Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99) und M. Drmota (2000–2007).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@oemg.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.
Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT83-1200-0229-1038-9200, bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzendruck, 8044 Weinitzen.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903
http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

TU Wien, Institut 104,
Wiedner Hauptstr. 8–10, A 1040 Wien.
Tel. +43-1-58801-10401
email: *sekr@oemg.ac.at*

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT8312000 22910389200 bei der Bank Austria–Creditanstalt (BKAUATWW).

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 232 (70. Jahrgang) **August 2016**

Inhalt

Die Titelseite zeigt eine Triangulierung eines Kreisrings und steht symbolisch für das Gebiet der Cluster-Algebren. Für deren Definition und die damit zusammenhängenden Fries-Muster und Triangulierungen von Flächen sei auf S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces, I. Cluster complexes*. Acta Math. 201, 83–46, 2008, verwiesen.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 232 (2016), 1–18

Real Algebraic Geometry and Its Applications

Tim Netzer
Univ. Innsbruck

This is a survey article on real algebra and geometry, and in particular on its recent applications in optimization and convexity. We first introduce basic notions and results from the classical theory. We then explain how these relate to optimization, mostly via semidefinite programming. We introduce interesting geometric problems arising from the classification of feasible sets for semidefinite programming. We close with a perspective on the very active area of non-commutative real algebra and geometry.

In memory of Murray Marshall

1 Real Algebra and Geometry

The main objects of interest in classical algebraic geometry are varieties, i.e. solution sets of systems of polynomial equations. In order not to complicate this already hard topic, the varieties are often considered over an algebraically closed field. Broadly speaking, *real algebraic geometry* deals with real numbers as ground field instead. This involves considering varieties over the reals, but in fact much more. Since the real numbers admit an ordering, one can consider polynomial *inequalities*, leading to *semialgebraic sets*. It is also important in many proofs not to restrict to real numbers, but allow for general real closed fields (see for example [6, 23, 26, 35] for more detailed explanations):

Definition 1. A field R is *real closed*, if it does not contain a square root of -1, and $R(\sqrt{-1})$ is algebraically closed.

Any real closed field has characteristic zero, and the real numbers $\mathbb{R}$ are the standard example of a real closed field. In any real closed field R, one obtains a linear

ISSN 0020-7926

ordering by setting

$$a \leqslant b \quad :\Leftrightarrow \quad b-a \text{ has a square root in } R.$$

This ordering is compatible with the algebraic structure, as it fulfills:

$$a \leqslant b \Rightarrow a+c \leqslant b+c \quad \text{and} \quad 0 \leqslant a,b \Rightarrow 0 \leqslant ab.$$

Any such compatible ordering on a field is called a *field ordering*. Now there are many more examples of real closed fields. For example, any ordered field $(F, \leqslant)$ admits an algebraic extension to a real closed field R, whose ordering extends the ordering on F. This is called the *real closure of* $(F, \leqslant)$. For example, the field $\mathbb{R}(t)$ of rational functions admits a unique field ordering with $r < t$ for all $r \in \mathbb{R}$. Then t^{-1} is positive and smaller than any positive real number. The real closure is thus a real closed field R with infinitesimal elements.

Definition 2. Let R be a real closed field and $p_1, \ldots, p_r \in R[x_1, \ldots, x_n]$ polynomials. The set

$$\mathcal{W}(p_1, \ldots, p_r) = \{a \in R^n \mid p_1(a) \geqslant 0, \ldots, p_r(a) \geqslant 0\}$$

is called a *basic closed semialgebraic set*. A general *semialgebraic set* is a Boolean combination of basic closed semialgebraic sets.

An important result on the geometry of semialgebraic sets is the Projection Theorem. It can be proven directly (a non-trivial proof!), but also deduced from a deep model theoretic fact, the so-called *quantifier elimination* in real closed fields.

Theorem 3 (Projection Theorem)**.** *Any polynomial image (for example a projection) of a semialgebraic set is again semialgebraic.*

In classical algebraic geometry, Hilbert's Nullstellensatz provides an algebraic certificate for solvability of a polynomial equation system over an algebraically closed field K; the system

$$0 = p_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = p_r(x_1, \ldots, x_n)$$

has a solution in K^n if and only if $1 \notin (p_1, \ldots, p_r)$, the ideal generated by the equations in the polynomial ring $K[x_1, \ldots, x_n]$. This is a very helpful result, since the last condition can be checked with symbolic computation via Gröbner bases.

The set $\mathcal{W}(p_1, \ldots, p_r)$ is the solution set of the system of polynomial *inequalities*

$$p_1(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \ldots, p_r(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$$

in R^n. One of the fundamental results in real algebra provides a similar characterization for solvability of this system. For this *Nichtnegativstellensatz* we need the notion of a preordering, replacing the ideal in Hilbert's Nullstellensatz:

Definition 4. Let A be a commutative ring and $p_1,\dots,p_r \in A$. The *preordering*

$$\mathcal{P}(p_1,\dots,p_r)$$

generated by $p_1,\dots,p_r$ is the smallest set closed under addition and multiplication, containing $p_1,\dots,p_r$ and all sums of squares. In closed form:

$$\mathcal{P}(p_1,\dots,p_r) = \Big\{ \sum_{e\in\{0,1\}^r} \sigma_e \cdot p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r} \mid \sigma_e \text{ sum of squares in } A \Big\}.$$

In the case of a polynomial ring $A = R[x_1,\dots,x_n]$, the preordering $\mathcal{P}(p_1,\dots,p_r)$ contains polynomials that are obviously nonnegative as functions on $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_r)$. A full characterization of nonnegative functions is the following:

Theorem 5 (Nichtnegativstellensatz)**.** *Let R be a real closed field and $p, p_1,\dots,p_r \in R[x_1,\dots,x_n]$. Then the following are equivalent:*

(i) $p \geqslant 0$ *on* $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_r)$

(ii) $fp = p^{2e} + g$ *for some* $f,g \in \mathcal{P}(p_1,\dots,p_r), f \neq 0, e \in \mathbb{N}$.

In particular $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_r) = \emptyset$ *if and only if* $-1 \in \mathcal{P}(p_1,\dots,p_r)$.

The Nichtnegativstellensatz deserves some detailed remarks. First, the case $r = 0$ corresponds to $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_r) = R^n$ and $\mathcal{P}(p_1,\dots,p_r)$ the set of sums of squares of polynomials. In this case the statement simplifies to

$$p \geqslant 0 \text{ on } R^n \quad \Leftrightarrow \quad q^2 p = q_1^2 + \cdots + q_s^2$$

for some $0 \neq q, q_1,\dots,q_s \in R[x_1,\dots,x_n]$. In words:

Every globally nonnegative polynomial is a sum of squares of rational functions.

This is precisely *Hilbert's 17th Problem*, solved by Artin in 1926 [2]. It is *not* possible to get rid of the denominator q in the result. The *Motzkin polynomial* [25]

$$x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 - 3x_1^2 x_2^2 + 1$$

is nonnegative on $\mathbb{R}^2$, but not a sum of squares in $\mathbb{R}[x_1,x_2]$. It is even more surprising that this example was found only in 1967, since we know today that hardly any nonnegative polynomial is a sum of squares [4]. For more technical and historical remarks on Hilbert's 17th Problem and the Nichtnegativstellensatz see [35].

Second, since $-1 \geqslant 0$ on W if and only if $W = \emptyset$, solvability of the inequality system

$$p_1(x_1,\dots,x_n) \geqslant 0, \dots, p_r(x_1,\dots,x_n) \geqslant 0$$

is characterized by the condition $-1 \notin \mathcal{W}(p_1, \ldots, p_r)$. Interestingly, this algebraic condition also admits an effective algorithmic approach, which is numerical however, in contrast to the symbolic approach to Hilbert's Nullstellensatz. We give some more detailed explanations in the next section.

Third, we want to give an idea of the proof of Hilbert's 17th Problem. The proof of the general Nichtnegativstellensatz ist slightly more involved, but not conceptually different. One direction is clear: if q^2p is a sum of squares, then q^2p is globally nonnegative, and so is p by continuity, since q vanishes only on a low-dimensional set. The other direction splits up into two parts (Theorem 6 and Theorem 8 below), and is far more complicated than the proof of Hilbert's Nullstellensatz. Especially the first part relies again on hard model-theoretic facts. It translates geometric positivity of a polynomial to an abstract positivity in the field of rational functions:

Theorem 6. *Let R be a real closed field and $p \in R[x_1, \ldots, x_n]$ with $p \geqslant 0$ on R^n. Then for any field ordering $\geq$ of $R(x_1, \ldots, x_n)$ we have $p \geq 0$.*

Proof. Assume $\geq$ is a field ordering of $R(x_1, \ldots, x_n)$ with $p < 0$. Let S be the real closure of $R(x_1, \ldots, x_n)$ with respect to this ordering. Then the following semialgebraic set in S^n is non-empty:

$$\{a \in S^n \mid p(a) < 0\}.$$

In fact the tuple of variables $(x_1, \ldots, x_n)$, which are all elements in $R(x_1, \ldots, x_n)$ and thus in S, belongs to this set. Now by Tarski's Transfer Principle (see Theorem 7 below) the set contains a point from R^n, contradicting the fact that $p \geqslant 0$ on R^n. $\square$

The model theory is contained in the following result, which can again be deduced from the even stronger quantifier elimination mentioned above.

Theorem 7 (Tarski's Transfer Principle)**.** *Let S/R be an extension of real closed fields. If a nonempty semialgebraic set in S^n is defined by polynomials over R, then it contains a point from R^n.*

The second part of the proof of the Nichtnegativstellensatz is easier to prove and of algebraic nature, see [6, 23, 26, 35]:

Theorem 8. *Let K be a field and $p \in K$, such that in each field ordering $\geq$ of K we have $p \geq 0$. Then p is a sum of squares in K.*

The Nichtnegativstellensatz yields *denominators* in the algebraic certificate, i.e. we have to multiply p with some f before we obtain a representation in $\mathcal{P}(p_1, \ldots, p_r)$. The first denominator-free result is Schmüdgen's Theorem, which triggered a whole series of new developments.

Theorem 9 (Schmüdgen [41]). *Let $p, p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ be such that*

$$\mathcal{W}(p_1, \dots, p_r) \subseteq \mathbb{R}^n$$

is bounded. Then $p > 0$ on $\mathcal{W}(p_1, \dots, p_r)$ implies $p \in \mathcal{P}(p_1, \dots, p_r)$.

Let us add some comments on Schmüdgen's Theorem. First, it only holds for $\mathbb{R}$, not for arbitrary real closed fields. Second, the boundedness of $\mathcal{W}(p_1, \dots, p_r)$ is a necessary condition, as is the strict positivity of p in general. Third, the result admits innovative applications to polynomial optimization, as we will demonstrate in the next section.

We conclude with some remarks on the question whether

$$\forall p \qquad p \geqslant 0 \text{ on } \mathcal{W}(p_1, \dots, p_r) \Rightarrow p \in \mathcal{P}(p_1, \dots, p_r)$$

can ever hold. If $n = 1$, this is quite frequent. It holds true whenever the defining polynomials p_i are chosen in the *canonical way* for the definition of $\mathcal{W}(p_1, \dots, p_r) \subseteq \mathbb{R}$ (see [16, 17]). Surprisingly, if $n \geqslant 3$ and $\mathcal{W}(p_1, \dots, p_r)$ has nonempty interior, it *never* holds. There are always nonnegative polynomials p that do not belong to $\mathcal{P}(p_1, \dots, p_r)$, no matter which and how many p_i we choose to define the set [38]. For $n = 2$ the situation is quite subtle. For certain compact sets there is an affirmative answer by deep results of Scheiderer [39], and there is an interesting non-compact example by Marshall [24].

2 Optimization

The results from the last section are closely related to optimization, mostly via semidefinite programming.

Definition 10. A *semidefinite program* is an optimization problem of the following form:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n \\ \text{subject to} & M_0 + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n \succeq 0, \end{array}$$

where $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, $M_0, M_1, \dots, M_n \in \mathrm{Sym}_N(\mathbb{R})$ are symmetric matrices, and $M \succeq 0$ means that M is positive semidefinite.

So the feasible set of a semidefinite program is an affine-linear section of a cone of positive semidefinite matrices. Semidefinite programming is a generalization of linear programming. The feasible set

$$\{a \in \mathbb{R}^n \mid M_0 + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n \succeq 0\}$$

is a polyhedron if all matrices are diagonal. With non-diagonal matrices we obtain a larger class of sets. For example, the condition

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0$$

defines the unit disk in $\mathbb{R}^2$. Solving a semidefinite program can be done with efficient numerical algorithms, mostly interior-point methods, and there is also a duality theory for semidefinite programs (see for example [45]).

The connection to polynomials and sums of squares is via *Gram matrices*. Let $d \in \mathbb{N}$ be a fixed degree, and

$$\mathfrak{m}_d = (1, x_1, \ldots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \ldots, x_1^d, \ldots, x_n^d)$$

be the vector of all monomials of degree $\leqslant d$. If N denotes the size of $\mathfrak{m}_d$, then for any symmetric $N \times N$ matrix $M \in \mathrm{Sym}_N(\mathbb{R})$ we obtain a polynomial

$$p_M = \mathfrak{m}_d M \mathfrak{m}_d^t \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

of degree $\leqslant 2d$, and any polynomial of degree $\leqslant 2d$ is of this form.

Definition 11. Any $M \in \mathrm{Sym}_N(\mathbb{R})$ with $p_M = p$ is called a *Gram matrix* of p.

The connection between sums of squares and semidefinite programming relies essentially on the following observation:

Lemma 12. *A polynomial $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ with* $\deg(p) \leqslant 2d$ *is a sum of squares in $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ if and only if p has a positive semidefinite Gram matrix of size N.*

Proof. "$\Rightarrow$": Let $p = p_1^2 + \cdots + p_s^2$ with polynomials p_i. It is easy to see that $\deg(p) \leqslant 2d$ implies $\deg(p_i) \leqslant d$ for all $i = 1, \ldots, s$ (highest degree parts in squares are squares, and cannot cancel additively). So there are (column) vectors $c_i \in \mathbb{R}^N$ with $p_i = \mathfrak{m}_d c_i$. Then

$$p = \sum_i p_i^2 = \sum_i (\mathfrak{m}_d c_i)(\mathfrak{m}_d c_i)^t = \mathfrak{m}_d \Big(\sum_i c_i c_i^t \Big) \mathfrak{m}_d^t,$$

and thus $M = \sum_i c_i c_i^t$ is a positive semidefinite Gram matrix of p.

"$\Leftarrow$": Write $p = \mathfrak{m}_d M \mathfrak{m}_d^t$ for some positive semidefinite $M \in \mathrm{Sym}_N(\mathbb{R})$. Every positive semidefinite matrix is a sum of rank one squares, i.e. there are vectors $c_i \in \mathbb{R}^N$ with $M = \sum_i c_i c_i^t$. Now

$$p = \mathfrak{m}_d M \mathfrak{m}_d^t = \mathfrak{m}_d \Big(\sum_i c_i c_i^t \Big) \mathfrak{m}_d^t = \sum_i (\mathfrak{m}_d c_i)(\mathfrak{m}_d c_i)^t = \sum_i (\mathfrak{m}_d c_i)^2$$

is a sum of squares. $\square$

This observation is the key ingredient in Lasserre's hierarchy for polynomial optimization [19]. Given $p, p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, the initial problem is to determine

$$\begin{array}{ll} \inf & p(a) \\ \text{s.t.} & a \in \mathcal{W}(p_1, \ldots, p_r). \end{array}$$

We will denote this problem by (P), and its optimal value by p^*. It is a general constrained polynomial optimization problem, and thus hard to solve. In particular, there is no convexity or linearity involved. The idea now is to relax this problem to a series of easier ones. For fixed $d \in \mathbb{N}$ we consider the following problem, which we denote by (P_d):

$$\begin{array}{lll} \sup & \lambda & \\ \text{s.t.} & p - \lambda = \displaystyle\sum_{e \in \{0,1\}^r} \sigma_e p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}, & \sigma_e \text{ sums of squares of degree} \leqslant 2d. \end{array}$$

So we maximize λ, such that $p - \lambda$ admits a representation in the preordering $\mathcal{P}(p_1, \ldots, p_r)$, with a bound of $2d$ on the degree of the sums of squares σ_e. The optimal value of (P_d) is denoted by λ_d^*.

Theorem 13 (Lasserre)**.** *With $p, p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ as above we have:*

(i) Each (P_d) is a semidefinite program.

(ii) The sequence $\left(\lambda_d^*\right)_{d \in \mathbb{N}}$ is monotonically increasing, with $\lambda_d^* \leqslant p^*$ for all d.

(iii) If $\mathcal{W}(p_1, \ldots, p_r)$ is bounded, then $\lim_d \lambda_d^* = p^*$.

Proof. (i) For two polynomials p, q we write $p \sim q$ if p and q coincide up to the constant term. Now consider the following set:

$$S = \left\{ (M_e)_{e \in \{0,1\}^r} \in \mathrm{Sym}_N(\mathbb{R})^{2^r} \mid \forall e \; M_e \succeq 0, \sum_e \mathfrak{m}_d M_e \mathfrak{m}_d^t \cdot p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} \sim p \right\}.$$

It is not hard to see that S can be realized as an affine-linear section of the convex cone of all positive semidefinite matrices of size $2rN$. This involves building a large block-diagonal matrix from the matrices M_e, and comparing coefficients (except for the constant term) in the equation

$$\sum_e \mathfrak{m}_d M_e \mathfrak{m}_d^t \cdot p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} = p.$$

Thus S is the feasible set of a semidefinite program. Now (P_d) just means minimizing the constant term in $\sum_e \mathfrak{m}_d M_e \mathfrak{m}_d^t \cdot p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, which is linear in the entries of the matrices M_e. This uses Lemma 12, i.e. the fact that each sum of squares σ_e of degree $\leqslant 2d$ is of the form $\mathfrak{m}_d M_e \mathfrak{m}_d^t$ for some positive semidefinite matrix M_e. So (P_d) is a semidefinite program.

