paragraphen und zahlreichen Neuerungen. Dazwischen lag nicht etwa ein Regierungswechsel, sondern nur ein Ministerwechsel. Hinzu kommen die Änderung der Personal- und Besoldungsstruktur sowie die Einführung gestufter Studiengänge. Die Hektik ist also ähnlich wie vor dreißig Jahren. Die Richtung allerdings hat sich um 180 Grad gedreht. Was damals des Teufels war, bringt nun das Heil. Um die Richtung anzudeuten, verrate ich Ihnen nur ein Detail aus dem Entwurf unseres neuen Hochschulgesetzes: der Rektor soll in Zukunft nicht mehr Rektor heißen, sondern Vorstandsvorsitzender, und gewählt wird er nicht, wie bisher, vom Senat der Universität, sondern — vielleicht erraten Sie es schon — von einem Aufsichtsrat, der mehrheitlich aus externen Mitgliedern bestehen soll. Zum Trend ist weiterhin zu bemerken, dass die Begriffe Leistung und Elite wieder da sind, allerdings mit zunächst noch gewöhnungsbedürftigen Begleiterscheinungen.

Über die Notwendigkeit von Reformen im Hochschulbereich wird man nicht streiten wollen, über manche Richtungen und Neuerungen aber schon. Jedenfalls leben wir in den Universitäten in einer spannenden Zeit. Eine meiner Hoffnungen ist, dass das Nützlichkeitsdenken nicht gute akademische Traditionen verschütten möge. Zu diesen zählt auch die heutige Festveranstaltung. Ich darf noch einmal allen herzlich danken, die daran mitgewirkt haben, dass mir diese hohe Ehrung zuteil geworden ist. Danken möchte ich auch allen, die zum Gelingen dieses Festakts beigetragen haben, besonders nun dem „giovanni trio salzburg“ und Ihnen, liebe Festgäste, für den Glanz, den Sie diesem Tag verliehen haben.

Rolf Schneider

VII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

Das VII. Österreichische Symposion zur Geschichte der Mathematik fand vom 16.–22.5.2004 in Miesenbach (NÖ) statt. Das Thema war: Jubiläen – Chance oder Plage?

Das wissenschaftliche Programm bestand aus den folgenden Vorträgen:

Klaus Barner (Kassel): War Fermat ein Humanist?

Wolfgang Breidert (Karlsruhe): Kant und die Mathematik.

Miloš Čanak (Belgrad): Über den Terzenaufbau der Akkorde.

Miloš Čanak (Belgrad): Über die Geschichte der mathematischen Schachtheorie, II.Teil, Über die Anwendung der Graphentheorie auf das Schachbrett.

Philip Davis (Providence, USA): The Decline, Fall and Current Resurgence of Visual Geometry: Mathematics is a multisemiotic enterprise.

Sergui Demidov (Moskau): Die mathematische Gesellschaft in Moskau: eine der ersten mathematischen Gesellschaften in Europe, 140 Jahre alt.

Gerlinde Faustmann (Wiener Neustad): Georg Vega (1754–1802), Jubiläen – Originaldokumente.

Jasna Fempl-Madjarevic (Belgrad): Life and Opus of Prof. Dr. Stanimir Fempl, Serbian Mathematician of German Origin.

Lázló Filep (Nyíregyháza): A new interpretation of Platos geometrical numbers.

Lázló Filep (Nyíregyháza): Noted mathematicians of Franz Joseph University (mit Gábor Desző, Cluj, Rumänien).

Harald Gropp (Heidelberg): Jubilees and calendars – Iranian and European calenders in comparison.

Magdalena Hykšová (Prag): Several milestones in the history of game theory.

Friedrich Katscher (Wien): Die Geschichte der Multiplikation.

Friedrich Katscher (Wien): Die Gleichungstransformationen bei Cardano.

Christine Phili (Athen): 1837–1937: ein Jahrhundert der höheren Institutionen in Griechenland.

Herbert Pieper (Berlin): Netzwerk des Wissens und Diplomatie des Wohltuns. Berliner Mathematik, gefördert von A.v. Humboldt und C.F. Gauß.

Walter Purkert (Bonn): Felix Hausdorff – Aspekte seines Lebens und Werkes.

Ulrich Reich (Karlsruhe): „Sicher feiern Sie den 500. Geburtstag des größten Sohnes Ihrer Stadt...“ – persönliche Erfahrungen mit Jubiläen.

