Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

März 2020 — Nr. 98

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Die Sylvesterschen Reihen

Im Jahr 1880 hat James J. Sylvester einen Algorithmus vorgeschlagen, der es gestattet, eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b}$, $0 < a < b$, als endliche Summe von Stammbrüchen, deren Nenner streng monoton wachsen sollen, zu schreiben:

$$x = \frac{1}{k_1+1} + \frac{1}{k_2+1} + \ldots + \frac{1}{k_n+1}, \quad n = n(x) \geq 1.$$

Ist x eine reelle Zahl mit $0 < x < 1$, so gibt es genau eine ganze Zahl $k_1 \geq 1$, so dass

$$\frac{1}{k_1+1} \leq x < \frac{1}{k_1}$$

gilt. Dann ist

$$x = \frac{1}{k_1+1} + x_1.$$

Aus der Gleichung $\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_1+1} = \frac{1}{k_1(k_1+1)}$ folgt $0 \leq x_1 < \frac{1}{k_1(k_1+1)}$.

Ist $x_1 = 0$, so ist $x = \frac{1}{k_1+1}$. Ist $0 < x_1$, so wiederholt man das Verfahren und erhält

$$x_1 = \frac{1}{k_2+1} + x_2$$

und

$$x = \frac{1}{k_1+1} + \frac{1}{k_2+1} + x_2.$$

Allerdings gilt dabei $k_2 \geq k_1(k_1+1)$ und daher $k_2 > k_1$.

Ist $x_2 = 0$, so ist $x = \frac{1}{k_1+1} + \frac{1}{k_2+1}$. Ist $x_2 > 0$, so mache man weiter und landet bei

$$x = \frac{1}{k_1+1} + \frac{1}{k_2+1} + \frac{1}{k_3+1} + x_3.$$

Dabei gilt nun $k_3 \geq k_2(k_2+1)$ und daher $k_3 > k_2$.

Um zu zeigen, dass dieser Algorithmus für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b}$ mit $0 < a < b$ tatsächlich abbricht, formen wir den Algorithmus etwas um. Wir setzen voraus, dass der Bruch schon gekürzt ist.

Ist $a = 1$, so setzen wir $k_1 + 1 = b$. Ist $a \geq 2$, so verwenden wir den Euklidischen Divisionsalgorithmus und schreiben

$$b = k_1 a + r_1 = (k_1+1)a + r_1 - a, \quad 0 < r_1 < a.$$

Dann ist
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{k_1+1} + \frac{a-r_1}{b(k_1+1)}.$$
Da $\frac{a-r_1}{b(k_1+1)} < \frac{1}{k_1(k_1+1)}$, ist $\frac{a}{b} < \frac{1}{k_1}$. Dies bedeutet, dass wir die gleiche Darstellung
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{k_1+1} + x_1$$
wie oben erhalten.

Ist $a - r_1 = 1$, so setzen wir $k_2 + 1 = b(k_1+1)$. Ist $a - r_1 \geq 2$, so wiederholen wir das Verfahren und schreiben
$$b(k_1+1) = k_2(a-r_1) + r_2 = (k_2+1)(a-r_1) + r_1 + r_2 - a.$$
Dies ergibt
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{k_1+1} + \frac{1}{k_2+1} + \frac{a-r_1-r_2}{b(k_1+1)(k_2+1)}.$$
Jedenfalls gibt es ein $n \geq 1$, so dass
$$a - r_1 - \cdots - r_{n-1} = 1$$
gilt, und mit $k_n + 1 = b(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_{n-1}+1)$ erhalten wir
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{k_1+1} + \frac{1}{k_2+1} + \cdots + \frac{1}{k_n+1}.$$
Damit ist gezeigt, dass die Sylvestersche Reihe einer rationalen Zahl eine endliche Summe von Stammbrüchen ist.

Wir geben zwei Beispiele!

(1) Sei $x = \frac{3}{13}$. Dann ist $13 = 4 \cdot 3 + 1 = 5 \cdot 3 - 2$ und daher
$$\frac{3}{13} = \frac{1}{5} + \frac{2}{65}.$$
Weiters ist sodann $65 = 32 \cdot 2 + 1 = 33 \cdot 2 - 1$ und daher
$$\frac{3}{13} = \frac{1}{5} + \frac{1}{65} + \frac{1}{2145}.$$

(2) Sei $x = \frac{15}{44}$. Dann ist $44 = 2 \cdot 15 + 14 = 3 \cdot 15 - 1$ und somit
$$\frac{15}{44} = \frac{1}{3} + \frac{1}{132}.$$

Aus der Herleitung der Formel
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{k_1+1} + \frac{1}{k_2+1} + \cdots + \frac{1}{k_n+1}$$
ist ersichtlich, dass $n \leq a$ sein muss. Michael Mays hat sich mit der Frage beschäftigt, in welchen Fällen der schlechteste Fall $n = a$ zu erwarten ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$ gilt. Dies führt auf die Gleichungen
$$k_1 = \frac{b-1}{a}, \qquad k_2 = \frac{b(k_1+1)-1}{a-1}, \qquad k_3 = \frac{b(k_1+1)(k_2+1)-1}{a-2}, \qquad \ldots$$
$$\ldots, \quad k_n = b(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_{n-1}+1) - 1.$$

Diese Gleichungen können in einfachen Fällen rekursiv gelöst werden.

Der Fall $a = n = 2$. Hier ist

$$k_1 = \frac{b-1}{2}, \quad k_2 = b(k_1+1) - 1$$

Es muss b eine ungerade Zahl sein! $b = 3$ ergibt $k_1 = 1$ und $k_2 = 5$ und somit

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

$b = 7$ etwa führt auf $k_1 = 3$ und $k_2 = 27$ und somit zu

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}.$$

Der Fall $a = n = 3$. Hier muss gelten

$$k_1 = \frac{b-1}{3}, \quad k_2 = \frac{b(k_1+1)-1}{2}, \quad k_3 = b(k_1+1)(k_2+1) - 1.$$

Nun $b = 4$ passt leider nicht, denn dann ist $k_1 = 1$, aber $k_2 = \frac{7}{2}$ ist keine ganze Zahl! Tatsächlich ist die Sylvestersche Darstellung von $\frac{3}{4}$ durch

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

gegeben. Diese Darstellung hat aber die Länge 2.

Der nächste Versuch, $b = 7$, gelingt. Dann ist $k_1 = 2$, $k_2 = 10$ und $k_3 = 230$ und daher

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

Auch $b = 10$ passt wieder nicht, wohl aber $b = 13$.

Der Fall $a = n = 4$. Hier haben wir

$$\begin{aligned} &k_1 = \frac{b-1}{4}, \quad k_2 = \frac{b(k_1+1)-1}{3}, \quad k_3 = \frac{b(k_1+1)(k_2+1)-1}{2}, \\ &k_4 = b(k_1+1)(k_2+1)(k_3+1) - 1, \end{aligned}$$

und $b = 17$ ist die kleinste Lösung. Man findet $k_1 = 4$, $k_2 = 28$, $k_3 = 1232$ und $k_4 = 3039344$ und erhält die etwas verblüffende Darstellung

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3039345}.$$

Übrigens: Informationen zu Sylvesterschen und anderen Reihenentwicklungen für reelle Zahlen finden sich in [2, Chapter 3].

LITERATUR

[1] Michael E. Mays. A worst case of the Fibonacci-Sylvester expansion. *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 1 (1987), 141–148

[2] Fritz Schweiger. *Continued fractions and their generalizations: A short history of f-expansions.* Boston, Docent Press 2016

Fritz Schweiger