(ii) It is clear that the values λ_d^* increase with d. Now assume $p-\lambda$ has a representation as desired in (P_d). Then $p-\lambda$ is obviously nonnegative on $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_r)$, since it belongs to $\mathcal{P}(p_1,\dots,p_r)$. Thus $\lambda \leqslant p^*$.

(iii) For any $\varepsilon > 0$ we have $p-p^*+\varepsilon > 0$ on $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_r)$. By Schmüdgen's Theorem thus $p-p^*+\varepsilon \in \mathcal{P}(p_1,\dots,p_r)$. In such a fixed representation there is clearly an upper bound $2d$ on the degrees of the sums of squares σ_e, and thus $\lambda_d^* \geqslant p^*-\varepsilon$. □

This relaxation method for polynomial optimization is implemented in the free Matlab plugin *Yalmip* [21]. It works well in practice if the degree and the dimension of the involved polynomials is not too large. The rate of convergence is closely linked to degree bounds in Schmüdgen's Theorem, which are analyzed in [35, 31, 43].

Beyond being useful for polynomial optimization, semidefinite programming also raises some interesting geometric questions, that we will describe in the following section.

3 Algebraic Convexity

The feasible sets of semidefinite programming turn out to be of interesting geometric nature. They are called *spectrahedra* [36]:

Definition 14. A set $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is called a *spectrahedron*, if there exist symmetric matrices $M_0,\dots,M_n$ such that

$$S = \{a \in \mathbb{R}^n \mid M_0 + a_1M_1 + \cdots + a_nM_n \succeq 0\}.$$

Recall that $M \succeq 0$ means that M is positive semidefinite. The expression

$$M_0 + x_1M_1 + \cdots + x_nM_n$$

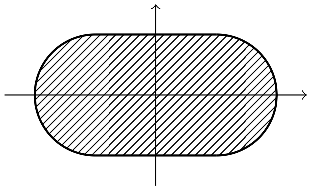
is called a *linear matrix polynomial*, and the expression

$$M_0 + x_1M_1 + \cdots + x_nM_n \succeq 0$$

a *linear matrix inequality*.

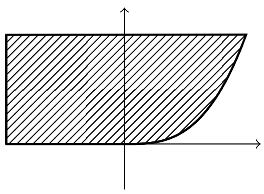
It is straightforward to see that spectrahedra are closed, convex and even basic closed semialgebraic. The principal minors of $M_0 + x_1M_1 + \cdots + x_nM_n$ for example define S as a basic closed semialgebraic set.

Example 15. The convex hull of two disjoint disks in the plane is a closed, convex and semialgebraic set. It is however not basic closed semialgebraic, i.e. not definable by simultaneous polynomial inequalities. This is a nice exercise, see also [44]. So it is not a spectrahedron. This set is called the *football stadium*.



But spectrahedra have more properties. For example, each face of a spectrahedron S is exposed, i.e. realizable as the intersection of S with a supporting hyperplane.

Example 16. Consider the set $\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^3 \leqslant b, -1 \leqslant a, 0 \leqslant b \leqslant 1\right\}$. It is compact, basic closed semialgebraic and convex, but has a non-exposed extreme point (the origin). It is thus not a spectrahedron.



But these properties by far not characterize spectrahedra. The crucial property is *hyperbolicity*, which in fact implies all the before mentioned properties.

Definition 17. Let $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ and $e \in \mathbb{R}^n$.
(i) p is called *hyperbolic with respect to e,* if $p(e) \neq 0$ and for each $v \in \mathbb{R}^n$, the univariate polynomial

$$p_v(t) := p(e + tv) \in \mathbb{R}[t]$$

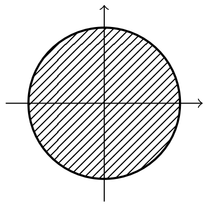
has only real roots.
(ii) If p is hyperbolic with respect to e, then

$$\mathcal{H}_e(p) = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \forall \lambda \in (0,1] : \; p(\lambda e + (1-\lambda)a) \neq 0\}$$

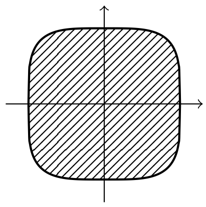
is called the *hyperbolicity region of h with respect to e*.

Geometrically, a polynomial p is hyperbolic, if any real line through e intersects the complex hypersurface of p in only real points. The hyperbolicity region is the area within the innermost ring of zeroes of p around e. Interestingly, it can be shown that hyperbolicity regions are always convex and basic closed semialgebraic. They also have only exposed faces (see [37]). Note that a hyperbolic polynomial is sometimes also called a *real zero polynomial* in the literature, and the hyperbolicity region a *rigidly convex set*; the notion of hyperbolicity is then used for a similar concept for homogeneous polynomials.

Example 18. (i) The polynomial $p = 1 - x_1^2 - x_2^2 \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ is hyperbolic w.r.t. $e = (0,0)$. The hyperbolicity region is the unit disk.



(ii) The polynomial $p = 1 - x_1^4 - x_2^4$ is not hyperbolic w.r.t. $e = (0,0)$ (or any other point). On any line through the origin, the quartic $p_v(t) \in \mathbb{R}[t]$ has 2 real and 2 strictly complex roots. It is thus not hard to see that the region $\left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^4 + b^4 \leqslant 1\right\}$ is not the hyperbolicity region of any hyperbolic polynomial. This set is called the *TV-screen*.



Proposition 19. *Every spectrahedron with nonempty interior is the hyperbolicity region of a hyperbolic polynomial.*

Sketch of proof. Assume without loss of generality that the origin belongs to the interior of the spectrahedron S. Then S can be defined by a *monic* linear matrix inequality, i.e.

$$S = \{a \in \mathbb{R}^n \mid I + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n \succeq 0\}.$$

This involves some technical details that we skip. Then

$$p = \det(I + x_1 M_1 + \cdots + x_n M_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

is hyperbolic with respect to the origin. This follows easily from the fact that symmetric matrices have only real Eigenvalues. It is then also not hard to see that the hyperbolicity region of p coincides with S. $\square$

So the TV-screen is not a spectrahedron, although it is convex, basic closed semi-algebraic and has only exposed faces. One of the main open questions concerning spectrahedra is the following. If true, it would classify spectrahedra in terms of the behavior of their boundary surface.

Conjecture 20 (Geometric Lax Conjecture)**.** *Every hyperbolicity region is a spectrahedron.*

In full generality, the conjecture is open. There are different approaches and partial positive results (for example [7, 29]), but most importantly, a solution in dimension two. For simplicity, we will assume from now on that e is the origin and $p(e) = 1$.

Theorem 21 (Helton & Vinnikov [15])**.** *The Geometric Lax Conjecture holds true in $\mathbb{R}^2$. Even stronger, ever hyperbolic polynomial $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ has a monic determinantal representation*

$$p = \det\left(I + x_1 M_1 + x_2 M_2\right)$$

with symmetric matrices M_i.

This is a deep mathematical result, and the proof employs hard algebraic geometry. There are now some easier and also algorithmic proofs of slightly weaker statements (see [33, 34]).

Concerning determinantal representations, let us mention two more results.

Theorem 22 (Kummer [18])**.** *For every hyperbolic polynomial $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ there is a determinantal representation of some multiple*

$$qp = \det(I + x_1 M_1 + \cdots + x_n M_n).$$

Unfortunately, there is no control over the factor q in the representation. So the hyperbolicity region of qp might be strictly smaller than the one of p. The next result is a statement about rational representations (with no obvious consequences for the Geometric Lax Conjecture).

Theorem 23 (Netzer, Plaumann & Thom [28])**.** *For every hyperbolic polynomial $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ there is a symmetric matrix M of homogeneous, rational, degree one functions, with $p = \det(I + M)$.*

Now passing from spectrahedra to their linear images increases the class of sets a lot.

Definition 24. The linear image of a spectrahedron is called a *spectrahedral shadow*.

The class of spectrahedral shadows is closed under any reasonable operation on convex sets. This includes duals, closures, interiors, products, sums and convex hulls of unions (see [27] for an overview and proofs). Spectrahedral shadows are convex and semialgebraic (by the Projection Theorem), but *no other* necessary condition is known:

Conjecture 25 (Helton-Nie Conjecture)**.** *Every convex semialgebraic set is a spectrahedral shadow.*

If this was true, it would allow to apply semidefinite programming on any convex semialgebraic set. One can pull back the problem from the linear image of a spectrahedron to the spectrahedron itself. There are many results in support of the Helton-Nie Conjecture. The basic construction of spectrahedral shadows is the following, building a bridge to results of real algebra, in particular Positivstellensätze:

Theorem 26 (Lasserre [20])**.** *Let $p_1,\dots,p_r \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ and set*

$$W = \mathcal{W}(p_1,\dots,p_r) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Assume there exists some $d \in \mathbb{N}$, such that whenever a polynomial ℓ of degree $\leqslant 1$ fulfills $\ell \geqslant 0$ on W, then

$$\ell = \sum_e \sigma_e p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} \in \mathcal{P}(p_1,\dots,p_r)$$

with sums of squares σ_e of degree $\leqslant 2d$. Then the closed convex hull

$$\overline{\operatorname{conv}(W)}$$

is a spectrahedral shadow.

Sketch of proof. The polar dual $W^\circ = \{\ell = \ell_0 + \ell_1 x_1 + \cdots + \ell_n x_n \mid \ell_i \in \mathbb{R}, \ell \geqslant 0$ on $W\}$ is a spectrahedral shadow. This can be seen via Gram matrices as above, since every $\ell \in W^\circ$ admits a preordering representation with degree bounds. The dual of a spectrahedral shadow is again a spectrahedral shadow, and thus so is the double dual of W, which coincides with $\overline{\operatorname{conv}(W)}$. □

So if preordering representations of nonnegative *linear* polynomials (with degree bounds) can be proven for a set, its closed convex hull is a spectrahedral shadow. Helton and Nie prove this for a large class of sets [13, 14]. For example:

Theorem 27 (Helton & Nie)**.** *Assume $p_1,\dots,p_r \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ are such that*

$$W = \mathcal{W}(p_1,\dots,p_r) \subseteq \mathbb{R}^n$$

is convex and bounded. Further assume all the negative Hessian matrices $-\mathbf{H}(p_1), \dots, -\mathbf{H}(p_r)$ are sums of Hermitian squares in the matrix ring $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}[x_1,\dots x_n])$. Then W is a spectrahedral shadow.

Example 28. Consider the TV-screen $W = \mathcal{W}(1 - x_1^4 - x_2^4) \subseteq \mathbb{R}^2$, which is not a spectrahedron. Compute

$$-\mathbf{H}(1-x_1^4-x_2^4) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{12}x_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{12}x_2 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{12}x_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{12}x_2 \end{pmatrix}.$$

Thus the TV-screen is a spectrahedral shadow.

Recently, Scheiderer has settled the Helton-Nie Conjecture in dimension 2, building upon his deep results about sums of squares on algebraic curves:

Theorem 29 (Scheiderer [40]). *Every convex semialgebraic set in $\mathbb{R}^2$ is a spectrahedral shadow.*

For a more thorough treatment of the topics in the last two section see for example also [5].

4 Non-commutative theory

In recent years, the theory of non-commutative real geometry has attracted more and more interest, in part motivated by applications in systems engineering and control theory [10]. The most important algebraic objects are non-commutative polynomials. The non-commutative polynomial ring

$$\mathbb{R}\langle z_1, \ldots, z_n \rangle$$

has as its elements $\mathbb{R}$-linear combinations of words in the letters $z_1, \ldots, z_n$, which do not commute. So $z_1 z_2$ and $z_2 z_1$ are different polynomials. Non-commutative polynomials are naturally evaluated at tuples of matrices; if $A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{Mat}_s(\mathbb{R})$, then $p(A_1, \ldots, A_n) \in \mathrm{Mat}_s(\mathbb{R})$. There is an involution on $\mathbb{R}\langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ with $z_i^* = z_i$ for all i and $* = \mathrm{id}$ on $\mathbb{R}$. Thus $*$ just reverses the order of variables in a monomial, for example

$$(7z_1 + z_1 z_2)^* = 7z_1 + z_2 z_1.$$

Let $\mathbb{R}\langle z_1, \ldots, z_n \rangle_h$ denote the set of Hermitian polynomials, i.e. fixed points of the involution. For any $p \in \mathbb{R}\langle z_1, \ldots, z_n \rangle_h$ and $A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{Sym}_s(\mathbb{R})$, the matrix $p(A_1, \ldots, A_n)$ is again symmetric. So for $s \geqslant 1$ and $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{R}\langle z_1, \ldots, z_n \rangle_h$ it makes sense to define

$$\mathcal{W}_s(p_1, \ldots, p_r) = \{(A_1, \ldots, A_n) \in \mathrm{Sym}_s(\mathbb{R})^n \mid \forall i \quad p_i(A_1, \ldots, A_n) \succeq 0\}$$

and

$$\mathcal{W}(p_1, \ldots, p_r) = \bigcup_{s \geqslant 1} \mathcal{W}_s(p_1, \ldots, p_r).$$

So such a *non-commutative semialgebraic set* consists of a collection of matrix tuples, for all matrix sizes simultaneously. Since it contains much more information than a classical semialgebraic set in $\mathbb{R}^n$, it is not surprising that stronger Positivstellensätze can be proven. Note that $\Sigma^2\mathbb{R}\langle z_1,\ldots,z_n\rangle$ here denotes the set of sums of *Hermitian squares*, i.e. sums of elements of the form p^*p with $p\in\mathbb{R}\langle z_1,\ldots,z_n\rangle$. This is the correct notion to reflect positivity. The following is a non-commutative version of Hilbert's 17th problem, *without denominators*:

Theorem 30 (Helton [8])**.** *Assume $p\in\mathbb{R}\langle z_1,\ldots,z_n\rangle_h$ fulfills*

$$p(A_1,\ldots,A_n)\succeq 0$$

for all $A_1,\ldots,A_n\in\mathrm{Sym}_s(\mathbb{R})$ and $s\geqslant 1$. Then $p\in\Sigma^2\mathbb{R}\langle z_1,\ldots,z_n\rangle$.

Here, as in most of the non-commutative results, the proof methods differ quite strongly from the commutative theory. They are much more functional-analytic in nature, and often require some knowledge about operator theory; see also [42] for more details. There are more Positivstellensätze in the spirit of the above, which we don't mention here, see for example [1, 9, 12]. It is unclear to which extend a Projection Theorem (or quantifier elimination) holds for non-commutative semialgebraic geometry. It is definitely even harder as in the commutative setup, as some examples indicate.

There is also an interesting notion of convexity in the non-commutative setup (see also [10]). For $A=(A_1,\ldots,A_n)\in\mathrm{Sym}_s(\mathbb{R})^n, B=(B_1,\ldots,B_n)\in\mathrm{Sym}_r(\mathbb{R})^n$ and $V\in\mathrm{Mat}_{s,r}(\mathbb{R})$ we set

$$A\oplus B=\left(\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}A_n & 0\\ 0 & B_n\end{pmatrix}\right)\in\mathrm{Sym}_{s+r}(\mathbb{R})^n$$

and

$$V^tAV=(V^tA_1V,\ldots,V^tA_nV)\in\mathrm{Sym}_r(\mathbb{R})^n.$$

Definition 31. Let $W_s\subseteq\mathrm{Sym}_s(\mathbb{R})^n$ be given, for every $s\geqslant 1$. The collection $W=\bigcup_{s\geqslant 1}W_s$ is *matrix convex*, if it fulfills the following conditions:

(i) $A\in W_s, B\in W_t\Rightarrow A\oplus B\in W_{s+t}$

(ii) $A\in W_s$, $V\in\mathrm{Mat}_{s,r}(\mathbb{R}), V^tV=I_r\Rightarrow V^tAV\in W_r$.

Matrix convexity implies classical convexity for each W_s, but is stronger than this in general. The standard example of a matrix convex set is the following. Let $M_1,\ldots,M_n\in\mathrm{Sym}_d(\mathbb{R})$ be given and define

$$W_s=\{(A_1,\ldots,A_n)\in\mathrm{Sym}_s(\mathbb{R})^n\mid I_s\otimes I_d+A_1\otimes M_1+\cdots+A_n\otimes M_n\succeq 0\}.$$

Here $\otimes$ denotes the Kronecker product of matrices. Then the collection $W = \bigcup_{s\geqslant 1} W_s$ is matrix convex. Such a set is also called a *non-commutative spectrahedron*. Helton & McCullough [11] prove (under weak additional assumptions) that every matrix convex non-commutative semialgebraic set is of this form.

Clearly intersections of matrix convex sets are matrix convex, and there is thus the notion of the *matrix convex hull* of a set $W = \bigcup_{s\geqslant 1} W_s$. If W already fulfills condition (i) from Definition 31 (as is the case for semialgebraic sets $\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_r)$), then the matrix convex hull is obtained by just adding all compressions V^tAV as in (ii). The matrix convex hull can however behave very badly, even at scalar level:

Theorem 32 (Alekseev, Netzer & Thom [1])**.** *There are* $p_1,\ldots,p_r \in \mathbb{R}\langle z_1,\ldots,z_n\rangle_h$*, such that*

$$\left\{v^tAv \mid s \geqslant 1, A \in \mathcal{W}_s(p_1,\ldots,p_r), v \in \mathbb{R}^s, v^tv = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

is not semialgebraic (in the classical sense).