Herwig Säckl (Regensburg): Ferdinand Lindemann: Lehren und Lernen in der Mathematik (1904) – Vom Nutzen der Mathematikgeschichte.

Karl-Heinz Schlote (Leipzig): Die Begründung des Theoretisch-Physikalischen Instituts in Leipzig.

Renate Tobies (Kaiserslautern): 100-jähriges Jubiläum der ersten ordentlichen Professur für Angewandte Mathematik: Ein Blick auf Carl Runge.

Waltraud Voss (Dresden): Georg Helm – ein Dresdner Mathematikprofessor.

Ein Tagungsband ist bei Dr. Christa Binder (TU Wien, Institut für Analysis und Scientific Computing, Wiedner Hauptstr. 8–10/101, A 1040 Wien, Tel. (+43) 1 58801 10129, e-mail *christa.binder@tuwien.ac.at*) erhältlich.

Christa Binder

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Brief des Vorsitzenden

Die Vorbereitungsarbeiten zum 16. Internationalen Mathematikerkongress in Klagenfurt (19. bis 23. September 2005) schreiten unter der Leitung der Kollegen Winfried Müller und Hermann Kautschitsch gut voran; die Planung des wissenschaftlichen Programms ist, was die Hauptvorträge und die Minisymposia betrifft, abgeschlossen. Sie finden in diesem Heft die erste Aussendung. Ich ersuche Sie, sich möglichst bald anzumelden, damit die Organisatoren rechtzeitig eine verlässliche Schätzung der Anzahl der Teilnehmer vornehmen können, was für die Budgetplanung von großer Bedeutung ist. Das wissenschaftliche Programm und sicherlich auch das Rahmenprogramm werden so attraktiv sein, dass wir mit einer Rekordbeteiligung an diesem Kongress aus dem In- und Ausland rechnen können (oder zumindest wollen).

Die Evaluierung der Mathematik an Österreichs Universitäten ist nun nach zahlreichen (nicht von der ÖMG zu verantwortenden) Verzögerungen endlich angelaufen. In ihren letzten Sitzungen haben sich Vorstand und Beirat der ÖMG einhellig dafür ausgesprochen, trotz dieser Verzögerungen an der Evaluierung festzuhalten. Die Gutachter stehen nun fest:

Jean-Pierre Bourguignon (gemeinsamer Vorsitz), Bures-sur-Yvette
Karl-Heinz Hoffmann (gemeinsamer Vorsitz), Bonn/München
Eva Bayer-Fluckinger, Lausanne
Friedrich Götze, Bielefeld
Jürg Kramer, Berlin
Pekka Neittaanmäki, Jyväskylä
Alexander Schrijver, Amsterdam
Eduard Zehnder, Zürich.

Nun ist es endlich gelungen, vom Vorsitzenden des Gutachtergremiums den mit den Gutachtern abgestimmten Fragebogen für die erste (schriftliche) Phase der Evaluierung zu erhalten. Dieser Fragebogen ist Anfang Juli im Wege über die Landesvorsitzenden allen Evaluierungseinheiten zugegangen, er ist auch von der Homepage der ÖMG *http://www.oemg.ac.at/index.html* abzurufen. Das Ausfüllen dieses Fragebogens wird sicherlich einige Zeit erfordern, und zwar nicht nur die der betroffenen Institute, sondern auch die der Studienkommissionen oder der sonstigen für den Studienbetrieb nun zuständigen Organen. Ich appelliere nochmals an alle, diese Fragebogen sorgfältig auszufüllen und (wieder im Wege über die Landesvorsitzenden) termingerecht bis Ende September zurückzusenden (möglichst natürlich elektronisch). Diese Fragebogen werden die Grundlage eines Zwischenberichts der Gutachter sein, der den Betroffenen nochmals zur Beseitigung von Fehlern zugestellt wird. Der dann bereinigte Bericht wird als Zwischenbericht dem Ministerium zugehen und zugleich Grundlage für die Besuche des Gutachtergremiums an den einzelnen Universitätsorten sein. Die Besuche an den Universitäten sind für folgende Termine geplant:

7. 1. 2005	Univ. Graz	8. 1. 2005	TU Graz
10./11. 1. 2005	Univ. Wien	11./12. 1. 2005	TU Wien
29. 1. 2005	Univ. Innsbruck	30. 1. 2005	Univ. Salzburg
31. 1. 2005	Univ. Linz		