To finish this review article, we mention a rather surprising application of non-commutative real algebra to group theory. For this let G be a group and $\mathbb{R}[G]$ its group algebra, i.e. its elements are formal (finite) linear combinations of group elements, with multiplication induced by the group operation. There is an involution on $\mathbb{R}[G]$, defined by $g^* := g^{-1}$ for $g \in G$, and $* = \mathrm{id}$ on $\mathbb{R}$. Then $\Sigma^2\mathbb{R}[G]$ denotes the set of sums of Hermitian squares.

If $S \subseteq G$ is a finite set, closed under forming inverse elements, define

$$\Delta(S) = |S| \cdot e - \sum_{s\in S} s \in \mathbb{R}[G]_h,$$

and call it the *Laplace operator* defined by S. Here, e denotes the identity element of G.

Theorem 33 (Ozawa [32])**.** *Let G be finitely generated by S. Then G has Kazhdan's Property (T) if and only if*

$$\Delta(S)^2 - \varepsilon \cdot \Delta(S) \in \Sigma^2\mathbb{R}[G]$$

for some $\varepsilon > 0$.

Kazhdan's Property (T) is an abstract property, introduced by Kazhdan in the 1960's, to prove that certain lattices are finitely generated. It is also important when examining random walks on Cayley graphs, and algorithms to produce random group elements [3, 22]. Ozawa's result is in particular surprising since all known definitions of property (T) refer to the class of unitary representations of the group on Hilbert space. In view of the available semidefinite programming methods for sums of squares, it opens the way for algorithmic approaches towards property (T):

Theorem 34 (Netzer & Thom [30]). *For $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ (with canonical generating set S of elementary matrices and their inverses) we have*

$$\Delta(S)^2 - \frac{1}{6}\Delta(S) \in \Sigma^2\mathbb{R}[G].$$

The sums of squares representation from this theorem was found numerically, with semidefinite programming via Gram matrices, as described in Section 2. The (inexact) numerical solution was then transformed into an exact proof, with an additional argument. Although it was known that $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ has property (T), it is interesting that Ozawa's result is of real computational relevance. Also surprising is the explicit factor of $\varepsilon = \frac{1}{6}$, which is by far larger than any previously known value. This is indeed relevant, since ε gives information about the rate of convergence of the product replacement algorithm for abelian groups (see for example [22]).

References

[1] V. Alekseev, T. Netzer, and A. Thom, *Quadratic modules, C^*-algebras and free convexity*, Preprint (2016).

[2] E. Artin, *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), no. 1, 100–115.

[3] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[4] G. Blekherman, *There are significantly more nonnegative polynomials than sums of squares*, Israel J. Math. **153** (2006), 355–380.

[5] G. Blekherman, P. A. Parrilo, and R. R. Thomas (eds.), *Semidefinite optimization and convex algebraic geometry*, MOS-SIAM Series on Optimization, vol. 13, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical Optimization Society, Philadelphia, PA, 2013.

[6] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy, *Real algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 36, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Translated from the 1987 French original, Revised by the authors.

[7] P. Brändén, *Hyperbolicity cones of elementary symmetric polynomials are spectrahedral*, Optim. Lett. **8** (2014), no. 5, 1773–1782.

[8] J. W. Helton, *"Positive" noncommutative polynomials are sums of squares*, Ann. of Math. (2) **156** (2002), no. 2, 675–694.

[9] J. W. Helton, I. Klep, and S. McCullough, *The convex Positivstellensatz in a free algebra*, Adv. Math. **231** (2012), no. 1, 516–534.

[10] ———, *Free convex algebraic geometry*, Semidefinite optimization and convex algebraic geometry, MOS-SIAM Ser. Optim., vol. 13, SIAM, Philadelphia, PA, 2013, pp. 341–405.

[11] J. W. Helton and S. McCullough, *Every convex free basic semi-algebraic set has an LMI representation*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 2, 979–1013.
[12] J. W. Helton, S. McCullough, and M. Putinar, *A non-commutative Positivstellensatz on isometries*, J. Reine Angew. Math. **568** (2004), 71–80.
[13] J. W. Helton and J. Nie, *Sufficient and necessary conditions for semidefinite representability of convex hulls and sets*, SIAM J. Optim. **20** (2009), no. 2, 759–791.
[14] ———, *Semidefinite representation of convex sets*, Math. Program. **122** (2010), no. 1, Ser. A, 21–64.
[15] J. W. Helton and V. Vinnikov, *Linear matrix inequality representation of sets*, Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), no. 5, 654–674.
[16] S. Kuhlmann and M. Marshall, *Positivity, sums of squares and the multi-dimensional moment problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 11, 4285–4301.
[17] S. Kuhlmann, M. Marshall, and N. Schwartz, *Positivity, sums of squares and the multi-dimensional moment problem. II*, Adv. Geom. **5** (2005), no. 4, 583–606.
[18] M. Kummer, *Determinantal representations and bézoutians*, Math. Z., to appear.
[19] J. B. Lasserre, *Global optimization with polynomials and the problem of moments*, SIAM J. Optim. **11** (2000/01), no. 3, 796–817.
[20] ———, *Convex sets with semidefinite representation*, Math. Program. **120** (2009), no. 2, Ser. A, 457–477.
[21] J. Löfberg, *Pre- and post-processing sum-of-squares programs in practice*, IEEE Trans. Automat. Control **54** (2009), no. 5, 1007–1011.
[22] A. Lubotzky and I. Pak, *The product replacement algorithm and Kazhdan's property (T)*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 2, 347–363.
[23] M. Marshall, *Positive polynomials and sums of squares*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 146, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
[24] ———, *Polynomials non-negative on a strip*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 5, 1559–1567.
[25] T. S. Motzkin, *The arithmetic-geometric inequality*, Inequalities (Proc. Sympos. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965), Academic Press, New York, 1967, pp. 205–224.
[26] T. Netzer, Reelle algebraische Geometrie, Lecture Notes. *https://algebra-mathematics.uibk.ac.at/images/documents/teaching/tim_netzer/RAG.pdf*
[27] ———, Spectrahedra and their shadows, Habilitation Thesis. *https://algebra-mathematics.uibk.ac.at/images/documents/other/Habilitationsschrift.pdf*
[28] T. Netzer, D. Plaumann, and A. Thom, *Determinantal representations and the Hermite matrix*, Michigan Math. J. **62** (2013), no. 2, 407–420.
[29] T. Netzer and A. Thom, *Hyperbolic polynomials and generalized Clifford algebras*, Discrete Comput. Geom. **51** (2014), no. 4, 802–814.
[30] ———, *Kazhdan's property (T) via semidefinite optimization*, Experimental Mathematics **24** (2015), no. 2, 1–4.
[31] J. Nie and M. Schweighofer, *On the complexity of Putinar's Positivstellensatz*, J. Complexity **23** (2007), no. 1, 135–150.
[32] N. Ozawa, *Noncommutative real algebraic geometry of Kazhdan's property (T)*, J. Inst. Math. Jussieu **15** (2016), no. 1, 85–90.

[33] D. Plaumann, R. Sinn, D. E. Speyer, and C. Vinzant, *Computing Hermitian determinantal representations of hyperbolic curves*, Internat. J. Algebra Comput. **25** (2015), no. 8, 1327–1336.
[34] D. Plaumann and C. Vinzant, *Determinantal representations of hyperbolic plane curves: an elementary approach*, J. Symbolic Comput. **57** (2013), 48–60.
[35] A. Prestel and Ch. N. Delzell, *Positive polynomials*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, From Hilbert's 17th problem to real algebra.
[36] M. Ramana and A. J. Goldman, *Some geometric results in semidefinite programming*, J. Global Optim. **7** (1995), no. 1, 33–50.
[37] J. Renegar, *Hyperbolic programs, and their derivative relaxations*, Found. Comput. Math. **6** (2006), no. 1, 59–79.
[38] C. Scheiderer, *Sums of squares of regular functions on real algebraic varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 3, 1039–1069.
[39] ______, *Distinguished representations of non-negative polynomials*, J. Algebra **289** (2005), no. 2, 558–573.
[40] ______, *Semidefinite representation for convex hulls of real algebraic curves*, Preprint (2012).
[41] K. Schmüdgen, *The K-moment problem for compact semi-algebraic sets*, Math. Ann. **289** (1991), no. 2, 203–206.
[42] ______, *Noncommutative real algebraic geometry – some basic concepts and first ideas*, Emerging applications of algebraic geometry, IMA Vol. Math. Appl., vol. 149, Springer, New York, 2009, pp. 325–350.
[43] M. Schweighofer, *On the complexity of Schmüdgen's Positivstellensatz*, J. Complexity **20** (2004), no. 4, 529–543.
[44] R. Sinn, *Algebraic boundaries of $SO(2)$-orbitopes*, Discrete Comput. Geom. **50** (2013), no. 1, 219–235.
[45] H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe (eds.), *Handbook of semidefinite programming*, International Series in Operations Research & Management Science, 27, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000, Theory, algorithms, and applications.

Author's address:
Tim Netzer,
Universität Innsbruck
Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck.
email tim.netzer@uibk.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 232 (2016), 19–24

Abelpreis für Andrew Wiles

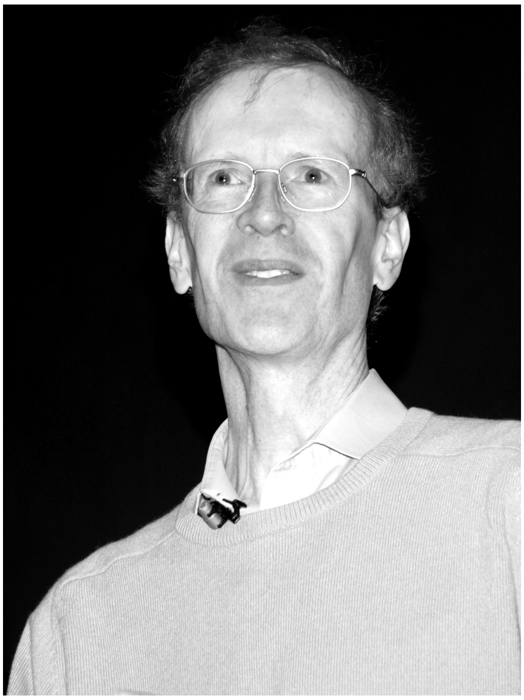
Robert Tichy
TU Graz

Der britische Zahlentheoretiker Sir Andrew Wiles erhielt den Abelpreis 2016 für die Lösung des Großen Fermatschen Problems, welche auf seinem Beweis der Modularität für semistabile elliptische Kurven beruht. Dadurch wurden ganz neue Richtungen für die zahlentheoretische Forschung eröffnet, und Wiles ordnet sich damit in die Reihe der bedeutendsten Mathematiker ein. Wiles erhielt diese Ehrung (dotiert mit etwa 700.000$) in seinem 62. Lebensjahr, nachdem er bereits vorher fast alle Preise und Auszeichnungen verliehen bekam, die für einen Mathematiker erreichbar sind; erwähnen möchte ich hier nur den Ostrowski-Preis, den Wolf-Preis, den King Faisal-Preis und zahlreiche Ehrendoktorate und Medaillen sowie die Verleihung des Adelstitels „Sir“ durch die Queen im Jahr 2000.

Nur die Fields-Medaille blieb ihm verwehrt, da er zum Zeitpunkt der Veröffentlichung seines Beweis des Großen Fermat das 40. Lebensjahr knapp überschritten hatte. Dafür hat er das einzigartige Privileg, dass sich seine Arbeitsstätte an der Universität Oxford in einem Gebäude befindet, das schon zu seinen Lebzeiten seinen Namen trägt. Er selbst bezeichnet es als sein größtes Privileg, dass er jenes mathematische Problem lösen konnte, von den er schon im Kindesalter geträumt hat.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich von einer Begebenheit berichten, die mir unser Kollege Peter Hellekalek aus Salzburg erzählt hat. Er hat Andrew Wiles Anfang der 1980er-Jahre getroffen, als dieser gemeinsam mit englischen Kollegen in Großarl einen Skiurlaub verbrachte. Dabei fuhr Andrew Wiles gemeinsam mit Peter Hellekalek mit einen steilen Schlepplift auf vereister Spur; einige Leute vor ihnen stürzten bei der Liftfahrt und rutschten talwärts auf die beiden Mathematiker zu. Dem besseren Skifahrer Hellekalek gelang es dabei, seinem Liftpartner unter die Arme zu greifen und den heranrutschenden anderen Skifahrern auszuweichen. Wer weiß, was aus dem Großen Fermat geworden wäre, wenn unser Kollege nicht geholfen hätte, diese schwierige Lift-Situation zu meistern. Andrew Wiles erzählte schon damals, dass er sich seinen Jugendtraum erfüllen und den Großen Fermat beweisen möchte. Wie man sieht, war das für Wiles kein übertrieben hochgestecktes Ziel. Zur Lösung solch schwieriger mathematischer Probleme

ISSN 0020-7926



Das Foto zeigt Andrew Wiles bei der Tagung anlässlich des 61. Geburtstags von P. Deligne in Princeton, 2005 (© C. J. Mozzochi, Princeton N.J.)

Louise Richardson (Vice-Chancellor, University of Oxford) sagt zum Abelpreis für Andrew Wiles: ‘The work of Oxford mathematicians lays the foundation of remarkable science – helping to address fundamental questions and enabling stunning innovation. At the same time, our mathematicians rightly remind us that they “seek truth, beauty and elegance in mathematics itself’. Very few have done so with the creativity, tenacity and sheer brilliance of Sir Andrew. The recognition he has received today is a source of immense pride to our University and we send him our warmest congratulations.”

müssen mehrere Dinge zusammenkommen: Eine Forscherpersönlichkeit ersten Ranges, die auch hartnäckig und intensiv an der Lösung des Problems arbeitet und sich auch durch keine Widrigkeiten davon abringen lässt. Was aber genauso wichtig ist: Es muss die Zeit dafür reif sein, d.h. die entsprechenden Methoden, die zur Lösung führen, müssen bereits in greifbare Nähe gerückt sein. Meist baut die Lösung eines bedeutenden Problems auf unverzichtbaren Vorarbeiten anderer Mathematiker auf. Man kann an dieser Stelle nur darüber spekulieren, wie lange die Lösung es Großen Fermatschen Problems gedauert hätte, wenn sie nicht durch Wiles geliefert worden wäre.

Andrew Wiles kommt aus der bedeutenden britischen Schule der Zahlentheorie, die auf Hardy und Littlewood zurückgeht. So hat Wiles bei John Coates im Jahre 1980 in Cambridge promoviert, Coates selbst ist Schüler von Alan Baker, dieser wiederum von Harald Davenport und Davenport selbst hat bei Littlewood promoviert. Diese Schule hat eine Fülle von wichtigen Resultaten erzielt, eine Reihe von bedeutenden Mathematikern hervorgebracht, und Wiles ist die Spitze davon. Er verließ England nach seiner Promotion in Cambridge für viele Jahre und war Professor an der Princeton University während der Zeit seines Beweises des Großen Fermat. In den Jahren 1988 bis 1990 und wieder seit 2011 ist er *Royal Society Research Professor* an der Univ. Oxford. Wie vielleicht allgemein bekannt ist, sprach Wiles mit keinem Kollegen über seine Versuche, den Großen Fermat zu beweisen, er wollte die Lösung allein schaffen. Dennoch ist Wiles keineswegs eine vollkommen verschlossene Persönlichkeit: er hat eine Reihe exzellenter Studenten hervorgebracht. Hier möchte ich nur Richard Taylor erwähnen, der schliesslich half, eine Lücke im ursprünglichen Beweis zu schließen, und Manjul Bhargava, der für seine Beiträge zur geometrischen Zahlentheorie 2014 die Fields-Medaille verliehen bekam. Auf die Person Andrew Wiles und das allgemeine Umfeld zum Fermatschen Problem möchte ich hier nicht weiter eingehen, da es dazu exzellente Literatur gibt, zum Beispiel die Würdigung [6], den populären Bestseller von Simon Singh [12] sowie Informationen im Internet.

Pierre de Fermat hat um das Jahr 1630 am Rand einer Ausgabe der „Arithmetik“ von Diophantus notiert, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ (für beliebige ganzzahlige Exponenten $n > 2$) keine von Null verschiedenen ganzzahligen Lösungen (x, y, z) besitzt. Für die frühe Geschichte dieses Problems verweise ich auf die Literatur (z.B. [14]). So wird dort die Methode des unendlichen Abstiegs beschrieben, mit der Fermat den Fall $n = 4$ erledigen konnte. Der Fall $n = 3$ wurde von Euler behandelt und führt auf Probleme in quadratischen Zahlkörpern und daher war man danach bemüht, ähnliche Methoden für allgemeinere Exponenten n anzuwenden. Dies befruchtete die Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie im 19. Jahrhundert. In diesem Zusammenhang wurden zwei Fälle unterschieden:

1. Fall: Weder x noch y noch z ist durch n teilbar.
2. Fall: Genau eine der Unbekannten x, y, z ist durch n teilbar.

Sophie Germain und Legendre konnten rasch den 1. Fall für viele Exponenten n erledigen, der 2. Fall stellte sich als der schwierigere heraus, und es dauerte relativ lang, bis Dirichlet (1825) den Großen Fermat für $n = 5$ komplett bewiesen hatte. Klarerweise genügt es, den Großen Fermat für Primzahlexponenten n zu beweisen, und es war Lamé , der im Jahre 1839 den Fall $n = 7$ erledigte. Bei dieser Untersuchung stellte sich heraus, dass das Problem eng mit der Frage der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in algebraischen Zahlkörpern zusammenhängt. Dies führte E. Kummer zur Entwicklung der Idealtheorie und zur Unterscheidung in reguläre und irreguläre Primzahlen. Für reguläre Primzahl-Exponenten n konnte er einen Beweis geben, und es stellte sich heraus, dass $n = 37$ die kleinste irreguläre Primzahl ist. Dabei gilt folgendes Kriterium: Eine Primzahl n ist regulär, falls n keinen der Zähler der Bernoulli-Zahlen $B_2, B_4, \ldots, B_{n-3}$ teilt. 1915 hat Jensen gezeigt, dass es unendlich viele irreguläre Primzahlen gibt, dass es also schwierig ist, auf diesem Weg einen vollständigen Beweis zu geben.

Bis 1993 konnte mit Techniken, die auf solchen Ideen beruhen, kombiniert mit umfangreichen Computerrechnungen, der Große Fermat für alle $n \leq 4.10^6$ erledigt werden. Das Problem faszinierte viele Generationen von Mathematikern, und es erschien eine Unzahl falscher Beweise. Einen guten Überblick über den Stand der Forschung zum Fermat-Problem bis Anfang der 1990er-Jahre, beruhend auf Methoden der algebraischen Zahlentheorie, findet man bei P. Ribenboim [9, 10].

Im Jahr 1983 bewies Gerd Faltings die Mordellsche Vermutung mit Methoden der algebraischen Geometrie [2]. Dafür erhielt er die Fields-Medaille, und als Konsequenz beinhaltet dieses Ergebnis, dass die diophantische Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für fest vorgegebenes n nur endlich viele Lösungen besitzt. Leider war es bis jetzt nicht möglich, aus dem Ansatz von Faltings herauszubekommen, dass für jedes n die Anzahl der Lösungen $= 0$ ist. Jedenfalls hatte sich aber angekündigt, dass die Anwendung geometrischer Methoden („Arithmetische Geometrie“) bei diophantischen Problemen ein erfolgversprechender Ansatz ist.

Die endgültige Lösung des Großen Fermat basierte schließlich auf Arbeiten über elliptische Kurven $y^2 = ax^3 + bx + c$, die ursprünglich keinen Zusammenhang damit hatten. Ab den 1950er Jahren widmeten sich führende Zahlentheoretiker und Geometer diesen interessanten Objekten, und so wurden mehrere Fragen aufgeworfen, die unter dem Namen Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung bekannt wurden. 1975 stellte Yves Hellegouarch den Zusammenhang zwischen Großem Fermat und elliptischen Kurven her [5], 1982 wurde dies von Gerhard Frey genauer ausgearbeitet [3]. Die zugehörige Kurve ist als Frey-Kurve bekannt: Bei Annahme einer nichttrivialen Lösung der Fermat-Gleichung $a^n + b^n = c^n$ kann eine elliptische Kurve konstruiert werden, die nicht modular ist, also der Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung widerspricht.

Vereinfacht gesprochen, bedeutet diese Vermutung, dass es zu jeder elliptischen Kurve mit ganzzahligen Koeffizienten modulare Funktionen $f(z), g(z)$ gleicher Stufe gibt, sodass $f(z)^3 = ag(z)^2 + bg(z) + c$ ist. Allerdings hatte Frey keinen rigorosen Beweis für seine Argumentation, und es bedurfte der Arbeit von Ken Ribet (1990), der, aufbauend auf Ergebnissen von Serre, die sogenannte ε-Vermutung bewies [11]. Aus dieser folgt, dass die Frey-Kurve nicht modular ist und damit der Große Fermat gilt.

Was anfangs der 1990er-Jahre noch verblieb, war also der Beweis der Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung. Dabei stellte sich heraus, dass für die Anwendung auf den Großen Fermat ein Spezialfall ausreichend ist: Es genügt, die Modularität für *semistabile* Kurven zu zeigen. Verkürzt gesprochen, heißt eine elliptische Kurve E semistabil, falls für jeden Primteiler p der Diskriminante nur zwei Wurzeln von E kongruent modulo p sind; solche Kurven haben quadratische Führer. 1993 kündigte Andrew Wiles bei einer Vortragsreihe in Cambridge einen Beweis des semistabilen Falls (und damit des Großen Fermat) an. Dabei spielen kombinatorische Argumente eine Rolle, und es traten im Begutachtungsprozess Lücken auf. Nachdem Wiles 7 Jahre lang völlig allein an diesem Problem gearbeitet hatte, wurde nun auch Richard Taylor in die Arbeit eingebunden. Im Jahr 1995 gelang es Wiles und Taylor, die Lücken zu schließen; die entsprechenden Publikationen findet man in den *Annals of Mathematics*, einer der gegenwärtig bedeutendsten mathematischen Fachzeitschriften [15, 13].

Durch die innovativen Arbeiten von Wiles wurde eine völlig neue Forschungsrichtung eröffnet, und es dauerte nicht lange, bis Breuil et al. [1] die Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung vollständig beweisen konnten. Dieses Resultat trägt jetzt den Namen „Modularitätssatz für elliptische Kurven".

Hier sei nur angemerkt, dass elliptische Kurven in ihrer ursprünglichen Form auf die komplexe Analysis des 19. Jahrhunderts zurückgehen und im 20. Jahrhundert zu einem zentralen Forschungsgegenstand in der Zahlentheorie wurden. Dass sie zu einer regelrechten Triebfeder in der Entwicklung der modernen Mathematik werden konnten, war nicht vorherzusehen. Noch weniger zu erwarten war der Beitrag der elliptischen Kurven zur Angewandten Mathematik, insbesondere zur Entwicklung moderner Verschlüsselungssysteme („Elliptische-Kurven-Kryptographie", vgl. die bahnbrechende Arbeit von Neal Koblitz [7] und diverse Lehrbücher). Das zeigt in eindrucksvoller Weise, dass Fortschritte in reiner und angewandter Mathematik oft nicht voneinander zu trennen sind, und die Entwicklung unserer Wissenschaft unabhängig von den Gebieten Zug um Zug voranschreitet.

Man kann sich die Frage stellen, was auf dem Gebiet der Zahlentheorie noch zu tun ist. Natürlich fällt einem sofort die Riemannsche Vermutung ein, aber selbst auf dem Gebiet der Diophantischen Gleichungen ist noch ein großes Problem offen, nämlich die sogenannte *abc*-Vermutung von von Masser und Oesterlé : *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gibt es eine Konstante* $K(\varepsilon)$*, sodass für beliebige relativ prime* $a, b, c > 0$ *mit* $a + b = c$ *die Abschätzung*

$$c \leq K(\varepsilon) \Big(\prod_{p|abc} p \Big)^{1+\varepsilon}.$$

erfüllt ist, wobei das Produkt über alle Primteiler von abc erstreckt wird. (vgl. [8] und den Überblicksartikel [4]). Aus dieser Vermutung folgen der Große Fermat und zahlreiche weitere berühmte Ergebnisse der Zahlentheorie. So wie das Große Fermatsche Problem für viele Mathematiker ein Ansporn zur Entwicklung neuer Methoden war, so hat auch diese Vermutung schon weitreichende Konsequenzen bewirkt. Es ist zu hoffen, dass die Anstrengungen zu ihrer Lösung einen neuen Impetus zur Entwicklung der modernen, zukünftigen Mathematik liefert.

Literatur

[1] Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond, Richard Taylor (2001). On the modularity of elliptic curves over Q: wild 3-adic exercises. *Journal of the American Mathematical Society* 14, 843–939.
[2] Gerd Faltings (1983). Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern *Inventiones mathematicae* 73, 349–366.
[3] Gerard Frey (1982). Rationale Punkte auf Fermatkurven und getwisteten Modulkurven, *J. reine angew. Math.* 331, 185–191.
[4] Andrew Granville, Thomas Tucker (2002). It's As Easy As abc. *Notices of the AMS* 49, 1224–1231.
[5] Yves Hellegouarch (1974). Points d'ordre $2p^h$ sur les courbes elliptiques. *Acta Arithmetica* 26, 253–263.
[6] Elaine Kehoe (2016). Sir Andrew J. Wiles Awarded Abel Prize. *Notices of the AMS* 63, 608–211.
[7] Neal Koblitz (1987). Elliptic curve cryptosystems. *Mathematics of Computation* 48 (177), 203–209.
[8] Joseph Oesterlé (1988), Nouvelles approches du ≪théorème≫ de Fermat. *Astérisque, Séminaire Bourbaki*, Exp. 694 (161), 165–186.
[9] Paulo Ribenboim (1995). 13 Lectures on Fermat's Last Theorem. Springer-Verlag.
[10] Paulo Ribenboim (2000). Fermat's Last Theorem for Amateurs. Springer-Verlag.
[11] Ken Ribet (1990). On modular representations of $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/Q)$ arising from modular forms. *Inventiones Mathematicae* 100, 431–476.
[12] Simon Singh: Fermat's Last Theorem. 1997.
[13] Richard Taylor, Andrew Wiles (1995). Ring-Theoretic Properties of Certain Hecke Algebras. *Annals of Mathematics*, Second Series, 141, 553–572.
[14] Johannes Wallner (2016). Der Rand war zu schmal. *Int. Math. Nachr*. 231, 35–38.
[15] Andrew Wiles (1995). Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*, Second Series, 141, 443–551.

Adresse des Autors:
Robert Tichy
Institut für Analysis und Zahlentheorie, Technische Universität Graz.
Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz.
email tichy@tugraz.at.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 232 (2016), 25–45

Kompetenzorientierung – Gefahren bei der Implementierung und ökonomische Einflüsse

Karl-Heinz Graß
PH Steiermark

Der vorliegende Beitrag ist eine kritische Stellungnahme zur Kompetenzorientierung des Mathematikunterrichts in österreichischen Schulen. Nach dem Versuch, den schulischen Kompetenzbegriff zu definieren, wird auf die praktische Umsetzung in Österreich und die damit verbundenen Gefahren eingegangen. Besonderes Augenmerk gilt der Implementierung von Bildungsstandards sowie der standardisierten, zentralen Reifeprüfung, die hier als Repräsentanten des outputorientierten Unterrichts fungieren. Des Weiteren geht der Artikel auf die Rolle der Mathematik für die Allgemeinbildung ein und weist gleichzeitig auf die teilweise kontroversen Absichten und Einflüsse der globalen Ökonomie hin, die über einen outputgesteuerten Unterricht schleichend Einzug halten.

1 Kompetenzorientierung – ein duktiler Begriff

Seit über einem Jahrzehnt ist der Begriff *Kompetenzorientierung* aus unserem Schulsystem nicht mehr wegzudenken. Auch in der empirischen Bildungsforschung [1] und den Standardsetzungen der Bildungsstandards [13] wird diesem magischen Wort sehr viel Aufmerksamkeit gewidmet. Nun stellt sich die Frage: Was genau kann man unter Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht verstehen und vor allem, welche Auswirkungen hat diese Strömung auf unser Bildungssystem?

Kompetenzorientierung ist ein nutzgesteuertes Unterrichtsmodell der angewandten Psychologie. Kompetenzen dienen der Messung von Berufs- und Lebenstauglichkeit. Für das Fach Mathematik bedeutet dies, dass es um lebendiges und überwiegend anwendungsbezogenes Fachwissen geht. Dazu folgendes Zitat:

ISSN 0020-7926

> „Mathematische Kompetenz ist die Fähigkeit, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens einer Person als konstruktiven, engagierten und reflektierenden Bürger entspricht“. [1, p.23]

Diese Definition bildet zwar die Rolle der Mathematik als allgemeinbildenden Gegenstand hervorragend ab, lässt aber andererseits sehr viel Interpretationsspielraum. Insbesondere wenn es um das Abgeben von fundierten mathematischen Urteilen geht, beispielsweise ist es richtig, dass $1+5=6$ ist. Aber auch folgende Aussage wären in diesem Sinne korrekt: Die Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ ist für x aus den rationalen Zahlen die leere Menge. Um diese weitgefasste Definition einzugrenzen und für die (Prüfungs-) Praxis handhabbarer zu gestalten, führte man in Österreich Grundkompetenzkataloge ein und stellte zahlreiche Musteraufgaben zur Verfügung.

Bei einem Definitionsversuch von kompetenzorientiertem Mathematikunterricht dürfen auch sogenannte Kompetenzmodelle nicht fehlen. Sie dienen zur Beschreibung der Kompetenzen von Lernenden und werden in drei Gruppen unterteilt: *Kompetenzstufenmodelle, Kompetenzentwicklungsmodelle und Kompetenzstrukturmodelle* [14, 15]. *Kompetenzstufenmodelle* beschreiben die Fähigkeiten von Individuen, situationsspezifische Anforderungen auf bestimmten Kompetenzstufen zu bewältigen. *Kompetenzentwicklungsmodelle* beschreiben die Phasen, die bei der Genese eines Kompetenzerwerbs durchlaufen werden, und *Kompetenzstrukturmodelle* schließlich erklären die Struktur einer Kompetenz in einem bestimmten Inhaltsbereich und dienen der Aufklärung von zugrundeliegenden Fähigkeiten. Schecker und Parchmann [33] betonen, dass diese Kompetenzmodelle weder theoretisch noch empirisch ausreichend abgesichert sind; sie haben bis dato eher normativen Charakter. Als Beispiel seien die Standards genannt, in denen die Festlegung von Kompetenzstufen das Ziel darstellt. Umgekehrt jedoch wäre es wünschenswert, wenn aus theoretisch und empirisch abgesicherten Kompetenzmodellen Standards formuliert würden. In diese Richtung läuft das von Siller et al. [34] entwickelte Kompetenzstufenmodell O-M-A für die österreichische standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Der Begriff „O-M-A“ steht dabei für *Operieren, Modellieren* und *Argumentieren*. Diese drei Schüleraktivitäten werden dabei als zentral und in ihrer Struktur sowie in ihrem Verlauf als voneinander unterscheidbar angenommen.

Nun liegt der Fokus dieses Beitrags darin, die praktische Implementierung von Bildungsstandards und zentraler Reifeprüfung in Verbindung mit dem schulischen Kompetenzbegriff nach [36] zu reflektieren und zu diskutieren.

> „... die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu

> lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“. [36]

Diese Überlegungen, den Mathematikunterricht dahingehend zu reformieren, dass ein vernetztes, anwendungsorientiertes Wissen sowie ein Verständnis für die jeweilige mathematische Tätigkeit in den Vordergrund rückt und damit bloßes Abarbeiten von Algorithmen – im Sinne von Kochrezepten – verdrängt wird, ist absolut zu begrüßen. Zudem wurde dadurch auch die fachdidaktische Diskussion um Qualitätsmaßstäbe im Mathematikunterricht erheblich belebt.

Um diese äußerst positive Wandlung zu optimieren, versucht der vorliegende Artikel etwaige Gefahren bei der praktischen Umsetzung dieser Strömung ans Tageslicht zu bringen und verweist zusätzlich auf den ökonomischen Nutzen eines outputorientierten Unterrichts; Letzteres möchte ich betont wertneutral verstanden wissen. Eine kritische Stellungnahme zu wirtschaftlichen Einflüssen darf bei einer Erörterung von kompetenzorientiertem Unterricht jedoch keinesfalls fehlen.

2 Gefahren bei der Umsetzung eines outputzentrierten Unterrichts

Der folgende Abschnitt ist als Diskussionsbeitrag zu sehen, in dem ich meine Eindrücke und Erfahrungen aus der Praxis, verbunden mit theoretischen Modellen, zur Debatte stellen möchte. Gestützt werden die Argumentationen dabei aus der Arbeit mit Schülerinnen und Schülern, aus Gesprächen mit Lehrerinnen und Lehrern sowie theoretisch durch die Fachdidaktik mit ihren Bezügen zur Pädagogik und Psychologie.

Reine Outputorientierung führt zu einer Funktionalisierung des mathematischen Denkens hinsichtlich eines nützlichen Outputs und vertreibt dabei das mathematische Verständnis [37]. Wie bereits oben erwähnt, entstanden durch die Implementierung der Kompetenzorientierung sogenannte Grundkompetenzkataloge, die zunehmend essenzielle, innermathematische Inhalte, insbesondere operativer Natur, welche im Lehrplan noch ihre Berechtigung hätten, aus dem Unterrichtsalltag verdrängen (auf Beispiele dieser Art wird weiter unten eingegangen). Damit sinkt eben speziell das operative, aber auch das typisch innermathematische Anforderungsniveau bei der Reifeprüfung. Die Schwierigkeiten der Maturaaufgaben liegen nun darin, einerseits in vielen Inhaltsbereichen Grundlagenwissen zu haben (Algebra, Geometrie, funktionale Abhängigkeiten, Analysis, Wahrscheinlichkeit und Statistik) und andererseits – in einer Stresssituation – überbestimmte Texte, verfasst in einer Mischung aus Bildungs- und Fachsprache, korrekt zu interpretieren. Gerade Letzteres ist eine große Veränderung zum früheren Format, was insbesondere für Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund und einer anderen Erstsprache als Deutsch zu erheblichen Problemen führen kann. Wenn man die korrigierten Maturaarbeiten analysiert, fällt auf, dass viele Maturantinnen und Maturanten erst gar nicht zur mathematischen Bearbeitung kommen, da sie am Textverständnis scheitern. In diesem Fall wird ausschließlich die Textkompetenz negativ beurteilt. Fraglich ist nun, in welchem Maß Textverständnis zur Mathematik gehört. Selbstverständlich sind Textaufgaben ein nicht unwesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichts, da sie insbesondere für die Kompetenzbereiche *Modellieren* und *Kommunizieren* essenziell sind. Aus meiner Sicht kommt es hier aber auf die Dosis an. Zudem sollte jedwede Textaufgabe kräftige Bezüge zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler aufweisen, was nicht immer gegeben ist. Textaufgaben dienen einerseits dazu, die vielseitigen Anwendungen der Mathematik in altersadäquaten, realen Problemen sichtbar zu machen und andererseits die Fähigkeit zu trainieren, relevante von überflüssigen Informationen zu trennen und (logische) Strukturen aus komplexer formulierten, außermathematischen Problemstellungen gedanklich richtig zu erfassen. Keinesfalls darf es zum „Einkleiden" von Rechenoperationen in weltfremde, künstlich verkomplizierte Fragestellungen kommen. Trotz der konstatierten Relevanz von Textbeispielen habe ich den Eindruck, dass dieses Aufgabenformat derzeit überrepräsentiert ist.