Das Einhalten dieses Zeitplans setzt natürlich voraus, dass die Rücksendung der Fragebogen rechtzeitig erfolgt. Der Endbericht wird dann voraussichtlich im März 2005 vorliegen. Meines Erachtens braucht die Österreichische Mathematik zu ihrem weiteren Gedeihen und ihrer Absicherung diese Ergebnisse dringend, wie folgendes Beispiel zeigen soll:

Am Hochschulstandort Graz sind spektakuläre Entwicklungen im Gang: Nach jahrelangen Diskussionen, zuletzt in der sogenannten Profilbildungskommission des Ministeriums, über Kooperationen im Bereich der Naturwissenschaften zwischen der Karl-Franzens-Universität und der Technischen Universität Graz werden nun diese Diskussionen am Standort Graz selbst von den beiden Rektoraten und Universitätsräten mit wesentlich größerem Nachdruck und vor allem mit einem ganz konkreten Aktions- und Zeitplan weitergeführt. Es geht nicht mehr nur um Kooperationen, sondern in Teilbereichen möglicherweise auch um organisatorische Zusammenfassung. Wenn diese Dinge richtig gemacht werden, kann das für die betroffenen Fachbereiche, also auch für die Mathematik, sehr gut sein, wenn man es schlecht macht, kann es katastrophal ausgehen. Wie kann man so ein Projekt nun „richtig“ durchführen? Grundvoraussetzung ist selbstverständlich eine genaue fachliche Analyse als Entscheidungsgrundlage für die Rektorate und die Universitätsräte, die wohl am besten ein hochkarätiges internationales Gutachtergremium durchführen kann. Für dieses Projekt kommt das Ergebnis der Evaluierung (hoffentlich) gerade noch zur richtigen Zeit.

In den letzten beiden Jahren hat man immer wieder gesprächsweise gehört, die ÖMG bestehe 100 Jahre. Dies stimmt natürlich nicht formal, wohl aber sinngemäß, wenn man die von den Professoren Boltzmann, Escherisch und Müller 1903 gegründete und von Prof. Inzinger 1946 wieder gegründete „Mathematische Gesellschaft in Wien“ als Vorgängerorganisation der ÖMG auffasst; diese Gesellschaft wurde ja im Jahr 1948 in „Österreichische Mathematische Gesellschaft“ umbenannt. In Anerkennung dieses Jubiläums hat der Vorstand der ÖMG beschlossen, heuer ausnahmsweise zwei Förderungspreise zu verleihen. Dies erschien auch deshalb gerechtfertigt, weil heuer besonders viele ausgezeichnete Nominierungen vorlagen (übrigens auch für den Studienpreis). Die Förderungs- und Studienpreise werden in der Generalversammlung am 19. November 2004 verliehen, die erstmals in den neuen Räumen des Instituts für Mathematik der Universität Wien stattfindet. Die Einladung zur Generalversammlung finden Sie in diesem Heft.

Auf der Generalversammlung wird auch über eine mögliche Neugestaltung der Aktivitäten der ÖMG im Bereich der Didaktik der Mathematik und der Mathematik in der Schule diskutiert werden; diese Bereiche werden derzeit von der Didaktikkommission und der neu eingerichteten Lehrersektion wahrgenommen, doch wird im Vorstand diskutiert, ob dies die optimale Organisationsstruktur ist. In einem ausführlichen Gespräch, das der Vorsitzende der Didaktikkommission, Prof. Schlöglmann, und ich mit Herrn Sektionschef Dobart vom Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kunst führen konnten, wurde über eine engere Einbindung der ÖMG in Diskussionen über Lehrplan oder (ganz aktuell) Standards im Mathematikunterricht gesprochen, wir planen eine gemeinsame Veranstaltung zu diesen Themen.

Die Neuorganisation der Forschungsförderung wird nicht nur, aber auch die österreichische Mathematik betreffen. Vernünftigerweise bleibt der FWF unabhängig, allerdings werden seine Gremien nach anderen Verfahren als bisher beschickt werden. Im Rahmen der Begutachtung des entsprechenden Gesetzesentwurfes konnten (auch unter Beteiligung der ÖMG) noch einige Verbesserungen im Zusammenhang mit der Bestellung des Aufsichtsrats erreicht werden. Es wird nun wichtig sein, wie die neuen Gremien des FWF zusammengesetzt sind, für uns insbesondere, dass die Mathematik weiterhin so kompetent im Präsidium und im Kreis der Referenten vertreten bleibt wie bisher. Übrigens ist auch heuer wieder ein Mathematiker unter den START-Preisträgern, nämlich Michael Kunzinger (Univ. Wien), der im letzten Jahr den Förderungspreis der ÖMG erhielt.

Eine große Möglichkeit ergibt sich für Wiener Mathematiker durch das neue Schwerpunktprogramm „Mathematik und ?“ des Wiener Wissenschafts-, Forschungs- und Technologiefonds, das mit 4 Millionen € dotiert ist. Es können dort größere Projekte mit einer etwa dreijährigen Laufzeit eingereicht werden, in denen innovative Mathematik mit Anwendungen in anderen Wissenschaften mit einer zumindest mittelfristigen Nutzungsperspektive verbunden wird. Die Entscheidung des WWTF für ein Mathematik-Schwerpunktprogramm (in Konkurrenz zu anderen Vorschlägen) fiel nach einer sehr intensiven Diskussion, in die auch Vertreter der ÖMG eingebunden waren. Nähere Informationen zu diesem Programm und zu den Einreichungsformalitäten finden Sie auf der Homepage des WWTF *http://www.wwtf.at.*

Es gibt also hervorragende neue Chancen für die österreichische Mathematik, Pessimismus (wie man ihn an österreichischen Universitäten zur Zeit manchmal findet) ist also für uns keineswegs angebracht, wir sind weiterhin gut unterwegs!

Heinz W. Engl

Rudolf Heersink verstorben

Rudolf Heersink wurde am 17. 4. 1946 in Heft bei Hüttenberg in Kärnten geboren. Er verbrachte dort seine Kindheit und besuchte nach dem Gymnasium in Villach die Höhere Technische Lehranstalt (Elektrotechnik) in Klagenfurt, wo er im Juni 1965 die Reifeprüfung mit Auszeichnung abgelegt hat.

Danach begann er mit dem Studium der Technischen Physik an der Technischen Hochschule in Graz. Noch während des Studiums war er als Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Angewandte Mathematik (geleitet von O.Univ.Prof. Dr. Helmut Florian) beschäftigt. Nach seiner Graduierung zum Diplomingenieu im Jahre 1970 war er als Hochschulassistent (Promotion zum Dr. techn. 1972), seit 1977 als Universitätsdozent, seit 1980 als Außerordentlicher Universitätsprofessor und seit 1998 als Universitätsprofessor an diesem Institut tätig. Sein Arbeitsgebiet war die Analysis, insbesondere die funktionentheoretische Behandlung von partiellen Differentialgleichungen und damit zusammenhängende funktionalanalytische Methoden. Im Studienjahr 1974/75 war Rudolf Heersink als Research FeIlow und Lecturer an der Universität Glasgow beschäftigt.

Während seiner Dienstzeit wirkte er jahrelang als Studienkommissionsvorsitzender und Studiendekan sowie als Erasmusbeauftragter für den Studienaustausch von Studierenden, wobei er immer guten Kontakt zu seinen Studenten hielt und die ihn ihrerseits auch sehr schätzten. Rudolf Heersink war seit 1970 mit seiner Frau Helga verheiratet, 1976 wurde die gemeinsame Tochter Lisa-Maria geboren.

Er war ein sehr vielseitiger Mensch, nicht nur mit Interessen für Mathematik, Naturwissenschaften und Technik, sondern auch für Geisteswissenschaften, Philosophie, Theologie und Musik. Er liebte es zu reisen, war ein hervorragender Fotograf und als Gourmet ein Kenner erlesener Speisen und Getränke. Als Dekan hatte ich mit Rudolf Heersink in den letzten Jahren eng zusammengearbeitet und schätzte ihn als äußerst kompetenten Studiendekan, als hilfsbereiten Kollegen und als besonders verlässlichen Menschen außerordentlich. Sein früher Tod ist ein großer Verlust für den Fachbereich Mathematik, für unsere Fakultät und die gesamte Technische Universität Graz.

Robert Tichy, Juni 2004

Schriftenverzeichnis von Rudolf Heersink

1. Florian, H., and Heersink, R., Über eine partielle Differentialgleichung mit $p+2$ Variablen und deren Zusammenhang mit den allgemeinen Kugelfunktionen. *Manuscr. Math.* 12, 339–349 (1974).