Ein weiterer Punkt, den ich als fragwürdig ansehe, ist das Korrekturformat. Hier tun sich zwei Problemfelder auf: Erstens, die Korrektur sollte nicht der Klassenlehrer oder die Klassenlehrerin durchführen, da es Möglichkeiten zur *subjektiven* Beurteilung gibt, die schwer, beziehungsweise in Mathematik gar nicht nachweisbar sind. Zweitens lässt das Korrekturformat keinerlei Spielraum für etwaige richtige Denkansätze. Natürlich ist mir bewusst, dass dieses dichotome Antwortformat (0 Punkte oder 1 Punkt) aus der Item-Response-Theory (IRT) und konkret aus der Rasch-Modellierung stammt, was hinsichtlich vergleichbarer Itemschwierigkeiten auch berechtigt ist.

Vergleicht man dieses neue Format mit der früheren Matura, so sind einige Aspekte zu diskutieren. Im Folgenden möchte ich hierzu meine persönliche Sicht mit Fallbeispielen als Anregung darstellen.

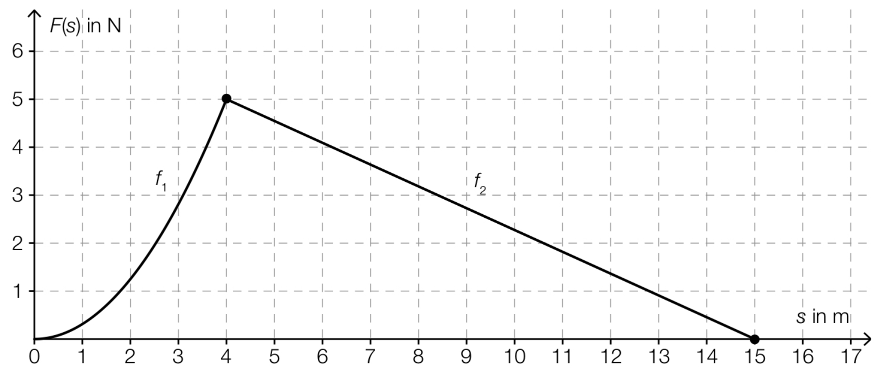
Wenn in diesem Setting nicht exakt das erwartete Ergebnis angekreuzt oder niedergeschrieben wird, so wird die *gesamte* Aufgabe mit null Punkten bewertet, egal welche (vielleicht richtigen) mathematischen Überlegungen der oder die Betroffene dabei hatten. Dies steht im Widerspruch zur üblichen Leistungsbeurteilung, wo auch Lösungsansätze und Beweisideen gewertet werden. Zur Verdeutlichung sei hierzu eine Maturaaufgabe der AHS im Haupttermin 2015/16 zitiert:

> „Ein Massestück wird durch die Einwirkung einer Kraft geradlinig bewegt. Die dazu erforderliche Kraftkomponente in Wegrichtung ist als Funktion des zurückgelegten Weges in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Weg s wird in Metern (m), die Kraft $F(s)$ in

Newton (N) gemessen.

Im ersten Wegabschnitt wird F(s) durch f_1 mit $f_1(s) = \frac{5}{16} \cdot s^2$ beschrieben. Im zweiten Abschnitt (f_2) nimmt sie linear auf den Wert null ab.

Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Ermitteln Sie die Arbeit W in Joule (J), die diese Kraft an dem Massestück verrichtet, wenn es von $s = 0$ m bis zu $s = 15$ m bewegt wird!“

Wenn nun der Kandidat oder die Kandidatin zwar den richtigen Ansatz über die Integralrechnung bzw. über die Bestimmung der Fläche zwischen 1. Achse und Funktionsgraph weiß, sich jedoch verrechnet (Stresssituation!), wird *kein* Punkt vergeben. Welche Kompetenz bewertet man hier? Wohl ausschließlich die Arithmetik bzw. das Eintippen in den Taschenrechner. Vermutlich sollte diese Aufgabe aber dazu dienen, die Kompetenz der Anwendung des (sehr einfachen!) Integrals zu messen. Hier kann man die Gefahr einer reinen Outputorientierung und die damit verbundenen Schwachstellen gut erkennen.

Diese Problematik zieht sich zudem auch über das noch fragwürdigere Setting der Kompensationsprüfung, bei dem schriftlich negativ Beurteilte die Möglichkeit der Kompensation ihrer Leistung haben. Die Prüfung läuft zwar mündlich ab, der Prüfer/die Prüferin darf aber bei der Präsentation der Grundkompetenzaufgaben nicht einwirken, also weder nachfragen noch auf Fehlendes hinweisen. Auch hierzu ein kurzes praxisbezogenes Fallbeispiel: Ein Schüler beantwortet die jeweilige Zuordnung einer Zahl zur entsprechenden Zahlenmenge korrekt, vergisst jedoch auf die Begründungen (Stresssituation). Theoretisch ist es dem Lehrer nicht gestattet, darauf hinzuweisen. Vermutlich könnte der Kandidat richtig begründen, die Aufgabe wird aber in diesem Fall trotz korrekter Zuordnung mit null Punkten bewertet.

Dabei sind nun folgende Bereiche aus fachdidaktischer wie aus pädagogischer Sicht zu bedenken. Viele Kandidatinnen und Kandidaten bestehen die Reifeprüfung um einen Grundkompetenzpunkt nicht, sie haben aber bis zu diesem Zeitpunkt schon mehrmals bewiesen, dass sie ein mathematisches Grundverständnis haben (ansonsten wären sie nicht bis zur 12. Schulstufe gekommen). Weiters gibt es auch häufig Fälle von Prüfungen, die durch diesen fehlenden Punkt einen Notensprung von Befriedigend auf Nicht genügend erfahren. Dies rührt aus der strengen Trennung zwischen Typ I-Aufgaben (Grundkompetenzen) und Typ II-Aufgaben (Vernetzung von Grundkompetenzen). Mir ist hier nicht klar, warum vernetzte Grundkompetenzen erst dann gewertet werden dürfen, wenn man bei den isolierten Grundkompetenzen einen starr festgelegten Schwellenwert erreicht hat. Wie kann dieser Notenschlüssel pädagogisch seriös begründet werden? Über rational nachvollziehbare Antworten würden sich vermutlich viele Betroffene und auch ich mich freuen.

Zudem werden zwanghaft Aufgaben komponiert, die sich mehr oder weniger in dieses Setting drücken lassen. Beispiele mit höherem operativen Aufwand, die mathematisch durchaus ihre Berechtigung hätten, sterben dadurch langsam aus. Es ist beispielsweise unmöglich, Folgen hinsichtlich ihrer Konvergenz zu untersuchen, analytische Geometrie im Raum zu betreiben oder etwa Gleichungen höheren Grades zu lösen. Diese Fähigkeiten sind aber insofern durchaus wertvoll, als dass sie in vielen Studienrichtungen, insbesondere den MINT-Fächern (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik) bereits im ersten Semester erwartet werden.

Didaktisch lässt sich deren Existenz dadurch motivieren, dass etwa durch Konvergenzuntersuchungen von Folgen in der 10. Schulstufe der *Grenzwertbegriff* sensibilisiert und für die Anwendung bei Funktionen (Differentialquotient, Exaktifizierung des Stetigkeitsbegriffs, Integral für Regelfunktionen) vorbereitet wird. Das Lösen von Gleichungen höheren Grades (3. und 4. Grades) verdeutlicht den Nutzen des Technologieeinsatzes (Computeralgebrasystemen) und wiederholt operativen Tätigkeiten aus dem Algebraunterricht der 8. Schulstufe (z.B. Herausheben gemeinsamer Faktoren). Hier erkennen Schülerinnen und Schüler dann auch den „Sinn" dieser Technik, beispielsweise bei der Anwendung des *Produkt-Null-Satzes*.

In naturwissenschaftlichen und technischen Studien geht es dann auch von Beginn an selten um das Erfassen der eigentlich (trivialen) Aufgabe aus einem mehrzeiligen Text heraus, sondern um das Lösen oder Beweisen einer präzise formulierten, weniger trivialen Aufgabenstellung mit durchaus nennenswertem operativem Aufwand.

Zur Verdeutlichung dieser ungleichen Anforderungen werden im Folgenden zwei Aufgaben aus dem gleichen Inhaltsbereich präsentiert: Aufgabe 1 aus dem ersten Semester eines technischen Studiums (Maschinenbau) und Aufgabe 2 von der AHS-Reifeprüfung im Haupttermin 2015/16:

„1. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin 2x + 2\cos x \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f!
(b) Berechnen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f und bestimmen Sie deren Typ!
(c) Geben Sie alle Wendepunkte von f an!“

„2. Gegeben ist eine Polynomfunktion p mit $p(x) = x^3 - 3 \cdot x + 2$. Die erste Ableitung p' mit $p'(x) = 3 \cdot x^2 - 3$ hat an der Stelle $x = 1$ den Wert Null.

Aufgabenstellung: Zeigen Sie rechnerisch, dass p an dieser Stelle ein lokales Minimum (d.h. ihr Graph dort einen Tiefpunkt) hat!“

Naturgemäß gibt es aber auch jene Maturantinnen und Maturanten, die in ihrem zukünftigen Leben vermutlich keinen höheren mathematischen Bedarf, als das bürgerliche Rechnen haben werden.

Damit zur entstehenden Ambivalenz. Die eine Gruppe, sagen wir die mathematisch Begabteren, die Mathematik als (Hilfs-) Wissenschaft brauchen wird – und mit hoher Wahrscheinlichkeit auch weniger Probleme mit den Aufgabenstellungen der Reifeprüfung hat –, erlebt in den ersten Wochen des Studiums einen *Paradigmenwechsel*: Es kommt zu einer Verschiebung der Anforderungen. Reine Grundkompetenzen treten zugunsten operativ aufwendigerer Aufgaben in den Hintergrund. Zusätzlich wissen wir, dass die universitäre Mathematik ohnedies schwer mit der Schulmathematik vergleichbar ist. Diese Problematik gab es aber auch schon vor den Bildungsstandards, der Kompetenzorientierung und der alles krönenden Zentralmatura. Das heißt, zusätzlich zu einer nahezu „anderen“ Mathematik müssen plötzlich auch operativ aufwendige Aufgaben, wie etwa Ungleichungen mit mehreren Fallunterscheidungen, Integrale, die Techniken wie Partialbruchzerlegungen oder Substitutionen verlangen, gerechnet werden. Die Zeit, solche Inhalte im Unterricht zu besprechen, wäre durchaus vorhanden, auch in Schulbüchern finden sich derartige Beispiele nach wie vor. Ausgespart werden sie nur deshalb, weil es sich dabei um keine maturarelevanten Inhalte handelt. Selbstverständlich gibt es Ausnahmen, Lehrerinnen und Lehrer, die trotzdem darauf eingehen und derlei Inhalte bei der mündlichen Reifeprüfung abfragen. Da es jedoch einige Maturantinnen und Maturanten gibt, die MINT-Fächer studieren wollen, wäre es empfehlenswert, diese operativ etwas aufwendigeren (innermathematischen) Aufgaben zumindest im Teil II der schriftlichen Reifeprüfung abzubilden. Dann würden sie auch im Unterricht wieder vermehrt vorkommen, und der Einstieg in die Hochschulmathematik wäre vermutlich etwas weniger dramatisch.

Die andere Population, die Mathematik nicht als einzigartig schöne, klare Wissenschaft sieht, sondern eher als langjährigen Gegner, läuft nun plakativ vielleicht einem Punkt hinterher, der in einer schriftlichen Momentaufnahme gefehlt hat. Es ist sogar denkbar, dass auch beim Kompensieren dieser Grundkompetenzpunkt nicht und nicht zu erreichen war. Die zukünftigen Lebenssituationen, wo diese Person beispielsweise zu begründen haben wird, warum 0,03 eine rationale Zahl ist, werden vermutlich endenwollend sein. Aber anstatt diesen Punkt – eventuell auch für korrekte Lösungsansätze bei Typ II-Aufgaben – freizugeben, muss auch noch im Sommer Mathematik gebüffelt werden. Bleibt fraglich, was diese Leute ihren Kindern über Mathematik erzählen und zu welchen Vorurteilen das führen wird. Ich lasse das an dieser Stelle offen.

Hier sehe ich die zentral vorgegebenen Lösungserwartungen als zu sehr ergebnisorientiert. Solch ein Korrekturschlüssel mag für viele der Aufgaben sinnvoll sein (insbesondere den Multiple-Choice-Items), aber sicher nicht für alle. Es ist zudem für Mathematikprüfungen sehr untypisch, Aufgaben nur mit null oder einem Punkt zu bewerten.

In Anbetracht dessen, gibt es vielleicht doch den einen oder anderen Adaptionsbedarf. Empfehlungen wären in erster Linie, die 0-1-Bewertung zu überdenken und in weiterer Folge zumindest im zweiten Teil der Reifeprüfung (den sogenannten Typ II-Aufgaben) nicht nur Grundkompetenzen zu vernetzen, sondern auch operativ aufwendigere Beispiele abzufragen, wo für richtige *Ansätze* Punkte vergeben werden dürfen. Damit wäre sichergestellt, dass zukünftig diese Sorte Aufgabe nicht gänzlich aus dem Unterricht verschwindet und jene Schülerinnen und Schüler, die später damit konfrontiert werden, keinen *Kulturschock* erleiden.

Um die Objektivität bei der schriftlichen Arbeit zu steigern, wäre über eine externe Korrektur nachzudenken. Ein kostenneutraler Vorschlag ist die Korrektur durch Lehrerinnen und Lehrer einer anderen Schule. Zudem gilt es über das Format der Kompensationsprüfung nachzudenken, da diese sehr unterschiedlich abgehalten wird und dadurch die angestrebte Objektivität leidet. Manche Schulen führen das Kompensieren als typisch mündliches Prüfungsgespräch, andere wiederum als Monolog des Prüflings. Wenig verwunderlich erscheint damit das unterschiedliche Ländergebnis: In Kärnten besserten sich im Haupttermin 2015/2016 84% ihren Fünfer aus, in Salzburg nur knapp die Hälfte; offenbar wurden in Salzburg mehr Monologe geführt.

Abschließen möchte ich diesen Abschnitt mit einigen Worten zu den Bildungsstandards, die in engem Zusammenhang mit der Kompetenzorientierung stehen.

Durch die Einführung von Standards am Ende der 4. Schulstufe sowie am Ende der 8. Schulstufe kam es im Fach Mathematik zu einer Umstellung auf *Outputorientierung*. Beschreibt der Lehrplan die Unterrichtsinhalte (Inputs), so definieren die Bildungsstandards jene Kompetenzen, die bei den Schülerinnen und Schülern am Ende des Prozesses nachweisbar sein sollen (Output). Dadurch werden mathematische Inhalte auf die Entwicklung, auf die Genese von Output funktionalisiert. Der Output *Problemlösekompetenz* kann sicher durch mathematisches Verstehen generiert werden, möglicherweise werden diese gewünschten Outputs jedoch auch durch verständnisloses Rechnen und effizientes Studieren der Aufgabenformate erreicht. In einer Zeit des Akademisierungswahns [26], wo ständig versucht wird, die Maturantinnen- und Maturantenquote zu erhöhen (ganz nach den Forderungen der OECD), ist das Erreichen der Outputs auf dem zweiten Weg vermutlich einfacher. Bildungsstandards einzuführen und somit Kompetenzen zu definieren, ist gewiss sinnvoll. Die praktische Umsetzung sowie die Systempassung lassen aber auch hier zu wünschen übrig. Einerseits müsste aus meiner Sicht (die ich hier ebenso zur Diskussion stelle) der Lehrplan besser auf die Bildungsstandards abgestimmt werden (das betrifft insbesondere den Lehrplan der Primarstufe), und andererseits sehe ich das Setting der Standardtestung ausbaufähig. Die Kinder bearbeiten die Aufgaben im Wissen, dass das Ergebnis weder positive noch negative Konsequenzen für sie haben wird. Aus eigener Erfahrung, aus Gesprächen mit Kindern wie auch mit Lehrerinnen und Lehrern sowie aus Sicht der Psychologie wird dadurch keine *maximum-performance* erreicht. Allenfalls ist ein grober Überblick über die erworbenen Kompetenzen ersichtlich und man bekommt zudem Daten, mit denen wiederum empirische Bildungsforschung betrieben werden kann. Anzumerken ist allerdings, dass es auf die Frage, ob kompetenzorientierter Unterricht für das Verständnis der Schülerinnen und Schüler hilfreich ist, bislang noch keine empirische Evidenz gibt; es bleibt hinsichtlich dieser entscheidenden Frage also bei einer reinen Hypothese.