2. Heersink, R., Partial differential equations with complex variables. *Math. Balk.* 4, 245–250 (1974).

3. ——, Operatoren bei einer inhomogenen partiellen Differentialgleichung. *Österr. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. II* 183, 361- 372 (1975).

4. ——, Characterization of certain differential operators in the solution of linear partial differential equations. *Glasg. Math. J.* 17, 83–88 (1976).

5. ——, Über Lösungsdarstellungen und funktionentheoretische Methoden bei elliptischen Differentialgleichungen. Bericht No. 67. Graz: Mathematisch-statistische Sektion im Forschungszentrum Graz. 79 S. (1976).
6. ——, Lösungsdarstellungen mittels Differentialoperatoren für das Dirichlet-Problem der Gleichung $\Delta u + c(x,y)u = 0$. *Lecture Notes Math.* 561, Springer Verlag, S. 227–238 (1976).
7. ——, Isolierte Singularitäten von Lösungen gewisser elliptischer Differentialgleichungen. *Z. angew. Math. Mech.* 57, T 236-T 238 (1977).
8. Florian, H., and Heersink, R., Ein verallgemeinertes Riemann-Hilbertsches Randwertproblem. *Appl. Anal.* 8, 277–284 (1979).
9. Heersink, R. Über Kopplungsprobleme in der Funktionentheorie und zugeordnete singuläre Integralgleichungen. *Bull. Appl. Math.* 100–109, 29–42 (1982).
10. ——, Über die Fortsetzung einer lokalen Lösungsdarstellung bei elliptischen Differentialgleichungen. Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszent. Graz 192, 1–7 (1983).
11. Florian, H., and Heersink, R., Differential operators in the theory of elliptic equations and boundary value problems. In: Complex analysis. Methods, trends, and applications, Springer. pages 198-214 (1983).
12. Heersink, R., Zur Charakterisierung spezieller Lösungsdarstellungen für elliptische Gleichungen. *Sitzungsber., Abt. II, Österr. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl.* 192, 267-293 (1983).
13. ——, Über das Randverhalten von Lösungen einer Eulergleichung. *Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau* 30, No.3, 51-59 (1984).
14. ——, Über das Randverhalten von gewissen verallgemeinerten holomorphen Funktionen. In: Comp. Var. Th. Appl. 4, Springer. S. 119–136 (1985).
15. ——, Über Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen. Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungsges. Joanneum 268, 1–9 (1986).
16. ——, Lösungsdarstellungen für die Bauer-Peschl-Gleichung als lineare Homömorphismen. *Math. Nachr.* 130, 241–244 (1987).
17. ——, Eigenschaften von Bauer-Operatoren für elliptische Differentialgleichungen. *Z. Angew. Math. Mech.* 69, No. 4, T 145–T 146 (1989).
18. ——, On the local existence of Green's functions for elliptic differential equations with complex coefficients. Grazer Math. Ber. 304, 8–14 (1989).
19. ——, Eigenschaften von Lösungsdarstellungen bei elliptischen Differentialgleichungen durch Differential- und Integraloperatoren. In: Complex methods on partial differential equations, Akademie-Verlag. S. 49–54 (1989).
20. Heersink, R. and Tutschke, W., Properties of Bauer, Bergman and Vekua operators for elliptic differential equations with complex coefficients. *Comp. Var. Th. Appl.* 14, 71–76 (1990).
21. Heersink, R., Zur lokalen Existenz Greenscher Funktionen für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit komplexen Koeffizienten in $p+2$ Variablen. *Rostocker Math. Kolloq.* 42, 4–8 (1990).
22. Heersink, R., and Tutschke, W., Solution of initial value problems of Cauchy-Kovalevskaya type satisfying a partial second order differential equation of prescribed type. Grazer Math. Ber. 312, 17 p. (1991).
23. ——, Ordinary differential equations in the complex domain whose solutions satisfy a partial differential equation of second order. *Comp. Var. Th. Appl.* 18, 49–53 (1992).
24. ——, On associated and co-associated complex differential operators. *Z. Anal. Anwend.* 14, 249–257 (1995).
25. Heersink, R., On associated operators in the theory of Cauchy-Kovalevskaya problems. In Begehr, H. et a. (ed.), Partial differential equations with complex analysis. Longman Scientific & Technical. pages 23–28 (1992).
26. Heersink, R., and Tutschke, W., On the approximation of continuous complex-valued functions using generalized analytic functions. *J. Math. Sci.* 28, 47–63 (1994).
27. ——, A decomposition theorem for solving initial value problems in associated spaces.

Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. 43, 419–434 (1994).
28. ——, Stone-Weierstrass approximations by solutions of elliptic differential equations. *Comp. Var. Th. Appl.* 27, 97–104 (1995).
29. Heersink, R., Initial value problems in scales of Banach spaces. Textos de Matemática. Série B. 16. Coimbra: Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, 45 p. (1998).
30. Heersink, R., and Malonek, H. R., On initial value problems for quaternionic valued functions. *Adv. Appl. Clifford Algebr.* 9, 77–90 (1999).
31. Heersink, R., Some remarks on the possibility of solving Cauchy-Kowalewski problems in spaces of (ν,μ)-generalized analytic functions. *Appl. Anal.* 73,95–100 (1999).

Vorträge im Rahmen der ÖMG in Wien

7. 5. 2004 Mathematisches Minikolloquium an der TU Wien.

Nikolaus Stephanidis (Thessaloniki): Über den Vektorraum der Strahlensysteme, deren Mittenhüllfläche eine Minimalfläche ist.

Peter Šemrl (Ljubljana): Approximate isometries.

Salvador Segura-Gomis (Alicante): Relative geometric inequalities.

Maria Angels Hernandez-Cifre (Murcia): Some geometric properties of the roots of Steiner's polynomial, a relationsship with complete systems inequalities.

Matthias Reitzner (Wien): Random points in convex bodies.

Kooperation von WPI und CNRS

Das Wolfang-Pauli-Institut (WPI) und das Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) gründeten in Wien ein gemeinsames Mathematik-Institut, das Institut CNRS-Pauli (ICP). Das ICP ist europaweit die dritte und weltweit die 15. internationale Forschungseinheit des CNRS. Im Rahmen des ICP wird das CNRS jährlich bis zu fünf Wissenschaftler aus den Gebieten Mathematik, Physik und Informatik bei vollen Bezügen für ihre Arbeit in Wien freistellen.

(Wiener Zeitung)

Persönliches

Prof. *Robert Tichy* (TU Graz) wurde zum korrespondierenden Mitglied und Prof. *Christian Krattenthaler* (Univ. Lyon) zum korrespondierenden Mitglied im Ausland in die Österreichische Akademie der Wissenschaften gewählt.

Neue Mitglieder

Markus Hohenwarter, Dipl.-Ing. Mag. — Abt. Didaktik der Mathematik und Informatik, Univ. Salzburg, Hellbrunnerstr. 34, A-5020 Salzburg. geb. 1976. 1994 bis 2002 Studien der Angewandten Informatik sowie Mathematik/PPP Lehramt Univ. Salzburg, 2002 bis 2003 Lehrer am BRG Salzburg, 2003 bis 2004 Lehraufträge an den Universitäten Salzburg und Innsbruck, derzeit: Doktoratsstudium, DOC-Stipendiat der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. e-mail *Markus.Hohenwarter@sbg.ac.at* Homepage: *http://www.geogebra.at*.

Denise Pachernegg, Dipl.Ing. — Neusiedl 2, A-8903 Lossing. geb. 1981. 2000 bis 2004 Diplomstudium Technische Mathematik TU Graz, seit 2004 Projektmitarbeiterin bei Prof. Tichy, TU Graz. e-mail *pachernegg@finanz.math.tugraz.at*.

Wolfgang Alexander Schmid, Mag.Dr. — Bahnhofgürtel 19, A-8020 Graz. geb. 1978. 1996 bis 2003 Studium Mathematik Univ. Graz, seit 2003 FWF-Projektmitarbeiter bei Prof. Halter-Koch, Univ. Graz. e-mail *waschmid@aon.at*.

MATHEMATIK 2005

16. Internationaler Kongress der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

in Kooperation mit der Deutschen Mathematikervereinigung (DMV) und der Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
18.–24. 9. 2005

Erste Aussendung Der Vorstand der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft und die örtliche Tagungsleitung laden alle interessierten Kolleginnen und Kollegen herzlich zur Teilnahme am 16. Internationalen Kongress ein. Die Tagung findet vom 18. September (Anreise) bis zum 24. September (Abreise) an der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt statt.