Insgesamt lässt sich zusammenfassen, dass durch die Einführung von Standards und die Umstellung auf einen outputzentrierten Unterricht eine der größten Umstellungen im Schulsystem, insbesondere in der Unterrichtspraxis, stattgefunden hat. Dieser Paradigmenwechsel war notwendig und hat auch qualitativ hohen Mehrwert gebracht. Die Aufgaben sind nun von der Primarstufe bis zur Matura auf Verständnis ausgerichtet, was speziell bis zum Ende der Sekundarstufe I didaktisch sehr zu begrüßen ist. In der Sekundarstufe II allerdings wurden durch die zahlreichen Grundkompetenzen und durch die Ängste vor dem Format der standardisierten Reifeprüfung Aufgaben mit höherem Operationsaufwand nahezu gänzlich verdrängt. Praktiken wie Koeffizientenvergleich, Partialbruchzerlegungen oder Polynomdivisionen werden im Unterrichtsalltag gleichermaßen vernachlässigt wie rechentechnisch aufwendigere Themenbereiche; letztere wären zum Beispiel die analytische Geometrie im Raum, Kegelschnitte oder der Umgang mit Folgen und Reihen. Dies sehe ich hinsichtlich der Anforderungen kritisch, die an Studienanfängerinnen und Studienanfänger technischer wie naturwissenschaftlicher Studienrichtungen bereits im ersten Semester gestellt werden.

Wünschenswert wäre zudem, dass beim Erreichen der geforderten Kompetenzen vermehrt darauf geachtet wird, aktuelle Forschungsergebnisse der Fachdidaktik – insbesondere jene der Primarstufe – in den Unterricht zu implementieren. Wirft man einen Blick in die Klassenzimmer, so fällt leider auf, dass nach wie vor das Schulbuch als Unterrichtsgrundlage dient. Inhalte werden dabei häufig nicht am aktuellsten fachdidaktischen Stand unterrichtet. Als Beispiel nenne ich das „Einmaleins“, welches nach wie vor häufig durch Reihenlernen vermittelt wird und nicht etwa durch Ableitungsstrategien aus einfachen Kernreihen. Ziel muss es also sein, die Ergebnisse solcher fachdidaktischer Forschungen an den Adressaten, an das Kind zu bringen. Letzteres ist nur bedingt über Schulbücher gegeben, da diese keine Methoden abbilden können bzw. auch selten am aktuellsten Forschungsstand sind. Da ich persönlich auch wenige Lehrerinnen und Lehrer kenne, die in ihrer Freizeit hochwertige fachdidaktische Zeitschriften lesen, bedürfte es (verpflichtender) Fort- und Weiterbildungen sowie einer evidenzbasierten Ausbildung.

3 Mathematik versus Mathematikunterricht

Oben wurde schon darauf hingewiesen, dass es Unterschiede zwischen der Schulmathematik und der universitären Mathematik gibt. Dieser Abschnitt versucht nun bewusst provokant, die Mathematik (Hochschulmathematik) mit der Schulmathematik zu vergleichen. Selbstverständlich handelt es sich auch bei der Schulmathematik um Mathematik, ich übertreibe hier zur besseren Unterscheidbarkeit und zur Betonung des Abstraktionssprungs.

Die Frage nach der Definition von Mathematik ist ganz klar davon abhängig, *wer* gefragt wird. Die Mathematikdidaktiker und Mathematikdidaktikerinnen werden bedingt durch ihre Nähe zu den Bezugswissenschaften Pädagogik, Psychologie und Soziologie sowie durch ihre Verbundenheit zur Bildungspolitik anders antworten als jener Personenkreis, der in der Mathematik selbst tätig ist, täglich Mathematik betreibt, Neues erschafft oder Bekanntes in neuer Weise entdeckt und anwendet.

Es ist vielleicht angenehmer, die Frage zu negieren: Was ist Mathematik nicht?

> "Mathematics is not a book confined within a cover and bound between brazen clasps, whose contents it needs only patience to ransack." [35]

Die deutsche Wikipedia-Seite zeigt, dass es in unseren Breiten schwerer fällt, Mathematik zu definieren:

> „Für Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition; heute wird sie üblicherweise als eine Wissenschaft beschrieben, die durch logische Definitionen selbstgeschaffene abstrakte Strukturen mittels der Logik auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht."

Liest man dies, könnte man tatsächlich glauben, Mathematik sei eine Spielwiese für Personen mit viel Tagesfreizeit, die sich gern abstrakte Duelle liefern. Es ist – speziell für Nicht-Mathematiker – schwierig, daraus einen Realitätsbezug herzustellen.

Natürlich ist Mathematik jene Wissenschaft, die in hohem Maß von der Natur der Dinge abstrahiert; genau deshalb ist Mathematik jedoch auch so universell einsetzbar. Wir wenden Mathematik in beinahe allen Wissenschaftsdisziplinen direkt oder indirekt an. Den Schülerinnen und Schülern ist diese Tatsache nicht bewusst, sie wissen nicht, wozu es notwendig ist, in höheren Abstraktionsstufen zu denken. Ihnen ist nicht klar, dass es erst dort möglich wird, mit anderen Wissenschaften in Wechselwirkung zu treten, neue Zusammenhänge sichtbar zu machen und damit zu einem kleinen Stück Welterkenntnis beizutragen oder einfach nur indirekt zur Lösung eines realen Problems zu gelangen. So gesehen, ist Mathematik ganz klar ein *schöpferischer* Prozess, welcher sich von naiven Ausweichtätigkeiten, wie etwa dem Klassifizieren von Aufgaben aus einem Pool, abgrenzt. Es gibt aber auch eine zweite Art von Mathematik, die Schulmathematik. Dazu folgendes Zitat zum Einstieg:

> „Die Schulmathematik ist durch ihren beispielorientierten und algorithmischen Aufbau charakterisiert, während die universitäre Mathematik sich durch ihre axiomatisch-deduktive Auslegung kennzeichnet.“ [31, p.56]

Da aber schon Euklids Mathematik axiomatisch-deduktiv und algorithmisch – man betrachte den Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen – war, liegt es nahe, anzunehmen, dass man Mathematik nicht in zwei Arten teilen kann. Mathematik ist *eine* Wissenschaft, nur die Inhalte und die Lehrweise sind altersadäquat anzupassen. Wer hier anderer Meinung ist, sollte das Fach nicht wie jeher Mathematik nennen, sondern etwa *MAU* (Modellieren-Alltag-Umwelt) wie Wiechmann/Bandelt [37] dies sehr treffend beschrieben haben. Das würde sich dann auch in die *Neue Disziplinlosigkeit* [23] des Schulunterrichts hervorragend eingliedern lassen.

In der modernen Schulmathematik sind Algorithmen (wegen des höherem operativen Aufwands) nahezu verpönt; wurden im letzten Jahrtausend noch Szenarien wie die Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, der euklidische Algorithmus, das Horner-Schema oder das Newton-Verfahren unterrichtet, so kommen diese Inhalte heute bestenfalls noch als Ergänzung im Vertiefungsteil vor, wozu aus Zeitgründen leider nur die wenigsten kommen. Übrig bleiben nur *didaktische Stellvertreter* [8], die jedoch keinen wirklich effizienten Algorithmus repräsentieren.

Generell steckt natürlich in vielen Alltagsphänomenen Mathematik, unzählige konkrete alltägliche Fragen quantitativer Natur können mit elementarmathematischen Methoden beschrieben werden. Diese Tatsache führt jedoch wieder in die Irre, denn auch die Elementarmathematik kann nicht allein durch Alltagsbezüge entwickelt werden, weil erst durch innermathematische Fragestellungen eine Kalkül- und Theorieentwicklung möglich wird. Da gerade die Elementarmathematik bereits in der Grundschule beginnt und hier die mathematische Ausbildung der Lehrkräfte in Österreich bis dato sehr oberflächlich war, sei an dieser Stelle positiv vermerkt, dass nun durch die vollakademische Primarstufenlehrer- und Primarstufenlehrerinnenausbildung eine Arithmetik und Geometrie vermittelt wird, die durchaus das Prädikat Elementarmathematik verdient und dadurch die Ausbildung zum Primarstufenpädagogen bzw. zur Primarstufenpädagogin einen nicht unerheblichen mathematischen Qualitätsschub erfährt. Damit könnten sich durch den Einsatz dieser neuen, vollakademischen Grundschullehrerinnen auch nachhaltig positive Effekte im Mathematikunterricht der Volksschulen ergeben.

Zurück zur Unterrichtspraxis: Das Reduzieren der Mathematik auf das Alltägliche hat auch nichts mit Beispielorientierung zu tun. Mathematikunterricht lebt vom dialektischen Gegensatz des Konkreten und Abstrakten [37]. Das beginnt in der Volksschule durch die Abstraktion von konkreten Tätigkeiten zu abstrakten mathematischen Algorithmen. Beim *Enthalten sein in* oder beim *Aufteilen* etwa, wird zuerst die konkrete Handlung ausgeführt und daraus die schriftliche Division abgeleitet. Damit sollte auch jedem Kind klar sein, wozu dieser komplexe Rechenvorgang (schriftliche Division) benötigt wird. In der Sekundarstufe muss diese Strategie beibehalten werden. Neue Stoffinhalte sollten durch Anknüpfung an bereits bekanntes Wissen erarbeitet werden, Formeln beispielsweise sollten stets aus einem ausführlichem Herleitungsprozess entwickelt werden. Dabei ist selbstverständlich auf ein altersadäquates Abstraktionsmaß zu achten. Wird in der Primarstufe vorwiegend auf enaktiver (handelnder) Ebene begründet, kann man in der Sekundarstufe I auf die ikonische (bildliche) Ebene übergehen und schließlich in der Sekundarstufe II auf die rein symbolische Ebene.

Durch eine konsequente Beibehaltung dieser Vorgangsweise wäre der Übergang von der schulischen Mathematik zur universitären Mathematik vermutlich nicht so drastisch. Es kämen nur neue Inhalte und neue *Vokabel* für bereits Bekanntes dazu (z.B. verschiedene Skalarprodukte als Abstraktion des bekannten inneren Produkts, Körper für eine Menge, in der alle Grundrechnungsarten uneingeschränkt ausführbar sind, etc.). Die Idee, Mathematik aus schlüssigen Definitionen über beweisbare Sätze aufzubauen, bliebe hingegen nahezu unverändert.

4 Allgemeinbildung und Mathematik

Da Mathematik aber nicht bloß unterrichtet wird, um jene vorzubereiten, die später ein damit verwandtes Studium wählen, sondern auch zur Vermittlung allgemeinbildender Kompetenzen, wird im Folgenden auch diese Rolle des Fachs beschrieben. Damit wird der hohe Stellenwert von Mathematik im Fächerkanon unseres Schulsystems auch begründet. Bei dieser Rechtfertigung geht es weniger um die verhältnismäßig kleine Population jener, die Mathematik als „Werkzeug“ im Studium braucht, sondern vielmehr um die allgemeinbildende Relevanz dieses Fachs.

Ausgehend von einem Allgemeinbildungsbegriff nach Heymann [9], „Es geht um Bildung für alle und um das Allgemeine von Bildung“, wird in diesem Abschnitt ein Definitionsversuch von Allgemeinbildung gewagt und die allgemeinbildende Rolle der Mathematik herausgearbeitet.

Zur Allgemeinbildung wird hier das an Wissen, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einstellungen gezählt, was jeden Menschen als Individuum und Mitglied von Gesellschaften in einer wesentlichen Weise betrifft, was für jeden Menschen unabhängig von Beruf, Geschlecht und Religion u.a. von Bedeutung ist. Dies ist natürlich keine Definition, dazu müssten mindestens noch Konzepte von den möglichen Bestimmungen des Menschen aufgezeigt werden.

Angesichts tiefgreifender Wandlungsprozesse in unserer Gesellschaft (Wertepluralismus, Verwissenschaftlichung des beruflichen und öffentlichen Lebens, Überflutung mit Medien, zunehmende Spezialisierung in den Wissenschaften und in der Berufswelt, Wandel durch technische Innovationen,. . .) und angesichts der großen globalen Probleme (Friedenssicherung, Befreiung von Hunger, Erhaltung der Umwelt, sozialer Ausgleich, Emanzipation der Frauen) wird es einerseits immer schwieriger, Allgemeinbildung zu definieren, andererseits aber auch immer wichtiger, dass möglichst viele Menschen eine solide Allgemeinbildung erfahren. Eine funktionierende Demokratie ist ohne aufgeklärte, selbstständig denkende und reflexionsfähige Bürger nicht möglich. Da wir in Österreich einen Fachunterricht haben, muss jedes Fach rechtfertigen, inwieweit es für eine solche Allgemeinbildung *relevant* ist. Dies ist angesichts einer sich schnell verändernden Gesellschaft ein permanenter Prozess mit immer neuen Herausforderungen an jeden einzelnen Gegenstand. Für den Mathematikunterricht beschreibt Winter [38, p.37] drei Grunderfahrungen, die angestrebt werden sollten und die auch stark miteinander verknüpft sind:

- Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenzulernen und zu begreifen,
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.

Gerade die Punkte zwei und drei gehen weit über bloße Lebensnotwendigkeit hinaus. Um diese Grunderfahrungen zu erfüllen, muss darauf geachtet werden, Schulmathematik nicht nur auf Grundkompetenzen und das Training von Aufgaben- und Antwortformaten zu beschränken, sondern auch Algorithmen und zumindest einfache Beweise zu unterrichten. Ansonst kann Schülerinnen und Schülern nie bewusst werden, worin die Einzigartigkeit der Mathematik liegt. Das Beeindruckende ist, dass diese Wissenschaft für ihren Aufbau nur sich selbst braucht und in sich schlüssig ist, andererseits hingegen die Fähigkeit hat, in nahezu allen Bereichen unseres täglichen Lebens präsent zu sein. Den Schülerinnen und Schülern muss bewusst gemacht werden, dass ihr Smartphone, ihr Tablet, der Wetterbericht am Abend, Facebook, das Programm mit dem sie ihre Bilder und Videos bearbeiten, der Urlaubsflug bis hin zur MRT-Untersuchung ohne Mathematik Existenzschwierigkeiten hätten. Diese vielseitige Anwendbarkeit ist aber ausschließlich durch die hohe Abstraktion möglich. Eine verstärkte diesbezügliche Sensibilisierung der Kinder und Jugendlichen würde das Fach viel stärker motivieren. Diese Art von Motivation vermisse ich derzeit leider stark. Fragen Sie zehn Maturantinnen oder Maturanten, wozu man Mathematik braucht und was man mit einem Mathematikstudium (außer Lehramt) machen kann. Die Antworten dazu werden kurz ausfallen.

Dazu passend ist auch die, in letzter Zeit häufig geführte Diskussion über „träges" Wissen, speziell im Zusammenhang mit Mathematik. Ein eindrucksvolles Beispiel dazu nennen erneut Wiechmann/Bandelt [37], die das Lesen von Büchern, Belletristik wie Sachbüchern als Bestandteil der Allgemeinbildung nennen. Durch das Lesen der Bücher baut sich ein grundlegendes Wissen, ein Verständnis von komplexen Zusammenhängen auf, das für die Beurteilung von Alltagssituationen essenziell ist. Befremdend ist dann die Aussage von Schweizer Pädagogen:

> „Die Idee der Kompetenzorientierung [...] folgt aus der Überlegung, dass Schule nicht träges Buchwissen, sondern auch in Alltagssituationen anwendbares Wissen vermitteln soll". [3]

Einerseits kann Wissen nicht träge sein, außer es ist gar kein Wissen. Wenn ein Volksschulkind etwa den Lehrsatz des Pythagoras auswendig aufsagen kann, so handelt es sich nicht um träges Wissen, sondern eben um gar kein Wissen. Der Mensch ist vielleicht träge, träge, was Denken und Wissen angeht, es gibt zudem auch sicher viel „überflüssiges" Wissen, wie z.B. im Guinness-Buch der Rekorde, aber sicher kein „träges" Wissen. Liest man andererseits die oben zitierte Idee der Kompetenzorientierung von Brühwiler et al. [3], so wird im Hinblick auf die ebenfalls oben genannten Anwendungen der Mathematik erst recht klar, dass es sich bei Mathematik um alles andere als träges Wissen handelt.

Anzumerken ist an dieser Stelle, dass die Kompetenzorientierung mit ihren Alltagsbezügen zwar die Mathematik als neutrales Mittel der Problemlösung verwenden soll, dabei aber immer den *Selbstwert der Mathematik* berücksichtigen muss. Damit geht genau das Faszinierende an der Mathematik, die Sache selbs,t die motiviert und in den Bann zieht, auch nicht verloren. Damit trainiert das Fach Mathematik auch eine Beharrlichkeit, die nicht isoliert oder abstrakt zu betrachten ist, sondern eine Beharrlichkeit, Erkenntnis- und/oder Lebenskrisen zu überwinden. Weitere Kompetenzen wie Kommunikation, Präsentation, Argumentation und der abstrakte Wille zum Erfolg sind für viele Karrierewege in der modernen Gesellschaft essenziell. Auch dafür ist es notwendig, Mathematik adäquat und zeitgemäß zu unterrichten. Hierbei handelt es sich auch um eines der größten Pro-Argumente des kompetenzorientierten Unterrichts. Erst dadurch wurde verstärkt auf Kommunikation, Argumentation und Präsentation im Mathematikunterricht geachtet. Dieser Unterrichtsstil entspricht zudem einem didaktischen Modell, welches für qualitativ hochwertigen Mathematikunterricht mittlerweile als unverzichtbar gilt, dem dialogischen Lernansatz von Gallin/Ruf [6].

Der Bezug zu diesen *Soft Skills*, die in unserer merkantilen Gesellschaft mindestens so wichtig sind wie fachliche Kompetenzen, eignet sich exzellent zur Überleitung in den nächsten Abschnitt dieses Beitrags.

5 Kompetenzorientierung und globale Ökonomie

Wie eingangs beschrieben, kommt der allgemeine Kompetenzbegriff aus der pädagogischen Psychologie. Er beschreibt die menschliche Leistungsfähigkeit [7] besser als der Intelligenzbegriff. Intelligenz hat sich insofern als begrenzt tauglich erwiesen, als dass der Erfolg junger Menschen nicht nur von kognitiven Fähigkeiten abhängig ist, sondern auch von Willensstärke, Selbstvermarktung, Netzwerkfähigkeiten und anderen Persönlichkeitsmerkmalen. Auch grenzt sich der Kompetenzbegriff von der Qualifikation ab. Qualifikation für einen Job heißt, dass ein bestimmtes vorgezeichnetes Anforderungsprofil ideal erfüllt wird [30]. In der heutigen, dynamischen Berufswelt wird es jedoch immer schwieriger ein genaues Anforderungsprofil auszumachen; daher setzt die Pädagogik eher auf universelle Fähigkeiten, die durch Kompetenzen abgebildet werden.

Die angewandte Psychologie hat also mit dem Kompetenzbegriff versucht, die Verbindung zur Ökonomie herzustellen. Diese Beziehung ist wechselseitig zu verstehen: In dem Maße, wie die Psychologie die Nähe zur Wirtschaft gesucht hat, hat die Wirtschaft brauchbare Testverfahren gesucht, mit denen sich die Erfolgsfähigkeit potenzieller Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter messen lässt [7]. Den Ausgang nahm dieser Trend nicht zufällig von den TIMSS- und PISA-Studien, welche von der OECD angestoßen wurden. Hier war die Richtung von Beginn an klar: Das Bildungssystem muss nach ökonomischen Kriterien ausgelegt werden [17]. Als Beispiel kann hier etwa die Implementierung des Bologna-Prozesses und somit des Bachelors an Universitäten dienen. Es muss scheinbar möglich sein, in kurzer Zeit viele Absolventinnen und Absolventen mit akademischem Abschluss zu produzieren und diese dann sofort in die Wirtschaft einzugliedern. Damit geht die Muße für Bildung leider weitgehend verloren. Bildung braucht Zeit, Bildung ist ein lebenslanger Prozess. Studieren hieß früher auch, sich Zeit zu nehmen, Zeit für das Hinterfragen von Sachverhalten, um Dingen auf den Grund gehen zu können und diese dann *wirklich* zu verstehen. Diese Fähigkeit zur Reflexion, zur Vernetzung von Wissen, die schlicht Zeit in Anspruch nimmt, wird durch diese ökonomischen Einflüsse zunehmend ausgedämpft. Das Phänomen der *Zeit-*

kompression betrifft aber keinesfalls nur die Schule und die Universitäten; Kinder müssen bereits *vor* der Einschulung Instrumente lernen, in Sportvereinen sein, Frühförderprogramme durchlaufen, etc. Es bleibt kaum mehr Zeit, „Kind“ zu sein, Zeit zum Spielen in der Natur, Zeit sich selbst zu beschäftigen, vielleicht sogar sich selbst kennenzulernen. Anschließend muss die Schullaufbahn bis zur Matura von fast allen (in welcher Schulform auch immer) durchschritten werden. Um die Wünsche unserer Gesellschaft vollständig zu erfüllen, muss anschließend noch zumindest der Bachelor irgendeiner Studienrichtung absolviert werden. Vergessen wird dabei leider auf die enorm wichtigen handwerklichen Berufe. Eine Lehre zu beginnen, heißt oft, dass es für die Matura „nicht gereicht“ hat. Aus meiner Sicht müsste der Lehrberuf eine viel höhere Reputation genießen, um neben der Matura (die auch während bzw. nach der Lehre noch nachgeholt werden kann) eine attraktive Alternative darzustellen. Volkswirtschaftlich wären gute Handwerker eventuell brauchbarer als arbeitslose Akademiker und -innen brotloser Studienrichtungen.

Sehr schön wird dieser ökonomische Hintergrund auch in der oben zitierten Kompetenzdefinition von Weinert [36] deutlich. Demnach beinhaltet Kompetenz eine Vielzahl kognitiver, sozialer, motivationaler und volitionaler Fähigkeiten und Einstellungen. Die Spitze des Eisbergs wird dann damit erreicht, dass all dies dazu befähigen soll, Probleme zu lösen und Problemlösungen in variablen Anwendungssituationen erfolgreich einsetzen zu können. Die globalisierte Wirtschaft ist daran interessiert, dass sich Menschen flexibel für Ziele motivieren können. Hat man sich seinerzeit vertraglich verpflichtet, einem Unternehmen seine Arbeitskraft zu überlassen, so wird heute *jede* Dimension des Menschen erwartet. Das Unternehmen will die ganze Person, nicht nur die Arbeitskraft. Es muss uns also klar sein, auf welches Pferd mit dem Konzept der Kompetenzorientierung gesetzt wird.

Der Kompetenzbegriff misst die Erfolgsfähigkeit junger Menschen über die für die Berufstauglichkeit (Employability) ausschlaggebenden Faktoren wie Intelligenz, soziale, kommunikative, motivationale und volitionale Fähigkeiten und Einstellungen. Das dadurch erzeugte und vermessene Humankapital kann dann der globalisierten Ökonomie zur Verfügung gestellt werden [37]. Somit sind Kompetenzen ein unverzichtbarer Baustein für die zentrale Lenkung unseres Bildungssystems, für die Zentralisierung und Globalisierung [19]. Die Aussage von Nida-Rümelin [25] ist demnach etwas verfehlt: „Der Einfluss ökonomischer Interessen auf unsere Schulen und Hochschulen ist nach wie vor vergleichsweise gering“. Die Steuermechanismen sind subtiler; aber effektiver geworden [30].

Einmal mehr bestätigt werden die oben beschriebenen Ängste in dem am 4. Jänner 2016 in der Onlineausgabe der Tageszeitung *Die Presse* veröffentlichten Artikels über die Wünsche und Vorstellungen der Industriellenvereinigung (IV):

> „Die Industriellenvereinigung schlägt vor, einen neuen Fächerkanon

> zu schaffen und dafür ‚totes Wissen' aus den Lehrplänen zu entfernen. Doch schon die Wünsche der IV zur Bildungsreform fanden wenig Gehör.
>
> Wien. ‚Die Zeit ist unsicher, man muss heute vernetzt denken'– so begründet Eva Haubner, Schulbeauftragte der Industriellenvereinigung (IV), einen weiteren Vorstoß in der Bildungspolitik. Konkret ausgearbeitet soll dieser in den nächsten Monaten werden. Schon jetzt ist aber klar, in welche Richtung es gehen soll: Die IV wünscht sich eine komplette Neustrukturierung des Fächerkanons.
>
> Haubner nennt dazu mehrere Beispiele: So sollen Mathematik, Physik, Chemie, Biologie, Informatik und Werken das neue große Fach Science & Technology bilden. Bei der Verschränkung dieser Fächer stünde der Bezug zur Praxis in Wissenschaft und Technik im Vordergrund. Politische Bildung und Wirtschaftsbildung sollen als eigene Fächer eingeführt werden.
>
> Angedacht wird außerdem das Fach Demokratie, Werte, Ethik. Um diese Umstrukturierung zu ermöglichen, müsse an anderer Stelle entrümpelt werden. ‚Totes Wissen' könne aus den Lehrplänen entfernt werden. Konkrete Ideen, was in der Schule nicht mehr behandelt werden soll, gebe es aber noch nicht. Denn auch eine breite Allgemeinbildung sei Haubner zufolge wichtig, und zwar sowohl für den einzelnen Menschen als auch aus Arbeitgebersicht." [4]

Lassen wir uns überraschen, was mit „totem Wissen" gemeint sein wird.

6 Zusammenfassung

Kompetenzorientierung und Bildungsstandards sind Mittel zur Outputorientierung, welche nicht nur an der pädagogischen und didaktischen Sache interessiert sind, sondern auch am ökonomischen Nutzen. Durch die Umstellung auf kompetenzorientierten Unterricht in Mathematik kam es zweifelsohne zu einer Qualitätsverbesserung hinsichtlich des Verständnisses für die Inhalte. In der Primarstufe sowie der Sekundarstufe I sehe ich die Problematik darin, dass es einerseits den Lehrplan gibt (der die Inputs vorgibt), demgegenüber aber die Bildungsstandards stehen, welche den Output definieren. Dabei kommt es zu einer Ambivalenz für Lehrerinnen und Lehrer, nicht zuletzt deshalb, weil die Inhalte von Input und Output disparat sind. Es müsste eine Lehrplanreform zur Anpassung stattfinden. In der Sekundarstufe II liegt die Gefahr darin, dass eine (zu) starke Fokussierung auf Grundkompetenzen sowie auf das Training von Antwortformaten stattfindet. Damit bleiben operativ aufwendigere Aufgaben und Stoffinhalte – die jedoch im Lehrplan nach wie vor verankert sind – vielfach auf der Strecke. Genau diese

Kompetenzen werden anschließend aber in vielen Studienrichtungen, insbesondere in naturwissenschaftlichen und technischen Studien, bereits im ersten Semester verlangt. Daher wäre es ratsam, auch solche Aufgaben in der zentralen Reifeprüfung abzubilden. Dies könnte etwa im zweiten Teil der schriftlichen Arbeit erfolgen, der ohnedies nur für die Noten Sehr gut, Gut und Befriedigend ausschlaggebend ist (letzteres wäre theoretisch auch allein durch Grundkompetenzen erreichbar). Zudem sehe ich die überdurchschnittliche Textlastigkeit der Aufgaben als bedenklich. Viele Kandidatinnen und Kandidaten – vorwiegend jene mit einer anderen Erstsprache als Deutsch – kommen dadurch erst gar nicht oder nur fehlerhaft zum mathematischen Teil der Aufgabenstellung.

Die Vereinheitlichung des Niveaus der Reifeprüfung hat zweifelsohne viele Vorteile, den größten wohl in der Vergleichbarkeit der Kompetenzen von Maturantinnen und Maturanten. Der Preis, der dafür in der gelebten Praxis bezahlt wird, ist der Verlust von mathematischen Schwerpunktsetzungen, was wiederum eine Einschränkung von Individualisierung und Differenzierung nach sich zieht. Die Frage, die es zu klären gibt, ist, ob sich die mathematischen Kompetenzen durch diesen kostspieligen und organisatorischen Mehraufwand signifikant erhöhen. Des Weiteren besteht die Gefahr, dass durch eine zu starke Orientierung an Grundkompetenzen jenes Wissen und jene Fähigkeiten, die spezifisch mit dem Fach Mathematik zusammenhängen, durch allgemeine Problemlöse- und Modellierungskompetenzen ersetzt werden. Im Unterricht scheinen soziale Kompetenzen (Soft Skills) in sogenannten *Kooperativen Lernformen* die effiziente Aneignung soliden Fachwissens immer stärker zu verdrängen. Wir tendieren dazu, durch die derzeitige Umsetzung der Kompetenzorientierung in der Sekundarstufe II auf spezifische Stärken der Schülerinnen und Schüler in Mathematik nicht mehr eingehen zu können und eine operative Inkompetenz zu produzieren. Durch diese Entwicklung werden ganz wesentliche mathematische Bildungsziele – auch jene der OECD – unterminiert. Selbstverständlich sieht das System theoretisch einen Unterricht vor, der in gewissen Bereichen über die Grundkompetenzen hinausgeht. Daher existiert auch nach wie vor der Rahmenlehrplan parallel zum Grundkompetenzkatalog, welcher eine echte Teilmenge des Lehrplans darstellt. Die Praxis zeigt jedoch, dass es an gewissen Standorten schon mühsam ist, alle Inhalte der Grundkompetenzen bis zur 12. Schulstufe unterzubringen und der Lehrplan daher immer öfter eine obsolete Statistenrolle einnimmt. Zudem zielen auch die bereitgestellten Modellschularbeiten für die Sekundarstufe II ausschließlich auf diese, für die schriftliche Reifeprüfung relevante, Teilmenge des Lehrplans ab.

Es spricht vieles für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht; wir müssen jedoch Acht geben, dass eine gediegene Sachorientierung nicht verloren geht und wir nicht aufgrund einer reinen Outputorientierung eine verständnis- und sinnlose *Teaching to the test*-Kultur züchten, von der wir ja eigentlich wegkommen wollten. Das ist ein sehr hoher Anspruch, dem vielleicht durch eine Adaption der Teil II-Aufgaben, hin zu etwas mehr innermathematischen und operativen

Inhalten, nachgekommen werden kann. Bei unserem vorbildlichen Nachbarland Deutschland werden im Übrigen ähnliche Ängste laut, siehe dazu die *10. These* von Euler [5]: „Das Ende einer unpädagogischen Reform ist überfällig.“

Literatur

[1] Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, J., & Weiss, M. (Hrsg.) (2001). PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich., Opladen: Leske & Budrich.

[2] Biehler, R., & Leuders, T. (2014). Kompetenzmodellierungen für den Mathematikunterricht – eine Zwischenbilanz aus Sicht der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematikdidaktik 35*, 1–5.

[3] Brühwiler, Ch., Niggli, A., Heitzmann, A., Pauli, Ch., Reusser, K., Tettenborn, A., & Tremp, P. (2014). Editorial. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung 32*, 321–324.

[4] Die Presse. (2016). Industriellenvereinigung will Schulfächer komplett umkrempeln. *http://diepresse.com/home/bildung/schule/4898227/Industriellenvereinigung-will-Schulfaecher-komplett-umkrempeln*. Verifiziert am 07. Jänner 2016.

[5] Euler, P. (2012). 10 Thesen zur Debatte um kompetenzorientierte Bildungsstandards. GBW. *http://tinyurl.com/qyyv8fv*. Verifiziert am 07. Jänner 2016.

[6] Gallin, P., Ruf, U. (1998): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH.

[7] Gelhard, A. (2012). Kritik der Kompetenz. *diaphanes.*

[8] Gruschka, A. (2011). Verstehen lehren – ein Plädoyer für guten Unterricht. Reclam.

[9] Heymann, H.-W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz.

[10] Klein, H. P. (2010). Die neue Kompetenzorientierung: Exzellenz oder Nivellierung. *Zeitschrift für Didaktik der Biowissenschaften, 1,* 15–26.

[11] Klein, H. P., & Jahnke, Th. (2012). Die Folgen der Kompetenzorientierung im Fach Mathematik. *Journal für Didaktik der Biowissenschaften (F)* 2, 1–9.

[12] Klieme, E., & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen: Beschreibung eines neu eingerichteten Schwerpunktprogramms der DFG. *Zeitschrift für Pädagogik, 52,* 876–903.

[13] Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., et al. (2003). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: Eine Expertise. Bonn: BMBF.

[14] Klieme, E., Hartig, J., & Rauch, D. (2008). The concept of competence in educational contexts. In: J. Hartig, E. Klieme, & D. Leutner (Hrsg.), *Assessment of competencies in educational contexts*, 3–22. Göttingen: Hogrefe.

[15] Koeppen, K., Hartig, J., Klieme, E., & Leutner, D. (2008). Current Issues in Competence Modeling and Assessment. *Zeitschrift für Psychologie, 216(2)*, 61–73.

[16] Krautz, J. (2007). Die Vereinnahmung der Person. Zu Auswirkungen und Hintergründen des Kompetenz-Konzeptes. In: *engagement – Zeitschrift für Erziehung und Unterricht, Heft 3,* S. 211–227.

[17] Krautz, J. (2007). Ware Bildung. Schule und Universität unter dem Diktat der Ökonomie. Diederichs Verlag.
[18] Kühnel, W. (2015). Modellierungskompetenz und Problemlösekompetenz im Hamburger Zentralabitur zur Mathematik. *Mathematische Semesterberichte. 62/1* (2015), 69–82.
[19] Ladenthin (2010). Kompetenzorientierung als Indiz pädagogischer Orientierungslosigkeit. *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Pädagogik 86/3*, 346–358 (2010). Nachgedruckt in: *Profil (Mitgliederzeitung des Deutschen Philologenverbandes), Heft 09/2011*, 1–6. *http://tinyurl.com/q2c8wje*
[20] Lemmermeyer, F. (2015). Mathematik à la Carte – Elementargeometrie an Quadratwurzeln mit einigen geschichtlichen Bemerkungen. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum 2015.
[21] Leuders, T. (2011). Kompetenzorientierung – eine Chance für Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts? In: K. Eilerts, A. Hilligus, G. Kaiser, & P. Bender (Hrsg.), *Kompetenzorientierung in Schule und Lehrerbildung: Perspektiven der bildungspolitischen Diskussion, der Bildungsforschung und der Lehrerbildung. Festschrift für Hans-Dieter Rinkens*, 285–303. Münster: Lit-Verlag.
[22] Leuders, T., Barzel, B., & Hußmann, S. (2005). Outcome standards and core curricula: a new orientation for mathematics teachers in Germany. *ZDM. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 37(4)*, 275–286.
[23] Liessmann, K. P. (2014). Geisterstunde. Die Praxis der Unbildung. Wien: Paul Zsolnay Verlag.
[24] Müller, G. N., Steinbring, H., & Wittmann, E. Ch. (Hrsg.). (2004). Arithmetik als Prozeß . Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.
[25] Nida-Rümelin, J. (2013). Philosophie einer humanen Bildung. Edition Körber Stiftung.
[26] Nida-Rümelin, J. (2014). Der Akademisierungswahn: Zur Krise beruflicher und akademischer Bildung. Edition Körber Stiftung.
[27] Niss, M. (2003). Mathematical competences and the learning of mathematics: the Danish KOM project. In: A. Gagatsis & S. Papastavridis (Hrsg.), *3rd Mediterranean conference on mathematical education*, 115–123. Athen: Hellenic Mathematical Society.
[28] OECD (1999). Measuring student knowledge and skills – a new framework for assessment. Paris: OECD.
[29] Pellegrino, J., Chudowsky, N., & Glaser, R. (Hrsg.) (2001). Knowing what students know: the science and design of educational assessment. Washington: Academy Press.
[30] Pongratz, L. A. (2010). Sackgassen der Bildung – Pädagogik anders denken. Ferdinand Schöningh.
[31] Riedl, L., Rost, D., & Schörner, E. (2014). Brückenkurs für Studierende des Lehramts an Grund-, Haupt- oder Realschulen der Ludwig-Maximilians-Universität München. In: Bausch, I. et al. (eds.): *Mathematische Vor- und Brückenkurse.* Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
[32] Schall, B. (2015). Motivation und Volition im kompetenzorientierten Unterricht. In: *Das Gymnasium in Bayern, Heft 3*, 20–23.