Das wissenschaftliche Programm beginnt am 19. September und endet am Nachmittag des 23. September 2005. Entsprechend der geografischen Lage der Universität Klagenfurt soll ein Südosteuropa-Schwerpunkt gesetzt werden. Neben Plenarsitzungen mit den Hauptvorträgen finden Kurzvorträge zu je 20 Minuten in folgenden Sektionen statt:

- *Algebra*
- *Zahlentheorie*
- *Diskrete Mathematik, Algorithmen*
- *Mathematische Logik, Theoretische Informatik*
- *Geometrie*
- *Topologie, Differentialgeometrie*
- *Funktionalanalysis, Harmonische Analysis*
- *Funktionentheorie*
- *Reelle Analysis, Funktionalgleichungen*
- *Angewandte Mathematik, Industrie- und Finanzmathematik*
- *Numerische Mathematik, Wissenschaftliches Rechnen*
- *Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik*
- *Dynamische Systeme, Kontrolltheorie*
- *Partielle Differentialgleichungen, Variationsmethoden*
- *Geschichte und Philosophie der Mathematik*
- *Mathematische Bildung und Bildungsstandards.*

Außerdem finden öffentlich zugängliche Veranstaltungen, ein öffentlicher Vortrag zur Rolle der Mathematik auf den Finanzmärkten von o.Univ.Prof. Dr. Schachermayer, ein Schüler-, Lehrer- und ein Fachhochschultag sowie Minisymposien zu derzeit folgenden Themen statt:

- *Biomathematik*
- *Diophantische Gleichungen, Elliptische Kurven*
- *Graph Theory*
- *Geometry and Topology*
- *Analysis and Simulation of Multiscale Problems* (SIAM)
- *Scientific Computing* (SIAM)
- *Optimal Control and Optimization with PDE Constraints* (SIAM).

Folgende Hauptvortragende haben zugesagt:

- *Luis A. Caffarelli* (Austin)
- *Suncica Canic* (Houston)
- *Kai Cieliebak* (München)
- *Götz Krumheuer* (Frankfurt)
- *Terry J. Lyons* (Oxford)
- *Carl B. Pomerance* (Dartmouth)
- *Peter Šemrl* (Ljubljana)
- *Stanley Osher* (Los Angeles).

Während des Kongresses werden die ordentliche Generalversammlung der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft und auch die Sitzung des Beirates sowie die Hauptversammlung der Deutschen Mathematikervereinigung stattfinden.

Allen Teilnehmern und Begleitpersonen wird ein vielfältiges Rahmenprogramm angeboten. Die Tagungsgebühren wurden wie folgt festgelegt:

– Mitglieder der ÖMG/DMV/SIAM	€ 70,–
– Nichtmitglieder	€ 120,–
– Lehrer	€ 50,–
– Studierende	€ 30,–
– Begleitpersonen	€ 30,–

Nach dem 31. Mai 2005 kommt ein Verspätungszuschlag von € 30,– hinzu. Nichtmitglieder können ein Formblatt für die Beitrittserklärung direkt von der Homepage der ÖMG bzw. der DMV herunterladen.

Bitte geben Sie diese Tagungsankündigung auch an interessierte Kolleginnen und Kollegen weiter. Im Internet finden Sie ab Oktober alle jeweils aktuellen Informationen. Dann wird auch eine Anmeldung über e-mail und Internet möglich sein.

http://oemg2005.uni-klu.ac.at
e-mail *oemg2005@uni-klu.ac.at*
Tel. (+43) 463 2700 3102
Fax (+43) 463 2700 3199.

Klagenfurt, im Juli 2004

Gemeinsame Tagung der AMS, DMV und ÖMG

Johannes Gutenberg-Universität Mainz
16.–19. Juni 2005

Nach einer ersten gemeinsamen Tagung der AMS und DMV 1993 in Heidelberg findet 2005 eine zweite Tagung auch gemeinsam mit der ÖMG in Mainz statt. Folgende Hauptvortragende haben zugesagt:

– Hélène Esnault (Essen, Deutschland)
– *Richard Hamilton* (Columbia University, USA)
– *Michael Hopkins* (MIT, USA)
– *Christian Krattenthaler* (Lyon, France)
– *Frank Natterer* (Münster, Deutschland)
– *Horng Tzer Yau* (Courant Institute, USA).

Weitere Informationen findet man unter

http://math-www.upb.de/∼klausd/Mainz2005/

oder bei Klaus D. Bierstedt, Univ. Paderborn, Mathematik, D-33095 Paderborn, e-mail *klausd@upd.de*.

(DMV-Mitteilungen)