[33] Schecker, H., & Parchmann, I. (2006). Modellierung naturwissenschaftlicher Kompetenz. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 12,* 45–66.

[34] Siller, H.-S., Bruder, R., Hascher, T., & Linnemann, T. (2014). Abschlussbericht zum Projekt „Kompetenzmodellierung für die schriftliche MATURA in Mathematik". bifie Wien (im Druck).

[35] Sylvester, J.J: Commemoration Day at Johns Hopkins University, *The Educational Times*, September 1, 1877, p. 131.

[36] Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: a conceptual clarification. In: D. Rychen & L. Salganik (Hrsg.), Defining and selecting key competencies, 45–66. Seattle: Hogrefe & Huber.

[37] Wiechmann, R. & Bandelt H.-J. (2015). Zehn unbequeme Fragen zur Kompetenzorientierung des Mathematikunterrichts. *Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung, 3*, 176–180.

[38] Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 61*, 37–46.

[39] Wollring, B., Peter-Kopp, A., Haberzettl, N., Becker, N., & Spindeler, B. (2011). Elementarmathematisches Basisinterview Größen und Messen, Raum und Form. Offenburg: Mildenberger.

Adresse des Autors:
Karl-Heinz Graß
Pädagogische Hochschule Steiermark,
Hasnerplatz 12, 8010 Graz.
email karl-heinz.grass@phst.at

Buchbesprechungen

K. Bringmann, Y. Bugeaud, T. Hilberdink, J. Sander: Four Faces of Number Theory. (EMS Series of Lectures in Mathematics.) EMS, Zürich, 2015, viii+190 S. ISBN 978-3-03719-142-2 P/b € 32,–.

Dieses Buch entstand aus einer *summer school* zum Thema Zahlentheorie, die im Jahr 2012 an der Universität Würzburg stattfand. Jeder der vier Vortragenden verfasste einen Artikel von etwa 40 Seiten Länge, in dem ein Aspekt der Zahlentheorie beleuchtet wird. Besonderes Augenmerk wurde darauf gelegt, den Zusammenhang von zahlentheoretischen Problemen und Methoden mit solchen aus anderen mathematischen Disziplinen (z.B. Kombinatorik, Funktionalanalysis, Graphentheorie) zu verdeutlichen. Im Einzelnen sind die Teile dieses Buches:

– Kathrin Bringmann: "Asymptotic formulas for moluar forms and related functions"
– Yann Bugeaud: "Expansions of algebraic numbers"
– Titus Hilberdink: "Multiplicative Toeplitz matrices and the Riemann zeta function"
– Jürgen Sander: "Arithmetic topics in algebraic graph theory"

Die vier Teile sind in sich selbständig, und es wurde Wert auf eine didaktisch ansprechende Präsentation gelegt. Insbesondere gibt es jeweils eine recht ausführliche Einleitung mit allen nötigen Definitionen sowie historischen Bemerkungen, bevor an aktuelle Forschungsergebnisse herangeführt wird. Es ist gut vorstellbar, dass sich dieses Buch in einem zahlentheoretischen Seminar auf Master- oder Doktoratsniveau einsetzen lässt.

C. Aistleitner (Graz)

D. L. Cohn: Measure Theory. (Birkhäuser Advanced Texts, Basler Lehrbücher) Springer New York, Heidelberg, Dordrecht, London 2013, xxi+457 S. ISBN 978-1-4614-6955-1 H/b € 51,16.

Das vorliegende Buch gibt eine konzise und umfangreiche Einführung in die Maßtheorie. Damit ist es sowohl als Grundlage für einführende Vorlesungen zu diesem Thema, als auch zum Selbststudium und als Referenzwerk geeignet. Jeder Abschnitt endet mit einigen Aufgaben zum behandelten Stoff.

Nach einer motivierenden Einleitung, die Riemanns und Darboux' Zugänge zum Integral wiederholt, wird in den ersten 6 Kapiteln die Maßtheorie etwa im Umfang einer dreistündigen Vorlesung entwickelt: Definition von Maßen und deren Konstruktion über äußere Maße, messbare Funktionen und Integral, L^p-Räume und maßtheoretische Konvergenzbegriffe, signierte und komplexe Maße, Maße auf Produkträumen und Differentiation.

Besonders interessant wird das Buch durch die weiteren 4 Kapitel und die Anhänge, die den Themenbereich vertiefen. Hier werden Maße auf lokalkompakten Räumen, der Rieszsche Darstellungssatz, das Daniell-Stone-Integral, Maße auf polnischen Räumen und die Messbarkeit von analytischen Mengen, das Haar-Maß sowie die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie mit dem Gesetz der großen Zahlen und das 0-1-Gesetz von Kolmogorov, dem zentralen Grenzverteilungssatz, Martingalen und der Brownschen Bewegung entwickelt. Die Anhänge liefern einerseits Notation und grundlegende Fakten der Mengenlehre, der Analysis und der metrischen und topologischen Räume, andererseits einige interessante Ausblicke wie etwa das Banach-Tarski-Paradoxon, das Bochner-Integral und die Integrale nach Henstock-Kurzweil und McShane.

Insgesamt liegt damit ein empfehlenswertes Buch zur Maßtheorie vor, das sowohl interessierten Studenten zur Lektüre, als auch Dozenten als Grundlage für ein- und weiterführende Lehrveranstaltungen empfohlen werden kann.

P. Grabner (Graz)

M. Aizenman, S. Warzel: Random Operators. Disorder Effects on Quantum Spectra and Dynamics. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 168) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2015, xiv+326 S. ISBN 978-1-4704-1913-4 H/b $ 79,–.

Random operators is a popular topic both in mathematics and physics. More precisely, the book looks at the tight-binding approximation where the quantum system is reduced to the discrete Laplacian on the lattice $\mathbb{Z}^d$ plus a random potential whose lattice values are assumed to be independent and identically distributed random variables in the simplest case. This model, originally proposed by Anderson over fifty years ago, as innocent as it might look, still poses many unsolved puzzles. The present book gives a mathematically rigorous introduction to this fascinating topic suitable for graduate students requiring only a solid background in functional analysis. After some introductory material (including the connection between spectral types and dynamic properties of the system) the authors explain both the physical relevance (e.g. by discussing the integer quantum Hall effect) as well as some mathematical strategies for establishing spectral and dynamical localization: applications and properties of the Green function, the fractional moments of Herglotz-Nevanlinna functions, the phase diagram for tree graphs, resonant delocalization, the spectral statistic conjecture, plus related results.

This nice book by two leading experts in the field can only be warmly recommended to whoever wants to get some insight into this active area of mathematical physics.

G. Teschl (Wien)

A. Mehlmann: Mathematische Moritaten. CreaSpace, Independent Publishing Platform, 2016, 188 S. ISBN 978-1-519-70843-4 P/b € 10,70.

Alexander Mehlmann ist nicht der erste Mathematiker, der sich im Genre der humorvollen mathematischen Poesie versucht, aber sicher einer der vielseitigsten. Im vorliegenden Band finden sich nicht nur launige Gedichte zu mathematischen Themen, sondern auch politisch angehauchte Stücke, Parabeln und Anagramme. Dem Werdegang des Autors entsprechend, spielt er darin nicht nur mit der deutschen Sprache, sondern ebenso frei mit rumänischen und englischen Texten.

Dieses Buch ist jeder mathematisch interessierten Leserin und jedem ebensolchen Leser zu empfehlen, die oder der sich auf der Suche nach einer kurzen poetischen Ablenkung befindet. Das eine oder andere Zitat daraus wird auch zur heiteren Belebung der Gespräche am Universitätsinstitut, an der Schule oder im Büro beitragen können!

R. Geretschläger (Graz)

S. J. Miller (ed.): Benford's Law. Theory and Applications. Princeton University Press Princeton and Oxford, 2015, xxvi+438 S. ISBN 978-0-691-14761-1 H/b \$ 75,–.

In many datasets the frequency of the leading significant digit is not uniformly distributed but is proportional to the logarithm of the digit. This phenomenon is colloquially known as Benford's law. Since its discovery both the theoretical research about this phenomenon as well as its statistical applications in many fields only continue to grow. The present book collects a diverse set of articles giving the reader a comprehensive overview of the history, theoretical development and applications of Benford's law.

The first six chapters of the book present the history of the law and develop the mathematical theory. Besides a rigorous extension to the distribution of several leading digits, the key point is the characterisation of a random variable satisfying Benford's law by a uniform distribution property modulo 1 of its logarithm. This leads to a discussion of how far and close several classic laws such as the Exponential, Log-normal, Cauchy of Weibull distributions are to satisfying Benford's law. Further development focuses on Fourier coefficients and Levy processes.

The remaining 13 chapters highlight uses of Benford's law across different subject areas and disciplines. The common thread is data validation and fraud detection. The applications include vote counts, financial statements and accounting, image analysis and clinical trials. The final chapter contains exercises for proof-oriented and more applied courses covering all the topics in the book. This renders the book particularly useful as a material source for a course in applied statistics or data science.

C. Hofer-Temmel (Den Helder)

G. S. Nelson: A User-Friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration. (Student Mathematical Library, Vol. 78) American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2015, ix+221 S. ISBN 978-1-4704-2199-1 P/b $ 49,–.

Das Buch enthält eine Einführung in die Maßtheorie und Lebesgue-Integration, gerichtet an Studierende zu Beginn ihres Mathematikstudiums, die bereits mit Grenzwerten, Kompaktheit und dem Riemann-Integral vertraut sind. Nach einem kurzen Einführungskapitel zum Riemann-Integral folgen in vier Kapiteln die Hauptthemen des Buchs. Das erste Kapitel behandelt das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, inklusive Konstruktion einer nicht-messbaren Menge mittels Auswahlaxiom. Das zweite Kapitel ist eine Einführung in die Lebesgue-Integration von Funktionen auf kompakten Intervallen in $\mathbb{R}$, inklusive der zentralen Sätze über dominierte und monotone Konvergenz sowie des Lemmas von Fatou. Das dritte Kapitel behandelt L^p-Räume und bespricht kurz die L^2-Konvergenz von Fourierreihen. Im vierten Kapitel wird schließlich eine etwas allgemeine Maß- und Integrationstheorie betrieben. Am Ende des Buchs sind noch einige Projektthemen für Studierende beschrieben.

Besonders in den ersten beiden Kapiteln ist ersichtlich, dass das Buch an Studienanfänger gerichtet ist. Sämtliche Begriffe werden mit detaillierten Erklärungen und Beispielen erläutert, und die Beweise zum großen Teil sehr sauber und vollständig geführt. Das Buch erfüllt sein Ziel sehr gut, eine erste und verständliche Einführung in die Maßtheorie zu bieten. Viele wichtige Themen werden dabei leider nur angerissen oder gar nicht behandelt; am auffälligsten ist hier das Fehlen der Sätze von Fubini (der nur als mögliches Projektthema behandelt wird) und Radon-Nikodym.

C. Frei (München)

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 232 (2016), 53–54

Mitgliederdatenbank und Abwicklung von Mitgliedsbeiträgen

Gerald Teschl
Universität Wien

Mitgliederdatenbank

Ab 1. September wird allen Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft auf unserer Homepage *http://www.oemg.ac.at/* eine neue online-Mitgliederdatenbank zur Verfügung stehen. Ziel ist es, die Mitgliederverwaltung sowohl für uns als auch für Sie einfacher zu gestalten. Die zentralen neuen Funktionen werden wie folgt sein:

1. Möglichkeit der Kontrolle bzw. Änderung der eigenen Daten, vor allem der Zustelladresse.
2. Einsicht in den Status von Rückständen und Guthaben betreffend den Mitgliedsbeitrag für die ÖMG und allfällige Abonnements der Jahresberichte bzw. der Semesterberichte der Deutschen Mathematikervereinigung.

Um diese neue Funktionalität nutzen zu können, muss uns eine gültige email-Adresse bekannt sein. Sie können uns diese jederzeit bekanntgeben (email *oemg @oemg.ac.at*).

Automatische Auswertung von Zahlungen

Außerdem werden in Zukunft Zahlungen an die ÖMG so weit wie möglich automatisch ausgewertet. Dazu ist es wichtig, dass Sie in Zukunft folgende Informationen beim Ausfüllen des Erlagscheins bzw. beim Online-Banking beachten und das Feld „Verwendungszweck“ nach dem folgenden Muster ausfüllen:

```
Vorname Nachname: MB,DMV,SEM,SP
```

ISSN 0020-7926

Stimmt der Name mit dem Kontoinhaber überein, so kann er entfallen; ansonsten ist der vollständige Name (ohne Titel) wichtig, damit wir die Zahlung zuordnen können. Der Schlüssel nach dem Namen gibt an, wie die Zahlung verwendet werden soll:

`MB:` Mitgliedsbeitrag für die ÖMG
`DMV:` Bezug der Jahresberichte der DMV
`SEM:` Bezug der Semesterberichte der DMV
`SP:` ein etwaiger Rest, der als Spende betrachtet werden soll.

Fehlen diese Angaben, so gehen wir von **`MB`** (Mitgliedsbeitrag) aus. In jedem Fall wird ein Kontoeingang zunächst verwendet, um einen etwaigen Rückstand auszugleichen. Wurde zu viel überwiesen, so wird der Rest als Guthaben verbucht, und im nächsten Jahr wird der Mitgliedsbeitrag automatisch vom Guthaben abgezogen. Es ist also möglich, den Mitgliedsbeitrag für mehre Jahre im Voraus zu bezahlen. Ein Guthaben kann auf Anfrage natürlich auch rücküberwiesen werden.

Mahnungen

Derzeit wird die Zusendung der Hefte der IMN erst sehr spät nach dem letzten Bezahlen eines Mitgliedsbeitrags eingestellt. Ein Mitgrund für diese Vorgangsweise ist, dass die Mitglieder die Aufforderung zur Zahlung des Mitgliedsbeitrags erst am Ende des Jahres erhalten haben. Wir haben daher vor, die Mitglieder bereits mit dem Augustheft der IMN um das Bezahlen des Beitrags für das Folgejahr zu bitten und sie im Dezemberheft noch einmal daran zu erinnern. Haben Sie Ihre email-Adresse bekannt gegeben, werden Sie automatisch daran erinnert.

Gerald Teschl
Fakultät für Mathematik der Universität Wien
Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien.
email gerald.teschl@univie.ac.at

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Preise der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Der Förderpreis des Jahres 2016 geht an Dr. Aleksey Kostenko (Universität Wien). Eine ausführliche Würdigung wird im Rahmen des Berichts über die Generalversammlung der ÖMG im nächsten Heft dieser Zeitschrift erscheinen.

Die Studienpreise des Jahres 2016 gehen an Dominik Gruber für seine Dissertation an der Universität Wien unter der Betreuung von Goulnara Arzhantseva, und an Benjamin Hackl für seine Masterarbeit an der Univ. Klagenfurt unter der Betreuung von Clemens Heuberger. Die Österreichische Mathematische Gesellschaft gratuliert herzlich.

START-Preise 2016 für Mathematiker

Von den sechs START-Preisen, die der Österreichische Forschungsförderungsfonds heuer im Auftrag des Wissenschaftsministeriums vergeben hat, gingen zwei an Mathematiker: *Michael Eichmair* ist Professor für Globale Analysis und Differentialgeometrie an der Fakultät für Mathematik der Universität Wien. *Harald Grobner* ist an der Universität Wien im Rahmen eines eigenen FWF-Projekts (Special L-values and p-adic L-functions) tätig. Wir gratulieren den Preisträgern herzlich zu diesem großen Erfolg.

Neue Mitglieder

Leonardo Alese, M.Sc. – TU Graz. geb. 1990. Nach dem Abschluss des Bachelor- und Masterstudiums 2012 bzw. 2015 an der Università degli Studi di Roma „La Sapienza“ Doktorand an der TU Graz. Webseite *http://www.geometrie.tugraz.at/alese*, email *alese@tugraz.at*.

Janko Böhm, Dr. – TU Kaiserslautern. geb. 1973. Doktorat 2008 an der Universität des Saarlands. Seit 2013 Tätigkeit an der TU Kaiserslautern. Webseite *http://www.mathematik.uni-kl.de/∼boehm*, email *boehm@mathematik.uni-kl.de*.

Roswitha Rissner, Dipl.-Ing. Dr. – TU Graz. geb. 1985. Nach dem Studium der Technischen Mathematik, 2012–2015 Doktoratsstudium an der TU Graz. Derzeit Postdoc an der TU Graz. Webseite *http://www.math.tugraz.at/∼rissner*, email *rissner@math.tugraz.at*.